

Arvuteooria 7. praktikumi ülesanded:
Lineaarkongruentsid. Hiina jäägiteoreem.

1. Lahendada lineaarkongruentside süsteem

$$\begin{cases} 5x \equiv 19 & (\text{mod } 28) \\ 7x \equiv 15 & (\text{mod } 32) \\ 11x \equiv 13 & (\text{mod } 34). \end{cases}$$

2. Lahendada lineaarkongruentside süsteem

$$\begin{cases} 5x \equiv 19 & (\text{mod } 28) \\ 7x \equiv 17 & (\text{mod } 32) \\ 11x \equiv 13 & (\text{mod } 34). \end{cases}$$

3. Leida $2024^{(2023^{2022})} \pmod{6118}$.

4. Madli otsustas matemaatikaklassi kaunistamiseks joonistada mõned plakatid. Ta mõtles, et lahe oleks kujutada seintel Sierpiński kolmnurki, võttis ette ühe koolipäeva ja planeeris vahetundides (mis on kõik sama pikad) aeglaselt ja ettevaatlikult (sama kiirusega) joonistada eri A4 lehtedele sama suuri aga eri keerukusastmetega Sierpiński kolmnurki.

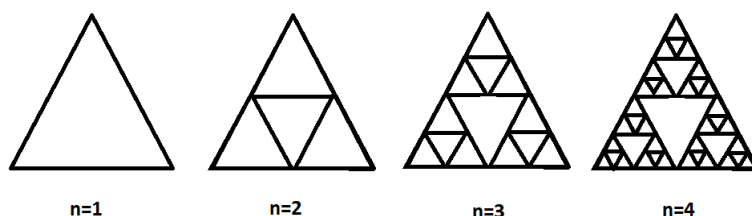
Esimesel vahetunnil proovis ta joonistada 3. järku Sierpiński kolmnurki. Madli keskendumisvõime oli märkimisväärne ning iga kolmnurga valmimisel võttis ta uue lehe ja alustas järgmisega. Tunnikella helisemise ajaks oli ta just jõudnud pealmsel lehel asuvale fraktalile joonistada kõige suurema, välimise kolmnurga, kuid ei midagi muud.

Teisel vahetunnil otsustas Madli, et alustab uuel lehel ja proovib joonistada hoopiski 5. järku Sierpiński kolmnurki. Uue tunni algushetkel jäi pealmsel lehel asuva fraktali lõpetamisest puudu vaid kahe kõige pisema kolmnurga joonistamine.

Arvestades, et Madli oli ülimalt ettevaatlik ja aeglane joonistaja, see tähendab, et valdav enamus tema vahetundidest kulus hariliku liigutamisele mööda puhast paberit, leida, mitu 4. järku Sierpiński kolmnurka jõudis Madli teha kolmandal vahetunnil.

(Sierpiński kolmnurk on fraktaalkujund, mis on defineeritud induktiivselt:

1. järku Sierpiński kolmnurk on võrdkülgne kolmnurk. n . järku Sierpiński kolmnurga konstrueerimisel võetakse kolm $(n - 1)$. järku Sierpiński kolmnurka, ühendatakse need otsest nii, et moodustuks uus kolmnurk ning pigistakse see kokku kaks korda väiksemaks selliselt, et väliskülgede mõõtmed jääksid samaks. Alltoodud joonisel on mõned näited.)



(Richard Friedrichs, 2023)

Jätkub pöördel.

5. Tõestada, et iga naturaalarvu n korral leidub n järjestikust kordarvu, millest igaühel on vähemalt n erinevat algtegurit. Tuua näide viiest sellisest arvust.

6. Leida vähim naturaalarv n , mis on samaaegselt 2023 korda mingi arvu 2023. aste, 2024 korda 2024. aste ja 2025 korda 2025. aste.

7. Tõestada, et iga naturaalarvu k korral leidub k erinevat paarikaupa ühistegurita naturaalarvu $n_1, \dots, n_k$, mille korrutis $n_1 \cdots n_k$ erineb ainult ühe võrra kahe järjestikuse arvu korrutisest.

8. Kas on võimalik leida 2024 erinevat naturaalarvu $n_1, \dots, n_{2024}$ selliselt, et iga n_i on mingi naturaalarvu aste $n_i = m_i^{k_i}$, $k_i \geq 2$, ja arvude n_i kõik võimalikud summad, milles iga arv n_i esineb ülimalt üks kord, on samuti kõik mingite naturaalarvude vähemalt teised astmed? Astme alused ega astendajad ei pea tingimata samad olema.

9. Koostada tekstülesanne, mida saab lahendada Hiina jäägiteoreemi abil.
(Ülesande tekst ja selle **lahendus** tuleb esitada kirjalikult. Lahenduseta või põhimõtteliselt vale lahendusega ülesanne annab 0 punkti. Kõige originaalsema ülesande ja kõige raskema ülesande koostajad saavad kumbki 3-5 punkti sõltuvalt ülesande tasemest. Kloonitud ülesannete esitajad saavad 0 punkti.)

10*. Nimetame täisarvuliste koordinaatidega eukleidilise tasandi punkti (a, b) , $a, b \in \mathbb{Z}$, *ristpunktiks*, kui $(a, b) = 1$. Kas leidub täisarvuliste otspunktidega ruut küljepikkusega 2024, mille ükski punkt ei ole ristpunkt? Miks?

11**. Leida $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, kui iga naturaalarvu $n > 2$ korral on a_n vähim võimalik arv, mille korral kehtivad järgmised tingimused:

- Kui jagada a_n arvuga 2, tekib jääk 1.
- Kui jagada a_n arvuga 3, tekib jääk 2.
- ...
- Kui jagada a_n arvuga n , tekib jääk $n - 1$.