

Arvuteooria

Näidislahendus

Praktikum 3

8 Birgit Veldi

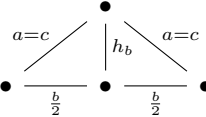
Ülesanne. Tõestada, et kui kolmnurga külgede ja kõigile külgedele tõmmatud kõrguste pikkused on täisarvud, siis need täisarvud on kõik kordarvud.

Lahendus. Olgu a, b, c kolmnurga külgede pikkused ja h_a, h_b, h_c vastavatele külgedele tõmmatud kõrgused. Olgu need kõik täisarvud.

Peamiselt kasutatavad seosed: kolmnurga võrratus suvalise kolme külje jaoks $a + b > c$ (eeldusel, et degenereeritud kolmnurgad pole lubatud), pindala arvutamine kolme moodi $2S = ah_a = bh_b = ch_c$.

Esmalt näitame, et a, b, c ei saa olla algarvud, kui kõik küljed ja kõrgused on täisarvud. (juhud 1, 2, 3)

1. Juht 1: võrdkülgne kolmnurk. Siis $h_a = h_b = h_c = \frac{a\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Z}$, kui $a \in \mathbb{Z}$ ja kui $h \in \mathbb{Z}$, siis $a \notin \mathbb{Z}$, seega selle juhu saame välistada.

2. Juht 2: võrdhaarne kolmnurk. 

Olgu $a = c$, siis küljele b tõmmatud kõrgus poolitab selle külje. Seal tekkivatest täisnurksetest kolmnurkadest $a^2 - h_b^2 = \frac{b^2}{4}$, kust $4 \mid b^2 \Rightarrow 2 \mid b$ (sest vasakul pool on täisarv). Siit võimalused selleks, et külj oleks algarv.

- (a) $b = 2$, seega $\frac{b}{2} = 1$, kust $a^2 - h_b^2 = (a - h_b)(a + h_b) = 1$, millele pole täisarvudes lahendeid (sest $a + h_b > 1 + 1$, $a - h_b \in \mathbb{Z}^+$). Seega ei sobi.
- (b) $a = c = p \in \mathbb{P}$. Kui $p = 2$, siis juhul $b = 2$, taandub esimesele juhule (võrdkülgne). Kui $b > 2$, siis $b \geq 4 = a + c$, mis on vastuolu kolmnurga võrratusega ($a + c > b$).
Kui $p > 2$ Siis $p \mid bh_b$, kust juht $p \mid b$, annab vastuolu, sest siis $p \mid \frac{b}{2}$, kust $a + c = 2p \leq 2\frac{b}{2} = b \Rightarrow$ vastuolu kolmnurga võrratusega. Teine variant Eukleidese lemmast $p \mid h_b$, annab samuti vastuolu, sest siis $p^2 = a^2 \leq h_b^2$ (kuid $a > h_b$ täisnurksest kolmnurgast).

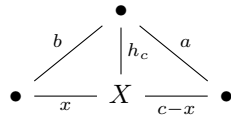
Seega välistasime mõlemad.

3. Juht 3: Olgu $a = p \in \mathbb{P}$, siis kolmnurga võrratusest $a = p > |b - c|$.

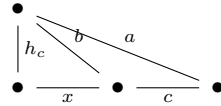
Kuna $2S = ah_a = bh_b = ch_c$ ja $p \mid 2S$, siis Eukleidese lemmast tuleb kolm alamjuhtu

- (a) $p \mid b \wedge p \mid c$. Siit $p \mid b - c$, kust kuna $|b - c| < p$, saame $b = c$, seega see taandub juhule 2 (võrdhaarne kolmnurk), saame selle välistada.
- (b) $p \mid b \wedge p \mid h_c$ (teistpidi analoogiline). Vaatame kõrguse h_c poolt tekitatud täisnurkseid kolmnurki (kui kõrguse aluspunkt asub küljel), jaotagu see külje c lõikudeks pikkustega $c - x$ ja x ,

$b^2 - h_c^2 = x^2$, kust $p \mid b^2 - h_c^2 \Rightarrow p \mid x^2 \Rightarrow p \mid x$. Teiselt poolt



$a^2 - h_c^2 = (c-x)^2$, kuna $p \mid a^2 - h_c^2 + 2cx - x^2$, siis $p \mid c^2 \Rightarrow p \mid c$, mis taandub eelmisele juhule.

