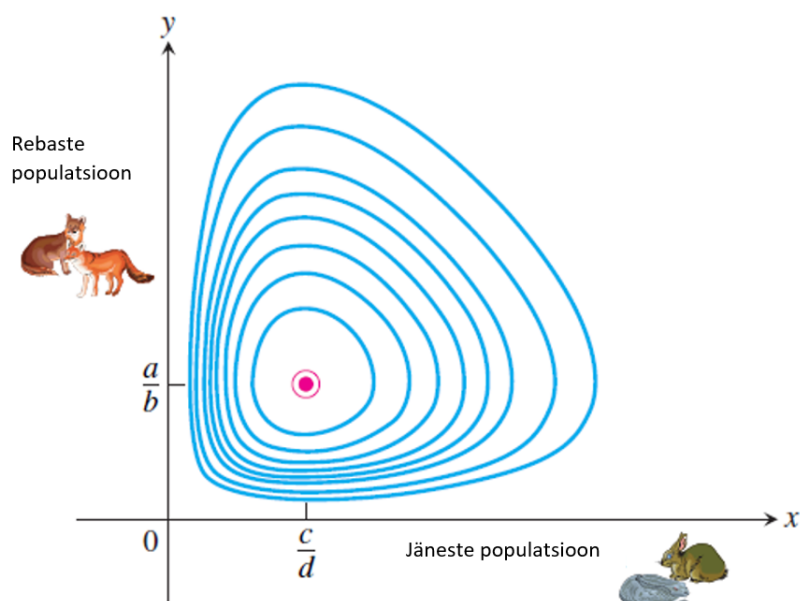


LTMS.00.003

Kõrgem matemaatika



2023/2024 õa

LOENGUKONSPEKT

Marek Kolk, 2016

Täiendanud ja muutnud: Annely Mürk, 2018-2020

Põhjalikult ümbertöötanud: Peeter Oja, Ella Puman, 2020-2023

Sisukord

0	Tähistused. Reaalarvud	1
0.1	Tähistused	2
0.2	Kreeka tähestik	3
0.3	Reaalarvud	4
0.4	Summa sümbol	7
1	Funktsioonid	9
1.1	Funktsiooni mõiste	10
1.2	Üksühesus ja pealekujutus	13
1.3	Liitfunktsioon	14
1.4	Pöördfunktsioon	15
1.5	Põhilised elementaarfunktsioonid	17
1.6	Elementaarfunktsioonid	24
1.7	Jadad *	24
2	Funktsiooni piirväärtus ja pidevus	27
2.1	Jada piirväärtus *	28
2.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	33
2.3	Ühepoolsed piirväärtused	36
2.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	37
2.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	39
2.6	Mõned erilised piirväärtused	42
2.7	Pidevad funktsioonid	45
2.8	Funktsiooni katkevusviise	46
2.9	Pidevate funktsioonide omadused	48
3	Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal	51
3.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus	52
3.2	Tuletise definitsioon	54
3.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised	56
3.4	Diferentseerimise reeglid	58

3.5	Liitfunktsiooni tuletis	59
3.6	Logaritmilise diferentseerimise võte	60
3.7	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus	60
3.8	Kõrgemat järku tuletised	62
3.9	Joone puutuja ja normaali võrrandid	64
3.10	Funktsiooni diferentsiaal	66
4	Funktsiooni uurimine	71
4.1	Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid	72
4.2	L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks	77
4.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	80
4.4	Funktsiooni ekstreemumid	81
4.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	85
4.6	Funktsiooni graafiku joonistamine	88
5	Algfunktsioon ja määramata integraal	93
5.1	Sissejuhatus	94
5.2	Algfunktsioon	94
5.3	Määramata integraal	95
5.4	Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest	96
5.5	Tehetega seotud integreerimisreegel	98
5.6	Muutujavahetus	99
5.7	Ositi integreerimine	101
5.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	104
6	Diferentsiaalvõrrandid	109
6.1	Sissejuhatus	110
6.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt	112
6.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid	113
6.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	115
6.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	117
7	Maatriksid ja determinandid	123
7.1	Maatriksi mõiste	124
7.2	Tehted maatriksitega	125
7.3	Maatriksite korrutamine	127
7.4	Teist ja kolmandat järku determinant	131
7.5	Kõrgemat järku determinant	133
7.6	Determinantide omadused	134

8	Pöördmaatriks. Lineaarvõrrandisüsteemid	139
8.1	Maatriksi pöördmaatriks	140
8.2	Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil	143
8.3	Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil	146
8.4	Maatriksi astak	148
8.5	Lineaarvõrrandisüsteemid	150
8.6	Crameri peajuht	152
8.7	Gaussi elimineerimismeetod	153
8.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend	155
8.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem	157

Peatükk 0

Tähistused. Reaalarvud

0.1	Tähistused	2
0.2	Kreeka tähestik	3
0.3	Reaalarvud	4
0.4	Summa sümbol	7

0.1 Tähistused

$:=$	definiitsioon (võrdub, rõhutatult)
$a \in X$	element a kuulub hulka X
$a \notin X$	a ei kuulu hulka X
$X \subset Y$	hulk X sisaldub hulgas Y (NB! mitterange kuulumine) mujal võidakse eristada $\subset$ ja $\subseteq$, meil $\subset = \subseteq$
$A \cup B$	hulkade ühend
$A \cap B$	hulkade ühisosa
$X \setminus Y$	hulgast X lahutatakse hulk Y
$\Rightarrow$	järeldub
$\Leftrightarrow$	on samaväärne (mõlematpidi järeldumine)
$\forall x$	kehtib iga x korral
$\exists x$	leidub selline x
$\mathbb{N}$	naturaalarvud $1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{N}_0$	naturaalarvud koos nulliga $0, 1, 2, 3, \dots$
$\mathbb{Z}$	täisarvud $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
$\mathbb{Q}$	ratsionaalarvud $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$
$\mathbb{I}$	irratsionaalarvud
$\mathbb{R}$	reaalarvud
$\mathbb{C}$	kompleksarvud
$n!$	faktoriaal $1 \cdot 2 \cdots n$

0.2 Kreeka tähestik

α	alfa
β	beeta
γ, Γ	gamma
δ, Δ	delta
ϵ, ε	epsilon
ζ	dzeeta
η	eeta
θ, Θ	teeta
i	ioota
κ	kapa
λ, Λ	lambda
μ	müü
ν	nüü
ξ, Ξ	ksii
o	omikron
π, Π	pii
ρ, ϱ	roo
σ, Σ	sigma
τ	tau
υ, Υ	üpsilon
ϕ, φ, Φ	fii
χ	hii
ψ, Ψ	psii
ω, Ω	oomega

0.3 Reaalarvud

Arvud moodustavad mingis mõttes matemaatika vundamendi. Erinevat tüüpi arvudel võivad olla erinevad omadused ja kasutusvaldkonnad. Enne reaalarvudeni jõudmist peame tutvuma veidi lihtsamate arvudega.

Saksa matemaatiku Leopold Kroneckeri (1823 - 1891) sõnul (vabas tõlkes) on “*naturaalarvud loodud Jumala poolt. Kõik teised arvud on loodud inimese poolt.*”

Definitsioon 0.1

Tähistame sümboliga $\mathbb{N}$ kõigi **naturaalarvude hulka**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

ja sümboliga $\mathbb{Z}$ kõigi **täisarvude hulka**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Definitsioon 0.2

Ratsionaalarvudeks nimetatakse arve x , mis on esitatavad kujul $x = \frac{p}{q}$, kus $p \in \mathbb{Z}$ ja $q \in \mathbb{N}$. Kõigi ratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{Q}$.

Negatiivsete arvude sissetoomisega saab esitada näiteks järgmise anekdoodi: *Füüsik, bioloog ja matemaatik näevad, kuidas tühja majja siseneb kaks inimest. Hiljem väljub sealt aga kolm inimest. Füüsik mõtleb: “Tegemist on mõõtmisveaga.” Bioloog arvab, et inimesed vahepeal paljunesid ja matemaatik ütleb: “Praegu on majas miinus üks inimest. Kui nüüd täpselt üks inimene siseneb majja, siis on maja uuesti tühi.”*

Ratsionaalarvudeks on parajasti need arvud, mis on esitatavad lõplike kümnendmurdudena (näiteks 3.895) või **lõpmatute perioodiliste kümnendmurdudena** (näiteks 15.98787..., mida kirjutatakse lühemalt kujul 15.9(87)). Kümnendmurdude korral kasutatakse antud konspektis kümnendkoha eraldamiseks punkti.

Eksamil (ka praktikumi tunnikontrollis) võidakse näiteks küsida ratsionaalarvu definitsiooni. Proovige seda sõnastada parajasti siis, kui konspekti käepärast ei ole, ning nii, et teie vanatädi ka asjast aru saaks. Kas see, mille te sõnastasite, defineerib ikka küsitud ratsionaalarvu mõiste üheselt ära?

Analoogiliselt võidakse küsida irratsionaalarvu, reaalarvu ja kompleksarvu kohta.

Näide 0.1 Ratsionaalarvuks ei ole $\sqrt{2}$. Näitame seda.

Oletame vastuväiteliselt, et $\sqrt{2}$ on ratsionaalarv, s.t esitub kujul $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, kus $q \neq 0$ ja $p, q \in \mathbb{Z}$. Seejuures eeldame, et harilik murd $\frac{p}{q}$ on antud taandatud kujul (näiteks $\frac{1}{2}$, aga mitte $\frac{2}{4}$). Siit järeldub, et p ja q ei saa mõlemad korraga olla paarisarvud (muidu saaksime kahega läbi jagada). Algsest võrdusest saame ruutu tõstmisel

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad p^2 = 2q^2.$$

Siit järeldub, et p on paarisarv, kuna tema ruut esitub kahekordse arvu q^2 korrutisena. Kuna p on paarisarv, siis ta esitub kujul $p = 2r$, kus r on mingi täisarv. Uuesti vaadates saame

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad 2 = \frac{4r^2}{q^2} \quad \text{ehk} \quad q^2 = 2r^2.$$

Viimane tähendab, et ka q peab olema paarisarv (kuna paaritu arvu ruut on ise ka paaritu). Saime vastuolu sellega, et q ja p ei tohi korraga olla paarisarvud. Järelikult eeldus $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ oli väär.

◇ ◇ ◇

Igapäevaelus saaksime hakkama ka ainult ratsionaalarve (murde) kasutades, matemaatilises teoorias aga mitte. Nagu just $\sqrt{2}$ näol näitasime, leidub veel teistsuguseid arve.

Definitsioon 0.3

Arve, mis on esitatavad lõpmatute mitteperioodiliste kümnend-murdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks. Irratsionaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{I}$.

Irratsionaalarvudeks on näiteks $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$, $\pi = 3.14159265359\dots$, $e = 2.71828182846\dots$ (naturaallogaritmi alus), $\varphi = 1.61803398875\dots$ (kuldlõike parameeter), jne.

Definitsioon 0.4

Kõik ratsionaal- ja irratsionaalarvud moodustavad reaalarvude hulga. Kõigi reaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{R}$.

Reaalarvude hulga kirjanepuudeks kasutatakse kirjutusviisi

$$\mathbb{R} = \{x : -\infty < x < \infty\} \quad \text{või} \quad \mathbb{R} = (-\infty, \infty).$$

Iga lõplikku kümnendmurdu $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ (näiteks 8.765210448) saab esitada lõpmatu kümnendmurruna kahel erineval viisil:

$$a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n00\dots \quad \text{või} \quad a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n - 1)99\dots$$

Näiteks, 2.500... või 2.499...

Märkus 0.1

Edaspidi välistame kümnendmuru esitamise kujul, mis lõpeb numbriga 9 perioodis. See eeldus võimaldab hõlpsamini defineerida reaalarvude võrdlemise eeskirjad. Seega reaalarvudeks nimetame kõiki lõpmatuid kümnendmurde, mis ei lõpe numbriga 9 perioodis.

Reaalarvude võrdlemine. Reaalarve $a = \alpha, \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots$ ja $b = \beta, \beta_1\beta_2\dots\beta_n\dots$ nimetame võrdseteks, kui

$$\alpha = \beta, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_n = \beta_n, \quad \dots$$

Ütleme, et reaalarv a on suurem kui reaalarv b ja kirjutame $a > b$ (ehk b on väiksem kui a ja kirjutame $b < a$), kui on täidetud üks järgmistest tingimustest: 1) $\alpha > \beta$,

2) $\alpha = \beta \geq 0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k > \beta_k.$$

3) $\alpha = \beta < 0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k < \beta_k,$$

Kuna irratsionaalarvudel on lõpmatu arv kümnendkohti, siis on selge, et päriselus ei ole võimalik lõpliku aja jooksul nende kõiki komakohti välja arvutada. Mõõtmistel võib kasutada näiteks järgmist lähenemisviisi:

$$3.14155 \leq \pi \leq 3.14165$$

või

$$|\pi - 3.1416| \leq 0.00005.$$

Arvuhulkade vahel valitseb seos

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

Siinjuures ∞ ja $-\infty$ ei ole mingid arvud, nendega ei saa sooritada aritmetilisi teheteid ning nad ei asetse kuskil reaalteljel, vaid on matemaatikas abivahendina kaasatud kui „lõpmatuse“ sümbolid, mida kasutatakse reaalarvude ja nende hulkadega seotud omaduste kirjeldamisel. Antud („lõpmatuse“) sümboli kasutuselevõtt pannakse inglise matemaatiku John Wallise (1616-1703) arvele.

4) $\alpha = \beta = -0$ ja leidub indeks $k \geq 1$ nii, et

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \quad \alpha_k < \beta_k.$$

Reaalarv a on määratud, kui on teada eeskiri tema täiskoha ja iga kümendkoha leidmiseks. Praktikas kasutatakse irratsionaalarvude asemel nende ratsionaalarvulisi lähendeid. Näiteks saab igat reaalarvu $x \in \mathbb{R}$ esitada üheselt ahelmurruna (seda teemat antud kursus lähemalt ei vaatle)

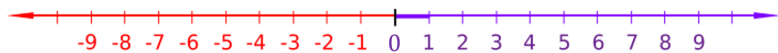
$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}},$$

kus a_0 on mingi täisarv ja a_k ($k \geq 1$) on positiivsed täisarvud. Ligikaudseks arvutamiseks võib kasutada “piisavalt” pikka ahelat.

Märkus 0.2

Reaalarve kujutatakse arvsirge punktidenä. Arvsirge punktide hulga ja reaalarvude hulga vahel on üksühene vastavus: igale reaalarvule a vastab parajasti üks punkt A arvsirgel (reaalarvu a kujutis), igale punktile A arvsirgel vastab parajasti üks reaalarv a (punkti A koordinaat). Seetõttu kasutataksegi “reaalarv a ” asemel ka väljendit “punkt a ”.

Vastaku reaalarvule a arvsirge punkt A ja reaalarvule b arvsirge punkt B . Siis arv $|a - b|$ on võrdne punktide A ja B vahelise kaugusega. Erijuhul $b = 0$, saame, et $|a|$ on punkti A kaugus nullpunktist.



Reaalarvu absoluutväärtus. Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$$

Absoluutväärtuse tähtsamad omadused:

1. $|a| \geq 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $\pm a \leq |a|$,
4. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$,
5. $|ab| = |a||b|$,
6. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

Peame meeles, et iga reaalarvu $a \in \mathbb{R}$ korral

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Näiteks, $\sqrt{25} = 5$ ja mitte -5 , kuna juurimine on defineeritud alati üheselt mittenegatiivse arvuna. Seda ei tohi segamini ajada võrrandi lahendamise ja võrrandi lahendamise. Võrrandil võib olla rohkem kui üks lahend, näiteks $x^2 = 25$ lahenditeks on $x_1 = 5$ ja $x_2 = -5$.

Alustades naturaalarvudest, laiendasime arvude valdkonda kuni reaalarvudeni. Sellisel juhul on näiteks võrrandil $x^2 - 2 = 0$ kaks reaalarvulist lahendit: $x_1 = \sqrt{2}$ ja $x_2 = -\sqrt{2}$. Mida teha aga võrrandiga $x^2 + 1 = 0$? Sellisel juhul tekib arvu ruut x^2 , mille väärtus on negatiivne: -1 . Meil oleks vaja, et kehtiks $x_1 = \sqrt{-1}$ ja $x_2 = -\sqrt{-1}$. Kuna ruutjuur negatiivsest arvust ei ole defineeritud, siis tulebki välja, et puhtalt reaalarvudest ei piisa ning meil tuleb arvude valdkonda veelgi laiendada. Osutub, et selline samm on väga hästi kooskõlas üldisema matemaatilise teooriaga.

0.4 Summa sümbol

Kui on vaja liita arvud $a_1, a_2, \dots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$, siis seda saab lühidalt märkida sigma sümboli (ehk *summamärgi*) abil

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

kus a_i on summa *üldliige*, i on *summeerimisindeks* ($i = 1, \dots, n$).

Summa sümbol tuleb kreeka suurtähest sigma Σ , mille väike täht on kujul σ .

Summamärgi $\sum$ abil tähistatakse ühelaadsete liidetavate summat, seejuures sümboli $\sum$ järel on näidatud, millise “kujuga” liidetavaid tuleb liita.

Näiteks

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n,$$

korral leitakse summa antud summa üldliikme a_i põhjal, kus kõigi liidetavate saamiseks liidetakse järjest liikmed alates indeksist m kuni indeksini n , lähtudes *summeerimisrajadest* m ja n .

Näide 0.2 Esimese 100 naturaalarvu liitmistehte saab kirja panna kujul

$$1 + 2 + \dots + 100 = \sum_{i=1}^{100} i.$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.3 Kirjutame summa lahti

$$\sum_{n=2}^N (-1)^{n-1} \frac{n}{n+3} = -\frac{2}{5} + \frac{3}{6} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{N}{N+3}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.4 Kirjutame summa lahti

$$\sum_{k=5}^{90} f(k) = f(5) + f(6) + \dots + f(90).$$

◇ ◇ ◇

Näide 0.5 Keerulisem näide on Newtoni binoomvalem:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

kus $a, b \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

◇ ◇ ◇

Peatükk 1

Funktsioonid

1.1	Funktsiooni mõiste	10
1.2	Üksühesus ja pealekujutus	13
1.3	Liitfunktsioon	14
1.4	Pöördfunktsioon	15
1.5	Põhilised elementaarfunktsioonid	17
1.6	Elementaarfunktsioonid	24
1.7	Jadad *	24

Kontrolltöö teemad

1. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond ning nende leidmine.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud (v.a. $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ ja nende pöördfunktsioonid).
3. Paarisfunktsioon, paaritu funktsioon, pöördfunktsioon, üksühene funktsioon.
4. Eksponent- ja logaritmfunksiooni omadused.

Eksamiteemad

1. Funktsiooni mõiste. Funktsiooni määramispiirkond ja muutumispiirkond (väärtuste hulk).
2. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon.
3. Mõisted: üksühene funktsioon, liitfunktsioon, pöördfunktsioon.
4. Põhilised elementaarfunktsioonid (mõiste ja graafikud) ja elementaarfunktsioonid (mõiste).

1.1 Funktsiooni mõiste

Kaks muutujat võivad esineda teineteisest sõltuvatena või teineteisest sõltumatutena. Näiteks, pileti hind kahe raudteejaama vaheliseks sõiduks ei sõltu reisija kaalust, seevastu pagasi veohind samade jaamade vahel sõltub pagasi kaalust.

„Sinu eksamihinne on funktsioon ajast, mida sa panustad õpingutesse.“

Jälgides mõnda protsessi, näeme, et selle kulgemine seisneb ikka ühe mõõdetava suuruse muutumises teise mõõdetava suuruse muutumisel: õhu temperatuur muutub aja muutudes, õhurõhk muutub kõrguse muutumisel, soola lahustuvus vees muutub temperatuuri muutumisel jne.

Definitsioon 1.1

Muutujat y nimetame **sõltuvaks** muutujast x , kui x väärtustele vastavad y väärtused.

Muutujat x nimetame *sõltumatuks muutujaks*, muutujat y *sõltuvaks muutujaks*.

Mõiste *sõltumatu muutuja* asemel kasutatakse matemaatikas sõna **argument**.

Oma olemuselt on funktsioon mingi reegel (reeglite kogu, algoritm, protsess), mis iga-le sisendväärtusele leiab mingi väljundväärtuse. Selliselt võib mõelda igapäevases tegevuses. Matemaatikas formuleeritakse funktsiooni mõiste rangemalt.

Definitsioon 1.2

Olgu antud hulk $X \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud **üks ja ainult üks reaalarv** y , siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud **funktsioon** f , mida märgitakse

$$y = f(x).$$

Elementi $y = f(x)$ nimetatakse elemendi x kujutiseks, elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks.

Kui läbi punkti x tõmmata vertikaalne sirge, siis joon $y = f(x)$ kujutab endast funktsiooni ainult siis, kui tõmmatud sirge lõikab joont $y = f(x)$ ainult ühes punktis. Selline omadus peab kehtima iga x korral funktsiooni määramispiirkonnast.

Sellisel juhul räägitakse reaalmuutuja reaalkäärtustega funktsioonist või, lühemalt, reaalmuutuja funktsioonist.

Näide 1.1 Näiteks, seos $u = \pm\sqrt{|v|}$ ei kujuta endast funktsiooni, kuna argumentidele v on vastavusse seatud rohkem kui üks väärtus u ($\sqrt{|v|}$ ja $-\sqrt{|v|}$), kui $v \neq 0$. Küll on aga funktsiooniks $u = \sqrt{v}$, $v \in [0, \infty)$.

◇ ◇ ◇

Näide 1.2 Valem (eeskiri)

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

kujutab endast funktsiooni, mille väärtuseks on raadiusega r kera ruumala V .

◇ ◇ ◇

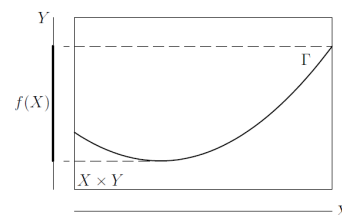
Definitsioon 1.3

Kõikide elementide hulka X , mille puhul elemendile $x \in X$ seatakse funktsiooniga f vastavusse $f(x)$, nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka

$$\{y \mid y = f(x), x \in X\}$$

nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulgaks ja seda tähistatakse $f(X)$.



Joonis: [15].

Kasutatakse kirjutist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, kuid kirjutatakse ka $f : X \rightarrow Y$, kui $f(X) \subset Y \subset \mathbb{R}$.

Näide 1.3 Funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

määramispiirkonnaks (reaalarvude hulgaks) on lõik $[-1, 1]$, kuna kõikide teiste reaalarvude puhul muutuks ruutjuure märgi all olev avaldis negatiivseks ja ruutjuure võtmine viiks meid kompleksarvude hulka. Funktsiooni f muutumispiirkonnaks on lõik $[0, 1]$.

◇ ◇ ◇

Märkus 1.1

Funktsiooni f saab defineerida (loomulikust) määramispiirkonnast X kitsamal hulgal $X_0 \subset X$ ning siis räägitakse funktsiooni ahendist. Sellisel juhul on oluline seda mainida.

Märkus 1.2

Kui reaalmuutuja funktsiooni korral on antud vaid teda määrav eeskiri, määramispiirkond pole aga fikseeritud, siis loetakse määramispiirkonnaks nende argumentide väärtuste hulk, mille korral funktsiooni määrav eeskiri omab mõtet (nn. loomulik määramispiirkond).

Näide 1.4 Näiteks on funktsiooni $y = \sqrt{x^2 - 4}$ määramispiirkond

$$X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty) = \mathbb{R} \setminus (-2, 2).$$

◇ ◇ ◇

Määramispiirkonna piiramine võib oluliselt muuta funktsiooni omadusi, kusjuures tulemuseks on mingi teine funktsioon. Näiteks, sirge $y = x - 1$ väärtused on rangelt positiivsed argumentide hulgal $X = (1, \infty)$, kuid ei ole seda hulgal $X = (-\infty, 1]$.

Definitsioon 1.4

Funktsiooni f **graafikuks** nimetatakse xy -tasandi punktide hulka

$$G(f) = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in X\}.$$

Märkus 1.3

Funktsiooni põhilised esitusviisid on järgmised:

1. Analüütiline esitus valemi(te) abil;
2. Numbriline esitus tabeli abil;
3. Geomeetriline esitus graafiku kui joonise abil.

Mainimata määramis- või muutumispirkonda võib kaasa tuua intsidendi Berkeley matemaatikainstituudi seinalle kritseldatud grafiti näol:

$$\sqrt{3} > 2$$

piisavalt “suure” 3 korral. Siin on sümbolile 3 antud huumori mõttes sõltuva muutuja roll.

Näide 1.5 Võtame näiteks funktsiooni $y = f(x)$ (esitus valemiga)

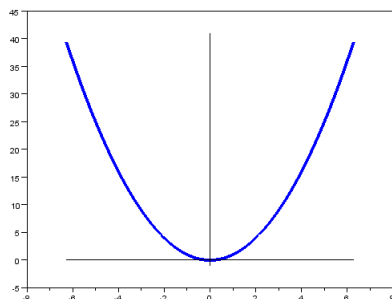
$$y = x^2.$$

Esitus tabelina (kasutatakse väga palju ligikaudses arvutamises, statistikas, andmetöötluses)

x	-10	-5	-1	0	0.1	6	20
y	100	25	1	0	0.01	36	400

Kui selles näites analüütilises esituses on funktsiooni määramispirkond $\mathbb{R}$, siis tabel kirjeldab tegelikult vaadeldava funktsiooni ahendit määramispirkonnaga $X_0 = \{-10, -5, -1, 0, 0.1, 6, 20\}$.

Esituses graafikuna näidatakse samuti vaadeldava funktsiooni ahendit, samal ajal on mõeldav, et graafikut kui joonist võib ette kujutada ka selliselt, et argument x saab kõik väärtused hulgas $\mathbb{R}$.



◇ ◇ ◇

Märkus 1.4

Funktsioon võib olla antud ka ilmutamata kujul nagu näiteks ringjoon (keskpunktiga $(0, 0)$)

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ilmutamata kuju on tegelikult võrrand ühe või mitme muutuja suhtes. Sageli ei ole võimalik sellist võrrandit üheselt lahendada ja seega ei ole võimalik funktsiooni valemiga avaldada. Ilmutatud kujul saaksime kaks funktsiooni $y = \sqrt{1 - x^2}$ ja $y = -\sqrt{1 - x^2}$, mõlema määramispirkond on lõik $[-1, 1]$.

Eeldame, et funktsiooni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ määramispiirkond X on sümmeetriline nullpunkti suhtes, s.t iga $x \in X$ korral ka $-x \in X$.

Definitsioon 1.5

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui

$$f(-x) = f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse **paarituks funktsiooniks**, kui

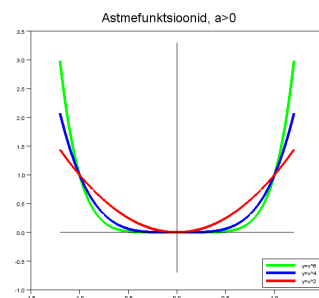
$$f(-x) = -f(x), \quad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Paaritud funktsioonid on näiteks $y = \sin x$ ja $y = x$, paarisfunktsioonid on näiteks $y = \cos x$ ja $y = x^2$.

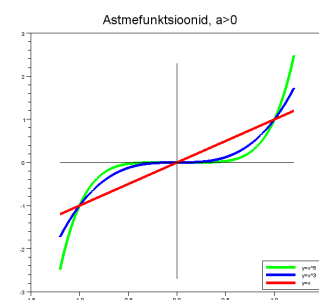
Märkus 1.5

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes. Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline nullpunkti suhtes.

Paaris



Paaritud



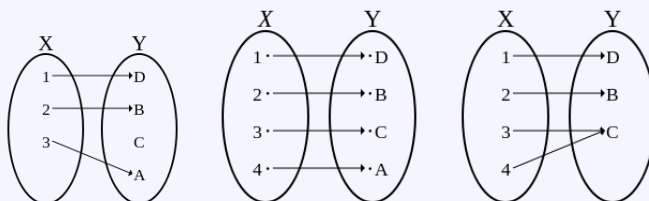
1.2 Üksühesus ja pealekujutus

Selles punktis vaatleme funktsioone, mille määramispiirkond X on suvaline hulk, samuti on suvaline hulk Y , kuhu kuuluvad funktsiooni väärtused. Funktsioon $f : X \rightarrow Y$ tähendab, et hulga X igale elemendile x on vastasseaditud üheselt määratud element $f(x) \in Y$.

Definitsioon 1.6

Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks funktsiooniks**, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas Y , s.t

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

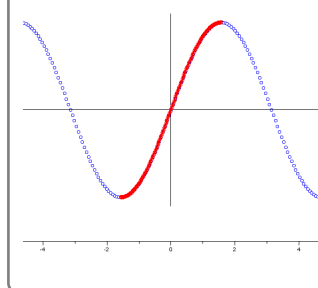


Joonis: 1) üksühene 2) üksühene 3) ei ole üksühene funktsioon (Wikipedia).

Märkus 1.6

Funktsiooni üksühesus tähendab veel seda, et kui $f(x_1) = f(x_2)$, siis peab kehtima argumentide võrdsus $x_1 = x_2$. Üksühese funktsiooni kohta öeldakse ka injektiivne funktsioon. Üksühese funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ korral ei ole ühelgi elemendil $y \in Y$ üle ühe originaali. Seega võib vabalt valitud elemendil $y \in Y$ olla parajasti üks originaal või originaali mitte olla.

Sinusfunktsioon $y = \sin x$ on näiteks üksühene osalõigul $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, kuid ei ole üksühene tervel reaalteljel $x \in \mathbb{R}$. Samuti ei ole teised perioodilised funktsioonid üksühesed määratuna reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$.

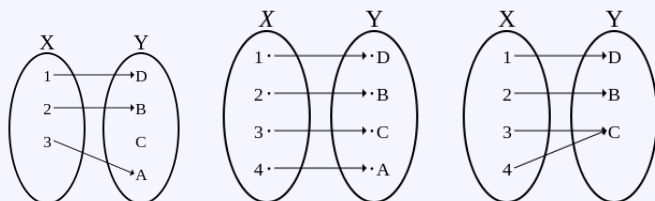


Näide 1.6 Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ on üksühene ühepunktisel hulgal $x \in \{a\}$ ja ei ole üksühene määratuna mingil suuremal hulgal. Lineaarne funktsioon $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) on alati üksühene.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.7

Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **pealekujutuseks**, kui $f(X) = Y$, s.t iga elemendi $y \in Y$ korral leidub originaal $x \in X$ nii, et $y = f(x)$.



Joonis: 1) ei ole pealekujutus 2) pealekujutus 3) pealekujutus (Wikipedia).

