

## Arvuteooria 4. praktikumi ülesanded:

### Kongruentsi mõiste ja lihtsamad omadused.

1. Tõestada, et igal aastal on vähemalt üks 13. reede.
2. Leida jääk, mis tekib arvu  $(2024^{64} + 2029^{12})^{17}$  jagamisel arvuga 19. (Olla valmis arvutusi detailselt demonstreerima!)
3. Olgu  $a, b \in \mathbb{Z}$  ja  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tõestada, et kui  $a \equiv b \pmod{mn}$ , siis  $a^n \equiv b^n \pmod{mn^2}$ . Kas astendajat 2 saab veel suurendada? Põhjendada.
4. Arvud 2023 kuni 2324 kirjutatakse järjest üles. Kas niiviisi saadav täisarv  
202320242025...232223232324  
jagub arvuga 13?
5. Tõestada, et kui täisarv  $a$  on korraga täisruut ja täiskuup, siis  $a \equiv 0, 1, 64, 77, 92, 105, 168, 169, 196, 260, 273, 337 \pmod{364}$ .
6. Lahendada diofantiline võrrand  $20x^3 + 24y^3 = 2016$ .
7. Ärimees M toetas tuntud parlamendierakonda 22 euro ja 77 sendiga iga liikme kohta. Partei laekur aga sattus õnnetul kombel otse peale tšeki kättesaamist vihma kätte ja annetusest jäi järele vaid paberitükk, millel ilutsesid sümbolid 8●●8●●,82€. Leida partei vähim ja suurim võimalik liikmete arv.
8. Olgu  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{P}$  ja  $a_n$  vähim mittenegatiivne jääk, mis tekib arvu  $\binom{n}{m}$  jagamisel arvuga  $p$ . Tõestada, et jada  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  on perioodiline ja leida selle vähim periood.
- 9\*. Leida, milliste parameetrite  $j, a, b$  korral on kongruentside süsteem

$$\begin{cases} F_j & \equiv a \pmod{p} \\ F_{j+1} & \equiv b \pmod{p} \end{cases}$$

lahenduv vaid lõpliku arvu **alg**arvuliste moodulite  $p$  jaoks.

( $F_j$  on  $j$ . Fibonacci arv.)

- 10\*\*. Leida ilma arvutustehnikat kasutamata kaks suuruselt vähimat kordarvu  $n$ , mis rahuldavad järgmisi tingimusi:  $2^n \equiv 2 \pmod{n}$  ja  $3^n \equiv 3 \pmod{n}$ .