

Arvuteooria 6. praktikumi ülesanded:

Arvuteoreetilised funktsioonid.

1. Leida liigselt arvutamata järgmine summa:

$$S = \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) + \varphi(11) + \varphi(12) + \varphi(22) + \varphi(33) + \varphi(44) + \varphi(66) + \varphi(128)?$$

2. Kui palju on selliseid naturaalarve, mis ei ole suuremad kui 2024 ja mille suurim ühistegur arvuga 1771 ei ületa arvu 99? Põhjendada.

3. Leida liigselt arvutamata arvu

$$2024^{2^{2023}}$$

kolm viimast kümnendnumbrit.

4. Tõestada, et kui $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a, 18031) = (b, 18031)$, siis $a^{72} \equiv b^{72} \pmod{18031}$. Mis juhtub, kui eeldus $(a, 18031) = (b, 18031)$ ei kehti?

5. Leida kõik naturaalarvud n , mille korral $\varphi(n) = 16$.

6. Tõestada, et mistahes $a, b \in \mathbb{N}$ korral

$$\varphi(ab) = \frac{\varphi(a)\varphi(b)(a, b)}{\varphi((a, b))}.$$

7. Tõestada, et mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral

$$n = \varphi(n) \sum_{d|n} \frac{\mu(d)^2}{\varphi(d)},$$

kus summa võetakse üle kõigi n positiivsete jagajate.

8. Leida kõik naturaalarvud k , mille korral $\varphi(\sigma(2^k)) = 2^k$.

- 9*. Olgu $n \in \mathbb{N}$ fikseeritud. Tõestada, et jääkide jada

$$2, 2^2, 2^{(2^2)}, 2^{(2^{(2^2)})}, \dots \pmod{n}$$

on perioodiline ja leida selle (minimaalse) perioodi pikkus.

- 10**. Leida kõik naturaalarvud n , mille korral $\varphi(n) \mid n^2 + 3$.