Matemaatikas öeldakse pealekujutuse asemel ka *sürjektiivne funktsioon* ning üksühese pealekujutuse asemel *bijektiivne funktsioon*.

Siinusfunktsioon $y = \sin x$ on pealekujutus vaadelduna $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, kuid mitte $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

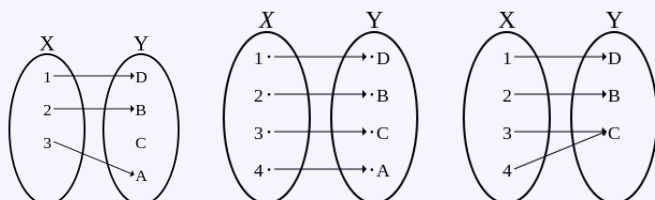
Näide 1.7 Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ on pealekujutus kui $f : \mathbb{R} \rightarrow \{1\}$, kuid ei ole pealekujutus kui $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lineaarne funktsioon $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) on pealekujutus kui funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.8

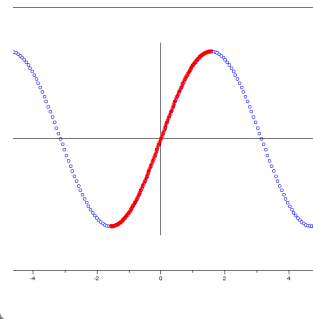
Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks pealekujutuseks** ehk üksüheseks vastavuseks, kui f on üksühene ja lisaks veel pealekujutus, s.t igal elemendil hulgast Y leidub üks ja ainult üks originaal.



Joonis: 1) ei ole 2) on üksühene pealekujutus 3) ei ole (Wikipedia).

Funktsioon

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus, kuid $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ei ole.



1.3 Liitfunktsioon

Anname siin mõiste üldisel juhul.

Definitsioon 1.9

Eeldame, et on antud funktsioonid $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$. Funktsioonide f ja g **liitfunktsiooniks** ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $h : X \rightarrow Z$, mis defineeritakse võrdusega

$$h(x) = g(f(x)), x \in X.$$

Kasutatakse kirjutisi $h = gf$ või $h = g \circ f$.

Funktsioonide liitfunktsioon on nendega järjest teisendamine ehk nende järjest rakendamine.

Näide 1.8 Vaatleme funktsioone

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2.$$

Siis saame moodustada liitfunktsioonid

$$(gf)(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$(fg)(x) = f(g(x)) = g(x) + 1 = x^2 + 1.$$

Selle näite põhjal võib öelda, et isegi kui $X = Y = Z$, siis $gf : X \rightarrow X$ ja $fg : X \rightarrow X$ ei tarvitse olla võrdsed, mis tähendab, et liitfunktsiooni moodustamise tehe ei ole kommutatiivne.

◇ ◇ ◇

1.4 Pöördfunktsioon

Olgu antud funktsioon $f : X \rightarrow Y$, mis on üksühene pealekujutus. Siis igal elemendil $y \in Y$ on olemas parajasti üks originaal $x \in X : f(x) = y$.

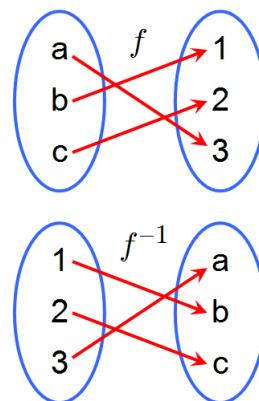
Definitsioon 1.10

Üksühese vastavuse $f : X \rightarrow Y$ **pöördfunktsioon** $f^{-1} : Y \rightarrow X$ määratakse võrdusega

$$f^{-1}(y) = x,$$

kus $f(x) = y$ iga $x \in X$ korral.

Pöördfunktsioon f^{-1} seab igale elemendile $y \in Y$ vastavusse selle originaali funktsiooni f mõttes (see tähendab, et $f(x) = y$). On arusaadav, et $(f^{-1})^{-1} = f$, s.t funktsiooni $f^{-1} : Y \rightarrow X$ pöördfunktsioon on $f : X \rightarrow Y$.



Joonis: Wikipedia

Märkus 1.7

Märgime, et kui $f : X \rightarrow Y$ ei ole üksühene, siis leidub $y \in Y$, millel on vähemalt kaks originaali ja toodud viisil pöördfunktsiooni defineerida ei saa. Samuti, kui $f : X \rightarrow Y$ ei ole pealekujutus, siis leidub $y \in Y$, millel ei ole originaali ja jälle pöördfunktsiooni ei ole. Niisiis on funktsioon $f : X \rightarrow Y$ pööratav parajasti siis, kui on tegemist üksühese vastavusega hulkade X ja Y vahel.

Funktsiooni pööratavus on eriti oluline võrrandite lahendamise uurimisel.

Näide 1.9 Seame Celsiuse kraadidele vastavusse Fahrenheiti kraadid

$$y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32.$$

Matemaatiliselt saab selle funktsiooni defineerida tervel reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$ ja on tegemist üksühese pealekujutusega $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Selle järgi näiteks $30^\circ\text{C} = f(30) = \frac{9}{5} \cdot 30 + 32 = 86^\circ\text{F}$. Leiame funktsiooni f pöördfunktsiooni.

Selleks avaldame võrdusest

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

muutuja

$$x = \frac{5}{9}(y - 32),$$

mis tähendab, et

$$f^{-1}(y) = \frac{5}{9}(y - 32), y \in \mathbb{R}.$$

Kui soovitakse kasutada tähist x funktsiooni argumentina ja y väärtusena, siis võib kirjutada $y = f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$, $x \in \mathbb{R}$. See võimaldab funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikut kanda ühisele xy -teljestikule, milles mõlema argumentiks on $x \in X$.

◇ ◇ ◇

Näide 1.10 Leiame funktsiooni

$$y = \frac{x+1}{x}$$

pöördfunktsiooni. Näeme, et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on üksühene pealekujutus. Nõudes, et $x \neq 0$, avaldame

$$xy - x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y-1}.$$

Seega pöördfunktsioon on $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, kus

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

◇ ◇ ◇

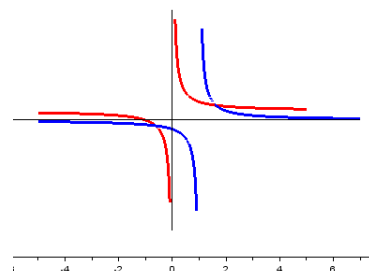
Näide 1.11 Funktsiooni $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ pöördfunktsiooniks on

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0, \infty).$$

Funktsioonil $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$, ei ole pöördfunktsiooni, sest ta ei ole üksühene.

◇ ◇ ◇

Näiteks, $86^\circ F = f^{-1}(86) = \frac{5}{9}(86 - 32) = \frac{5}{9} 54^\circ C = 30^\circ C$.



1.5 Põhilised elementaarfunktsioonid

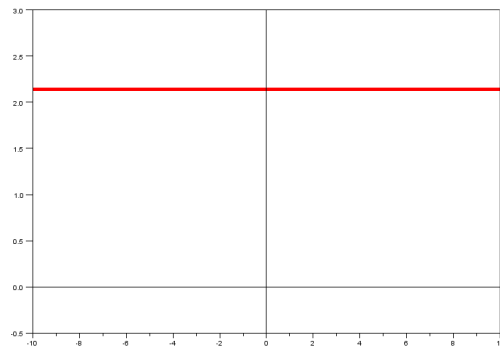
Definitsioon 1.11

Põhiliste elementaarfunktsioonide all mõistetakse järgmisi funktsioone:

1. konstantne funktsioon $y = c$,
2. astmefunktsioon $y = x^a$,
3. eksponentfunktsioon $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$),
4. logaritmifunktsioon $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$),
5. trigonomeetrilised funktsioonid
 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$,
6. arkusfunktsioonid
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

Matemaatilises analüüsis enim uuritud ja kõige sagedamini esinevad funktsioonid on elementaarfunktsioonid.

- **Konstantne funktsioon** $y = c$ tähendab seda, et igale reaalarvule $x \in \mathbb{R}$ seatakse vastavusse sama arv $c \in \mathbb{R}$ ehk $f(x) = c$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Selle graafikut saab ette kujutada järgmiselt:



Konstantne funktsioon vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene; on pealekujutus vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \{c\}$.

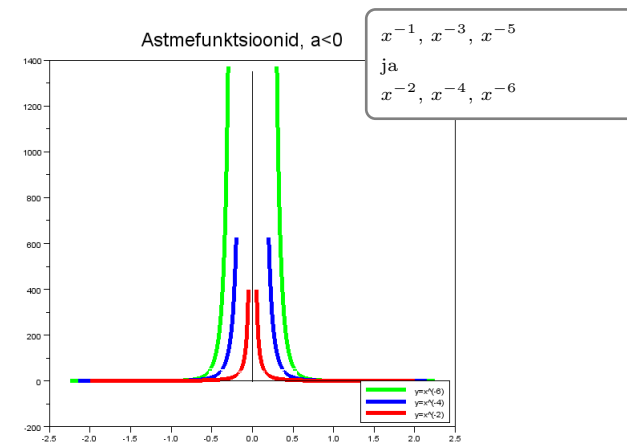
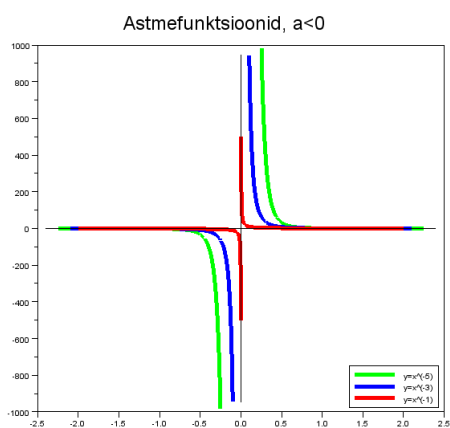
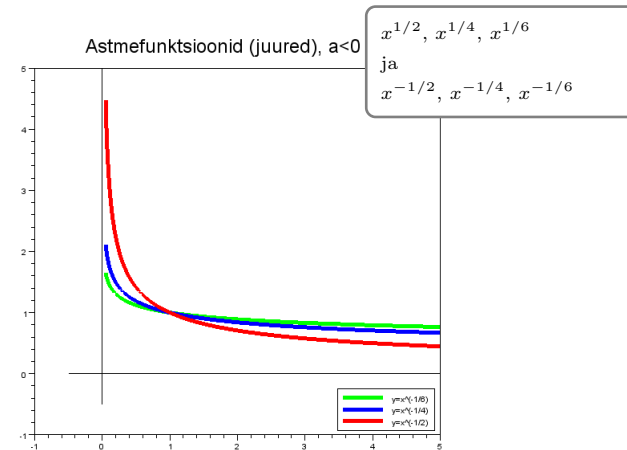
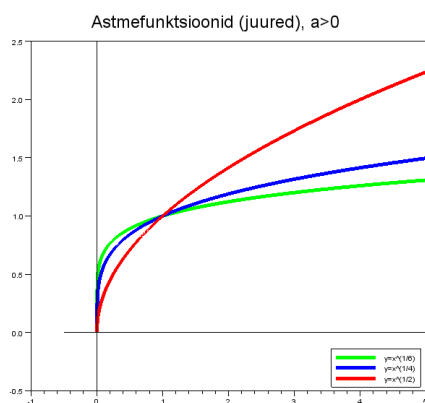
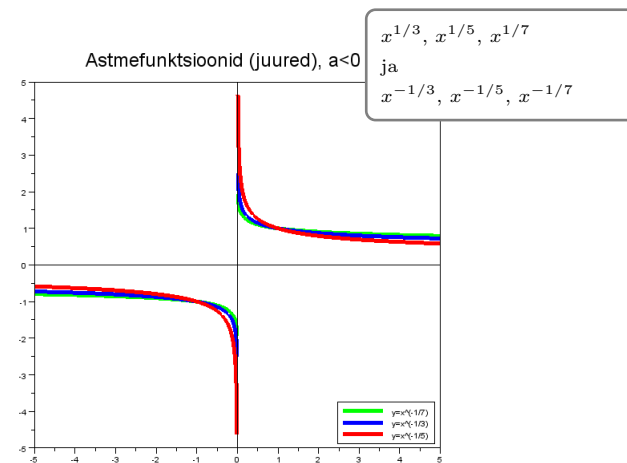
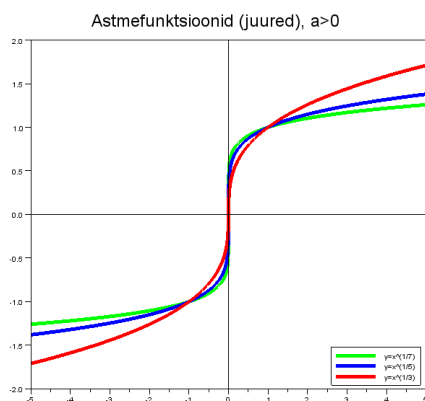
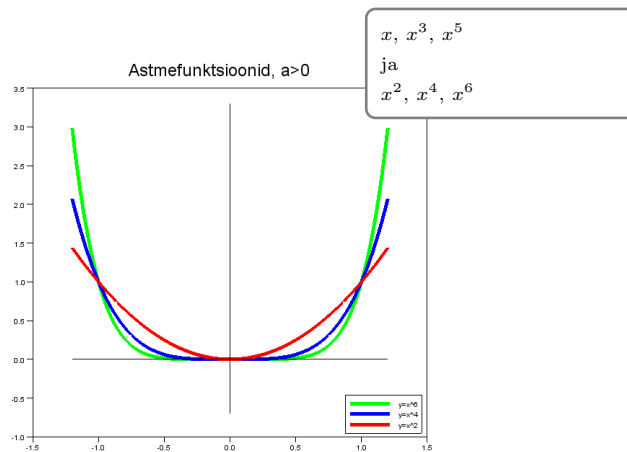
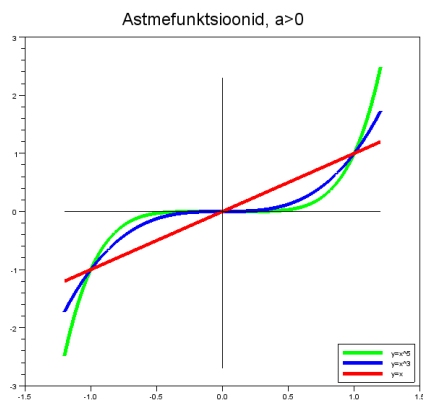
- **Astmefunktsioon** $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$.

Näiteks funktsioonid $y = x$ ja $y = x^3$ on üksühesed pealekujutused ja paaritud funktsioonid vaadelduna $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Funktsioonid $y = x^2$ ja $y = x^4$ on paarisfunktsioonid, ei ole üksühesed kui funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Kui $a \in (0, 1)$, siis saame juurfunktsioonid, $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ loomuliku määramispiirkonnaga $[0, \infty)$; $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ loomuliku määramispiirkonnaga $\mathbb{R}$. Kui $a < 0$, siis $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ ja määramispiirkonnast jääb kindlasti välja punkt $x = 0$.

Astmefunktsioonid, sealhulgas eriti täisarvuliste astmenäitajatega, on ühed põhilistest alusfunktsioonidest, mille abil moodustatakse uusi funktsioone.



- **Ekspontentfunktsioon** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige olulisem nendest on $y = e^x$, mida kirjutatakse mõnikord ka kujul $y = \exp(x)$. Siin e on Euleri arv.

Tihti on tavaks ekspontentfunktsiooni all mõista kaht erinevat funktsiooni: $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ ($x > 0$). Seejuures $y = e^x$ väärtused argumendi x suurenedes kasvavad kiiresti (eksponentsiaalne kasv) ja $y = e^{-x}$ väärtused argumendi x suurenedes kahanevad kiiresti (eksponentsiaalne kahanemine). Mingis mõttes $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ kirjeldavad oluliselt erinevaid protsesse.

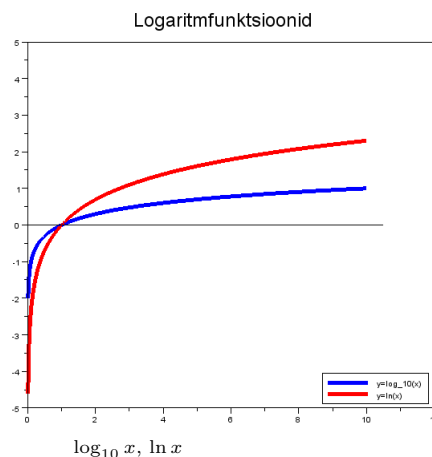
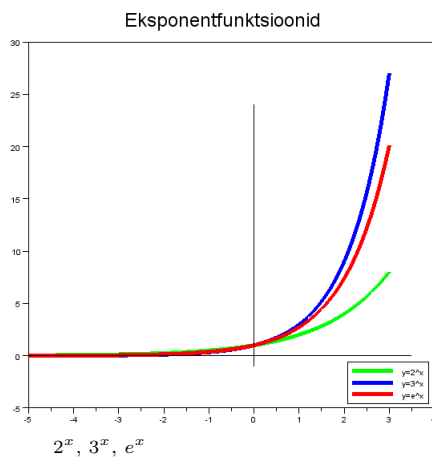
Ekspontentfunktsioonid $y = e^x$ ja $y = e^{-x}$ ($x > 0$) on olulisel kohal loodusprotsesside kirjeldamisel (näiteks rahvastiku (populatsiooni) eksponentsiaalne kasv või kahanemine), intresside arvutamisel finantsmatemaatikas jne.

Ekspontentfunktsioonil on järgmised omadused:

$$a^0 = 1, \quad a^x > 0,$$

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$



- **Logaritmifunktsioon** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$. Kõige olulisem nendest on naturaallogaritm $y = \ln x$ (logaritmi alus on arv e , $y = \log_e x$), laialt levinud on ka kümnendlogaritm $y = \log_{10} x$. Ekspontentfunktsioon $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, ja logaritmifunktsioon $g(x) = \log_a x$, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, on teineteise pöördfunktsioonid, s.t $f^{-1} = g$ ja $g^{-1} = f$.

Vastupidiselt kiirele eksponentsiaalsele kasvule ja kahanemisele, on logaritmiline kasv ja kahanemine aeglased. Logaritmifunktsioonid on samuti olulised reaalelu protsesside kirjeldamisel.

Logaritmifunktsioonil on järgmised omadused:

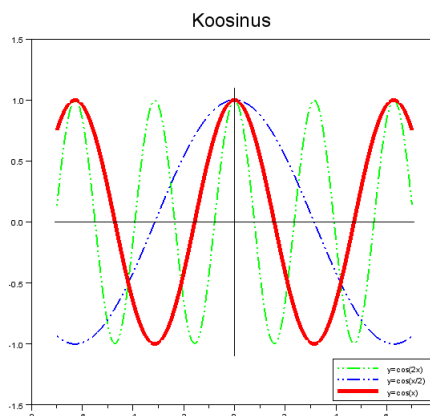
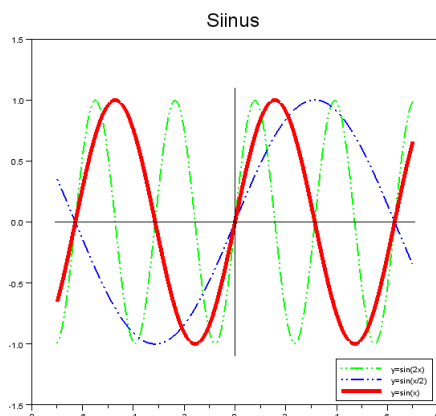
$$\log xy = \log |x| + \log |y|, \quad \log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|, \quad (\text{siin } xy > 0),$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad \log x^a = a \log x, \quad x = a^{\log_a x}, \quad (\text{siin } x > 0),$$

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1, \quad \ln e^{-1} = -1.$$

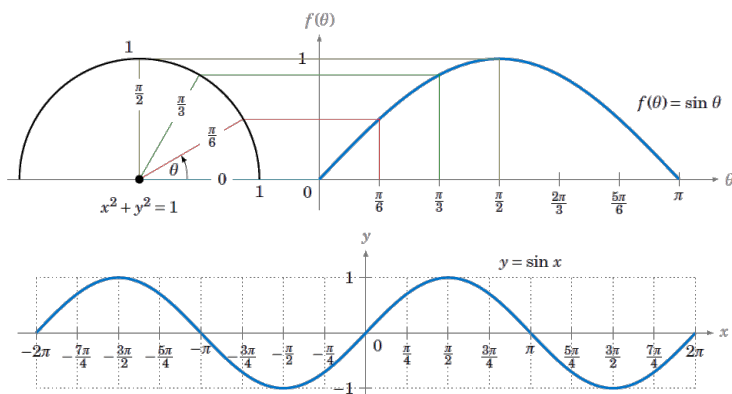
Kui tekstis ei ole midagi muud täpsustatud, siis sageli võidakse kirjutise $\log x$ all mõelda ka naturaallogaritm $\ln x$. See on eriti levinud teaduskirjanduses. Paneme tähele, et erineva alusega logaritmid erinevad üksteisest vaid konstandi kordsuse poolest.

• **Trigonomeetrilised funktsioonid** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

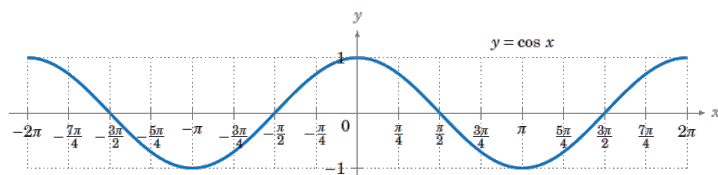


$\sin 2x$, $\sin x/2$, $\sin x$

$\cos 2x$, $\cos x/2$, $\cos x$



Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>



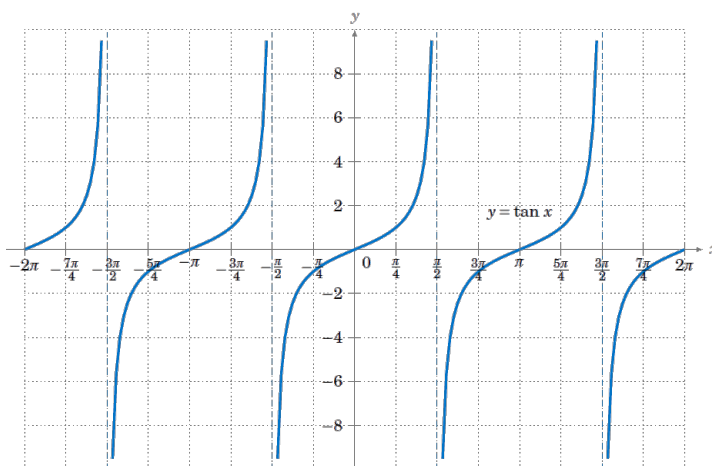
Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>

Siinusfunktsioon
 $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus.

Kosinusfunktsioon
 $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ on paarisfunktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ on üksühene pealekujutus.



Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>

Tangensfunktsioon

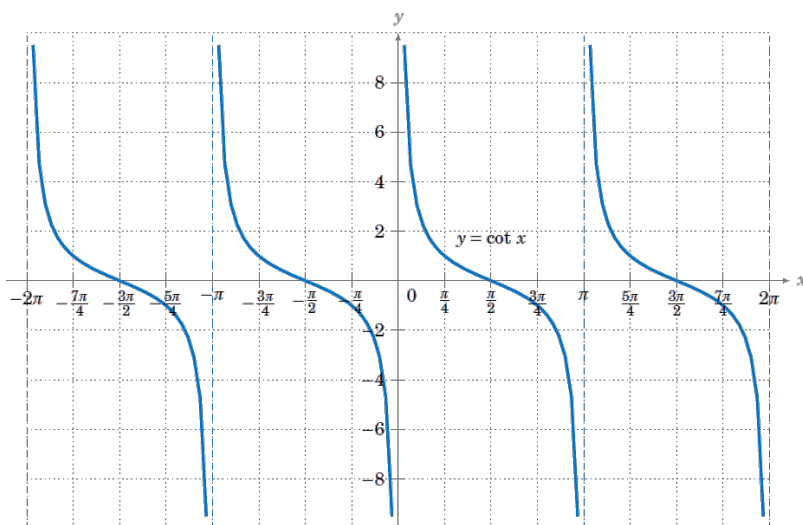
$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Funktsioon $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$
on üksühene pealekujutus.

Tangensi saab esitada siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>

Kootangensfunktsioon

$\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

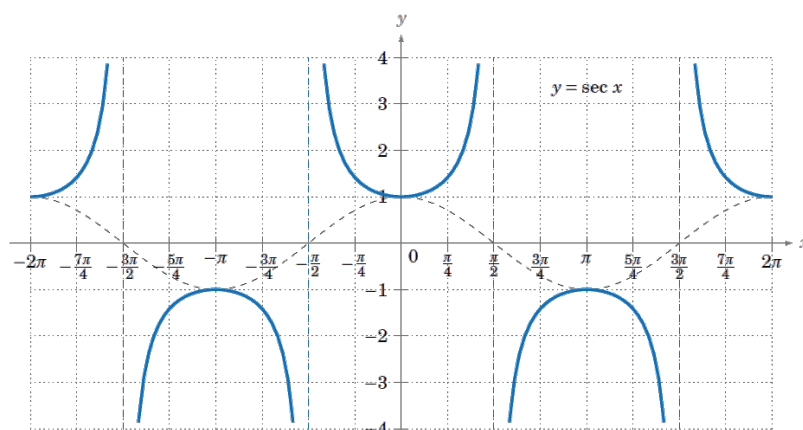
Funktsioon $\cot : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ on
üksühene pealekujutus.

Kootangensi saab esitada tangensi või siinuse ja koosinuse kaudu:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>

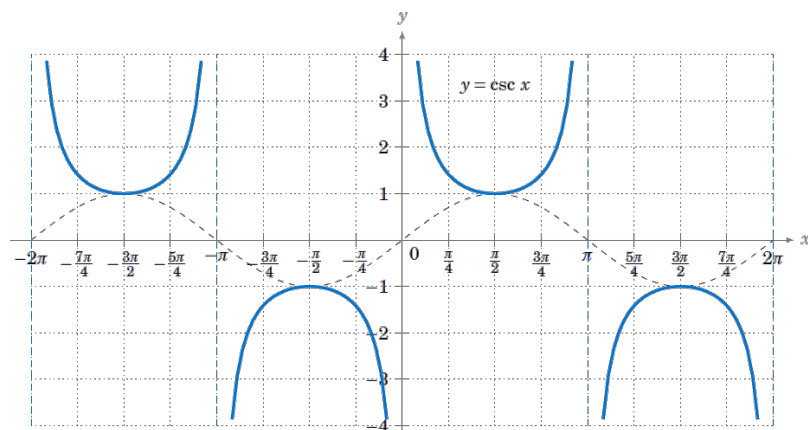
Seekans on koosinuse pöördväärtus:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktsioon

$\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paarisfunktsioon,
ei ole üksühene.



Joonis: <http://www.theopencurriculum.org/articles/trigonometry/>

Kooseekans on siinuse pöördväärtus:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x},$$

$$x \neq \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funktsioon

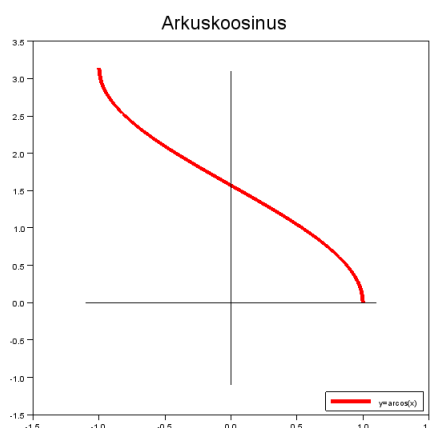
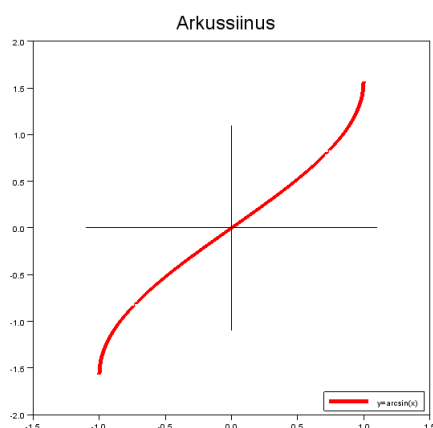
$\csc : \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ on paaritu funktsioon, ei ole üksühene.

Märkus 1.8

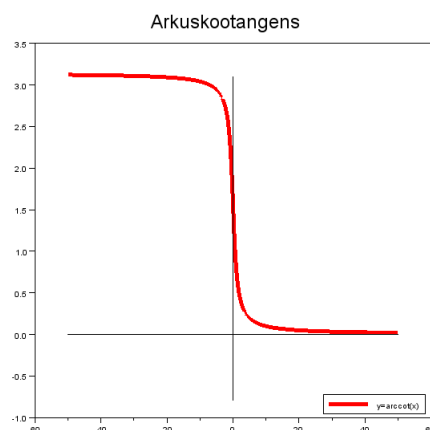
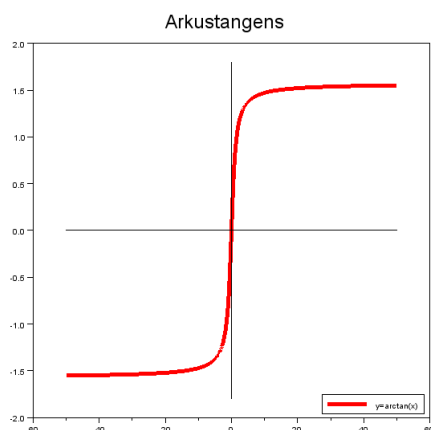
Funktsioonid $\cot x$, $\sec x$ ja $\csc x$ on avaldatavad $\sin x$ ja $\cos x$ kaudu. Seega saab ka nendeta hakkama, aga mõnikord on nende kasutamine avaldistes otstarbekam.

- **Arkusfunktsioonid** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$ ja $y = \operatorname{arccot} x$ on vastavate trigonomeetriliste funktsioonide $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ ja $y = \cot x$ pöördfunktsioonid sobiva määramispiirkonna ja väärtuste hulga korral.

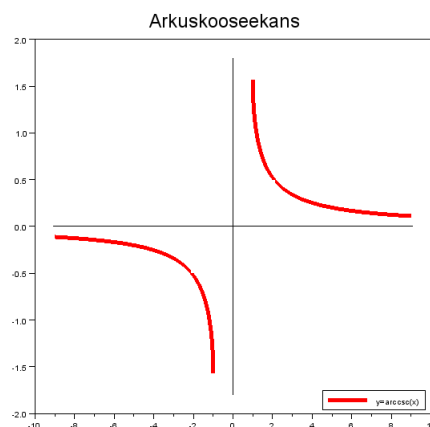
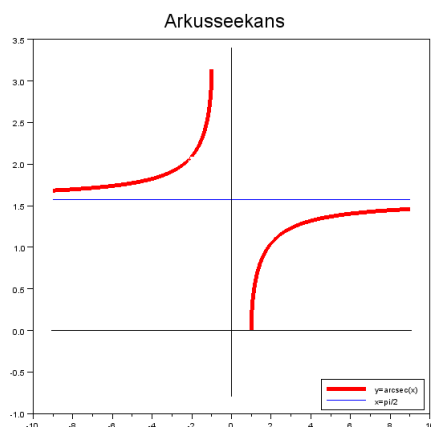
Funktsioon arkussiinus $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ on paaritu, üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskoosinus $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ on üksühene pealekujutus.