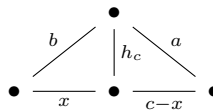


Kui kõrguse aluspunkt ei asu küljel, siis saame lõigud pikkusega x ja $x+c$

ja põhimõtteliselt samamoodi: $b^2 - h_c^2 = x^2$, kust $p \mid b^2 - h_c^2 \Rightarrow p \mid x^2 \Rightarrow p \mid x$. Teiselt poolt $a^2 - h_c^2 = (c+x)^2$, kuna $p \mid a^2 - h_c^2 - 2cx - x^2$, siis $p \mid c^2 \Rightarrow p \mid c$, mis taandub eelmisele juhule. Kui kõrgus ühtib küljega ehk meil on täisnurkne kolmnurk, siis $b = h_c$, kuid see annab vastuolu, sest $p = a > b$ on hüpotenuus ja seega $p \nmid b$.

- (c) $p \mid h_b \wedge p \mid h_c$, siit saame, et $a \leq h_b, h_c$, millega koos võrdus $ah_a = bh_b = ch_c$ annab, et $h_a \geq b, c$, kuid see pole võimalik, sest kas $b^2 - h_a^2 > 0$ või $c^2 - h_a^2 > 0$ (tekivad täisnurksed kolmnurgad) (h_a ei saa ühtida nii küljega b kui ka c).

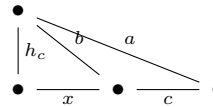
Seega on näidatud, et külj ei saa olla algarv, kui kõik küljed ja kõrgused on täisarvud. Nüüd näitame veel, et kõrgus ei saa ka olla algarv.

4. Juht 4:  Nüüd olgu $h_c = p$. Vaatame jälle täisnurkset kolmnurka (kus h_c ja c

lõikepunkt on küljel c): $p^2 = h_c^2 = b^2 - x^2 = (b-x)(b+x)$, siis $b-x = 1$ ja $b+x = p^2$. Teisest täisnurksest kolmnurgast $p^2 = h_c^2 = a^2 - (c-x)^2 = (a-c+x)(a+c-x)$, kust $a-c+x = 1$ ja $a+c-x = p^2$. Liites mõlema paari võrdused kokku, saame $2b = 1 + p^2$ ja $2a = 1 + p^2$. Mis annab võrdhaarse kolmnurga, kus kõrgus on algarv. Selle välistame allpool.

Kui lõikepunkt pole küljel c , siis saame vastavalt $p^2 = h_c^2 = b^2 - x^2 = (b-x)(b+x)$, kust samamoodi $2b = 1 + p^2$ ja teiselt poolt $p^2 = h_c^2 = a^2 - (c+x)^2 = (a-c-x)(a+c+x)$, kust $a+c+x = p^2$ ja

$a-c-x = 1$, kust $2a = 1 + p^2$, sellegi välistame nüüd.



Siit saame arvutada külje c pikkuse (märkame ka, et teine juht pole tegelikult võimalik). $\frac{c^2}{4} = \frac{(p^2+1)^2}{4} - p^2$, kust $c^2 = p^4 - 2p^2 + 1$, kust $c = p^2 - 1$. Arvutades nüüd kõrguse $h_a = \frac{ch_c}{a} = \frac{2(p^2-1)p}{p^2+1} \notin \mathbb{Z}$. (Sest $p \nmid p^2 + 1$ ja [Lauri Tart: Eukleidese lemmast oleks p algarvulisusest tuleneva $(p, p^2 + 1) = 1$ tõttu ainus võimalus saada $\frac{2(p^2-1)p}{p^2+1} \in \mathbb{Z}$ see, et $\frac{2(p^2-1)}{p^2+1} \in \mathbb{Z}$, aga] $\frac{2(p^2-1)}{p^2+1} \notin \mathbb{Z}$, sest $p^2 + 1 < 2(p^2 - 1) < (p^2 + 1) \cdot 2$.) Seega ka see juht ei sobi.)

Juht, kus külj ühtib kõrgusega, on juba vaadatud.

Ja sellega on kõik võimalused läbi vaadatud ja näidatud, et kui küljed ja kõrgused on täisarvud, ei saa ükski neist olla algarv.