Funktsioon arkustangens $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on paaritu, üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskootangens $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ on üksühene pealekujutus.



Funktsioon arkusseekans $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ on üksühene pealekujutus. Funktsioon arkuskoosekans $\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on paaritu üksühene pealekujutus.



Märkus 1.9

Kirjanduses kasutatakse arkusfunktsioonide tähistamiseks ka kirjutusviisi $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ ja $\cot^{-1} x$. Viimane on tulnud $f(x)$ pöördfunktsiooni f^{-1} tähistusest. Seda ei tohi segamini ajada argumenti x pöördväärtusega $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Funktsioonide korral kirjutusviis $f^{-1}(x)$ ei tähenda avaldist $\frac{1}{f(x)}$, vaid pöördfunktsiooni. Segaduse vältimiseks on kasulikum kasutada nime-tusi $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$ või siis $y = \operatorname{asin} x$, $y = \operatorname{acos} x$, $y = \operatorname{atan} x$, $y = \operatorname{acot} x$.

Märkus 1.10

Mõnikord läheb vaja võrduseid

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}, \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}.$$

1.6 Elementaarfunktsioonid

Definitsioon 1.12

Elementaarfunktsioonideks nimetatakse funktsioone, mis on saadavad põhilistest elementaarfunktsioonidest lõpliku arvu aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel.

Mittelementaarfunktsioone leiab näiteks ridade poolt defineerituna.

Näiteks on

$$f(x) = e^{e^{\sin(1 + \sqrt{\log(4+x^2)})}}$$

elementaarfunktsioon. Mitteelementaarfunktsioon on aga näiteks integraalne siinus $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$.

Märkus 1.11

Elementaarfunktsioonid on sealhulgas funktsioonid, millel on matemaatikas rida lihtsaid omadusi. Sõnastame need hiljem vastavate teemade all, nagu piirväärtus, pidevus, tuletise ja integraali leidmine.

1.7 Jada *

Jada on oma sisult lõpmatu järjestatud arvude loend

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

millel on esimene element ja igale elemendile vahetult järgnev element.

Näiteks:

$$2, 4, \dots, 2n, \dots$$

Definitsioon 1.13

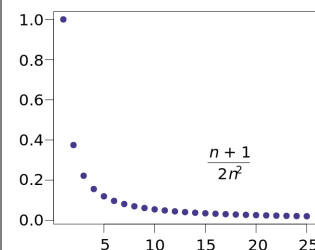
Jadaks nimetatakse naturaalarvulise argumentiga funktsiooni

$$x = x(n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Tähistame (x_n) . Arvu x_n nimetatakse jada (x_n) üldliikmeks (ka elemendiks). Kirjutame ka

$$(x_n) = (x_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Jadad on matemaatikas tähtsal kohal. Nende abil on tõestatud palju olulisi tulemusi ja kindlasti tõestatakse veel uusi.



Joonis: Wikipedia. Jada graafiline esitus.

Näide 1.12 Funktsiooni $x = n^2$ korral saame jada

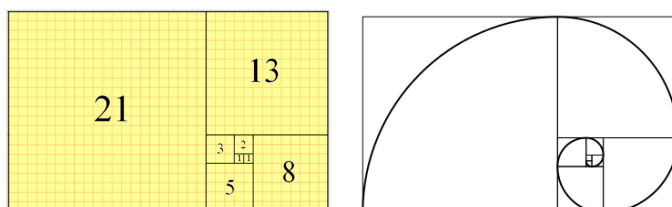
$$(x_n) = 1, 4, \dots, n^2, \dots$$

◇ ◇ ◇

Näide 1.13 Võib-olla et kõige tuntum või vähemalt mingis mõttes erilisem jada on **Fibonacci jada**, mille kaks esimest liiget on ühed ning iga järgnev liige on kahe eelneva liikme summa:

$$(F_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \dots$$

Järgnevalt on toodud graafiliselt Fibonacci spiraal, mis on väga lähedane „kuldsele“ spiraalile:



Joonised: Wikipedia.

Fibonacci arvud on seotud kuldloikega, kus terve lõik jaotatakse kaheks osaks nii, et kogu lõigu pikkuse ja pikima osalõigu suhe on sama, mis pikima ja lühema osalõigu suhe ehk

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$$

◇ ◇ ◇

Leonardo Bonacci (1170-1250) oli itaalia matemaatik, keda tuntakse ka nime all Fibonacci. Fibonacci jadaga seotud arvud esinevad üsna tihti ka looduses. Üheks põhjuseks võib olla see, et kahe järjestikuse Fibonacci arvu jagatise väärtus läheneb kuldloike suhtele $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618\dots$ ja kuldloike on looduses erilisel kohal. On täheldatud, et kahe kohakuti asuva (taime) lehe vahel on tihti Fibonacci arv lehti.

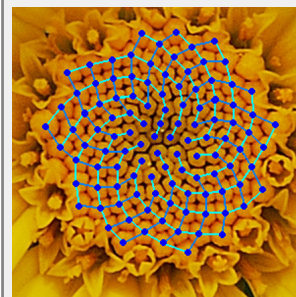


Foto: Wikipedia. Fotol on kollase kummeli õis, mille sees on struktuur, kus on 21 tumesinist ja 13 helesinist spiraali.

Peatükk 2

Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

2.1	Jada piirväärtus *	28
2.2	Funktsiooni piirväärtuse mõiste	33
2.3	Ühepoolsed piirväärtused	36
2.4	Funktsiooni piirväärtuse omadused	37
2.5	Funktsiooni piirväärtuse arvutamine	39
2.6	Mõned erilised piirväärtused	42
2.7	Pidevad funktsioonid	45
2.8	Funktsiooni katkevusviise	46
2.9	Pidevate funktsioonide omadused	48

Kontrolltöö teemad

- Piirväärtuse tehete seotud omadused. Piirväärtuse arvutamine.
- Piirväärtuste $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ kasutamine.
- Funktsiooni pidevuse uurimine.

Eksamiteemad

- Piirväärtuse intuiitvne mõiste. Lõpmatud piirväärtused, ühepoolsed piirväärtused.
- Piirväärtuse omadused (teoreemide 6.2-6.6 sõnastused).
- Piirväärtus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- Pideva funktsiooni mõiste. Pideva funktsiooni muudu omadus (märkus 6.2).
- Pidevate funktsioonide omadused. Teoreem vahepealsetest väärtustest.

2.1 Jada piirväärtus *

“Kõigist suuruste muutumisviisidest on kõrgemas matemaatikas eriti tähtsad kaks: suuruste **tõkestamatu kasvamine** ja suuruste **tõkestamatu kahanemine**. Need kaks suuruste muutumisviisi on vahenditeks, mille abil luuakse kõrgema matemaatika põhilised mõisted, nagu piirväärtus, pidevus, tuletis, diferentsiaal ja integraal.”

Näide 2.1 Vaatleme naturaalarvude jada (vt. [30])

$$1, 2, \dots, n, \dots$$

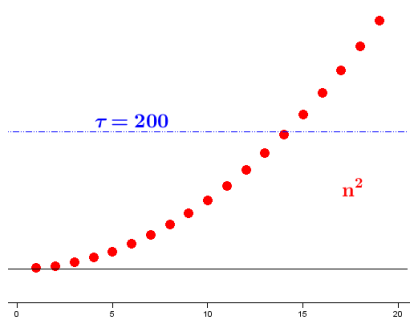
Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Missuguse naturaalarvu me ka võtaksime, ikka leidub veel temale järgnev element. Seepärast naturaalarvude jadal pole viimast elementi, sel jadal pole lõppu, see jada on lõpmatu.

Jadas leidub kõige väiksem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest suurem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järeldub, et antud jadas ei ole kõige suuremat elementi. Näeme, et suurus n ületab kasvades iga etteantud tõkke τ . Teisiti, pole tõket, mida arv n kasvades ei ületaks ehk, lühemalt, arv n kasvab tõkestamatult.

◇ ◇ ◇

Näide 2.2 On kerge näha, et samuti kasvab tõkestamatult jada

$$1, 4, \dots, n^2, \dots$$



◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.1

Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma **väärtuselt saab, ja siis ka jääb**, suuremaks igast etteantud (positiivsest) arvust, siis ütleme, et jada **kasvab tõkestamatult**. Kirjutame

$$x_n \rightarrow \infty.$$

“Igapäevases kõnes kasutame sageli sõnu ja ütlusi, nagu lõpmatu, igavene, hetkeline, mõõtmatu suur, kaduvväike jt. Nii neid kui paljusid teisigi sõnu kasutatakse tavaliselt endale aru andmata, mida nad õieti tähendavad, missuguseid kujutlusi nendega tuleb siduda. Teadust saab aga rajada ainult täpselt defineeritud mõistetele.”

Toodud sissejuhatav tekst ja paljud näited pärinevad õpikust [30], G. Rägo. Kõrgema matemaatika I.



Foto: Vikipeedia.

Gerhard Johannes Rago (5. detsember 1892 - 27. juuni 1968) oli eesti matemaatik.

Piirväärtust vaatleme me lähemalt alles järgmises peatükis. Küll aga on jadade jaoks võimalik sellest rääkida veidi varem. Järgnev jada piirväärtuse mõiste ülesehitus pärineb samuti G. Rago õpikust ja on veidi „leebem“, kui seda õpetatakse matemaatikutele.

Definitsioon 2.2

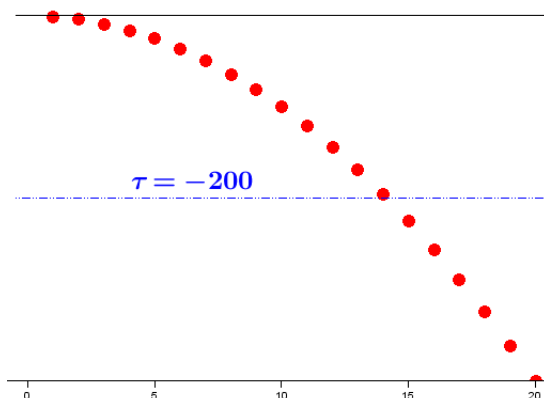
Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma väärtuselt saab, ja siis ka jääb, väiksemaks igast etteantud (negatiivsest) arvust, siis ütleme, et jada **kahaneb tõkestamatult**. Kirjutame

$$x_n \rightarrow -\infty.$$

Näide 2.3 Jada

$$-1, -4, \dots, -n^2, \dots$$

kahaneb tõkestamatult.



◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.3

Kui jada (x_n) elemendid tõkestamatult kasvavad või kahanevad, s.t $x_n \rightarrow \infty$ või $x_n \rightarrow -\infty$, siis me ütleme, et jada (x_n) piirväärtus on lõpmatu. Viimast märgime vastavalt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{või} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

Märkus 2.1

Viimast öeldakse rangemalt ka nii: jada (x_n) piirväärtus on ∞ , kui iga (positiivse) arvu τ korral leidub selline naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$x_n > \tau.$$

Analoogiliselt jada (x_n) piirväärtus on $-\infty$, kui iga (negatiivse) arvu τ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$x_n < \tau.$$

Näide 2.4 Seega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty.$$

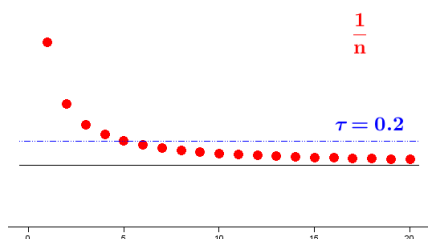
◇ ◇ ◇

Näide 2.5 Vaatleme naturaalarvude jada asemel nende pöördväärtuste jada (vt. [30])

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Antud jada esimene element on 1 ja sellel ei ole eelnevat elementi. Kõigil teistel elementidel on aga olemas eelnev ja järgnev element. Ka see jada on lõpmatu, kuid seekord järjestatud kahanevalt.

Jadas leidub kõige suurem element, milleks on arv 1. Iga järgnev element on eelmisest väiksem ning sellest ja veel lõpmatust jadast järeldub, et antud jadas ei ole kõige väiksemat elementi. Näeme, et arv $\frac{1}{n}$ jääb n kasvades väiksemaks igast etteantud tõkkest $\tau > 0$ ehk, teisiti, pole positiivset tõket, millest arv $\frac{1}{n}$ suuruse n kasvades ei jääks väiksemaks ehk, lühemalt, murd $\frac{1}{n}$ kahaneb tõkestamatult.



Viimast on lihtne näidata. Olgu τ suvaline positiivne arv (siin peetakse silmas, et võib valida kuidahes väikese positiivse arvu). Kõigi n väärtuste korral, kus

$$n > \frac{1}{\tau},$$

kehtib võrratus

$$\frac{1}{n} < \tau.$$

Seega ükskõik, millise positiivse tõkke $\tau > 0$ me ka ette ei annaks, siis mingist n väärtusest alates on arvud $\frac{1}{n}$ sellest tõkkest τ väiksemad.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.4

Kui jada üldliige x_n muutub nii, et ta oma **absoluutväärtuselt saab, ja siis ka jääb** väiksemaks igast etteantud positiivsest arvust, siis ütleme, et jada **piirväärtus** on 0. Viimast märgime

$$x_n \rightarrow 0 \quad \text{või} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

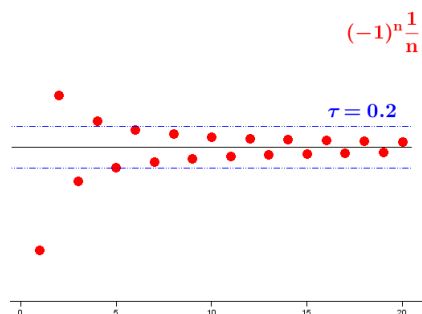
Märkus 2.2

Viimast öeldakse rangemalt nii: jada (x_n) piirväärtus on null, kui iga arvu $\tau > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib $|x_n| < \tau$.

Näide 2.6 Jada võib tõkestamatult kahaneda ka negatiivsest suunast või ka siis, kui tema väärtused on kord positiivsed ja kord negatiivsed. Näiteks on selline jada

$$(x_n) = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

◇ ◇ ◇



Definitsioon 2.5

Kui mingi reaalarvu L korral $|x_n - L| \rightarrow 0$, siis ütleme, et jada (x_n) piirväärtus on L . Viimast märgime

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L.$$

Märkus 2.3

Viimast öeldakse rangemalt nii: jada (x_n) piirväärtus on arv L , kui iga etteantud arvu $\tau > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et iga indeksi $n > N$ korral kehtib

$$|x_n - L| < \tau.$$

Näide 2.7 Jada

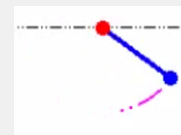
$$0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, \dots$$

piirväärtus on $\frac{1}{3}$, kuna

$$\left| x_n - \frac{1}{3} \right| \rightarrow 0, \quad x_n = 0.\underbrace{33\dots3}_n.$$

◇ ◇ ◇

Vaadeldes tasakaalust välja viidud rippuva laelambi edasitagasi võnkumist, näeme, et võngete amplituudid (suurim kõrvalekalle tasakaaluasendist) on vaheldumisi positiivsed ja negatiivsed, kusjuures mingist arvust võngetest alates amplituudi suurus jääb püsivalt allapoole kuitahes väikesest etteantud tõkest. Teoreetiliselt võiksid võnked järjest vähenedes kesta igavesti. Tegelikult lõpeb liikumine juba mõnekümne võnke järel, kuna võnkuva laelambi energia kulub õhutakistuse ületamisele.



Intuitiivselt võib mõelda ka nii. Jada (x_n) piirväärtus on arv L , kui jada liikmed aina lähenevad ja lähenevad arvule L , sealjuures ei lähene aga ühelegi teisele arvule.

Märgime, et konstantse jada korral on piirväärtus ilmne, näiteks

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

Siin pole enam kuskile läheneda, „enam lähemale ei saa“.

Piirväärtuse tähistusena kasutatakse sümbolit $\lim$, mis on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, ja mis tähendab piiri.

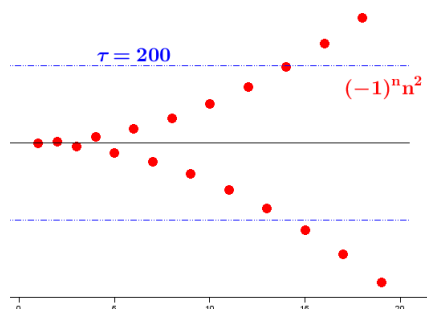
Definitsioon 2.6

Jada (x_n) nimetatakse **koonduvaks**, kui tal eksisteerib lõplik piirväärtus. Jada, mis ei koonu, nimetatakse **hajuvaks** ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ või piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ei leidu).

Näide 2.8 Igal jadal ei pruugi olla piirväärtust. Näiteks jada

$$-1, 4, \dots, (-1)^n n^2, \dots$$

hajub, kuna jada elemendid on vahelduvate märkidega ning need ei jää suuremaks etteantud positiivsest arvust ega jää ka väiksemaks etteantud negatiivsest arvust.



◇ ◇ ◇

Näide 2.9 Vaatleme jada $(x_n) = 1, 0, 1, 0, \dots$. Antud jada hajub, kuna ei leidu piirväärtust $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Kõige lihtsam on mõelda sellest nii, et antud jada korral tema liikmed ei lähene ühelegi kindlale arvule, vaid hoopis võnguvad, olles vaheldumisi 1 ja 0.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.7

Jada (x_n) nimetatakse **tõkestatuks**, kui leidub selline reaalarv $M > 0$ nii, et jada kõik elemendid on absoluutväärtuse poolest väiksemad kui arv M , s.t

$$|x_n| < M, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vastasel korral nimetatakse jada **tõkestamatuks**.

Näide 2.10 On selge, et jadad (n) ja $(-n^2)$ ei saa olla tõkestatud, kuna nad tõkestamatult kasvavad. Jada $(1/n)$ on tõkestatud iga arvuga $M > 1$. Samuti on tõkestatud jada $1, -1, 1, -1, \dots$, kuigi see jada ei ole koonduv.

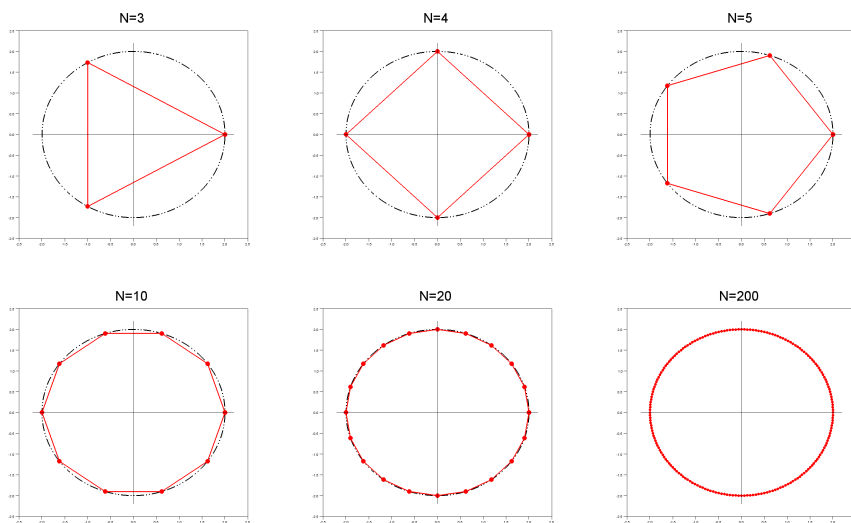
◇ ◇ ◇

2.2 Funktsiooni piirväärtuse mõiste

Paljud loodusteaduse ja tehnika küsimused seavad meid vajaduse ette uurida funktsiooni käitumist argumendi lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Näiteks võib meid huvitada küsimus, kuidas käitub vedeliku ruumala temperatuuri lähenemisel keemispunktile, kuidas käitub terasvarda venivus koormuse lähenemisel elastsuspiirile jne.

Piirväärtuse mõiste on matemaatilise analüüsi üks alustalasid ja see eristab matemaatilist analüüsi näiteks algebrast ja trigonomeetriast. Sellele mõistele baseerub enamus meie järgmistes loengutes vaadeldavatest mõistetest, nagu näiteks funktsiooni pidevus, tuletis, keha hetkkiirus, integraal. Samal ajal, kui tegemist on olulise mõistega, on tegemist ka keerulise mõistega. Sellest tingituna anname oma põhikursuses piirväärtuse mõiste pigem intuitiivselt, kui matemaatiliselt range eeskirja abil. Viimase kohta võib lugeda lisas leiduvast materjalist.

Vaatleme näiteks ringjoone pikkuse arvutamist. Viimast saaksime ligikaudu arvutada sirge joonlaua abil, mõõtes ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurkade külgede pikkused.



Mida suuremaks läheb hulknurga külgede arv N , seda täpsem peaks olema meie poolt mõõdetud ja arvutatud ringjoone ümbermõõt. Seega on piirväärtuse leidmisel oluline „protsess“, milleks antud olukorras on hulknurga külgede arvu suurendamine. Praktikas tuleb mingil hetkel paratamatult tunnistada, et mõõtetäpsusel on omad piirangud. Küll aga saame praktiliste mõõtmiste asemel jätkata teoreetiliste arvutustega. Saab näidata, et sellisel viisil koostatud hulknurkade külgede summa tõepoolest läheneb väärtusele $2\pi r$, mis kujutab endast ringjoone ümbermõõtu.

Newtoni aegadel ei olnud piirväärtuse mõiste veel päris selge, korrektselt range definitsioon puudus (see viimane ei seganud Newtonil ja Leibnizil andmast väga olulisi praktilisi tulemusi).

Kasutati umbes sellist läheneviisi, et kui Δx voolab nulli, siis $2 + \Delta x$ voolab arvaks 2. Või siis, kui Δx on piisavalt väike (samal ajal ei tohi Δx võrduda nulliga), siis $2 + \Delta x$ on piisavalt lähedane arvuga 2. Paneme tähele, et need mõisted “piisavalt” ja “voolab” on üsna udused mõisted. Matemaatikas on olukordi, kus sellisest kirjeldusest ei piisa. Kui me ei saa Δx võtta võrdseks nulliga, siis me ei saa ka niisama lihtsalt tõestada, et protsessi $2 + \Delta x$ tulemus on tõesti arv 2.

Näiteks 1797. aastal üritas Joseph-Louis Lagrange tulevise mõistet edasi anda ilma piirväärtuse mõisteta, üritades läbi ajada ainult algebraliste vahenditega (astmeridadega). Lagrange mõistis, et tema väited ei olnud matemaatiliselt alati korrektsed, kuid ei pidanud neid erijuhte eriti tähtsaks.

Bernard Bolzano aastal 1817 ja Augustin-Louis Cauchy aastal 1821 andsid (ϵ, δ) -tüüpi definitsioonid, mis hülgasid geomeetrilise lähenemise ja võtsid kasutusele analüütilise. Karl Weierstrass (1815 - 1897) andis definitsioonile kaasajal laialt kasutatava sõnastuse.



Weierstrass

Karl Weierstrass
Allikas: Wikipedia

Näide 2.11 Vaatleme funktsiooni $f(x) = x - 1$. Lihtne on näha, et kui läheneme argumentiga x tõkestamatult arvule 1, siis funktsiooni väärtused $x - 1$ lähevad tõkestamatult nullile:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	...	1.0001	1.001	1.01
$f(x)$	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	...	0.0001	0.001	0.01

Antud juhul saab arvutada ka f väärtuse kohal $x = 1$ ja selleks on $f(1) = 0$. Viimane kujutab endast ühtlasi funktsiooni f piirväärtust argumenti x lähenemisel arvule 1.

◇ ◇ ◇

Näide 2.12 Vaatleme järgmist funktsiooni

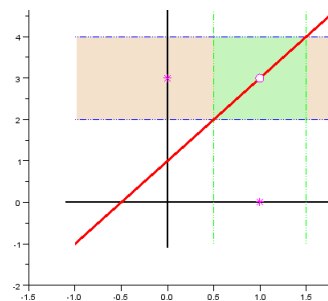
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1,$$

mis ei ole määratud $x = 1$ korral. Viimane tähendab, et me ei saa leida funktsiooni väärtust $f(1)$. Proovides argumentiga x minna arvule 1 kuitahes lähedale, saame siiski arvutada

x	0.9	0.99	0.999	...	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	...	2.001	2.01	2.1

Võib täheldada, et argumenti x lähenedes arvule 1 funktsiooni väärtused $f(x)$ lähevad arvule 2. Oma arvutusi võiksime niimoodi jätkata, võttes x väärtusi arvule 1 järjest lähemal ja lähemal. Osutub, et sel korral on argumenti x lähenemisel arvule 1 funktsiooni f piirväärtuseks arv 2, hoolimata sellest, et punktis $x = 1$ ei ole funktsioonil väärtust.

◇ ◇ ◇

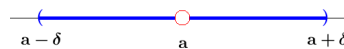


Definitsioon 2.8

Olgu antud $a \in \mathbb{R}$ ja $\delta > 0$. Punkti a **ümbruseks** nimetatakse vahemikku $(a - \delta, a + \delta)$, seda nimetatakse veel δ -ümbruseks.

Definitsioon 2.9

Hulga $X \subset \mathbb{R}$ **kuhjumispunktiks** nimetatakse punkti $a \in \mathbb{R}$, kui punkti a iga ümbrus sisaldab vähemalt ühte temast erinevat hulga X punkti.



Märkus 2.4

Edaspidi vaatleme alati piirprotsesse, kus a on kuhjumispunkt, kusjuures ta ei pruugi kuuluda funktsiooni määramispiirkonda.

Esitame järgnevalt funktsiooni piirväärtuse üldise sõnastuse, mis selektab küll ära mõiste sisu, kuid ei anna konkreetset eeskirja piirväärtuse leidmiseks. Teisalt, viimane ei sega meid edaspidi piirväärtust arvutamast, kuna praktikas vajame me enamasti piirväärtuste omadusi, mitte definitsiooni ennast.

Definitsioon 2.10

Funktsiooni piirväärtus. Olgu a funktsiooni f määramispiirkonnas X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktile a piisavalt lähedastes määramispiirkonnas X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kuitahes vähe.

Märkus 2.5

Funktsiooni piirväärtuse definitsiooni korrektne teine pool: kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub reaalarv $\delta > 0$ selliselt, et

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Näide 2.13 Funktsioonil

$$f(x) = \cos \frac{1}{x}$$

puudub piirväärtus protsessis $x \rightarrow 0$, kuna kuitahes lähedalt nullile me x väärtusi ka ei võtaks, siis ikka leidub neid x väärtusi, mille korral f väärtus on 1 või -1 , s.t funktsiooni f väärtused ei lähene mingile konkreetsele arvule.

Näide 2.14 Funktsioonil

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ 2x + 3, & x > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

puudub piirväärtus protsessis $x \rightarrow 1$, sest kui argumenti x väärtused lähenevad arvule 1 vasakult poolt, siis $f(x)$ läheneb arvule 3, kui aga x väärtused lähenevad arvule 1 paremalt poolt, siis $f(x)$ läheneb arvule 5. Seega ei saa protsessis $x \rightarrow 1$ toimuda $f(x)$ lähenemist ühele kindlale arvule.

Definitsioon 2.11

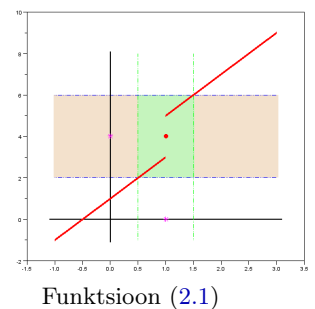
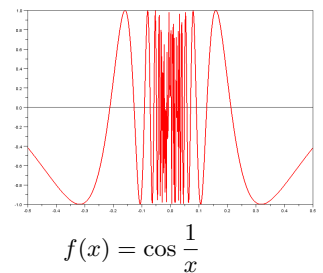
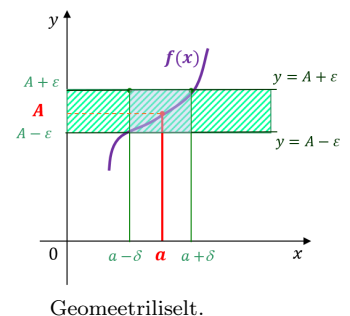
Funktsiooni lõpmatud piirväärtused. Öeldakse, et funktsioonil f on piirväärtus ∞ protsessis $x \rightarrow a$, $a \in \mathbb{R}$, kui argumenti x lähenemine arvule a toob kaasa $f(x)$ tõkestamatu kasvamise. Sel juhul kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Kui aga protsessis $x \rightarrow a$ toimub $f(x)$ tõkestamatu kahanemine, siis ütleme, et funktsioonil f on selles protsessis piirväärtus $-\infty$ ja kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

Argumenti x tõkestamatu lähenemine arvule a tähendab, et vaadeldakse kõikvõimalikke jadade koondumisi $x_n \rightarrow a$. Sellele vastavalt toimub funktsiooni väärtuste koondumine $f(x_n) \rightarrow A$.

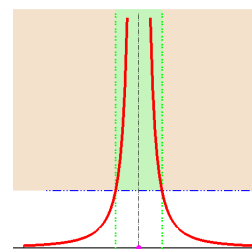


Albert Einstein: "Ainult kaks asja on lõpmatud: universum ja inimese lollus, ning ma pole kindel esimeses."

Näide 2.15 Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

◇ ◇ ◇



$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

2.3 Ühepoolsed piirväärtused

Ühepoolsed piirväärtused

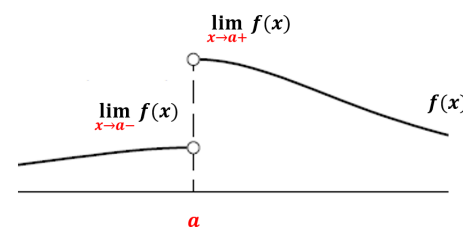
Vaatleme piirprotsesse:

1. $x \rightarrow a$, $x > a$, lähenemine toimub paremalt, s.o parempoolne piirväärtus. Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) \quad (\text{või } f(a+)).$$

2. $x \rightarrow a$, $x < a$, lähenemine toimub vasakult, s.o vasakpoolne piirväärtus. Tähistame

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \quad (\text{või } f(a-)).$$



Ühepoolsed piirväärtused.

Teoreem 2.1

Funktsiooni piirväärtuse eksisteerimine. Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis (nn. kahepoolne) piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ eksisteerib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Näide 2.16 Funktsioonil

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

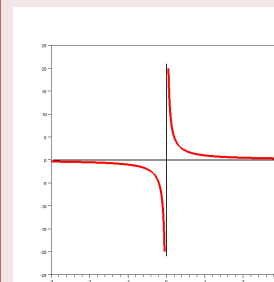
on olemas ühepoolsed piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty,$$

kuid on selge, et ei eksisteeri kahepoolset piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

◇ ◇ ◇

NB! Funktsiooni $f(x) = \frac{1}{x}$ (graafikul) piirväärtus on kontrolltöös sageli valesti leitud.



Näide 2.17 Funktsioonil

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

ei ole piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$, kuna sel juhul $x-1 < 0$ ja ruutjuur ei ole defineeritud. Samas $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$.

◇ ◇ ◇

Ühepoolseteks piirväärtusteks loeme ka $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, kui need on olemas.

Näide 2.18 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1}.$$

Kirjutame

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2},$$

sest $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, kui $x \rightarrow \infty$.

◇ ◇ ◇

2.4 Funktsiooni piirväärtuse omadused

Teoreem 2.2

Piirväärtuse ühesus. Vaadeldavas protsessis (kas ühe- või kahepoolses) saab funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

Tõestus. Tõestuse võib leida näiteks õpikust [23]. □

Definitsioon 2.12

Funktsiooni f nimetatakse **tõkestatuks hulgal** X , kui leidub arv $M > 0$ nii, et $|f(x)| \leq M$ iga $x \in X$ korral.

Funktsioon $f(x) = x$ on tõkestatud lõigul $[-3, 2]$, kuna näiteks $M = 100$ jaoks (tegelikult iga $M \geq 3$ jaoks) kehtib $|f(x)| = |x| \leq 100$ iga $x \in [-3, 2]$ korral. Samas ei ole f tõkestatud hulgal $\mathbb{R}$.

Teoreem 2.3

Piirväärtus tõkestatud funktsiooni korrutisest funktsiooniga, mille piirväärtus on null.

Kui funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses ja

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$$

siis

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = 0.$$

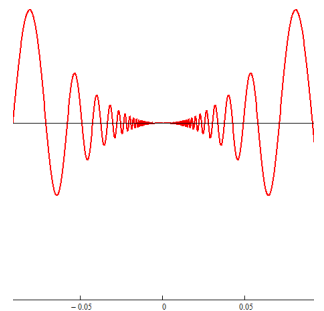
Näide 2.19 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right).$$

Siin $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Samas piirväärtust $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ ei eksisteeri (võnkuv funktsioon). Kuna aga $|\cos x| \leq 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (s.t koosinus on tõkestatud), siis viimase teoreemi järgi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 0.$$

◇ ◇ ◇



Teoreem 2.4

Tehetega seotud piirväärtuse omadused.

Kui on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

siis kehtivad järgmised tehetega seotud omadused:

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cA, \quad c \in \mathbb{R};$
3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = AB;$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{kui } B \neq 0.$

Teoreemi eeldus lõplike piirväärtuste leidumise kohta on oluline. Piirväärtused A ja B peavad olema reaalarvud.

Märkus 2.6

Teoreemi nõue, et peavad eksisteerima lõplikud piirväärtused $\lim f(x)$ ja $\lim g(x)$, on olulised. Vastasel juhul näiteks $f(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$ ja $g(x) = \frac{1}{|x|}$ korral

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

aga kasutades valesti teoreemi esimest omadust, saaksime

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) \xrightarrow{\text{EI KEHTI}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{|x|} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = -\infty + \infty.$$

Tehe $\infty - \infty$ **ei ole defineeritud**, ei ole mõistlik defineerida näiteks $\infty - \infty$ võrdseks nulliga, tegemist on määramatusega.

Antud näitest võime ka näha, et lõpmatute piirväärtuste $\lim f(x)$ või $\lim g(x)$ korral (või ka siis, kui neid piirväärtusi ei eksisteerigi) võib funktsioonide summal $f + g$ antud protsessis lõplik piirväärtus ikkagi leiduda. Analooiline on olukord vahel, korrutise ja jagatise korral.

Näide 2.20 Arvestades tehetega seotud omadusi, saame

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x - 2)x^2 = 2 \cdot 16 = 32.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 2.5

Kahepoolse tõkke omadus (sändvitš-teoreem).

Kui kehtivad võrratused

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

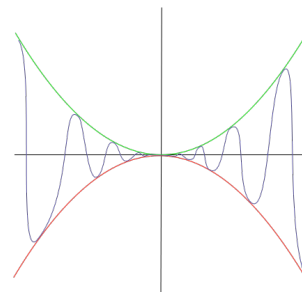
ja on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A,$$

siis on olemas ka piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ning

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A.$$

Kahepoolse tõkke omadust nimetatakse ka "Squeeze Theorem" või ka "võileiva omaduseks" ("Sandwich Rule").



Joonis: Wikipedia

Nullümbrites, keskmine sinine joon $g(x)$ saab sama piirväärtuse, mis ülemine (roheline) $h(x)$ ja alumine (punane) $f(x)$.

Näide 2.21 Kasutades omadust $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, leiame piirväärtuse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6}.$$

Paneme tähele, et $n > 6$ korral kehtib

$$1 < 6 < n.$$

Samuti jäävad võrratused kehtima, kui neist võtta mingit järku juur,

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{6} \leq \sqrt[n]{n}.$$

Kuna $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, siis kahepoolse tõkke omaduse tõttu järeldub, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{6} = 1.$$

◇ ◇ ◇

2.5 Funktsiooni piirväärtuse arvutamine

Üks võimalus on argumendi x asemele panna arvule a lähedasi arve ja vaadata, mis edasi saab. Sellist võtet kasutasime peatüki alguses. Võte võib nõuda aga ülearuseid arvutusi ja on mitterange meetod.

Teoreem 2.6

Teoreem elementaarfunktsioonide piirväärtustest. Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Märkus 2.7

Antud teoreem lubab paljudel juhtudel piirväärtuse leidmist lihtsustada. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\cos \frac{2x-3}{x+1} + e^{4x+3} \right) = \cos \frac{3}{4} + e^{15}.$$

Samas ei saaks piirväärtust niimoodi leida, kui protsessi $x \rightarrow 3$ asemel oleks protsess $x \rightarrow -1$, kuna $\frac{2x-3}{x+1}$ ei ole määratud punktis $x = -1$, mis tähendab, et teoreemi ei saa rakendada. Protsessis $x \rightarrow -1$ sellel funktsioonil piirväärtust ei eksisteeri.

Argumendi asendamine. Asendame argumendi x suurusega $a + \Delta a$, kus $\Delta a \rightarrow 0$, ja üritame avaldist teisendada. Selline võte võib praktikas anda häid tulemusi (kuigi ettevaatlik tuleb siiski olla).

Näide 2.22 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}.$$

Tegemist on elementaarfunktsiooni piirväärtusega, kuid kahjuks $x = 3$ ei kuulu tema määramispiirkonda. Asendame $x = 3 + \Delta a$ ja leiame

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{(3 + \Delta a)^2 - 9}{3 + \Delta a - 3} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{9 + 6\Delta a + (\Delta a)^2 - 9}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} (6 + \Delta a) = 6.$$

◇ ◇ ◇

Määramatuse kõrvaldamine. Mõnikord on otstarbekas avaldist teisendada nii, et algne määramatus saaks kõrvaldatud.

Märkus 2.8

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb avaldist, millest leitakse piirväärtust, teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

Näide 2.23 Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1}$$

arvutamisel ei saa kohe asendada $x = 1$, kuna tekib määramatus $\frac{0}{0}$. Jagamise korral võib võrdseid nullist erinevaid avaldise omavahel taandada. Siin taandatakse $\frac{x-1}{x-1}$, kus $x \neq 1$ ehk $x - 1 \neq 0$ (piirväärtus ei sõltu sellest, milline on funktsiooni väärtus punktis $x = a$ ehk siin $x = 1$, vaid väärtusest punkti a lähedal). Seega

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide uurimise ja kasutamise korral on kasulik meelde tuletada järgmised võrdused:

$$\begin{aligned} (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2, & (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), & a^3 \pm b^3 &= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2). \end{aligned}$$

Näide 2.24 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$$

◇ ◇ ◇

Sama astme polünoomide jagamisel protsessis $x \rightarrow a$ tuleks määramatuse $\frac{0}{0}$ korral võimalusel kasutada algebralisi võrduseid.

Näide 2.25 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

Siin $x = 0$ ei kuulu vaadeldava funktsiooni määramispiirkonda. Järgnevalt kasutame korrutamise võtet (idee on kasutada ruutude vahe valemit $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$),

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+x} + 1)}{1+x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} + 1) = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui lugejas või nimetajas on ruutjuur, siis määramatuse korral tuleks võimalusel sellest irratsionaalsusest vabandada. Tüüpiline võte selleks on kasutada ruutude vahe valemit

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Näide 2.26 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2}.$$

Viimast saame teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} \frac{\sqrt{x^2 + 100} + 10}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 100 - 100}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 100} + 10)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 100} + 10} = \frac{1}{20} = 0.05. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.27 Kui kahe muutuja x polünoomi jagamisel protsessis $x \rightarrow \pm\infty$ tekib $\frac{\infty}{\infty}$, siis võetakse lugejas ja nimetajas sulgude ette muutuja x kõrgeima astmega liige. Näiteks

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{1}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Polünoomide jagamisel protsessis $x \rightarrow \pm\infty$ tuleks lugejas ja nimetajas sulgude ette tuua x kõrgeima astmega liige x^n . Sellisel juhul jääb sulgudesse alati tõkestatud avaldis (kuna liikmed $\frac{1}{x^m} \rightarrow 0$, kui $x \rightarrow \pm\infty$).

Näide 2.28 Vaatleme veel piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

Klassikaline viga on siin kirjutada, et $\infty - \infty$ võrdub nulliga. Selgub, et viimane on vale vastus. Piirväärtuse leiame järgmiselt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

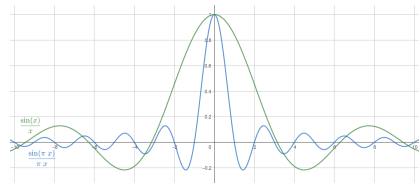
◇ ◇ ◇

2.6 Mõned erilised piirväärtused

Teoreem 2.7

Kehtib valem

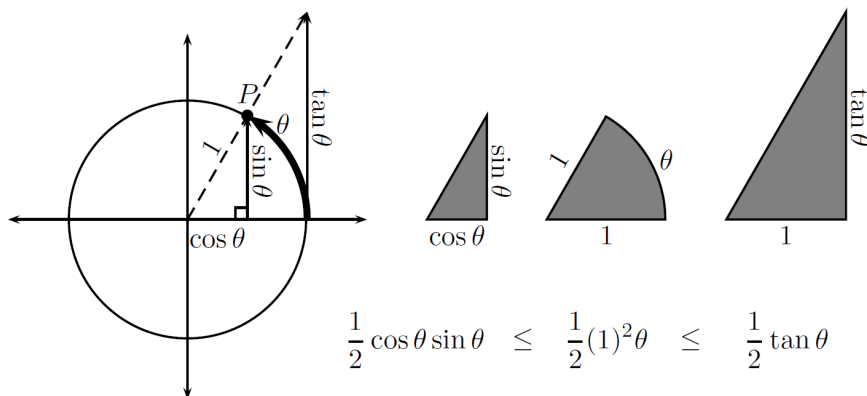
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (2.2)$$



Graafikud $\frac{\sin x}{x}$ ja $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Punkt $x = 0$ ei kuulu funktsiooni f määramispiirkonda, kuid mujal on f määratud.

Funktsioon f on paarisfunktsioon ja piisab näidata, et $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Vaatleme ringjoont raadiusega 1. Asetame I veerandisse ringjoonele punkti P . Moodustame täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiga 1, ringi sektori kuni punktini P (kaarepikkusega x radiaani) ja täisnurkse kolmnurga külgedega 1 ja $\tan x$ (joonisel kasutatud θ on meil x).



Joonis: [3].

Ühikringi pindala on π ja übermõõt 2π , millest pindala avaldub poole übermõõduga. Sama suhe jääb kehtima, kui võtame ringist sektori. Siit saame, et loodud sektori pindala on $\frac{x}{2}$. Jooniselt on selge, et moodustatud kujundite pindalade kohta kehtivad võrratused

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{\tan x}{2} \quad \text{ehk} \quad \cos x \sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kui $0 < x < \frac{\pi}{2}$, siis võime jagada võrratust positiivse arvuga $\sin x > 0$,

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Kuna $\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\cos x} = 1$, siis kahepoolse tõkke omaduse põhjal saame

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{ehk} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = 1.$$

□

Järeldus 2.1

Kehtib

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Järeldub võrdusest

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Näide 2.29 Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}.$$

Kui $x \rightarrow 0$, siis ka $2x \rightarrow 0$ ja me saame muutujavahetuse $u = 2x$ abil kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 2.30 Oluline on jälgida protsessi, milles piirväärtust leitakse.

Näiteks piirväärtuse

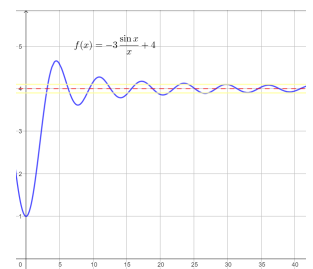
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3 \sin x}{x} + 4 \right)$$

korral on väga ahvatlev kasutada just vaadeldud piirväärtuse omadust (2.2), kuid kuna siin $x \rightarrow \infty$ ja mitte $x \rightarrow 0$, siis me ei saa valem (2.2) kasutada. Küll aga märkame, et $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x} \rightarrow 0$ protsessis $x \rightarrow \infty$ ja kuna $\sin x$ on tõkestatud, siis tegelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3 \sin x}{x} + 4 \right) = 0 + 4 = 4.$$

Samas võib märgata, et kui oleks protsess $x \rightarrow 0$, siis saaksime valem (2.2) kasutada ja piirväärtus oleks $-3 + 4 = 1$.

◇ ◇ ◇



$$f(x) = \frac{-3 \sin x}{x} + 4.$$

Lause 2.1

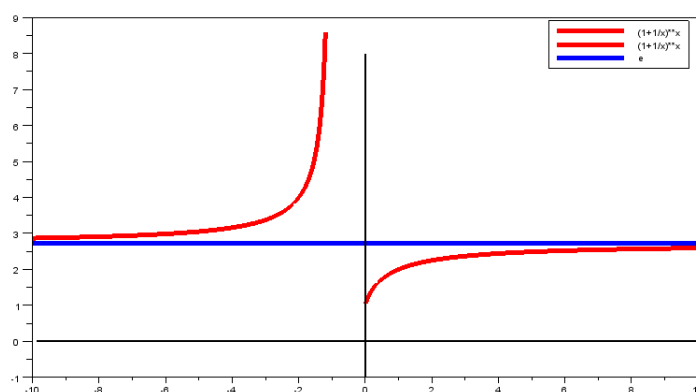
Eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Arv e on irratsionaalarv ja $e = 2,7182818\dots$. Tähis e on kasutusel üldlevinult.

Võrdus kehtib ka protsessis $x \rightarrow -\infty$.

Tõestus on toodud osaliselt õpikus [34].



Näide 2.31 Vaatleme pideva intressi mudelit. Pideva intressi korral arvutatakse intress põhimõtteliselt igal ajamomendil.

Te olete võtnud 500 eurot laenu intressiga 5% kuus ($r = 0.05$). Sel juhul n kuu möödudes on summa kasvanud

$$S_n = 500(1 + r)^n$$

euroni. Seega on ühe aastaga võlg kasvanud

$$S_{12} = 500 \cdot 1.05^{12} \approx 898 \text{ euroni.}$$

Pideva intressi korral jaotatakse see 5% igale ajaühikule laiali, ehk $r = \frac{0.05}{N}$, kus $N \rightarrow \infty$ on ühes kuus toimunud intressi arvestamiste arv. Sel juhul n kuu vältel arvestatakse intressi nN korda ehk

$$S_n = 500 \cdot \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{nN} = 500 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{N}{r}}\right)^{\frac{N}{r}}\right)^{nr}.$$

Kui $N \rightarrow \infty$, siis ka $\frac{N}{r} \rightarrow \infty$ ja me näeme, et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_n = 500e^{nr}.$$

Seega pideva intressi mudeli järgi on laen ühe aastaga kasvanud

$$500e^{0.05 \cdot 12} \approx 911 \text{ euroni.}$$

◇ ◇ ◇

NB! Hoolimata sellest, et ühel korral võetakse intressiks lõpmata väike summa $\frac{r}{N} \rightarrow 0$, siis kõik kokku liites ($N \rightarrow \infty$) saame ikkagi märkimisväärse summa.

Seda on umbes 13 eurot rohkem kui diskreetse mudeliga. Pideva intressi mudel on alati kahjulikum laenu võtjale ja kasulikum laenu andjale.

Näide 2.32 Leiame piirväärtuse

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+1}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(x-1)+4} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}, \end{aligned}$$

sest $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^4 = 1$. Kui $x \rightarrow \infty$, siis ka $u = x-1 \rightarrow \infty$. Järelikult

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e.$$

◇ ◇ ◇

Lause 2.2

Kehtib

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Tõestus on toodud õpikus [23].

2.7 Pidevad funktsioonid

Igapäevaelus on tuntud ütlused, nagu „kütusehinna hüppeline tõus“, „katkematu sündmuste ahel“, „pidevalt töötav seadeldis“ jne. Me arvame, et meil on enam-vähem selge, mida need sõnad tähendavad. Ütlused, nagu „funktsioon katkeb“ ja „funktsioon on pidev“ on matemaatilised mõisted ja vajavad seetõttu täpset piiritlemist.

Vaatleme reaalmuutuja funktsioone $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu $a \in X$.

Definitsioon 2.13

Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks punktis** a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Märkus 2.9

Selleks, et funktsioon oleks **pidev punktis** a , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

1. funktsioonil on olemas väärtus $f(a)$;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ protsessis $x \rightarrow a$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon f on **katkev** punktis a (punkti a nimetatakse funktsiooni f **katkevuspunktiks**). Katkevuspunktist a räägitakse ka siis, kui funktsioon f ei ole määratud punktis a , kuid eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Praktikas on pidevad funktsioonid olulised. Mitterangelt võime pidevast funktsioonist mõelda kui funktsioonist, mille graafiku joonestamisel ei pea pliiatsit paberilt tõstma.

Näide 2.33 Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{kui } x \neq 2, \\ 4, & \text{kui } x = 2. \end{cases}$$

Võib leida, et protsessis $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$$

Seega eksisteerib piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$. Samuti $f(2) = 4$. Kuna

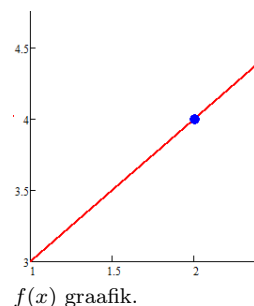
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2), \text{ siis see funktsioon on pidev punktis } 2.$$

Kui funktsioon f oleks defineeritud nii, et tal oleks punktis 2 mingi teine väärtus, siis tingimus $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ ei kehtiks ja funktsioon oleks katkev punktis 2.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 2.14

Me ütleme, et **funktsioon** f on **pidev hulgal** X , kui f on pidev selle hulga igas punktis. Kui $X = \mathbb{R}$, siis ütleme, et funktsioon f on pidev kõikjal.



$f(x)$ graafik.

Analoogiliselt ühepoolsetele piirväärtustele on olemas ühepoolse pidevuse mõisted: vasakult pidev ja paremalt pidev. Sel juhul tuleb protsess $x \rightarrow a$ välja vahetada vastava ühepoolse piirväärtusega $x \rightarrow a^-$ või $x \rightarrow a^+$.

Anname pidevuse definitsioonile teise kuju. On selge, et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

kehtib parajasti siis, kui

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0.$$

Tähistame argumendi muudu $\Delta x = x - a$ ning funktsiooni muudu $\Delta f = f(x) - f(a)$. Siis saame

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Märkus 2.10

Funktsioon on pidev, kui argumendi x väikesel muutmisel ka funktsiooni muut Δf muutub vähe, ehk

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0.$$

Näide 2.34 Näitame, et $f(x) = \frac{1}{x}$ on pidev igas punktis $x \neq 0$. Olgu punktis $x \neq 0$ argumendi juurdekasv Δx . Siis Δx lähenemisel nullile saame

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} = 0.$$

Järelikult on funktsioon pidev igas punktis $x \neq 0$.

◇ ◇ ◇

2.8 Funktsiooni katkevusviise

Kõrvaldatav katkevus. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Punktis $x = 2$ ei ole funktsioon määratud, kuid piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$ siiski eksisteerib,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

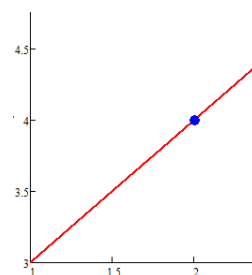
Funktsioon on katkev punktis $x = 2$, kuigi tal on olemas piirväärtus protsessis $x \rightarrow 2$. Katkevus on kõrvaldatav, kuna saaksime vajadusel defineerida $f(2) = 4$ ja siis oleks kõik pidevuse nõuded täidetud.

Hüppeline katkevus. Vaatleme funktsiooni

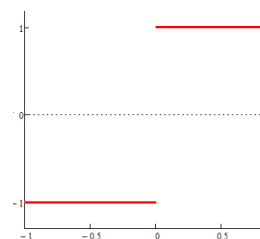
$$f(x) = \frac{x}{|x|},$$

mis ei ole punktis $x = 0$ määratud. Leiame ühepoolsed piirväärtused:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{|x|} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x}{|x|} = -1.$$



$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ graafik.



$f(x) = \frac{x}{|x|}$ graafik.

Kuna parem- ja vasakpoolsed piirväärtused on erinevad, siis puudub mõlemapoolne piirväärtus protsessis $x \rightarrow 0$. Sellel funktsioonil on punktis 0 hüpeline katkevus, mis ei ole kõrvaldatav.

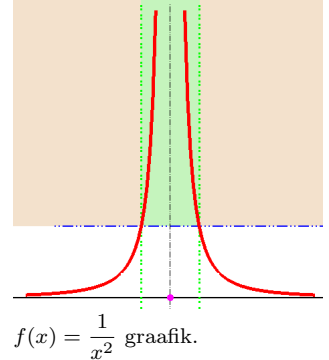
Lõpmatu katkevus. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

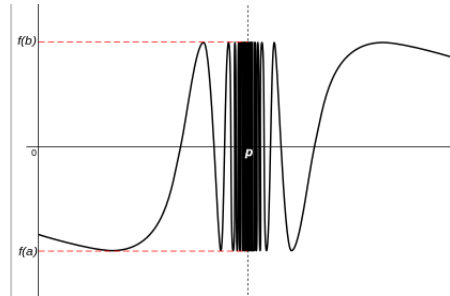
Funktsioon on määramata punktis $x = 0$ ja piirväärtus võrdub

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Funktsioon on siin katkev seetõttu, et punktis 0 ta ei ole määratud. Seejuures ei ole katkevust võimalik kõrvaldada. Märgime, et see funktsioon on katkev ainult punktis $x = 0$, mujal on ta pidev.



Ostsilleeriv katkevus. Vaatleme funktsiooni, mille graafik on



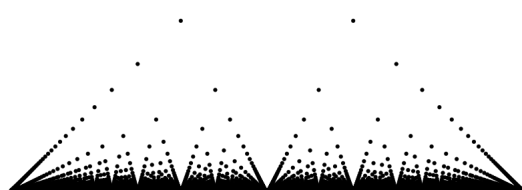
Joonis: Wikipedia.

Ilma et me teaksime selle funktsiooni avaldist, võib öelda, et see funktsioon ei ole pidev (joonise keskpunktis), kuna võnkumine toimub konstantse amplituudiga ja keskpunktis ei ole funktsioonil piirväärtust. Seda tüüpi funktsiooniks on näiteks $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, millel ei ole piirväärtust protsessis $x \rightarrow 0$. Võrdluseks märgime, et funktsioon $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ on kõikjal pidev, kui määrata $f(0) = 0$.

Märkus 2.11

Toome ühe näite funktsioonist, mille pidevust uurida on suhteliselt keeruline:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & , x \in \mathbb{Q}, \quad q > 0, \quad \left(x = \frac{p}{q} \text{ taandatud kujul}\right), \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$



Joonis: $f(x)$ graafik [3].

Joonisel toodud funktsiooni konstrueeris saksa matemaatik Carl Johannes Thomae (1840 - 1921) ja see on pidev irratsionaalsetes punktides x , kuid katkev kõikides ratsionaalsetes punktides x . Antud funktsiooni nimetatakse ka popkorni või siis vihmapiiskade funktsiooniks.

Igapäevaelu praktikas selliste funktsioonidega kokku ei puututa. Tegemist on matemaatiliselt teoreetilise näitega. On olemas ka funktsioone, mis on kõikjal defineeritud, kuid ei ole pidevad mitte üheski punktis, näiteks

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & , x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2.9 Pidevate funktsioonide omadused

Lause 2.3

Tehetega seotud pidevuse omadused.

Olgu f ja g pidevad funktsioonid punktis $x = a$. Siis ka

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x)g(x)$$

ja

$$\frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{kui } g(a) \neq 0,$$

on pidevad funktsioonid punktis $x = a$.

Tehetega seotud omadused järelduvad piirväärtuste omadustest.

Teoreem 2.8

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 2.35 Viimase teoreemi järgi teame, et elementaarfunktsioon $f(x) = x^2$ on pidev kogu reaalteljel. Seega $f(3.14)$ on päris hea lähisväärtus täpsele väärtusele $f(\pi)$. Argumendi muut $\Delta x = \pi - 3.14$ ei ole suur, seega ka funktsiooni muut $\Delta f = f(\pi) - f(3.14)$ ei saa olla suur. Kui me tahame täpsemat tulemust, siis piisab võtta argumendi 3.14 asemel rohkem arvu π komakohti.

Võrdluseks vaatame kirja saatmise hinna funktsiooni

$$p(x) = \begin{cases} 34 \text{ senti}, & 0 < x < 100 \text{ grammi}, \\ 57 \text{ senti}, & 100 \leq x \leq 200 \text{ grammi}. \end{cases}$$

Sellisel juhul $p(99) = 34$, aga $p(101) = 57$, s.t väike raskuse muutmine toob kaasa suure hinna kõikumise (punkti $x = 100$ ümber võime võtta kuitahes väikese raskuse muudu, aga hinna muutus jääb ikka nullist oluliselt suuremaks). Funktsioon p ei ole pidev punktis $x = 100$.

◇ ◇ ◇

Lause 2.4

Lõigus pideva funktsiooni väärtused on tõkestatud.

Lause 2.5

Lõigus pidev funktsioon omandab lõigu mingis punktis oma vähima ja mingis punktis oma suurima väärtuse kõigi lõigus olevate argumentide korral omandatavate väärtuste hulgas.

Näide 2.36 Näitame, et punktis $x = 2$ katkeva funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

saab jätkata pidevaks funktsiooniks punktis $x = 2$.

Esiteks märgime, et f kui elementaarfunktsioon on pidev punktist 2 erinevates punktides. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

Jätkatud funktsioon g on pidev punktis $x = 2$, s.t $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$, kui defineerida

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 2, \\ \frac{5}{4}, & x = 2. \end{cases}$$

◇ ◇ ◇

Lõigus pidevad funktsioonid asuvad nii teoorias kui praktikas tähtsal kohal.

On palju tulemusi stiilis “kui funktsioon f on pidev mingis piirkonnas, siis kehtib ...”. Toome näite, mis omab ka praktikas olulist rolli.

Teoreem 2.9

Teoreem vahepealsetest väärtustest (*Intermediate Value Theorem*, vt. [3, 13]). Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis tal on kõik väärtused $f(a)$ ja $f(b)$ vahel. Kui näiteks

$$f(a) < y < f(b),$$

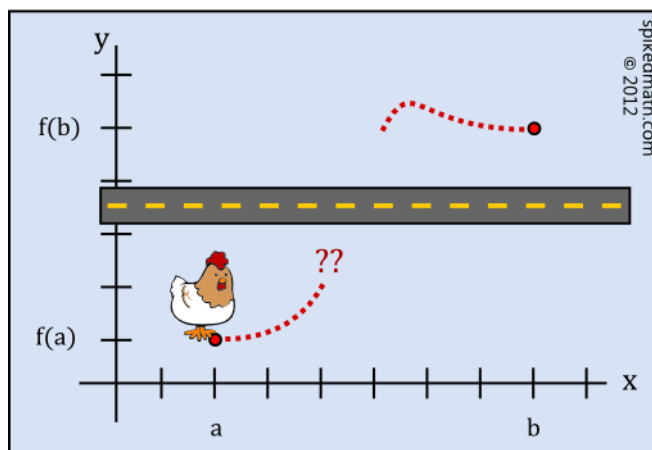
siis on olemas $x \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus $f(x) = y$. Analoogiliselt: kui

$$f(a) > y > f(b),$$

siis on olemas $x \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus $f(x) = y$.

Viimane teoreem ei ütle meile, kus asub see punkt x , et kehtiks $f(x) = y$, ja ta ei ütle meile, kui palju selliseid erinevaid väärtusi x (et kehtiks $f(x) = y$) üldse on. Küll aga on omaette väärtus ka antud infol, me teame, et selline (vähemalt üks) punkt x on tõepoolest olemas.

WHY DID THE CHICKEN CROSS THE ROAD?



THE INTERMEDIATE VALUE THEOREM.

Joonis: spikedmath.com

Peatükk 3

Funktsiooni tuletis ja diferentsiaal

3.1	Keskmine kiirus ja hetkkiirus	52
3.2	Tuletise definitsioon	54
3.3	Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised	56
3.4	Diferentseerimise reeglid	58
3.5	Liitfunktsiooni tuletis	59
3.6	Logaritmilise diferentseerimise võte	60
3.7	Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus	60
3.8	Kõrgemat järku tuletised	62
3.9	Joone puutuja ja normaali võrrandid	64
3.10	Funktsiooni diferentsiaal	66

Kontrolltöö teemad

1. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
2. Diferentseerimise reeglid ja nende rakendamine.
3. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
4. Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
6. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

Eksamiteemad

1. Tuletise definitsioon ja geomeetiline tõlgendus. Teist järku tuletise mõiste.
2. Tuletise definitsiooni kasutamine lihtsamal juhul.
3. Diferentseeruv funktsioon. Teoreem punktis diferentseeruva funktsiooni pidevuse kohta.
4. Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletis.
5. Joone puutuja ja normaali võrrandid.
6. Diferentsiaali mõiste. Diferentsiaali kasutamine ligikaudsetes arvutustes.

3.1 Keskmise kiirus ja hetkkiirus

Kui auto liigub ühtlase kiirusega, siis on auto liikumise keskmist kiirust lihtne arvutada:

$$\text{keskmise kiirus} = \frac{\text{läbitud teepikkus}}{\text{kulutatud aeg}}.$$

Definitsioon 3.1

Suhet

$$v_k = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **keskmiseks kiiruseks**.

Oma olemuselt jaguneb matemaatiline analüüs kahte suurde - sisuliselt väga erinevasse - valdkonda: diferentsiaalarvutus (muutumiskiiruse uurimine, lokaalne omadus) ja integraalarvutus (kogumuutuse uurimine, globaalne omadus). Alustame oma teekonda esimesest suurest valdkonnast.

Seega, kui auto liigub ühe tunniga 50 km , siis tema liikumise keskmine kiirus on $v_k = \frac{50}{1} = 50 \text{ km/h}$.

Tegelikult ei liigu auto tavaliselt kunagi pikemat ajavahemikku ühtlase kiirusega. Keskmine kiirus ei ütle meile mitte midagi selle kohta, kuidas auto võis liikuda näiteks 33. minutil. Teisalt, kui me tahame teada saada auto liikumise kiirust just nimelt hetkel 33 minutit 0 sekundit, siis kuidas seda teada võiks saada?

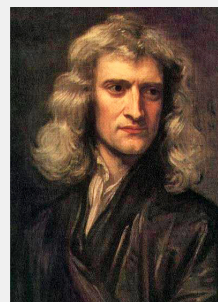
Üks võimalus on mõõta läbitud teepikkust ja kulunud aega järjest lühemal ajalõigul. Näiteks, 30 sekundit enne ja peale 33. minutit. Kuid sellisel juhul saame me teada ikkagi ainult auto liikumise keskmise kiiruse ühe minuti jooksul. See on ilmselt täpsem ja iseloomustab liikumist 33. minuti ümber paremini, kui keskmine kiirus ühe tunni jooksul, kuid jääb ikkagi ebatäpseks. Edasi võiksime mõõta läbitud teepikkust igal sekundil ... või koguni igal sajandik-, tuhandiksekundil.

Ajavahemik Δt	1 h	1 min	1 sek	0.1 sek
Läbitud teepikkus Δs	50 km	1 km	15 m	1.3 m
Keskmine kiirus $\frac{\Delta s}{\Delta t}$	50 km/h	60 km/h	54 km/h	46.8 km/h

Selline idee auto puhul aitab ja praktikas see suuresti nii töötabki. Meil ei ole aga mõtet mõõta auto läbitud teepikkust näiteks miljard korda sekundis, tulemus oleks küll täpsem, kuid mõõtmiseks kulutame rohkem energiat ja saadud üleliigsete komakohtadega ei ole meil vähemalt spidomeetril midagi peale hakata.

Kuidas on lood aga üldisemalt? Ajasammu tihendamine annab meile täpsema tulemuse, aga ega me hetkkiirust ennast ikkagi kätte ei saanud. Võtame näiteks kitarril noodi la, mis tekib, kui keel võngub 440 korda sekundis. Kui mõõdetav ajavahemik oleks sekund, siis näeksime kitarrikeelt pigem paigalseisvana. Nähtav valgus aga võngub 10^{15} korda sekundis, mis tähendab, et valguse jaoks peaks mõõdetav ajavahemik Δt olema vähemalt 10^{-15} sekundit...

Matemaatilise analüüsi (*Calculus*) loojateks peetakse inglise füüsikut ja matemaatikut Isaac Newtonit (1642 - 1727)



Allikas: Wikipedia

ja saksa matemaatikut ning filosoofi Gottfried Wilhelm Leibnizi (1646 - 1716).

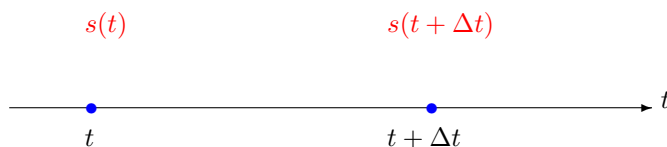


Allikas: Wikipedia

Nad töötasid teineteist sõltumatult välja tuletisega seotud seadusi, tehteid, lisaks integraaliga seotud mõisteid. Tõsi, see kõik ei vastanud veel matemaatiliselt range teooria nõuetele, kuid andis siiski palju väga praktilisi tulemusi.

Niipalju siis reaalsest maailmast. Küll aga oleme me varem tutvunud piirväärtuse mõistega, miks mitte lasta mõõdetaval ajavahemikul minna lõpmata väikseks? Tõsi, mõningad paradoksid viitavad, et võib juhtuda, et ajamoment ei saa realselt olla lõpmata väike.

Vaatleme näiteks keha liikumist kindla seaduse alusel. Olgu $s = s(t)$ selle keha poolt läbitud teepikkust väljendav aja t funktsioon. Liikugu keha mingist hetkest t edasi aja Δt võrra.



Siis saab funktsiooni $s = s(t)$ muudu (tema muut annab meile läbitud teepikkuse) arvutada järgmiselt:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t).$$

Definitsioon 3.2

Piirväärtust

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

nimetatakse materiaalse keha **hetkkiiruseks** antud ajamomendil t .

Näide 3.1

Liikugu auto seaduse $s(t) = t^2$ alusel. Siis auto liikumise kiirus hetkel $t = 5$ on

$$\begin{aligned} v(5) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25 + 10\Delta t + (\Delta t)^2 - 25}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{10\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + \Delta t) = 10 \quad \frac{\text{pikkusühikut}}{\text{ajaühikus}}. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 3.1

Kiiruse mõistet saab kasutada ka teiste suuruste muutumise korral (keha soojenemise kiirus, aine lagunemise kiirus, keemilise reaktsiooni kiirus, aktsiahinna langemise kiirus, meeleolu muutumise kiirus jne).

Kui protsessi kirjeldav funktsioon on f , siis selle funktsiooni muudu Δf ja argumenti x , mille all mõeldakse aega, muudu Δx jagatise piirväärtus väljendab funktsiooni muutumise hetkkiirust argumenti x antud väärtusel:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Newtoni ja Leibnizi nimega on ajaloos seotud üks pikk vaidlus matemaatilise analüüsi esmaavastaja tiitli üle. Mõned Newtoni sõbrad süüdistasid Leibnizi plagiaadis: Newtoni ideede varastamises ja oma nime all esitamises.

See oli suhteliselt segane vaidlus, milles ei ole tänaseni täit selgust toodud. Newton kasutas oma loodud mõisteid (näiteks *fluxion*) ja meetodeid (nn. voolavusteooria) raamatus “*The Method of Fluxions and Infinite Series*”, mille ta sai valmis 1671. aastal, kuid mis avaldati alles pärast tema surma 1736. aastal.

Leibnizi esimesed märkmed *infinitesimals* kohta on dateeritud aastast 1675, kuid ta ei avaldanud midagi enne 1684. aastat. Tuleb siinjuures mainida, et Newton ja Leibniz olid omavahel tihedas kirjavahetuses ja loomulikult arutasid ka üksteise ideid.

Sellest suurest ja mõttetust vaidlusest kaotasid ilmselt rohkem inglise matemaatikud, samal aja kui Euroopa mandril jätkati rahulikult teooria arendamist.

Omaette teema oli veel teiste matemaatikute (näiteks George Berkeley) terav kriitika Newtoni ja Leibnizi esitatud mõistete kohta. Igal juhul mõjutas toimu Newtonit niipalju, et oma kuulsamais teoses “*Printsiibid*” ta eriti matemaatilise analüüsi vahendeid ei kasutanud (kuigi ta oli tulemused ise varem nende abil tuletanud) ja valis alternatiivse variandina geomeetria vahendid.

3.2 Tuletise definitsioon

Olgu antud funktsioon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Anname argumendile $a \in X$ muudu Δx , nii et $a + \Delta x \in X$, ja vastav funktsiooni muut olgu

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Definitsioon 3.3

Tuletise definitsioon. Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks punktis** a .

Tähistatakse kujul $f'(a)$, $\frac{df}{dx}|_{x=a}$.

Niisiis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib ja on reaalarv. Juhime tähelepanu sellele, et tuletise olemasolu küsimuse saab esitada vaid punktis $x \in X$, kui $(x - \delta, x + \delta) \subset X$ mingi $\delta > 0$ korral. Seda nõuab piirväärtuse mõiste.

Märkus 3.2

Lõpmatu tuletis. Kui eksisteerib

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty$$

või

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -\infty,$$

siis mõnikord öeldakse, et funktsioonil f on punktis x **lõpmatu tuletis**.

Newton lähtus ajas muutuvatest suurustest, nimetades neid voolavateks suurusteks ehk fluentideks (*fluens*). Nende muutumise hetkkiirusi nimetas ta fluksioonideks (*fluxus* - vool). Fluendi x fluksiooni tähistas ta $\dot{x}$ (vt. [27, 35]).

Kui võtta funktsiooni $y = x^2$ väike muut o , mis “voolab” nulli, siis

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{o} = 2x + o.$$

Seega suurus $2x + o$ “voolab” suurusseks $2x$.

Leibniz tähistas sellist väikest nulli minevat suurust tähisega dx (*differentia*, erinevus, vahe). Kui Newton mõtles tuletise all eelkõige seost füüsikaliste mõistetega (liikumiskiirus, läbitud vahemaa), siis Leibniz lähtus rohkem algebralistest sümboolitest ja tehetest.

Näide 3.2 Kui $f(x) = c = \text{const}$, siis $\Delta f = 0$ ja järelikult

$$f'(x) = c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Näide 3.3 Olgu $f(x) = 2x^2 - x$, siis

$$\Delta f = 2(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - (2x^2 - x) = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x$$

ja

$$(2x^2 - x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} = 4x - 1 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2\Delta x = 4x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Näide 3.4 Olgu $f(x) = \sin x$, siis

$$\Delta f = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2},$$

ja tuletise definitsioonist ning piirväärtusest $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ järeldub, et

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 3.1

Punktis **lõplikku tuletist** omav funktsioon on **pidev** selles punktis.

Tõestus. Eeldades, et $f'(a)$ on lõplik, näitame, et $\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a)$.

Kui $h \neq 0$, siis kehtib

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f(a + h) - f(a)}{h} h.$$

Minnes piirile $h \rightarrow 0$, saame

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \lim_{h \rightarrow 0} h \\ &= f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a). \end{aligned}$$

□

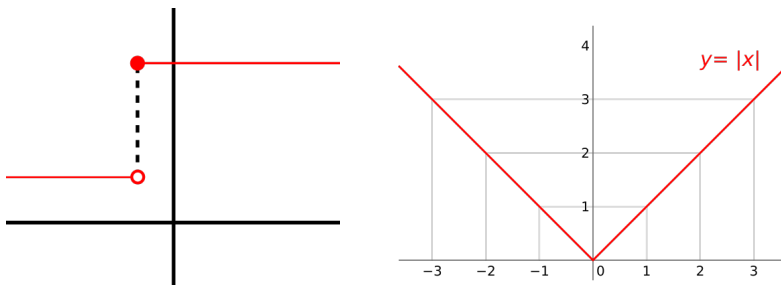
Definitsioon 3.4

Funktsiooni f tuletise leidmist nimetatakse funktsiooni f **diferentseerimiseks**. Matemaatilise analüüsi osa, mis käsitleb tuletise leidmise reegleid, omadusi ja rakendusi, nimetatakse diferentsiaalarvutuseks.

Definitsioon 3.5

Me nimetame funktsiooni f **diferentseeruvaks** punktis x , kui eksisteerib tuletis $f'(x)$.

Näide 3.5 Punktis x katkev funktsioon ei saa olla diferentseeruv.



Joonis: funktsioonid, mis ei ole diferentseeruvad.

Samuti ei ole funktsioon diferentseeruv nn. nurkade korral. Näiteks $f(x) = |x|$ on pidev, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$. Siin vasakpoolne piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1,$$

Funktsioon f on pidev punktis a , kui

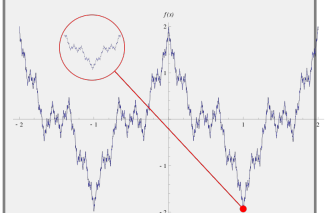
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

mis on samaväärne tingimusega

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

Piirväärtust võib teoreemi tõestuses toodud viisil eraldi võtta vaid siis, kui leiduvad vastavad lõplikud piirväärtused. Siin on see tingimus täidetud.

On olemas pidevaid funktsioone, millel ei ole tuletist mitte üheski punktis.



Joonis: Wikipedia

Üheks selliseks on Karl Weierstrassi funktsioon (avaldati 1872. aastal), mille formaalne kuju on antud võrdusega

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

$$0 < a < 1, \quad b = 2k + 1 > 0,$$

$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi.$$

Seda tüüpi graafikuid võib näha ka aktsiaturgudel ja mujal, kus on tegemist juhuslike suurustega.

aga parempoolne piirväärtus on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1.$$

Seega ei eksisteeri piirväärtust $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ ja järelikult ei eksisteeri tuletist punktis 0.

◇ ◇ ◇

3.3 Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

Märkus 3.3

Eksisteerigu funktsioonil f tuletis hulga X igas punktis x . Siis vastavus $x \rightarrow f'(x)$ määrab funktsiooni f' , mida nimetatakse funktsiooni f tuletisfunktsiooniks. Näiteks, funktsiooni $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, tuletisfunktsiooniks on $f(x) = 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Konstandi tuletis on alati null, $(\text{const})' = 0$.

Astmefunktsiooni tuletis:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \neq 0.$$

Toome eraldi välja järgmised tuletised:

$$x' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

EkspONENTfunktsiooni ja logaritmfunKtsiooni tuletised:

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised:

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}, & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide (nt $\sin x$ ja $\cos x$) korral on oluline, et toodud tuletisfunktsioonid on antud juhul, kui argumenti x mõõdetakse radiaanides.

Kui argumenti x mõõdetakse kraadides, siis

$$x^\circ = \frac{\pi x}{180} \text{ rad.}$$

Sel juhul liitfunktsiooni tuletise reeglist saame, et

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x^\circ}{dx} &= \left(\sin \frac{\pi x}{180} \right)' = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180} = \\ &= \frac{\pi}{180} \cos x^\circ. \end{aligned}$$

Siit ka põhjus, miks trigonomeetriliste funktsioonide korral opereeritakse kõikides tehetes enamasti radiaanide abil.

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonide tuletised:

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\(\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

Märkus 3.4

Kõikidel põhilistel elementaarfunktsioonidel eksisteerivad tuletised kogu määramispiirkonnas, välja arvatud funktsioonid $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ (määramispiirkonna otspunktides $x = -1$ ja $x = 1$ on lõpmatud ühepoolsed tuletised) ja funktsioon $y = x^\alpha$, kus $0 < \alpha < 1$ (punktis $x = 0$ on lõpmatu tuletis või lõpmatud erimärgilised ühepoolsed tuletised). Ühepoolse tuletise mõistes võetakse ühepoolne piirväärtus avaldisest $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Two polynomials walk into a bar. The bartender, a derivative, asks them "Can I take you order?" The polynomials run out screaming "Help! The bartender threatened to kill me!" ("order" on siinjuures ka polünoomi järk, ruutpolünoom on kolmandat järku, kuuppolünoom neljandat jne. Seda nalja ei saa eesti keeles hästi edasi anda.)

* Hüperboolsete funktsioonide tuletised:

$$\begin{aligned}(\operatorname{sh} x)' &= \operatorname{ch} x, & (\operatorname{ch} x)' &= \operatorname{sh} x, \\(\operatorname{th} x)' &= \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, & (\operatorname{cth} x)' &= -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \\(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, & (\operatorname{arch} x)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \\(\operatorname{arth} x)' &= \frac{1}{1-x^2}, & (\operatorname{arc} \operatorname{th} x)' &= \frac{1}{1-x^2}.\end{aligned}$$

Märkus 3.5

Teades põhiliste elementaarfunktsioonide tuletiste leidmise valemeid, saab leida mistahes elementaarfunktsiooni tuletise.

Tuletame meelde, et suvaline elementaarfunktsioon saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest aritmeetiliste tehete ja liitfunktsiooni moodustamise teel, nende operatsioonidega seotud diferentseerimisreeglitega aga tutvume järgnevas.

3.4 Diferentseerimise reeglid

Teoreem 3.2

Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v$, $u - v$, uv ja $\frac{u}{v}$ (lisatingimusel) eksisteerivad tuletised punktis x , kusjuures

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$,
2. $(uv)' = u'v + uv'$,
3. $(cu)' = cu'$, $c = \text{const}$,
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, kui $v \neq 0$.

Tõestus. Toodud omadused tulenevad piirväärtuse tehetega seotud omadustest. Esitame tõestuse korrutamise reegli kohta, teised on analoogilised (vt. nt. [23, 34]). Eelduse järgi leiduvad lõplikud piirväärtused

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \text{ ja } v'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Kirjutame

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x) + u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x + \Delta x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + u(x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'v + v'u. \end{aligned}$$

Siinjuures arvestasime, et $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$. Viimane tuleneb sellest, et funktsioon v on diferentseeruv, järelikult ka pidev punktis x . $\square$

Näide 3.6

Leiame funktsioonide $u = x^2 + 2$ ja $v = 3 - 2x$ korrutise uv tuletise muutuja x järgi. Esiteks $u' = 2x$ ja $v' = -2$. Kirjutame

$$(uv)' = 2x(3 - 2x) + (x^2 + 2)(-2) = -6x^2 + 6x - 4.$$

Kontrolliks kirjutame lahti korrutise

$$uv = (x^2 + 2)(3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2 - 4x + 6.$$

Leides siit tuletise muutuja x järgi, on lihtne veenduda, et saame sama tulemuse.

◇ ◇ ◇

Näide 3.7 Õõnessilindris olev rõhk p avaldub pinge T , välise diameetri D ja sisemise diameetri d kaudu valemiga

$$p = \frac{16 D T}{\pi (D^4 - d^4)}.$$

Leiame rõhu p muutumise kiiruse $p'(D)$ välise diameetri D järgi.

Kirjutame jagatise tuletise leidmise reegli abil

$$\frac{dp}{dD} = \frac{16 T \pi (D^4 - d^4) - 16 D T \pi 4D^3}{\pi^2 (D^4 - d^4)^2} = -\frac{16 T}{\pi} \frac{3D^4 + d^4}{(D^4 - d^4)^2}.$$

◇ ◇ ◇

3.5 Liitfunktsiooni tuletis

Käsitleme siin reaalmuutuja funktsioone $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$.

Teoreem 3.3

Teoreem liitfunktsiooni diferentseerimisest. Kui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in X$, $f(X) \subset Y$ ja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $y = f(x)$, siis $h = g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x ja

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(y)f'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Tõestused leiab õpikutest [23, 34].

Näide 3.8

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = (2x + 3)^2$. Funktsioon f on vaadeldav liit-funktsioonina funktsioonidest g , kus $g(x) = 2x + 3$, ja h , kus $h(y) = y^2$, s.t. $f = h \circ g$. Siis $g'(x) = 2$ ja $h'(y) = 2y$, mistõttu

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = 2(2x + 3) \cdot 2 = 4(2x + 3).$$

◇ ◇ ◇

Liitfunktsiooni diferentseerimise reegli võib teoreemis 7.3 toodud juhul veel kirjutada

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$$

ja mõnevõrra tinglikult

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx},$$

kus viimases peetakse silmas, et g argument y asendatakse funktsiooni f väärtusega $f(x)$ ja tekib funktsioon, mille tähis on ikka g ja argumendiks x .

Näide 3.9

Leiame $f'(x)$, kui $f(x) = \sin(5x + 1)$. Võime võtta $f(y) = \sin y$, kus $y(x) = 5x + 1$. Seega

$$f'(x) = f'(y)y'(x) = \cos y \cdot 5 = 5 \cos(5x + 1).$$

◇ ◇ ◇

3.6 Logaritmilise diferentseerimise võte

Logaritmilise diferentseerimise võte on vältimatu $u(x)^{v(x)}$ tüüpi funktsioonide korral, kuid see on abiks ka siis, kui f sisaldab palju korrutisi ja jagatisi.

Kirjutame

$$|y| = |f(x)|.$$

Seejärel võtame logaritmi võrrandi mõlemast poolest

$$\ln |y| = \ln |f(x)|.$$

Võtame tuletise, kasutades liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit

$$\frac{1}{y} y' = (\ln |f(x)|) '.$$

Saadud seosest avaldame y' , seega

$$y' = y (\ln |f(x)|) '.$$

3.7 Tuletisfunktsioon kui protsessi kiirus

Oma sissejuhatavas tekstis vaatlesime keha keskmist liikumise kiirust ja hetkkiirust. Toome veel ühe näite tuletise tõlgendamise kohta füüsikas [34].

Näide 3.10 Olgu $Q = f(t)$ elektrilaengute hulk, mis läbib juhtme ristlõiget ajavahemiku $[0, t]$ jooksul. Siis keskmise voolutugevuse all mõistame suhet

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Voolutugevuse $I(t)$ ajahetkel t defineerime kui piirväärtuse

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q'(t).$$

Seega on voolutugevus elektrilaengute hulga muutumise kiirus.

◇ ◇ ◇

Märkus 3.6

Funktsiooni tuletise analoogsete rakenduste kohta võib tuua palju näiteid füüsikast, keemiast, bioloogiast jne. Üldiselt, mõistes liikumist kui mistahes nähtuse muutumist looduses, tehnikas, ühiskonnas jt, võime näiteks öelda, et funktsiooni f tuletis aja t järgi tähendab seaduse $f(t)$ alusel toimuva nähtuse muutumise kiirust.

Näide 3.11 Olgu meil vaatluse all näiteks maakera. Küsime, mida mõista aine tiheduse all mingis maakera sees võetud kohas (vt. [30])? Selle mõiste juurde jõudmiseks ümbritseme näidatud koha mingi kujutahes väikese ja mistahes kujulise kinnise pinnaga. Olgu selle pinnaga piiratud ruumala ΔV ja sisaldugu ruumalas ΔV mass ΔM . Siis tuleb selles ruumalas ruumalaühiku kohta mass $\frac{\Delta M}{\Delta V}$. See suhe on keha aine keskmine tihedus ruumalas ΔV . Laseme nüüd mõttes ruumalal ΔV tõkestamatult väheneda ja määrame piirväärtuse, millele suujuures läheneb keskmine tihedus

$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

See arv on massi tuletis ruumala järgi, ta annabki aine tiheduse vaaeldavas kohas.

◇ ◇ ◇

Märkus 3.7

Analoogiliselt saab rääkida näiteks õhu tiheduse $\delta(h)$ muutumise kiirusest $\delta'(h)$ kõrguse h järgi, õlle viskoossuse $\eta(T)$ muutumise kiirusest $\eta'(T)$ temperatuuri T järgi, takistil eralduva soojushulga $Q(R)$ muutumise kiirusest $Q'(R)$ takistuse R järgi jne.

3.8 Kõrgemat järku tuletised

Olgu funktsioon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruv hulga X igas punktis $x \in X$. Siis vastavus $x \rightarrow f'(x)$ määrab funktsiooni f tuletisfunktsiooni $f' : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Definitsioon 3.6

Kui eksisteerib $(f')'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x , seega

$$(f')'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni f teist järku tuletist tähistatakse sümbolitega f'' , $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Analoogiliselt jätkates defineeritakse n -järku tuletis

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)',$$

mida tähistatakse veel $D^n f$ või $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Näide 3.12 Leiame $y^{(4)}$, kui $y = x^5 + 3x^2 + a^x$, $a > 0$. Kirjutame

$$y' = 5x^4 + 6x + a^x \ln a,$$

$$y'' = (5x^4 + 6x + a^x \ln a)' = 20x^3 + 6 + a^x \ln^2 a,$$

$$y''' = 60x^2 + a^x \ln^3 a$$

ja lõpuks

$$y^{(4)} = 120x + a^x \ln^4 a.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 3.8

NB! Leibnizi tähistust $\frac{d^n f}{dx^n}$ tuleb käsitleda kui muutuja x järgi tuletise võtmise $\frac{d}{dx}$ korduvat rakendamist, s.t.

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} \right) \right).$$

Seega

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right).$$

Märkus 3.9

Kõrgemat järku tuletise leidmisel üldjuhul ei kehti Leibnizi tähistuse liitfunktsiooni tuletise leidmise võte

$$\frac{d^2 \sin u}{dx^2} \neq \frac{d^2 \sin u}{d^2 u} \frac{d^2 u}{dx^2},$$

mis töötas edukalt esimest järku tuletise korral. Selle asemel tuleks kasutada diferentseerimise reegleid (kui $u = u(x)$)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sin u}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d \sin u}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\cos u \frac{du}{dx} \right) \\ &= \cos u \frac{d^2 u}{dx^2} + \left(-\sin u \frac{du}{dx} \right) \frac{du}{dx} \\ &= \cos u \frac{d^2 u}{dx^2} - \sin u \left(\frac{du}{dx} \right)^2. \end{aligned}$$

Kui liikuva objekti kiirus muutub, siis öeldakse, et objekt liigub kiirendusega. Kiirendus on kiiruse muutumise kiirus. Kiiruse muutus võib olla positiivne (igapäevaselt mõistame kiirenduse all seda juhtu, siis kiirus suureneb) või negatiivne (siis kiirus väheneb).

Liikugu objekt ajas t seaduse $s = s(t)$ alusel (s on läbitud teepikkus). Siis objekti hetkkiirus on $v(t) = s'(t)$. Analoogiliselt kiirusega, saab rääkida keskmisest kiirendusest ja hetkkiirendusest.

Definitsioon 3.7

Liikuva objekti keskmine kiirendus on võrdne kiiruse muudu ja aja muudu jagatisega ehk

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Definitsioon 3.8

Liikuva objekti hetkkiirenduseks hetkel t nimetatakse piirväärtust

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Märkus 3.10

Kokkuvõtteks saame võrdsed

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ehk

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Eraldi mõistena on olemas veel “tõuge” (inglise keeles “jerk”), mis on kiirenduse muutumise kiirus ehk

$$a'(t) = s'''(t).$$

Ühtlast liikumist ei ole võimalik isoleeritud ruumis kindlaks teha, kiirendust aga küll. Kiirenduse korral mõjuvad kehale survejõud. Tõuget $a'(t)$ saab füüsiliselt tunda selle surve muutumisena.

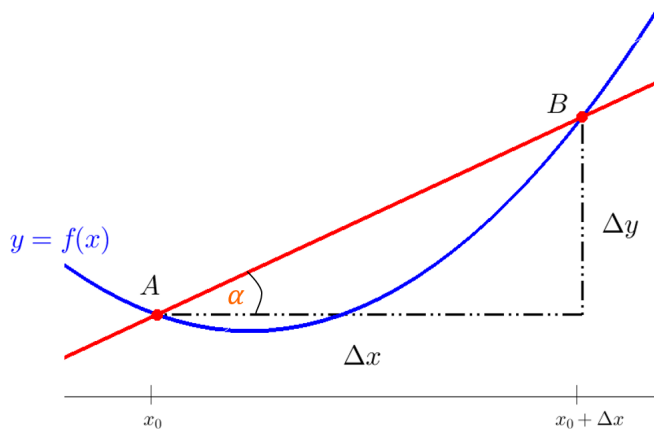
Inseneriteadustes on tõuke uurimine oluline inimestega seotud seadmetes nagu näiteks liftid, Ameerika mägede atraksioon, kuna liiga suur tõuge võib inimesi füüsiliselt kahjustada.



Kiirenduse mõju lemmikloomale.
Allikas: funny.com

3.9 Joone puutuja ja normaali võrrandid

Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ graafikut xy -teljestikus. Võtame punktile $A = (x_0, f(x_0))$ lisaks punkti $B = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Joonis: joone $y = f(x)$ lõikaja AB .

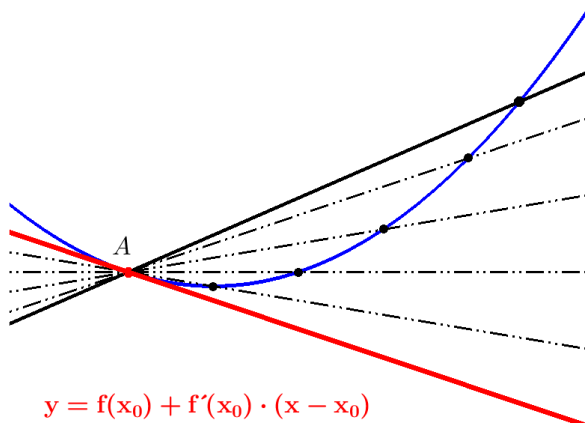
Siis lõikaja AB tõusunurga tangens (ka lõikaja tõus) avaldub täisnurksest kolmnurgast võrdusega

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Definitsioon 3.9

Joone puutujaks punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$. Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Joonis: joone $y = f(x)$ puutuja punktis A .

Siinjuures selgituseks, et kuna tangens on pidev oma määramispiirkonnas, siis protsessist $\alpha \rightarrow \theta$ jäeldub protsess $\tan \alpha \rightarrow \tan \theta$.

Seega, kui θ on joone puutuja tõusunurk, saame

$$\tan \theta = \lim_{B \rightarrow A} \tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Näide 3.13 Päikese reflektor on parabool kujuga $y = \frac{x^2}{4}$, mille fookus asub punktis $F = (0, 1)$. Vaatame, kas vertikaalsed valguskiired läbivad punktis $x = 2$ parabooli siseseinalt peegeldumisel reflektori fookuse. Kuna parabooli puutuja tõus suvalises punktis on $\frac{x}{2}$ ($y' = \frac{x}{2}$), siis näeme, et selle tõus punktis $x = 2$ võrdub ühega (ehk puutuja tõuseb 45° nurga all). Sel juhul tasub tähele panna, et vertikaalne valguskiir peegeldub vertikaalse telje suhtes täisnurga all (kuna kiire ja puutuja vaheline nurk omakorda on samuti 45°). Viimane tähendab aga seda, et peegeldunud kiir on paralleelne x -teljega ja see läbib fookust $F = (0, 1)$, kuna kõrgus punktis $x = 2$ on $f(2) = 1$. Leiame veel parabooli puutuja võrrandi punktis $x = 2$:

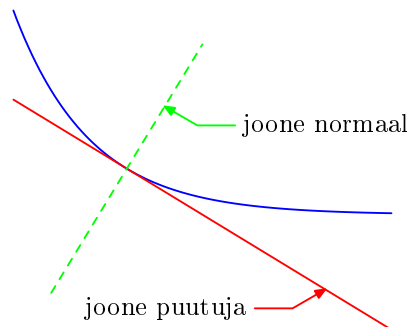
$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \quad \text{ehk} \quad y = 1 + 1 \cdot (x - 2) = x - 1.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 3.10

Joone $y = f(x)$ **normaali** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$



Joonis: joone normaal ja puutuja.

Kuna puutuja tõus on $f'(x_0)$ ning on teada, et ristuvate sirgete tõusude korrutis on -1 , siis normaali tõus on $-\frac{1}{f'(x_0)}$, $f'(x_0) \neq 0$.

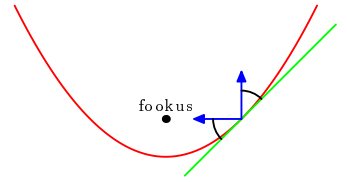
Näide 3.14 Leiame parabooli $y = x^2$ puutuja ja normaali võrrandid igas punktis $x_0 \neq 0$. Esiteks $(x^2)' = 2x$. Kui $x_0 = 0$, siis puutujaks on x -telg võrrandiga $y = 0$ ja normaaliks y -telg võrrandiga $x = 0$. Ülejäänud juhtudel on punktis x_0 puutuja võrrandiks

$$y = x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = 2x_0x - x_0^2$$

ja normaali võrrandiks

$$y = x_0^2 - \frac{1}{2x_0}(x - x_0) = -\frac{1}{2x_0}x + x_0^2 + \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇



3.10 Funktsiooni diferentsiaal

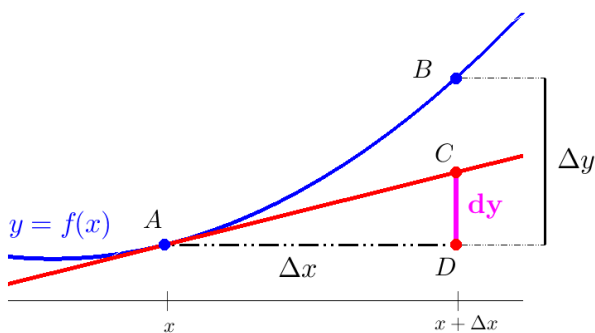
Definitsioon 3.11

Olgu antud punktis x diferentseeruv funktsioon f . Anname argumentidele x muudu Δx . Korrutist

$$f'(x)\Delta x$$

nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy (kui kasutada sõltuva muutuja tähist y ehk $y = f(x)$) või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x.$$



Joonis: diferentsiaal on lõigu CD pikkus.

Punktis A on tõmmatud funktsiooni $y = f(x)$ puutuja.

Funktsiooni muut on lõigu BD pikkus ja diferentsiaal on lõigu CD pikkus.

Diferentsiaali dy arvutamise valemi võib tuletada kolmnurga ACD tõusunurga tangensi avaldisest $\tan \alpha = \frac{dy}{\Delta x}$, arvestades veel, et $\tan \alpha = f'(x)$.

Märkus 3.11

Olgu $y = f(x) = x$, siis saame

$$dy = dx = (x)' \Delta x = \Delta x.$$

Argumenti diferentsiaal võrdub argumenti muuduga. Seepärast kirjutatakse $dx = \Delta x$ ja üldise funktsiooni $y = f(x)$ korral

$$dy = f'(x)dx.$$

Jooniselt võib tähele panna, et mida väiksem on argumenti muut $\Delta x = dx$, seda lähedasemad on funktsiooni muudu Δy ja diferentsiaali dy väärtused. Praktikas kasutatakse ligikaudset võrdust $\Delta y \approx dy$, kui dx on küllalt väike.

Märkus 3.12

Võrduse $dy = f'(x)dx$ jagamisel arvuga dx eeldusel, et $dx \neq 0$, saame

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

s.t **diferentseeruva** funktsiooni tuletist saab praktikas vaadelda kui selle funktsiooni diferentsiaali ja argumenti diferentsiaali suhet.

Näide 3.15 Leiame funktsiooni $f(x) = 3x^2 + 4x$ diferentsiaali $df(x)$ väärtuse punktis $x = 2$ argumenti muudu $\Delta x = dx = 0.1$ korral,

$$df(x) = f'(x)dx = (6x + 4)dx, \quad df(2) = (12 + 4) \cdot 0.1 = 1.6.$$

Funktsiooni muut $\Delta f = f(2.1) - f(2) = 21.63 - 20 = 1.63$.

◇ ◇ ◇

Kui asendaksime muudu Δf diferentsiaaliga $df(2)$, siis teeksimme arvutustes vea 0.03. Antud juhul oli diferentsiaali arvutuslikult lihtsam leida kui funktsiooni muut.

Teoreem 3.4

Kui funktsioonid u ja v on diferentseeruvad punktis x , siis kehtivad võrdused

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(uv) = vdu + u dv$;
3. $d(cu) = cdu$, $c \in \mathbb{R}$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, kui $v \neq 0$.

Tõestus. Tõestame jagatise tuletise leidmise eeskirja. Kasutame arvutust, mis tugineb liitfunktsiooni diferentseerimise reeglile:

$$d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v}\right) dx = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{v}\right) \frac{dv}{dx} dx = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{dx} dx = -\frac{dv}{v^2}.$$

Selle abil leiame

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(u \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} du + u d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{vdu}{v^2} - u \frac{dv}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

□

Need diferentsiaali leidmise reeglid on otseselt tuletatavad funktsiooni tuletise tehete seotud omadustest ja väljendavad diferentseerimise samu omadusi.

Näide 3.16 Leiame

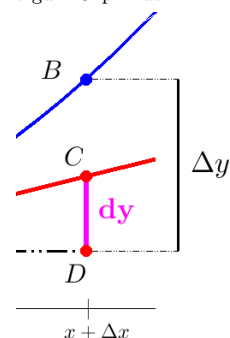
$$\begin{aligned} d(x^3 \ln x) &= (dx^3) \ln x + x^3 d(\ln x) \\ &= 3x^2 dx \ln x + x^3 \frac{1}{x} dx = (3x^2 \ln x + x^2) dx. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Kui Δx on küllalt väike, võime funktsiooni f muudu Δf asemel leida funktsiooni f diferentsiaali df ,

$$\Delta f \approx df. \quad (3.1)$$

Muudu asendamisel diferentsiaaliga teeme vea, mille suurus on lõigu BC pikkus.



Näide 3.17 Sõitva auto spidomeeter näitab kiiruseks 72 km/h. Kui pika teekonna läbib see auto järgmise sekundi jooksul?

Kiireks arvutamiseks saame kasutada ligikaudset võrdust $\Delta f \approx df$. Arvestades, et auto keskmine kiirus on läbitud teepikkuse ja kulunud ajavahemiku jagatis ning hetkkiirus on teepikkuse tuletis aja järgi, siis

$$\Delta s \approx ds = s'(t)dt.$$

Meie andmete põhjal läbib auto järgmise sekundi jooksul umbes

$$\Delta s \approx 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72 \cdot 1000 \text{ m}}{3600 \text{ sek}} \cdot 1 \text{ sek} = \frac{72}{3.6} \text{ m} = 20 \text{ m}.$$

Viimane arvutus on kaunis täpne, kui auto liikus enam-vähem ühtlase kiirusega. Paneme tähele, et antud juhul me ei pea teadma auto liikumise seadust $s = s(t)$ (funktsionaalset sõltuvust) ennast.

◇ ◇ ◇

Meie joonistel on argumendi muut võetud küllalt suur, seda sellepärast, et joonis oleks jälgitav. Samas võime näha, et ligikaudse võrduse $\Delta f \approx df$ kehtivuseks peab Δx olema piisavalt väike.

Miks sellist asendust üldse teha? Osutub, et mõningatel juhtudel on diferentsiaali lihtsam arvutada ja ka programmeerida (kuna piisab puutujasirge võrrandist). Näiteks polünoomide korral tuletis vähendab polünoomi astet ja arvutusi on ka ilma arvutita lihtsam teha (arvutiga arvutades ei oleks seda nii-väga vaja).

Näide 3.18 Arendame eelmist näidet edasi. Firma toodab ninasarvikutele maiust, kusjuures x maiuse tootmise kasum on leitav funktsiooni

$$P(x) = -0.004x^3 + 10x^2 - 1000$$

kaudu. Kui suur oleks lisakasum, kui plaanitud 100 maiuse asemel toodetakse üks maius rohkem, (s.t 101 maiust)?

Võib leida, et $P(101) - P(100) = 1888.796$, kuid viimane sisaldab endas opereerimist suurte arvudega. Arvestades, et

$$\Delta P(100) = P(101) - P(100) \approx dP(100) = P'(100) \cdot 1,$$

siis võime leida

$$\Delta P \approx (-0.012x^2 + 20x) \Big|_{x=100} = -120 + 2000 = 1880.$$

Erinevus täpse ja ligikaudse vastuse vahel on umbes 89 ühikut, mis võrreldes arvuga 1889 on küllalt väike.

◇ ◇ ◇

Näide 3.19 Toome nüüd ühe klassikalise diferentsiaali kasutamise näite. Ringi raadiust r suurendatakse 10 ühikult 10.15 ühikule. Umbes kui palju suureneb ringi pindala $S = S(r)$?

Loomulikult saab siin arvutada täpselt,

$$\Delta S = \pi \cdot 10.15^2 - \pi \cdot 10^2 = 103.0225\pi - 100\pi = 3.0225\pi.$$

Teisalt, kasutades diferentsiaali

$$\Delta S \approx dS = (\pi r^2)' dr = 2\pi \cdot 10 \cdot 0.15 = 3\pi.$$

Viga on arvutuslikult 0.0225π ruutühikut, kusjuures diferentsiaali leidmine oli lihtsam.

◇ ◇ ◇

Olgu f punktis x diferentseeruv funktsioon. Siis võime kirjutada, et

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

ehk $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Funktsiooni uue väärtuse leidmine ligikaudselt diferentsiaali abil

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (3.2)$$

Kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakasum ligikaudu võrdne kasumifunktsiooni $P(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Profit*). Analooiliselt, kui toodetakse x toodet, siis 1 toote juurde tootmisel on lisakulu ligikaudu võrdne kulufunktsiooni $C(x)$ tuletisega kohal x (*Marginal Cost*). See omadus laieneb ka teistele mõistetele, kus argumendi muut Δx on võrdne ühe ühikuga.

Näiteks, kui maja ruutmeetri maksumus on arvatav funktsiooni $f(A)$ abil (A on ruutmeetrite arv), siis kavandatud A ruutmeetri asemel 1 lisamine läheb umbes maksma $f'(A)$ rahaühikut.

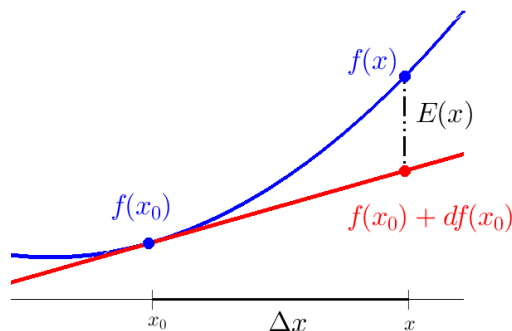
Ligikaudse arvutamise kasulikkus tuleb veel paremini välja ruumala muutumise ülesannetes.

Definitsioon 3.12

Valemi

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.3)$$

kasutamist nimetatakse ka funktsiooni f **lineaarseks lähendamiseks** punktis x_0 , sest $f(x)$ leitakse ligikaudselt kui lineaarse funktsiooni väärtus.

Joonis: funktsiooni lineaarne lähendamine punktis x .

Valem (3.3) võimaldab ligikaudselt arvutada

$$f(x_0 + \Delta x)$$

väärtuse, kui x_0 on selline, et väärtused $f(x_0)$ ja $f'(x_0)$ on teada ja Δx on küllalt väike (kusjuures funktsiooni f tervikuna ei olegi vaja teada). Seejuures on ligikaudne võrdus (3.3) seda täpsem, mida väiksem on Δx .

On näha, et arvutamisel tehakse viga $E(x)$ (vt. joonis).

Näide 3.20 Arvutame ligikaudselt $\sqrt[3]{8.5}$. Antud juhul võime võtta

$$f(x) = x^{1/3}, \quad x_0 = 8, \quad \Delta x = 0.5.$$

Siis $f(x_0) = 2$ ja

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} x_0^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

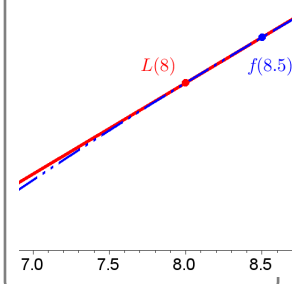
ja (3.3) põhjal

$$\sqrt[3]{8.5} \approx f(8) + f'(8) \cdot 0.5 = 2 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{49}{24} = 2.04166\dots$$

Täpsem väärtus on $\sqrt[3]{8.5} \approx 2.04082755$.

◇ ◇ ◇

Silma järgi on graafikul isegi raske eristada puutuja ja funktsiooni väärtusi.



Näide 3.21 Arvutame ligikaudselt $f(0.005)$, kui

$$f(x) = x^{21} + 5x^9 - 8x + e^x + 7.$$

Antud juhul võime võtta

$$x_0 = 0, \quad \Delta x = 0.005.$$

Siis $f(x_0) = 8$ ja $f'(x_0) = 21x_0^{20} + 45x_0^8 - 8 + e^{x_0} = -7$ ja (3.3) põhjal

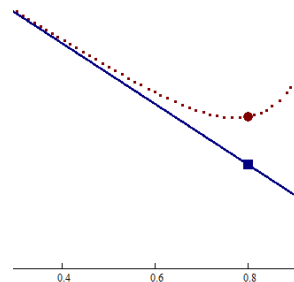
$$f(x) = 8 + (-7) \cdot 0.005 = 7.965.$$

Täpsem väärtus on $f(0.005) \approx 7.96501252$. Kui siinjuures Δx oleks palju suurem, näiteks $\Delta x = 0.8$, siis arvutus

$$f(0.8) \approx f(0) + f'(0) \cdot 0.8 = 8 + (-7) \cdot 0.8 = 8 - 5.6 = 2.4,$$

oleks palju ebatäpsem. Täpsem väärtus on $f(0.8) \approx 3.50585294$.

◇ ◇ ◇



Näide 3.22 Sõdur sihib maapinnal kuulipildujast 100 m kaugusel olevat vaenlase punkrit. Kui sõdur keerab 5° kraadi kuulipilduja toru horisontaalsendist ülespoole, siis kui kõrgele punkri seinal võib ta tabada?

Kui sõdur on punktis A , siis

$$\tan \alpha = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Siit $|BC| = |AC| \tan \alpha$. Tähistame kõrguse h ja kirjutame viimase funktsiooni kujul

$$h(\alpha) = 100 \tan \alpha.$$

Märgime, et $5^\circ = \frac{\pi}{36}$ radiaani. Arvutiga saaksime kiiresti leida vastuse

$$h\left(\frac{\pi}{36}\right) = 100 \tan \frac{\pi}{36} \approx 8.75$$

meetrit, aga kui arvutit käepärast ei ole, siis võime võtta

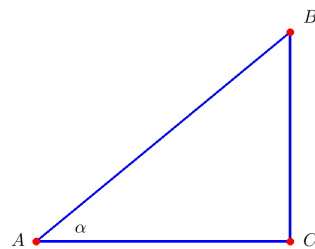
$$\alpha_0 = 0, \quad h'(\alpha) = 100 \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} = \frac{100}{\cos^2 \alpha}.$$

Kuna $\cos 0 = 1$, siis $h'(0) = 100$ ja

$$h\left(\frac{\pi}{36}\right) \approx h(0) + h'(0)d\alpha = 0 + 100 \cdot \frac{\pi}{36} \approx \frac{314}{36} = 8\frac{13}{18}.$$

Sellest saame vastuseks $h \approx 8.7$ meetrit.

◇ ◇ ◇



Näide 3.23 Tihti läheb vaja $\sqrt{3}$ ligikaudset väärtust. Näiteks siinuse, koosinuse ja tangensi leidmisel nurkadest 30° ja 60° läheb vaja arvu $\sqrt{3}$. Järgmised arvutused on ka peast tehtavad. Võtame

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4.$$

Sel juhul ligikaudne võrdus

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

on antud juhul

$$\sqrt{3} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(3 - 4) = 2 - \frac{1}{4} = 1.75.$$

Täpsem väärtus on $\sqrt{3} \approx 1.732$, nii et tehtud viga on umbes 0.018.

Analoogiliselt võiksime leida $\sqrt{5}$ ligikaudse väärtuse

$$\sqrt{5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(5 - 4) = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$

Täpsem väärtus on $\sqrt{5} \approx 2.236$, nii et tehtud viga on umbes 0.014.

◇ ◇ ◇

Peatükk 4

Funktsiooni uurimine

4.1	Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid	72
4.2	L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks	77
4.3	Funktsiooni kasvamine ja kahanemine	80
4.4	Funktsiooni ekstreemumid	81
4.5	Funktsiooni kumerus ja nõgusus	85
4.6	Funktsiooni graafiku joonistamine	88

Kontrolltöö teemad

1. L'Hospitali reegli kasutamine piirväärtuste arvutamisel.
2. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkondade leidmine.
3. Funktsiooni ekstreemumite leidmine. Optimeerimise ülesanded.
4. Joone käänupunkti, kumerus- ja nõguskiirkondade leidmine.

Eksamiteemad

1. Lagrange'i keskväärtusteoreem. Selle geomeetriline ja füüsikaline sisu.
2. L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks.
3. Funktsiooni kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.
4. Funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid. Kriitiline punkt. Teoreem 8.7.
5. Kumer ja nõgus joon. Teoreem 8.8.
6. Joone käänupunkt.

4.1 Diferentsiaalarvutuse keskväärtusteoreemid

Definitsioon 4.1

Olgu funktsioon f määratud hulgal D . Ütleme, et funktsioonil f on **maksimaalne väärtus** hulgal D punktis $c \in D$, kui

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Analoogiliselt ütleme, et funktsioonil f on **minimaalne väärtus** hulgal D punktis $c \in D$, kui

$$f(x) \geq f(c) \quad \text{iga } x \in D \text{ korral.}$$

Märkus 4.1

Lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon f saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse selles lõigus. Paneme tähele, et näiteks vahemikus (a, b) pidev funktsioon f ei pruugi saavutada maksimaalset ja minimaalset väärtust selles vahemikus. Näiteks funktsioon $f(x) = x$ ei saavuta maksimaalset (ega minimaalset) väärtust vahemikus $(0, 1)$. Kui näiteks arv $\alpha \in (0, 1)$ oleks selline, et $f(\alpha)$ oleks suurim vahemikus $(0, 1)$, siis, et $\frac{1+\alpha}{2} \in (0, 1)$ ja $f(\frac{1+\alpha}{2}) > f(\alpha)$, mis tähendab, et punktis α ei ole funktsiooni f väärtus maksimaalne.

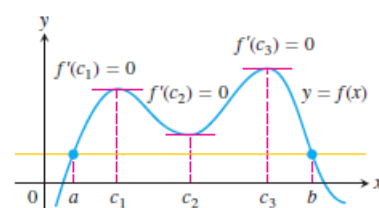
Teoreem 4.1

Fermat' teoreem, vt. [23]. Kui vahemikus (a, b) diferentseeruv funktsioonil f on olemas maksimaalne või minimaalne väärtus punktis $c \in (a, b)$, siis

$$f'(c) = 0.$$

Teoreem 4.2

Rolle'i teoreem, vt. [23]. Kui lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f korral $f(a) = f(b)$, siis eksisteerib $c \in (a, b)$, nii et $f'(c) = 0$.

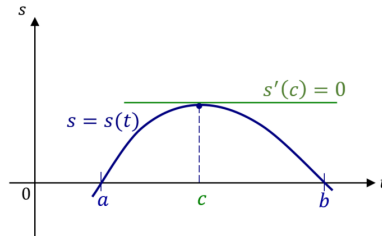


Joonis: [37].

Tõestus. Kuna konstantse funktsiooni korral on tulemus ilmne, siis võime edaspidi eeldada, et leidub punkt $x_0 \in (a, b)$ nii, et $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$. Olgu näiteks $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Lõigus pidev funktsioon f saavutab oma maksimaalse väärtuse $f(c)$, kus $c \in (a, b)$ (juhul $c = a$ või $c = b$ saaksime vastuolu tingimusega $f(c) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$). Kuna maksimaalne väärtus saavutatakse punktis $c \in (a, b)$, siis Fermat' teoreemi põhjal $f'(c) = 0$. Juhul $f(x_0) < f(a) = f(b)$ on arutelu analoogiline minimaalset väärtust kasutades. $\square$

Märkus 4.2

Olgu vaatluse all diferentseeruv funktsioon $s = s(t)$, mis kirjeldab objekti liikumist mööda sirgjoonelist teed aja t kulgemisel. Eeldame, et objekti keskmine kiirus ajaperioodil $a \leq t \leq b$ on 0, s.t $s(a) = s(b)$, mis tähendab, et objekt jõuab ajahetkeks $t = b$ samasse kohta, kus ta oli ajahetkel $t = a$. Siis **Rolle'i teoreemi põhjal on olemas ajahetk** $c \in (a, b)$ nii, et $s'(c) = 0$ ehk ajahetkel c on objekti hetkkiirus võrdne nulliga.



Joonis: Teepikkuse muutumine ajas objekti liikumisel

Rolle'i teoreemi idee omistatakse india matemaatikule ja astronoomile Bhaskara II (1114-1185), formaalne tõestus prantsuse matemaatikule Michel Rolle'ile (1652-1719) 1691. aastal.

Näide 4.1

Toome ühe lihtsa olukorra, kus Rolle'i teoreem võiks kasulik olla. Näitame, et võrrandil

$$x^3 + 3x - 6 = 0$$

on ainult üks reaalarvuline lahend. Funktsioon $f(x) = x^3 + 3x - 6$ on diferentseeruv (seega pidev) kogu reaalteljel. Leiame tuletise

$$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Kui võrrandil peaks olema kaks reaalarvulist lahendit (punktides a ja b), siis peab kehtima $f(a) = f(b) = 0$. Rolle'i teoreemi põhjal peab funktsioonil f leiduma vahemikus (a, b) vähemalt üks punkt c , et kehtib $f'(c) = 0$. Kuna $f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ jaoks, siis ei ole võimalik võrdus $f'(c) = 0$. Järelikult võrrandil ei saa olla rohkem kui ainult üks reaalarvuline lahend.

◇ ◇ ◇

Teoreem 4.3

Lagrange'i keskväärtusteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis eksisteerib $c \in (a, b)$ nii, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Lihtne on näha, et $g(a) = f(a)$ ja $g(b) = f(b)$, s.t. $g(a) = g(b)$. Rolle'i teoreemi põhjal eksisteerib punkt $c \in (a, b)$ nii, et $g'(c) = 0$.

Kuna funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis ka funktsioon g kui lineaarne kombinatsioon funktsioonist f on seda. Leiame tuletise

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Omadusest $g'(c) = 0$ jäeldub, et

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

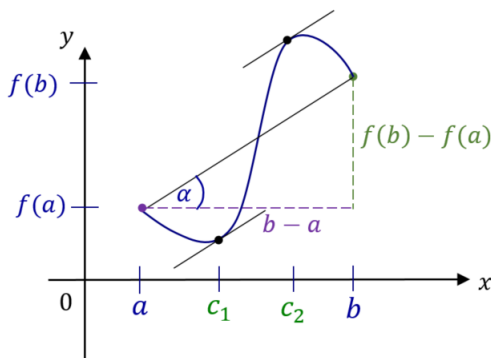
□

Märkus 4.3

Kirjeldagu funktsioon $y = f(x)$ objekti asukohta sirgel (või mingil kõverjoonel) sõltuvana ajast x . **Lagrange'i teoreem väidab, et teoreemi eeldustel on olemas ajahetk $x = c$, millel objekti hetkkiirus $f'(c)$ on võrdne objekti keskmise kiirusega**

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ajaintervallis $[a, b]$.



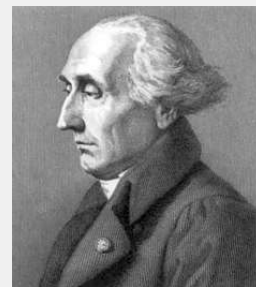
Joonis: Objekti asukohta muutus ajast x .

Joonisel

$$\tan \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c_1) = f'(c_2).$$

Lagrange'i teoreem on midagi sellist, millega võiks politsei ennast vabalt kohtus kaitsta trahvikviitungite väljakirjutamisel. Kui mõõta keskmist kiirust mingil teelõigul, siis keskmine kiirus üle 90 km/h tähendab, et mingil hetkel pidi ka hetkkiirus reaalselt olema üle 90 km/h (s.t. et ei ole tingimata vaja mõõta hetkkiirust). Kiirust saab mõõta ka kaudselt, lugedes näiteks sisenemise ja väljumise aega kiirteede anduritelt.

Lagrange'i teoreemi erijuhtu kirjeldas esmakordselt india matemaatik ja astronoom Parameshvara (1370-1460). Teoreemi üldistuse andis hiljem prantsuse matemaatik Augustin Louis Cauchy (1789-1857) ning see on üks tähtsamaid teoreetilisi tulemusi matemaatilises analüüsis (selle abil tõestatakse paljud teised olulised tulemused).



Joseph Louis Lagrange.
Allikas: Wikipedia

Prantsuse matemaatiku ja astronoomi Joseph-Louis Lagrange'i (1736-1813) nimi seostatakse tulemusena tavaliselt Taylorigi valemi jääkliikme Lagrange'i kuju kaudu.

Lagrange'ist sai juba 19-aastaselt Torino kuningliku suurtükiväe kooli matemaatikaprofessor. Aastal 1788 ilmus temalt mehaanikaõpik "Mécanique analytique" (Analüütiline mehaanika), milles ta esitas kehade ja punktmasside liikumisülesandeid diferentsiaalvõrrandite abil.

Viimati nimetatud raamatu eesõnas kirjutas Lagrange "Te ei leia sellest tööst jooniseid. Meetodid, mida ma siin esitan, ei vaja konstruktsioone ega geomeetrilist või mehaanikalist põhjendamist, vaid ainult algebralisi operatsioone, mille tingivad materjali järjepidev ja ühetaoline esitus.", vt [6].

Näide 4.2

Kui funktsioon on esitatud analüütiliselt, näiteks

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2,$$

siis mõnikord on võimalik täpselt leida ka see punkt $c \in (a, b)$, kus funktsiooni muutumise kiirus on võrdne muutumise keskmise kiirusega.

Leiame $c \in (0, 2)$, nii et

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

Kuna $f(2) = 12$, $f(0) = -2$ ja

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1,$$

siis

$$\frac{12 + 2}{2} = 12c^2 - 10c + 1$$

ehk

$$12c^2 - 10c - 6 = 0.$$

Viimase ruutvõrrandi lahenditeks on

$$c = \frac{5}{12} \pm \sqrt{\frac{97}{144}} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}.$$

Vahemikus $(0, 2)$ on nendest ainult üks väärtus, $c = \frac{5 + \sqrt{97}}{12} \approx 1.237$.

◇ ◇ ◇

Näide 4.3

Lagrange'i teoreemi üks võimalikke kasutusi on funktsiooni väärtuste absoluutse vea hindamine. Näitame, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral kehtib võrratus

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Kui $x = y$, siis võrratus kehtib. Olgu $x \neq y$. Siinusfunktsioon on pidev ja diferentseeruv kogu reaalteljel. Lagrange'i keskväärtusteoreemi järgi punktide x ja y vahel asuva mingi ξ korral

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = (\sin x)'|_{x=\xi} = \cos \xi.$$

Siit

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos \xi| \leq 1.$$

Viimane tähendabki, et

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Paneme tähele, et $y = 0$ korral saame sellest võrratuse

$$|\sin x| \leq |x|.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.4 Lagrange'i keskväärtusteoreemi abil saab tõestada praktilistes arvutustes kasutatava Bernoulli võrratuse:

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \geq 0.$$

Märgime, et võrratus kehtib $x=0$ korral. Funktsioon $f(x) = (1+x)^n$ on pidev ja diferentseeruv $x > 0$ korral. Siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal on olemas $c \in (0, x)$ nii, et

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

ehk

$$(1+x)^n - 1 = nx(1+c)^{n-1} \geq nx.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 4.4

Cauchy keskväärtusteoreem. Kui funktsioonid f ja g on pidevad lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruvad vahemikus (a, b) ning $g'(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis eksisteerib $c \in (a, b)$ nii, et kehtib võrdus

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Täpse tõestuse võib leida näiteks õpikust [23]. Lagrange'i keskväärtusteoreem on tegelikult järelalus Cauchy teoreemist, võttes $g(x) = x$. Cauchy teoreemi tõestuse idee on sarnane sellega, mille esitasime Lagrange'i keskväärtusteoreemile.

Märkus 4.4

2012. aastal võitis Usain Bolt meeste 100 m jooksus kuldmedali ajaga 9.63. Tema keskmine kiirus võrdus läbitud teepikkus jagatud ajaga:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{100}{9.63} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 10.38 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 37.38 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Lagrange'i keskväärtusteoreem ütleb meile, et leidus ajahetk t_* , mil Bolt jooksis just nimelt sellise hetkkiirusega $f'(t_*) = 37.38 \text{ km/h}$. Asafa Powell sai samas jooksus aja 11.99, mis on 1.245 korda aeglasem kui Boltil,

$$\frac{\Delta g}{\Delta t} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{100}{11.99} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 8.34 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 30.03 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Bolti keskmine kiirus oli sama palju, 1.245 korda, kiirem kui Powellil,

$$\frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \frac{37.38}{30.03} = 1.245.$$

Cauchy keskväärtusteoreem ütleb seda, et leidus selline ajahetk c , mil Bolt jooksis just nimelt 1.245 korda kiiremini kui Powell,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\frac{g(b)-g(a)}{b-a}}.$$



Augustin Louis Cauchy.

Allikas: Wikipedia

Cauchy õppis ehitusinseneriks ja töötas sadama ja kaitserajatiste ehitusel. Üsna varsti valiti ta Pariisi teaduste akadeemia liikmeks ja Cauchy hakkas andma loenguid Pariisi Polütehnilises Koolis.

Cauchy muutis 1820. aastatel matemaatilise analüüsi valdkonda olulisel määral, formaliseerides piirväärtuse, pidevuse, tuletise ja integraali mõisted. Lisaks rajas ta peaaegu üksinda kompleksmuutuva funktsioonide teooria alused. Aastal 1821 ilmus teedrajav raamat "Cours d'analyse" (Analüüsi kursus), vt [6].

4.2 L'Hospitali reegel piirväärtuse arvutamiseks

L'Hospitali reegel võimaldab tihti leida piirväärtust

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

juhtudel, kus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ($\frac{0}{0}$ tüüpi määramatus) või $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ ($\frac{\infty}{\infty}$ tüüpi määramatus).

Teoreem 4.5

Kui mingis protsessis $x \rightarrow a$ (siin $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

siis selles protsessis kehtib võrdus

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

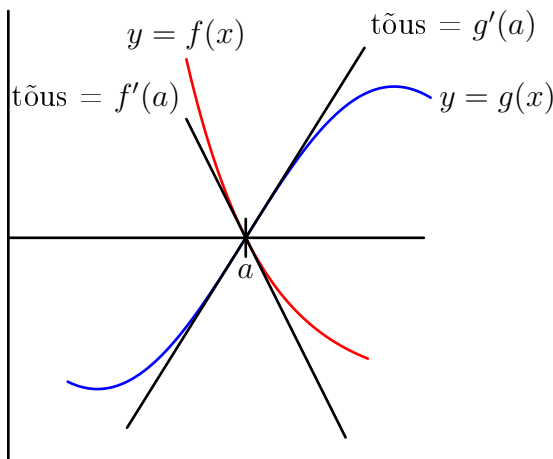
Tõestus. Detailsema tõestuse sarnase tulemise kohta leiab õpikust [23]. Teoreem järeldub Cauchy keskvaartusteoreemist. Esitame tõestuse põhi-idee juhul, kui $f(a) = g(a) = 0$ ja $g'(x) \neq 0$ iga $x > a$ korral. Cauchy keskvaartusteoreemi põhjal on valitud $\delta > 0$ korral olemas $\xi \in (a, a + \delta)$ nii, et

$$\frac{f(a + \delta) - f(a)}{g(a + \delta) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Sellest säilib $f(a) = g(a) = 0$ tõttu võrdus

$$\frac{f(a + \delta)}{g(a + \delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

milles minnakse piirile $\delta \rightarrow 0+$. □



Joonis: L'Hospitali reegel $f(a) = g(a) = 0$ korral [13].

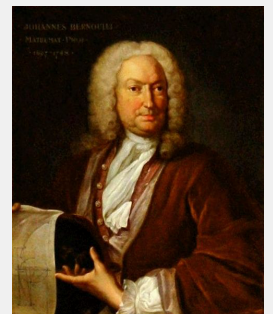
L'Hospitali reegli nimi tuleb prantsuse matemaatiku Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital (1661-1704) järgi.



Marquis de l'Hôpital. Allikas: Wikipedia

Arvatavasti tõestas l'Hospitali reegli šveitsi matemaatik Johann Bernoulli (1667-1748). Markii l'Hôpital ise oli Bernoulli õpilane ja ühtlasi tööandja. Lepingu järgi võis l'Hôpital kasutada Bernoulli tulemusi oma nime all. L'Hôpital avaldas 1696. aastal maailma esimese trükitud raamatu diferentsiaal-arvutuse valdkonnas: "Lõpmata väikeste suuruste analüüs kõverjoonte mõistmiseks", milles oli kasutatud päris mitut Bernoulli ja Leibnizi tulemust (seda mainis eessõnas ka l'Hôpital ise).

Naljatledes öeldakse, et l'Hospitali reegel on parim (kõige kasulikum) teoreem, mida raha eest saab osta.



Johann Bernoulli. Allikas: Wikipedia

Johann Bernoulli oli seejuures ka Euleri õpetaja.

L'Hospitali reegli võib kirjutada kujul

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

vajalikel eeldustel funktsioonide f ja g jagatiste tüüpide ning piirväärtuste kohta. Muidugi võib l'Hospitali reeglit kasutada ka korduvalt, näiteks võib eelnevas võrduses jätkata

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)},$$

kui vajalikud eeldused on täidetud.

Näide 4.5

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{4}{5}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.6

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x + x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + 2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.7

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 7x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{1+7x}}{1} = 7.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.8

Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 4.9

L'Hospitali reegli korral on oluline, et meil oleks vaja leida piirväärtus jagatisest $\frac{f(x)}{g(x)}$. Kui jagatist ei ole, võib selle ise tekitada. Leiame piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{-\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 4.5

On oluline kontrollida, et tekiks $\frac{0}{0}$ või $\left|\frac{\infty}{\infty}\right|$ tüüpi määramatus, vastasel korral võib saada absurdse tulemuse. Näiteks, proovides kasutada l'Hôspitali reeglit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{2} = 0,$$

mis ei anna sugugi õiget piirväärtust ∞ .

Näide 4.10

L'Hospitali reegel ei ole alati kasutatav. Näiteks

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0,$$

kuna $\frac{2}{3} \in (0, 1)$. L'Hospitali reeglga saaksime

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{3^x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln 2}{3^x \ln 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \ln^2 2}{3^x \ln^2 3} \stackrel{\infty/\infty}{=} \dots,$$

mida võime ka jätkata. Sellega ei saa me aga selgemaks, kuidas piirväärtust leida.

◇ ◇ ◇

Näide 4.11

Märgime, et kuigi l'Hospitali reegli kasutamisel on piirväärtuse

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olemasolu oluline, võib selle puudumisel piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ siiski eksisteerida. Näiteks,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \stackrel{\infty/\infty}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1,$$

sest

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Samas,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

aga ei eksisteeri, kuna protsessis $x \rightarrow \infty$ on lõpmata palju arve x , millal $\cos x = 0$ või $\cos x = 1$ ja sel juhul murrul

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

saab olema väärtuseid 1 ja 0. Trigonomeetrilistest valemitest saab kirjutada

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^2 \frac{x}{2}.$$

Tangensi väärtustest protsessis $x \rightarrow \infty$ piirväärtust ei eksisteeri.

◇ ◇ ◇

4.3 Funktsiooni kasvamine ja kahanemine

„Teadus loob meid ümbritsevast objektiivsest reaalsusest tõetruu pildi, vaadeldes seal toimuvaid nähtusi üksteisega seostatuna, jälgides ühe nähtuse kulgemist teise nähtuse taustal. Matemaatiliselt avaldub niisuguse vaatlemise tulemus alati kahe suuruse teatava funktsionaalse seosena kujul $y = f(x)$. Ainsaks nähtuse staatikasse puutuvaks küsimuseks on seejuures küsimus: missugune on funktsiooni väärtus argumendi etteantud väärtusel? Nähtuse dünaamikat puutuvate küsimuste hulk on märksa suurem. Siia kuuluvad meile juba tuttavad küsimused: kui suur on $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$? Kui suur on funktsiooni muutumise kiirus $f'(a)$? Siia kuuluvad aga ka küsimused, mis iseloomustavad funktsiooni muutumise kvalitatiivset külge, nagu näiteks küsimused: kas argumendi läbiminekul väärtusest a funktsioon kasvab või kahaneb? Kas kasvamine või kahanemine toimub kiirenevalt või aeglustuvalt.“ (vt [30]).

Definitsioon 4.2

Funktsiooni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kasvavaks** hulgas X , kui suvaliste $x_1, x_2 \in X$ korral, kus $x_1 < x_2$, kehtib $f(x_1) < f(x_2)$. Kui aga $x_1 < x_2$ korral $f(x_1) > f(x_2)$, siis räägitakse **kahanevast** funktsioonist.

Teoreem 4.6

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

Tõestus. Tõestame tulemuse kasvava funktsiooni kohta. Olgu $f'(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Valime suvalised punktid $x_1, x_2 \in (a, b)$ nii, et $x_1 < x_2$. Kuna funktsioon on diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis on ta pidev osalõigis $[x_1, x_2] \subset (a, b)$. Kasutades Lagrange'i keskvaartusteoreemi, leiame punkti $\xi \in (x_1, x_2)$ nii, et

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Et $f'(\xi) > 0$, siis

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0,$$

mistõttu

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

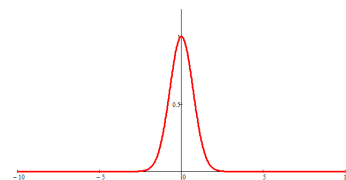
ehk $f(x_1) < f(x_2)$, s.t funktsioon f on kasvav vahemikus (a, b) . $\square$

Näide 4.12 Uurime funktsiooni $f(x) = e^{-x^2}$. Leiame tuletise

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}.$$

Ekspontentfunktsioon e^z on iga arvu z korral positiivne. Järelikult piirkonnas $x \in (-\infty, 0)$ kehtib $f'(x) > 0$ ja seetõttu on funktsioon kasvav ning piirkonnas $x \in (0, \infty)$ kehtib $f'(x) < 0$ ja seepärast on funktsioon kahanev selles piirkonnas.

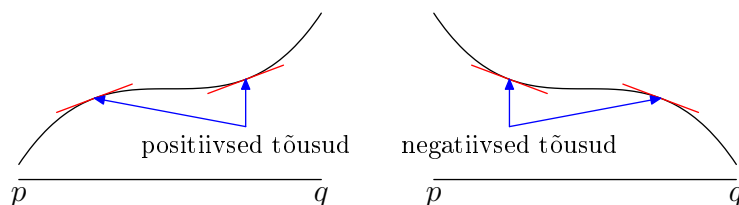
◇ ◇ ◇



Joonis: $f(x) = e^{-x^2}$.

Märkus 4.6

Geomeetriliselt tähendab tingimus $f'(x) > 0$ (funktsioon kasvab) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab iga $x \in (a, b)$ korral x -telje positiivse suunaga teravnurga ja tingimus $f'(x) < 0$ (funktsioon kahaneb) seda, et joone $y = f(x)$ puutuja moodustab iga $x \in (a, b)$ korral x -telje positiivse suunaga nürinurga.



Joonis: kasvamise ja kahanemise geomeetriline tõlgendus [20].

4.4 Funktsiooni ekstreemumid

Definitsioon 4.3

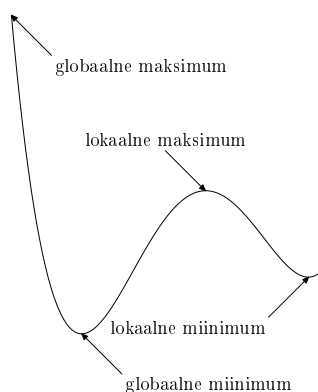
Öeldakse, et funktsioonil $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, on punktis (kohal) $a \in X$ **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii, et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis (kohal) a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii, et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Lokaalse miinimumi ja lokaalse maksimumi kohta öeldakse kokkuvõtvalt ka **lokaalne ekstreemum**.



Joonis: lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid

Märkus 4.7

Diferentseeruva funktsiooni lokaalse ekstreemumi (maksimum või miinimum) leidumiseks punktis a on Fermat' teoreemi põhjal tarvilik, et $f'(a) = 0$. Kui funktsioon ei ole punktis a diferentseeruv (kuid on siiski määratud), siis punkt a võib ikka olla ekstreemumpunkt (näiteks $y = |x|$ korral on $x = 0$ miinimumpunkt).

Funktsiooni f niisugust argumenti väärtust a , mille korral funktsioon saavutab oma ekstreemumi, nimetatakse selle *funktsiooni ekstreemumkohaks* või *funktsiooni ekstreemumpunktiks*.

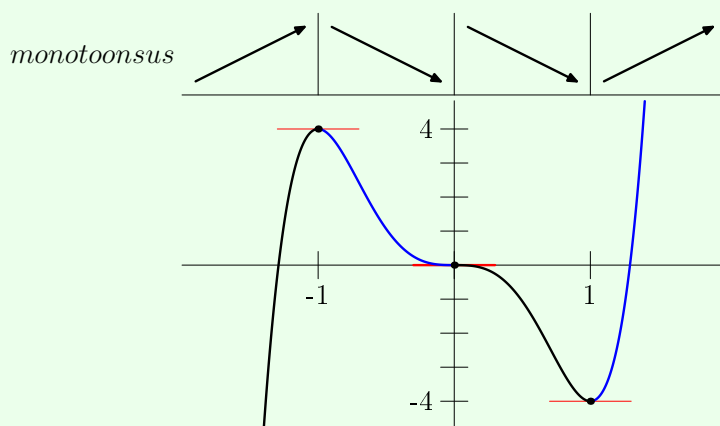
Definitsioon 4.4

Määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$, ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**.

Teoreem 4.7

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikes $(a - \delta, a)$ ja $(a, a + \delta)$ mingi $\delta > 0$ korral ning **pidev** kriitilises punktis a . Siis kehtivad väited:

1. Kui punkti a läbimisel (positiivses suunas) $f'(x)$ märk muutub $+\rightarrow -$, siis on funktsioonil f **punktis a lokaalne maksimum** (funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemiseks);
2. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk muutub $-\rightarrow +$, siis on funktsioonil f **punktis a lokaalne miinimum** (funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamiseks);
3. Kui punkti a läbimisel $f'(x)$ märk ei muutu, siis **punktis a ekstreemumit ei ole**.



Joonis: funktsiooni lokaalsed ekstreemumid [20].

Näide 4.13 Funktsioon $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ on pidev kogu reaalteljel, kuid ei ole diferentseeruv punktis $x = 0$, s.t 0 on funktsiooni kriitiline punkt. Leiame tuletise

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Samas, $f'(x) < 0$, kui $x < 0$, ja $f'(x) > 0$, kui $x > 0$. Seega on $x = 0$ funktsiooni f lokaalne miinimumpunkt.

Märkus 4.8

Peale lokaalsete ekstreemumite eristame veel **globaalseid ekstreemume** (funktsiooni suurim või väiksem väärtus mingis piirkonnas). Viimaste leidmiseks võib leida kõik lokaalsed ekstreemumid, kusjuures eraldi tuleb arvutada funktsiooni väärtused punktides, kus tuletist ei ole, näiteks piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga). Saadud suurim või väiksem väärtus ongi funktsiooni globaalseks ekstreemumiks. Kui ei ole eraldi rõhutatud, siis mõistame **ekstreemumite** all kõiki lokaalseid ja globaalseid ekstreemume.

Näide 4.14 Lennukompanii arvestab pileti hinnaks iga istekoha eest 300 eurot, lisades baashinnale juurde 2 eurot iga välja müümata istekoha eest. Mitu kohta tuleks 200-istmelises lennukis välja müüa, et lennukompanii tulu oleks suurim?

Esmapilgul tundub, et tuleks müüa 200 piletit ja tulu $200 \cdot 300 = 60000$ eurot võiks olla vastus, aga nii lihtne see päriselt ei ole. Olgu x müüdud pileтите arv, $200 - x$ müümata pileтите arv. Siis ühe pileti hind on

$$p(x) = 300 + 2(200 - x) = 700 - 2x.$$

Kõikide müüdud pileтите pealt saab tulu

$$T(x) = x \cdot p(x) = 700x - 2x^2.$$

Tulufunktsiooni $T(x)$ maksimumi leidmiseks leiame tuletise ja pane-me ta võrduma nulliga (kuna maksimum võib leiduda vaid kriitilises punktis või siis piirkonna otspunktides):

$$700 - 4x = 0.$$

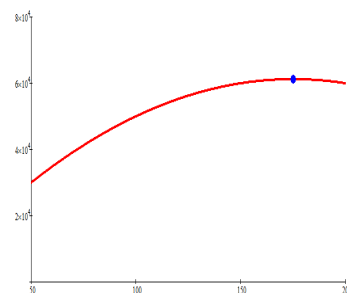
Saame, et $x = 175$ istekohta. Sel juhul teenib lennukompanii $T(175) = 175(300 + 2 \cdot 25) = 175 \cdot 350 = 61250$ eurot. Kuigi erinevus ei ole väga suur, saame siiski mingi ettekujutuse optimeerimise võimalustest.

Päris elus kogu mudel muidugi nii lihtne ei ole. Lisada tuleb veel tegurid, mis arvestavad turu olukorda, konkurentsi, tarbijate ostujõudu jne.

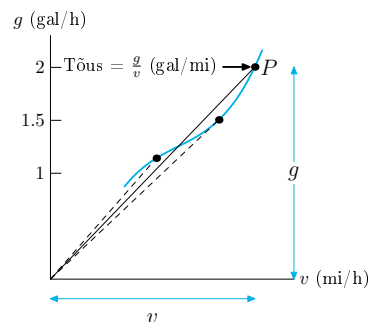
◇ ◇ ◇

Näide 4.15

Teatud optimaalseid väärtusi võib välja lugeda ka graafikult, ilma et peaks teadma konkreetseid funktsioone. Olgu v auto liikumise kiirus ja g kütuse kulu ajaühikus. Vaatleme graafikut, kus ühel teljel on v ja teisel teljel on g . Oleme huvitatud kütusekulust pikkusühiku kohta $G = \frac{g}{v}$ (siin gallonit miili kohta, näide pärineb õpikust [14]).



Joonis: funktsioon $T(x)$.



Joonis: kütuse kulu [14].

Soovime leida G minimaalset väärtust. Võttes graafikul joone peal punkti P , tekib täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on g ja teine v , üks nurkadest asub nullpunktis. Seega hüpotenuus asub sirgel, mille tõus on $\frac{g}{v}$. On lihtne aru saada, et $G = \frac{g}{v}$ on minimaalne punktis, kus vastava sirge tõus on minimaalne (kõige väiksem teravnurk).

Kõrvalolevat joonist silmas pidades saame, et kiiruse $v = 50$ korral on kütuse kulu miili kohta kõige väiksem. Sedasi saab andmeid lugeda suhte $\frac{f(x)}{x}$ kohta suvalise funktsiooni f korral. Meie tehtud analüüs on sisuliselt sama, mis leida funktsiooni $\frac{f(x)}{x}$ tuletis ja lahendada võrrand $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0$. See annab

$$\frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 0$$

ehk

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

◇ ◇ ◇

Lause 4.1

Olgu funktsioon kaks korda diferentseeruv punktis c . Siis funktsioonil f on argumenti väärtusel c lokaalne maksimum, kui

$$f'(c) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(c) < 0,$$

ja funktsioonil f on argumenti väärtusel c lokaalne miinimum, kui

$$f'(c) = 0 \quad \text{ja} \quad f''(c) > 0.$$

Näide 4.16 Leiame antud ruumalaga V silindrikujulise kinnise anuma mõõtmed nii, et anuma valmistamiseks kuluv materjali kogus oleks minimaalne. Olgu silindri aluse raadius r ja silindri kõrgus h . Siis kahe põhja pindala on $2\pi r^2$ ja külje pindala $2\pi r h$. Anuma kogupindala on

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Silindri ruumala on $V = \pi r^2 h$, millest $h = \frac{V}{\pi r^2}$. Seda arvestades saame

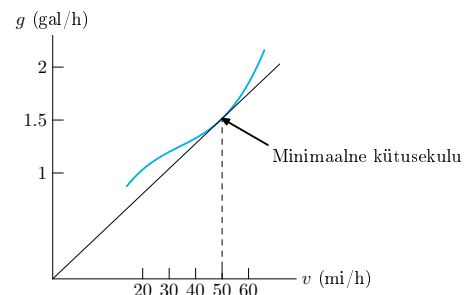
$$S = S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

ja meid huvitab r väärtus, kus S on minimaalne. Leides tuletise

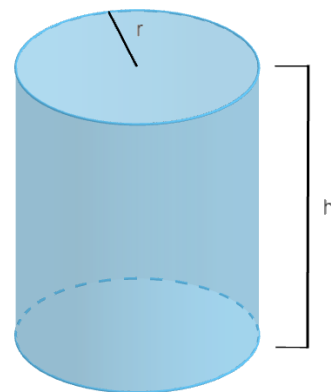
$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2},$$

näeme, et $S'(r) = 0$ parajasti siis, kui

$$2\pi r - \frac{V}{r^2} = 0 \quad \text{ehk} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$



Joonis: Minimaalne kütusekulu [14].



Joonis: Silinder.

Lisaks,

$$S''(r) = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0,$$

mis tähendab, et leitud r väärtus on miinimumpunkt. Seejuures

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

ning $h = 2r$.

◇ ◇ ◇

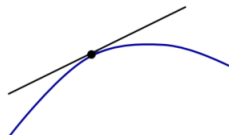
4.5 Funktsiooni kumerus ja nõgusus

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Varasemast teame, et igas punktis $x \in (a, b)$ on funktsiooni graafikul olemas puutuja.

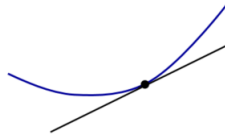
Definitsioon 4.5

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub ülalpool graafikut.

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni f puutuja asub allpool graafikut.



kumer funktsioon



nõgus funktsioon

Joonis: puutuja asukohad kumera ja nõgusa graafiku korral

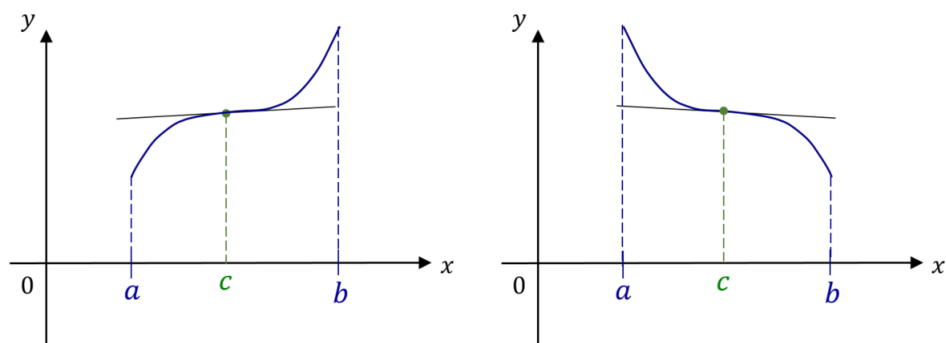
Teoreem 4.8

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on kumer selles vahemikus. Kui $f''(x) > 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis f on nõgus selles vahemikus.

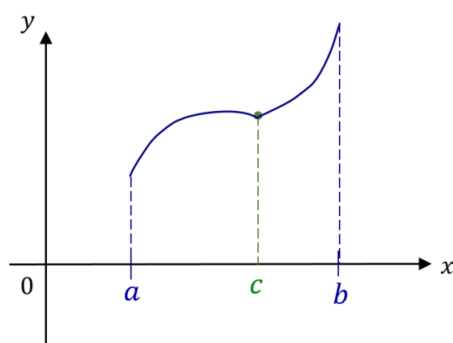
Definitsioon 4.6

Olgu funktsioon f diferentseeruv vähemalt vahemikes (a, c) ja (c, b) ning pidev punktis c . Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.

Geomeetriline tõlgendus. Kui puutuja leidub, siis käänupunktis puutuja lõikab joont. Puutuja võib ka puududa, kui funktsiooni tuletise graafikul on teravad nurgad.



Mõlemal joonisel on käänupunktiks c .



Ka sellel joonisel on käänupunkt vaatamata sellele, et tuletis ei ole pidev funktsioon.

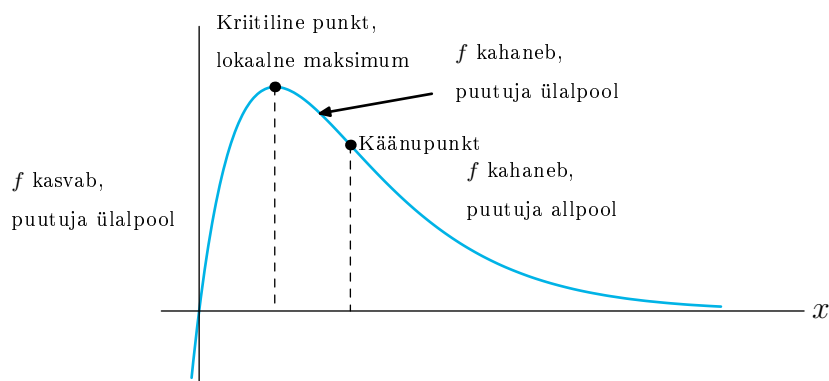
Näide 4.17 Vaatleme funktsiooni $f(x) = x e^{-x}$. Leiame kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid (kui need leiduvad). Esimest järku tuletis on

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$$

ja teine tuletis

$$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x) e^{-x} = (x - 2) e^{-x}.$$

Näeme, et $f'(x) = 0$, kui $x = 1$. Siinjuures $f''(1) < 0$, seepärast asub punktis $x = 1$ lokaalne maksimum. Piirkonnas $x < 2$ on $f''(x) < 0$ ja funktsioon on kumer. Piirkonnas $x > 2$ on $f''(x) > 0$ ja funktsioon on nõgus. Kuna punkt $x = 2$ eraldab kumerat ja nõgusat piirkonda, siis on punkt $x = 2$ käänupunktiks.



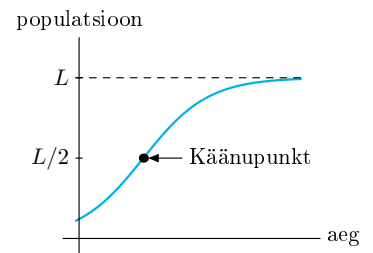
Joonis: funktsiooni $f(x) = x e^{-x}$ graafik [14].

Näide 4.18 Vaatleme logistilist kõverat, mis iseloomustab populatsiooni kasvu ajas, kusjuures populatsiooni piiriks on L ja käänupunkt asub kõrgusel $\frac{L}{2}$.

Enne punkti $\frac{L}{2}$ on joon nõgus, s.t kasvamise kiiruse muutumise kiirus (ehk kiirendus) on positiivne.

Seega nõgus ja kasvav funktsioon näitab, et kasvamise kiirus on igas järgmises punktis suurem kui eelmises ja kõige suurem on see käänupunktis $\frac{L}{2}$. Edasi hakkab kasv aeglustuma, s.t kumer ja kasvav funktsioon näitab, et kasvamise kiirus igas järgmises punktis on väiksem kui eelmises (kiirendus ehk funktsiooni teist järku tuletis on negatiivne).

◇ ◇ ◇



Joonis: logistiline kõver [14].

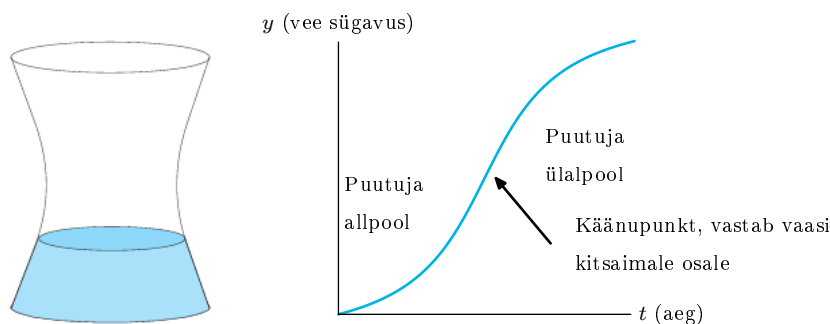
Märkus 4.9

Analoogiliselt võib analüüsida kõiki nelja põhitüüpi: kasvav-kiirendav, kasvav-aeglustav, kahanev-kiirendav ja kahanev-aeglustav.



Joonis: neli põhitüüpi [3].

Näide 4.19 Pildil toodud kujuga vaasi valatakse vett konstantse kiirusega. Vee taseme tõusu kui aja funktsiooni graafikul on näha funktsiooni nõgususe (vaasi ristlõike pindala väheneb) ja kumeruse (vaasi ristlõike pindala suureneb) piirkonnad, samuti käänupunkt, s.o. ajahetk, kus vee tase vastab vaasi vähimale ristlõike pindalale.



Joonis: Vaasi vee taseme muutus ajas [14].

◇ ◇ ◇

4.6 Funktsiooni graafiku joonistamine

Üldjuhul on kasulik jälgida järgmist skeemi:

1. Leiame funktsiooni määramispiirkonna (kui võimalik, siis ka muutumispiirkonna) ja katkevuspunktid. Teeme kindlaks, kas funktsioonil on iseloomulikke omadusi, näiteks paaris või paaritu funktsioon, perioodiline funktsioon.
2. Leiame asümptootid (sirged, millele funktsiooni graafik võiks mingis protsessis läheneda, vt. allpool).
3. Leiame kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumid (miinimum- ja maksimumkohad). Üldiselt, leiame info, mille annab meile funktsiooni esimest järku tuletis.
4. Leiame antud funktsiooni kumeruse ja nõgususe piirkonnad ning käänupunktid. See on info, mida saab funktsiooni teist järku tuletise kaudu.
5. Joonistame saadud tulemuste põhjal graafiku.

Definitsioon 4.7

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

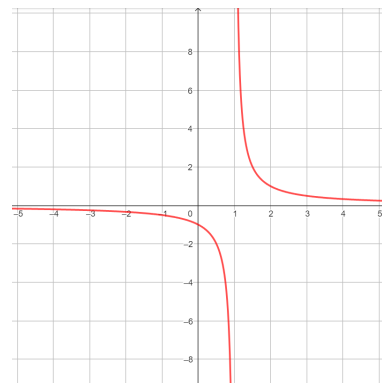
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

On selge, et graafikul saab püstasümptoot olla vaid katkevuspunktid.

Näide 4.20 Joone $y = \frac{1}{x-1}$ vasak- ja parempoolseks püstasümptoodiks on sirge $x = 1$, sest

$$f(1-) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty, \quad f(1+) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

◇ ◇ ◇



Joonis: $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Definitsioon 4.8

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0,$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right).$$

Lihtne on tuletada, et kaldasümptoodi tõus a peab võrduma piirväärtusega

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right).$$

Siinjuures parempoolse kaldasümptoodi korral peetakse silmas protsessi $x \rightarrow \infty$ ja vasakpoolse kaldasümptoodi korral protsessi $x \rightarrow -\infty$. Seejuures

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right).$$

Näide 4.21 Leiame funktsiooni $f(x) = x \arctan x$ graafiku kaldasümptootid. Esiteks leiame sirge tõusu (mõlemad lõpmatud protsessid korraga)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Parempoolse kaldasümptoodi korral $a = \frac{\pi}{2}$ ja

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \arctan x - \frac{\pi}{2} x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

Vasakpoolse kaldasümptoodi korral $a = -\frac{\pi}{2}$ ja analoogiliselt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \arctan x + \frac{\pi}{2} x \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\arctan x + \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \\ &\stackrel{0/0, L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1. \end{aligned}$$

Seega nii parem- kui ka vasakpoolne kaldasümptoot on olemas ja on vastavalt

$$y = \frac{\pi}{2} x - 1, \quad y = -\frac{\pi}{2} x - 1.$$

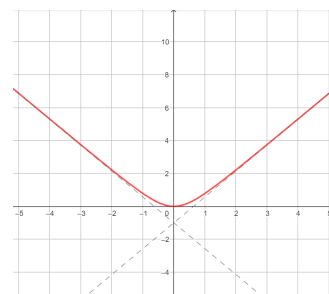
◇ ◇ ◇

Näide 4.22 Joonistame funktsiooni

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$$

graafiku (vt. [23]).

1. Funktsiooni määramispiirkonnaks on $X = \mathbb{R} \setminus (0, 2]$. Lihtne on kontrollida, et funktsioon ei ole paaritu ($f(-x) \neq -f(x)$) ega paaris ($f(-x) \neq f(x)$) ja f ei ole perioodiline. Kuna $f(x) \geq 0$ iga $x \in X$ korral, siis funktsiooni graafik asub ülalpool x -telge.



Joonis: $f(x) = x \arctan x$.

2. Sirge $x = 2$ on funktsiooni f parempoolseks püstasümptoodiks ($f(2+) = \infty$). Leiame kaldasümptoodid $y = ax + b$. Selleks arvutame

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \pm 1.$$

Leiame

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x} - \sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x-2}(\sqrt{x} + \sqrt{x-2})} = 1 \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}} + x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\sqrt{x-2} - \sqrt{x})}{\sqrt{x-2}} = -1.$$

Saime, et parem- ja vasakpoolne kaldasümptoot on vastavalt

$$y = x + 1, \quad y = -x - 1.$$

3. Leiame funktsiooni tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f'(x) &= f(x) \left(\frac{3}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x-2| \right)' = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}} \left(\frac{3}{2x} - \frac{1}{2(x-2)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3). \end{aligned}$$

Tuletis ei ole määratud punktis $x = 0$, kuid võrrandist $f'(x) = 0$ saame kriitiliseks punktiks $x = 3$. Lokaalseks miinimumiks saame $f(3) = \sqrt{27}$, kuna $f'(x) < 0$ piirkonnas $x \in (2, 3)$ (kahaneb) ja $f'(x) > 0$ piirkonnas $x \in (3, \infty)$ (kasvab). Kui $x < 0$, siis $f'(x) < 0$ ja funktsioon on kahanev. Kuna $f(0) = 0$, siis $x \leq 0$ jaoks asub punktis $x = 0$ globaalne miinimum.

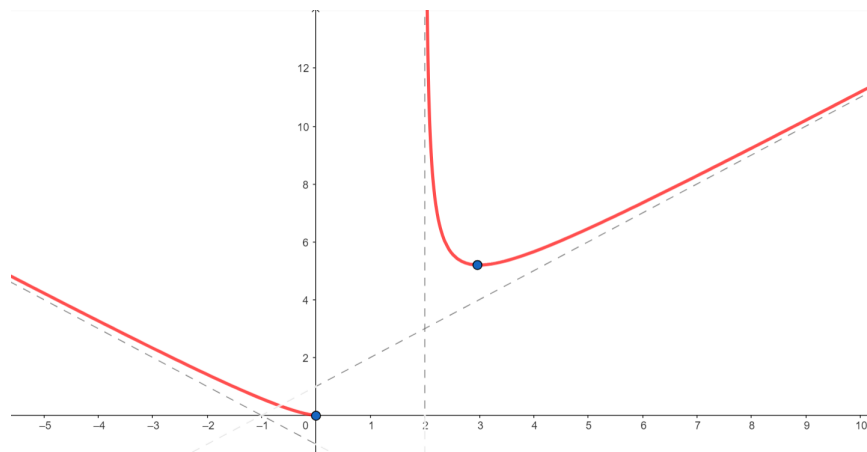
4. Leiame funktsiooni teise tuletise (logaritmilisest diferentseerimisest)

$$\begin{aligned} f''(x) &= f'(x) \left(\frac{1}{2} \ln|x| + \ln|x-3| - \frac{3}{2} \ln|x-2| \right)' \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3) \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-3} - \frac{3}{2(x-2)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{x}{(x-2)^3}} (x-3) \frac{6}{2x(x-3)(x-2)} = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}. \end{aligned}$$

Piirkonnas $x < 0$ kehtib $f''(x) > 0$ ning $x > 2$ korral $f''(x) > 0$ ja funktsioon on nõgus hulgal $\mathbb{R} \setminus [0, 2]$.

◇ ◇ ◇

5. Joonistame graafiku, konspekti jaoks küll arvuti abiga.



◇ ◇ ◇

Joonis: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

Peatükk 5

Algfunktsioon ja määramata integraal

5.1	Sissejuhatus	94
5.2	Algfunktsioon	94
5.3	Määramata integraal	95
5.4	Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest	96
5.5	Tehetega seotud integreerimisreegel	98
5.6	Muutujavahetus	99
5.7	Ositi integreerimine	101
5.8	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	104

Kontrolltöö teemad

1. Põhiliste elementaarfunktsioonide algfunktsioonid.
2. Muutujavahetus määramata integraali leidmisel.
3. Ositi integreerimise valem ja selle kasutamine.

Eksamiteemad

1. Alfunktsiooni mõiste. Alfunktsiooni eksisteerimise tingimus.
2. Määramata integraali mõiste. Tehetega seotud integreerimisreegel.
3. Määramata integraali muutujavahetuse valem.
4. Ositi integreerimise valem.
5. Lihtmurd, liigmurd. Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

5.1 Sissejuhatus

Vaatleme objekti liikumist seaduse $s = s(t)$ alusel, kus s näitab läbitud teepikkust ajahetkel t . Funktsiooni s tuletis andis meile hetkkiiruse $v(t) = s'(t)$ hetkel t ja teine tuletis kiirenduse $a(t) = s''(t)$,

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

Vaatleme nüüd olukorda, kus me näiteks teame objekti kiirust $v(t)$ igal ajamomendil. Meid huvitab, kas kiiruse $v(t)$ alusel saab teada objekti asukoha $s(t)$ igal ajahetkel t . Osutub, et teatud tingimustel on see võimalik. Sellist vastupidise suunaga info leidmist me nimetamegi määramata integraali leidmiseks (sõnastame täpsemalt allpool). Kohe näeme, et kiirenduse või kiiruse teadmisel kehtivad **skemaatiliselt** järgmised omadused:

$$v(t) = \int v'(t) dt = \int a(t) dt, \quad s(t) = \int s'(t) dt = \int v(t) dt.$$

Seos kiiruse, kiirenduse ja läbitud teepikkusega kehtib rangelt võttes konstandi täpsusega. Täpselt korrektne oleks need seosed anda järgmiselt:

$$\begin{aligned} \int v(t) dt &= s(t) + s_0, \\ \int a(t) dt &= v(t) + v_0. \end{aligned}$$

5.2 Algfunktsioon

Definitsioon 5.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **algfunktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Näide 5.1 Funktsiooni $y = x^3$ üheks algfunktsiooniks on funktsioon $y = \frac{x^4}{4}$, üldiselt iga funktsioon kujul

$$y = \frac{x^4}{4} + C,$$

kus C on suvaline konstant. Tõepoolest,

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C \right)' = x^3.$$

◇ ◇ ◇

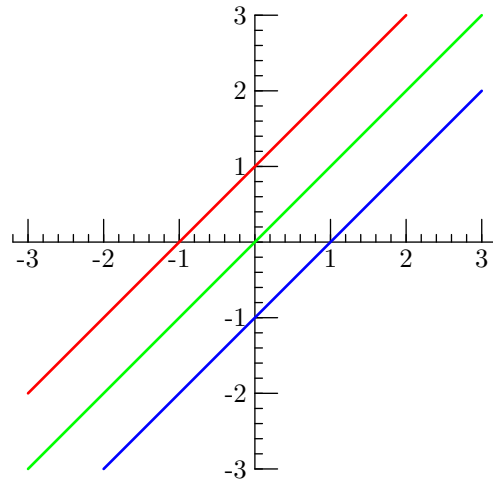
Näide 5.2 Arvestades sissejuhatuses toodud kommentaare, on lihtne näha, et kiirenduse a algfunktsiooniks on kiirus v ja kiiruse algfunktsiooniks on teepikkus s . Matemaatiliselt kehtib väide vähemalt siis, kui a ja v on pidevad funktsioonid aja t järgi.

Olgu näiteks punkti liikumise kiirus konstantne $v(t) = 1$. Sel juhul v algfunktsiooniks on $s(t) = t + C$ (sest $(t + C)' = 1$). Kui me liikumise kohta rohkem infot ei tea, siis v algfunktsiooniks võib olla iga sirge $t + C$, mille tõus on üks, kuid lõikepunkt y -teljega suvaline

Funktsiooni f algfunktsiooni leidmine on sama, mis leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x)$$

lahend $y = y(x)$. Diferentsiaalvõrrandid on loodusteadustes modelleerimisel väga levinud vahend.

Joonis: sirged $s(t) = t + C$, kus $C = -1, 0, 1$.

Kui me näiteks teame, et alghetkel $t = 0$ objekti asukoht oli punktis 1, siis võrdustest

$$s(0) = 1 \quad \text{ehk} \quad 0 + C = 1$$

saame, et $C = 1$ ja punkti liikumisseaduseks on üks konkreetne sirge $s(t) = t + 1$. Kui $s(0)$ oli midagi muud, siis saame mingi teise paralleelse sirge.

◇ ◇ ◇

Märkus 5.1

Funktsiooni f kõik algfunktsioonid avalduvad kujul $F + C$, kus F on funktsiooni f mingi algfunktsioon ja $C \in \mathbb{R}$ on suvaline konstant.

5.3 Määramata integraal

Definitsioon 5.2

Olgu F funktsiooni f mingi algfunktsioon. Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F + C$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvalise konstandi tähis, nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**. Kasutatakse kirjutist

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Definitsioon 5.3

Funktsiooni määramata integraali leidmist nimetatakse mõnikord selle funktsiooni **integreerimiseks**.

Tihti kasutatakse sõna “integraal” määramata integraali tähenduses.

Näide 5.3 Leiame

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide. Auto sõidab maanteel kiirusega 60 km/h. Kui suur peab olema auto konstantne aeglustus (negatiivne kiirendus a), et auto peatuks 73 meetri pärast?

Tähistame auto liikumise seaduse $s = s(t)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$s''(t) = a$$

tingimustega $s(0) = 0$ ja $s'(0) = v(0) = 60$.

Saadud diferentsiaalvõrrandi lahendamine seisneb algfunktsioonide leidmises.

Esimesena saame $s'(t) = at + C_1$ ehk $v(t) = at + C_1$ ja seejärel $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + C_1t + C_2$, kus C_1 ja C_2 on üldjuhul suvalised reaalarvud. Tingimus $s'(0) = 60$ annab $C_1 = 60$, seejärel saame $s(0) = 0$ abil, et $C_2 = 0$. Niisiis toimub liikumine eeskirja $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + 60t$ kohaselt (siin aega mõõdetakse tundides ja läbitud teepikkust kilomeetrites, seda näitas algkiirus 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Kiiruse muutumine nulliks aja t jooksul annab võrrandi $v(t) = at + 60 = 0$, millest $t = -\frac{60}{a}$. Selle aja jooksul läbib auto 0.073 km, mis viib võrrandini $s(t) = \frac{a}{2}t^2 + 60t = 0.073$. Asendades siin $t = -\frac{60}{a}$, saame

$$\frac{a}{2} \left(-\frac{60}{a} \right)^2 - \frac{60^2}{a} = 0.073,$$

mille lahend on negatiivne kiirendus a . Selle teisendamine tavapärastesse ühikutesse annab $a \approx -1.9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Märkus 5.2

Määramata integraali definitsioonist järgmised võr-
dused:

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$,
2. $d(\int f(x) dx) = f(x)dx$,
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Seega diferentseerimine ja integreerimine on teineteise pöördteisendus-
teks (konstantse liidetava täpsusega). Inglise keeles kasutatakse mõnes
kirjandusallikas tuletise jaoks väljendit "derivative" ja määramata in-
tegraali jaoks "antiderivative", mis on loomulikum, kui eestikeelne "in-
tegraal".

Märkus 5.3

Funktsioonil f on olemas määramata integraal parajasti siis,
kui sellel funktsioonil on olemas algfunktsioon.

Teoreem 5.1

Igal vahemikus (a, b) pideval funktsioonil on olemas algfunkt-
sioon selles vahemikus.

5.4 Integraalid põhilistest elementaarfunkt- sioonidest

Konstantne funktsioon

$$\int c dx = cx + C, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R}$$

Astmefunktsioonid

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \text{kui } \alpha \neq -1$$

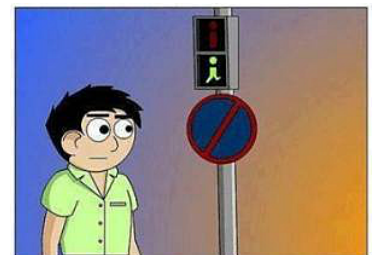
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Esimese võrduse erijuhtudena saame

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C \quad \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \quad \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$$

EkspONENTfunktsioonid

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \int e^x dx = e^x + C$$



Joonis: (internet).

Trigonomeetrilised funktsioonid

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid kui algfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\arccos x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = -\operatorname{arccot} x + C$$

Hüperboolsed funktsioonid

$$\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \, dx = \operatorname{th} x + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \, dx = -\operatorname{cth} x + C$$

Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioonid kui algfunktsioonid

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arsh} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arch} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arth} x + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \operatorname{arcth} x + C$$

Märkus 5.4

Kõikidel funktsioonidel ei pruugi olla algfunktsiooni elementaarfunktsioonidena (selliste funktsioonide väärtusi leitakse üldreeglina ligikaudsete meetoditega). Näiteks järgmisi integraale ei saa esitada elementaarfunktsioonide abil:

$$\int e^{-x^2} \, dx, \quad \int \cos x^2 \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

5.5 Tehetega seotud integreerimisreegel

Teoreem 5.2

Tehetega seotud integreerimisreegel. Kui on olemas integraalid $\int f(x) dx$ ja $\int g(x) dx$, siis kõikide reaalarvude $k, l \in \mathbb{R}$ korral on olemas integraal $\int (k f(x) + l g(x)) dx$, kusjuures

$$\int (k f(x) + l g(x)) dx = k \int f(x) dx + l \int g(x) dx.$$

Tõestus. Eelduse järgi leiduvad algfunktsioonid F ja G , nii et $F' = f$ ja $G' = g$. Tuletise leidmise omaduste põhjal

$$(k F + l G)' = k F' + l G' = k f + l g.$$

Viimane ütlebki, et funktsiooni $k f + l g$ algfunktsiooniks on

$$k F + l G.$$

□

Näide 5.4 Leiame määramata integraali

$$\begin{aligned} \int \left(x^5 + 10 \sin x - \frac{2}{x} \right) dx &= \int x^5 dx + 10 \int \sin x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^6}{6} - 10 \cos x - 2 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.5 Auto sõidab konstantse kiirendusega a . Leiame läbitud teepikkuse seaduse, kui auto algkiirus oli $v(0) = v_0$ ja esialgne asukoht $s(0) = s_0$.

Avaldame kiiruse

$$v(t) = \int a dt = a t + C,$$

kus tingimusest $v(0) = v_0$ saame, et $C = v_0$. Leiame teepikkuse

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (a t + v_0) dt = a \frac{t^2}{2} + v_0 t + C,$$

kus tingimusest $s(0) = s_0$ saame, et $C = s_0$. Seega auto liigub seaduse

$$s(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + s_0$$

alusel. Kui liikumine ei ole konstantse kiirendusega, siis saaksime mingi muu liikumise seaduse.

◇ ◇ ◇

5.6 Muutujavahetus

Märkus 5.5

Tuletise leidmisel kasutatakse korrutamise ja jagamise reegleid, liit-funktsiooni leidmise reeglit jne. Integraali leidmisel selliseid universaalseid reegleid eriti palju ei ole. Paljudel juhtudel taandub integreerimine algfunktsiooni äraarvamisele, mille järel saab teatud abitulemustega näidata, et vastus tuleb see, mis ta peab tulema.

Seoses sellega on integreerimise jaoks välja töötatud palju erivõtteid (mõnikord ainult kindlat tüüpi funktsioonide jaoks), millest tutvustame siinkohal ainult kahte kõige olulisemat: muutujavahetus ja ositi integreerimine.

Lause 5.1

[23, 37]. Kui φ on diferentseeruv funktsioon muutumiskiirkonnaga U ja f on pidev määramiskiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (5.1)$$

Tõestus. Funktsioon f on pidev, seega tal leidub algfunktsioon F ja järelikult

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Meie eeldustel saab moodustada funktsioonide φ ja F liitfunktsiooni $F\varphi$, mis on diferentseeruv (kui kahe diferentseeruva funktsiooni liitfunktsioon) ja kehtib

$$(F\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Saime, et funktsiooni $(f\varphi)\varphi'$ algfunktsiooniks on $F\varphi$, mistõttu

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = (F\varphi)(x) + C = F(\varphi(x)) + C.$$

Seega

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(u) + C,$$

mis annab võrduse (5.1). □

Näide 5.6 Leiame integraali

$$\int e^{2x-3} dx.$$

Teeme muutujavahetuse $u = 2x - 3$. Sel juhul $du = d(2x - 3) = 2dx$ ja $dx = \frac{du}{2}$. Järelikult

$$\int e^{2x-3} dx = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{e^u}{2} + C.$$

Asendades $u = 2x - 3$ tagasi, saame

$$\int e^{2x-3} dx = \frac{e^{2x-3}}{2} + C.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 5.6

Muutujavahetuse võtte erijuhuks on diferentsiaali märgi alla viimise võtte. Seda kasutatakse siis, kui on lihtne leida diferentsiaali $du(x) = u'(x) dx$.

Näide 5.7 Leiame integraali

$$\int \cos 4x dx.$$

Teame, et koosinuse algfunktsiooniks on siinus. On näha, et $d(4x) = 4 dx$. Seega võime kirjutada

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos 4x d(4x) = \frac{1}{4} \sin 4x + C,$$

mille võib leida ka muutujavahetuse $u = 4x$ abil

$$\int \cos 4x dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.8 Leiame integraali

$$\int (x-3)^2 dx.$$

Teame, et ruutfunktsiooni algfunktsiooniks on teatav kuupfunktsioon.

On näha, et $d(x-3) = dx$. Seega võime kirjutada

$$\int (x-3)^2 dx = \int (x-3)^2 d(x-3) = \frac{(x-3)^3}{3} + C,$$

mille võib leida ka muutujavahetuse $u = x - 3$ abil

$$\int (x-3)^2 dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x-3)^3}{3} + C.$$

◇ ◇ ◇

$$\int \text{devil} = \text{evil} + C$$

Näide 5.9 Leiame integraali

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx.$$

Näeme, et $d \sin x = \cos x \, dx$. Seega võime kirjutada

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Kontrolliks võib leida, et

$$\left(\frac{\sin^3 x}{3} + C \right)' = \frac{3 \sin^2 x}{3} \cos x = \sin^2 x \cos x.$$

◇ ◇ ◇

5.7 Ositi integreerimine

Lause 5.2

[23]. **Määramata integraali ositi integreerimise valem.** Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad ja eksisteerigu integraal

$$\int u'(x) v(x) \, dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x) v'(x) \, dx$$

ja kehtib võrdus

$$\int u(x) v'(x) \, dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) \, dx. \quad (5.2)$$

Tõestus. Tehtud eeldustel on korrutis uv diferentseeruv ja

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Eelduse kohaselt on olemas integraal $\int u'v \, dx$. Muidugi

$$\int (uv)' \, dx = uv + C$$

ja seepärast on olemas integraal $\int u v' \, dx$. Võrdusest

$$uv' = (uv)' - u'v,$$

saamegi

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx.$$

□

Märkus 5.7

Võrdust (5.2) nimetatakse **määramata integraali ositi integreerimise valemiks**. Kuna $u'(x) dx = du$ ja $v'(x) dx = dv$, siis esitatakse see võrdus sageli kujul

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Näide 5.10 Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x dx}_{\mathbf{dv}} = \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} - \int \underbrace{e^x}_{\mathbf{v}} \underbrace{dx}_{\mathbf{du}} = x e^x - e^x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.11 Leiame integraali

$$\int \underbrace{x}_{\mathbf{u}} \underbrace{\cos x dx}_{\mathbf{dv}}.$$

Kui integraali märgi all on polünoomi ja mingi funktsiooni korrutis, siis on tihti lootust leida vastus ositi integreerimise teel.

Üldiselt võetakse funktsiooniks v selline funktsioon, millest on lihtne leida integraali ja funktsiooniks u selline, mille tuleks lihtsustaks avaldist. Kuna tuleks alandab polünoomi astet ja integreerimine tõstab, siis kasulik on valida

$$u = x, \quad dv = \cos x dx.$$

Siit

$$u'(x) = x' = 1 \quad \text{ja} \quad du = dx$$

ning võrduse $dv(x) = \cos x dx$ integreerimisel saame

$$\int dv(x) = \int \cos x dx, \quad \text{millest valime} \quad v(x) = \sin x.$$

Seega ositi integreerimise valemi abil leiame

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.12 Vaatleme ühte sageli esinevat integraali

$$\int \sin^2 x dx.$$

Leiame selle integraali mitmel erineval moel. Esiteks ositi integreerimisega, võttes $u = \sin x$ ja $dv = \sin x dx$. Siis

$$du = \cos x dx, \quad v(x) = -\cos x.$$

Saame

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \sin 2x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx.\end{aligned}$$

Siit saab leida, et

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C - \int \sin^2 x \, dx.$$

Viies $\int \sin^2 x \, dx$ paremalt poolt vasakule, saame

$$2 \int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin 2x + x + C.$$

Järelikult

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Märgime, et lõpptulemuses ei kirjutata $\frac{C}{2}$, sest C ja $\frac{C}{2}$ omandavad mõlemad suvalisi reaalarvulisi väärtusi.

◇ ◇ ◇

Näide 5.13 Teine võimalus $\int \sin^2 x \, dx$ leidmiseks on kasutada trigonomeetrilist valemit

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

Siis

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int 2 \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.14 Kolmas võimalus on kasutada siinusfunktsiooni kompleksarvulist esitust (imaginaarühik i (s.t. $i^2 = -1$) käitub siin kui konstant),

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 dx = \int \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{-4} \right) dx.$$

Arvestades, et

$$\int e^{i2x} \, dx = \int \frac{1}{2i} e^{i2x} d(2ix) = \frac{e^{i2x}}{2i} + C,$$

siis

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right) + \frac{x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Analoogiliselt leitakse eraldi $\int \cos^2 x \, dx$, kuid praegu saame ka trigonomeetrilise valemi abil leida

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

5.8 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Vaatleme järgnevalt lihtsamaid juhte polünoomide $P(x)$ ja $Q(x)$ jagatise

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

integreerimisel. Siinjuures eeldame, et murd on antud taandatud kujul (lugejas olev x kõrgeim aste on väiksem kui nimetajas olev x kõrgeim aste). Põhiidee on murd $\frac{P(x)}{Q(x)}$ esitada osamurdude summana. Viimane on võimalik, sest igat polünoomi saab esitada korrutisena liikmetest kujul $x - a$ ja $x^2 + bx + c$. Tutvustame seda ideed näidete varal.

Definitsioon 5.4

Kui polünoomi $P(x)$ aste on väiksem polünoomi $Q(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

Olgu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd. Kui

$$Q(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + px + q)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole reaalseid nullkohti), siis kehtib võrdus

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} \\ & + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} \\ & \dots \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$+ \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + \dots,$$

kus $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, \dots, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m, \dots$ on mingid reaalarvud.

Kui nimetajas on polünoom, millel on kordsed nullkohad, siis tuleb välja kirjutada ka kõik madalama astmega polünoomid. Polünoomil x^2 on kordne nullkoht $x = 0$ ja seega peame kirjutama osamurrud $\frac{A_1}{x}$ ja $\frac{A_2}{x^2}$.

Kui nimetajas on ilma reaalsete nullkohtadeta ruutpolünoom, siis lugejas peab konstandi asemel olema lineaarne funktsioon $Bx + C$.

Märgime, et esitatavad näited ei hõlma kõiki tehnilisi võtteid osamurdude integreerimiseks, osa komplitseeritumaid juhte jääb vaatluse alt välja (vt. [17]). Järgnevas toome näiteid ratsionaalfunktsioonide osamurdudeks lahutamise ja nendest integraalide leidmise kohta.

Mõned tüüpilisemad näited sisalduvad järgmises tabelis.

Ühekordsed nullkohad.

$$\frac{7-x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2},$$

$$\frac{6x^2-14x-11}{(x+1)(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2x+1}.$$

Kordsed nullkohad.

$$\frac{7-x}{x(x+3)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3}.$$

Kui ei ole reaalseid nullkohti.

$$\frac{x^3+3x^2+2x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Näide 5.15 Olgu vaja leida integraal

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx.$$

Näeme, et integraalialuse ratsionaalfunktsiooni nimetaja on esitatav $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$. Seepärast otsime lahutust

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}.$$

Arvude A ja B leidmine toimub määramata kordajate meetodil, esitades siin parema poole ühisel nimetajal

$$\frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)}.$$

Võrreldes seda algse ratsionaalfunktsiooniga, saame võrdsused $A+B=5$ (muutuja x kordajate võrdsus) ja $-2A+B=-1$ (vabaliikmete võrdsus), millest $A=2$ ja $B=3$. Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-1}{x^2-x-2} dx &= \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{3}{x-2} dx = 2 \int \frac{d(x+1)}{x+1} \\ &+ 3 \int \frac{d(x-2)}{x-2} = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.16 Leiame integraali

$$\int \frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} dx.$$

Integraalialuse ratsionaalfunktsiooni esitame

$$\frac{x^2+4x+1}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3}.$$

Parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}.$$

Muutuja x astmete võrdlemisel (alates kõrgemast astmest) selles murrus ja algselt antud murrus saame võrdused

$$A + B + C = 1,$$

$$4A + 2B = 4,$$

$$3A - 3B - B = 1,$$

millest saab leida A , B ja C . Teine võimalus on võtta mõlemas murrus x väärtuseks nimetaja nullkohad ja võrrelda saadud väärtuseid (selliselt võrreldatakse tegelikult piirväärtusi, täpsemalt, väärtusi piirile lähenemisel). Selle võttega saame $x = 1$ korral (täpsemalt, kui $x \rightarrow 1$), et $8A = 6$, millest $A = \frac{3}{4}$; $x = -1$ korral $-4B = -2$ ehk $B = \frac{1}{2}$; $x = -3$ korral $8C = -2$ ehk $C = -\frac{1}{4}$. Niisiis esitub esialgne integraal

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.17 Leiaame

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx.$$

Siin otsime lahutust

$$\frac{1}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{A(x^2+4) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)},$$

millest muutuja x astmete võrdsus annab võrrandid

$$A + B = 0, \quad C = 0, \quad 4A = 1$$

ja sellest omakorda $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Niisiis,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2+4)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{x}{x^2+4} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2+4} d(x^2+4) \\ &= \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.18 Olgu vaja leida

$$\int \frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx.$$

Lahutus tuleb siin

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

ja parem pool ühisel nimetajal on

$$\frac{Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2}{x^2(x-1)}.$$

Kordajate määramiseks tulevad võrrandid

$$A + C = 2, \quad -A + B = 0, \quad -B = 1,$$

millest $A = B = -1, C = 3$. Nüüd leiame

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 1}{x^2(x-1)} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x-1} \right) dx \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.19 Leiame

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$$

Ratsionaalfunktsiooni nõuetekohane lahutus on siin

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

Võrduse parem pool annab

$$\frac{A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)x(x^2 + 1) + (Dx + E)x}{x(x^2 + 1)^2}.$$

Valides $x = 0$ (ikka piiril), saame $A = 1$. Seepärast võime viimase murru lugeja kirjutada

$$x^4 + 2x^2 + 1 + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex.$$

Võrreldes vastavaid muutuja x astmeid algses ratsionaalfunktsioonis olevatega, leiame $B = -1, C = 0, D = -1$ ja $E = 0$. Seega

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} d(x^2 + 1) \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 6

Diferentsiaalvõrrandid

6.1	Sissejuhatus	110
6.2	Diferentsiaalvõrranditest üldiselt	112
6.3	Esimest järku diferentsiaalvõrrandid	113
6.4	Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	115
6.5	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	117

Kontrolltöö teemad

1. Esimest järku eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamine.
2. Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine.

Eksamiteemad

1. Diferentsiaalvõrrandi ja tema lahendi mõiste.
2. Esimest järku normaalkujuline diferentsiaalvõrrand.
3. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne.
4. Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand.
5. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi mõiste ja lahendamine üldkujul.
6. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand. Lahendi kuju.
7. Esimest järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendamine üldkujul.
8. Konstandi varieerimise meetodi kirjeldus.

6.1 Sissejuhatus

Diferentsiaalvõrranditel on teaduse arengus olnud suur mõju. Kui Newton avaldas oma tuntud seaduse

$$F = m a,$$

tekkis võimalus hakata protsesside käitumist ette ennustama. Näiteks saab vaadeldavale Newtoni seadusele tuginedes leida keha poolt läbitud teepikuse, teades kiirendust ja jõudu, lahendades võrrandi

$$ms''(t) = F(t).$$

Sarnaselt on paljusid seadusi oluliselt lihtsam ja läbipaistvam kirjeldada kiiruseid või kiirendusi kasutades kui kirjeldada neid funktsioonide abil, millest ei ole võetud tuletisi. Sellised seaduste formuleeringud on oma sisult diferentsiaalvõrrandid, kus otsitavaks on funktsioon, aga võrrandis esinevad selle tuletised.

Näide 6.1 Vaatame ühte lihtsat protsessi, mida saab vaadelda kui diferentsiaalvõrrandit.

Analüütik teenib oma tööga 10 eurot tunnis. Mitu eurot on ta teeninud kahe tööpäeva ehk 16 tunni möödudes, kui alghetkeks oli tal teenitud 500 eurot?

See on küll lihtne arvutus, kuid vaatame, kuidas seda diferentsiaalvõrrandi abil kirja panna. Olgu $y = y(t)$ analüütiku poolt teenitud summa eurodes hetkel t tundi, mis on möödunud alghetkest $t = 0$. Antud 10 eurot tunnis saab vaadelda kui teenitud raha hulga muutumise kiirust ajas (eurot/tunnis). Seega analüütiku teenistus muutub (konstantse) kiirusega

$$y'(t) = 10.$$

Selle võrrandi lahendamiseks võime võrrandi mõlemat poolt integreerida (y on funktsiooni y' algfunktsioon):

$$y(t) = 10t + C.$$

Saime võrrandi lahendiks sirge, mis sisaldab tundmatut konstanti C . See lahend kirjeldab kõikvõimalikke teenitud summasid erinevate algsummade $y(0)$ korral. Kuna meil on antud tingimus, et $y(0) = 500$, siis

$$y(0) = 10 \cdot 0 + C \quad \text{ehk} \quad C = 500,$$

mille asendamisel saamegi leida küsitud summa

$$y(16) = 10 \cdot 16 + 500 = 660.$$

◇ ◇ ◇

See tähendab, et keha massiga m liigub kiirendusega a , kui talle mõjub jõud suurusega F . Viimast võib lugeda ka nii: selleks, et keha massiga m liiguks kiirendusega a , peab talle mõjuma jõud suurusega F . Newtoni seadus antud kujul on ühe ajamomendi kohta.

Selle näite korral ei olnud tähtis niivõrd see, et me ilmtin-gimata peame antud protsessi kirja panema diferentsiaalvõrrandi abil, kuivõrd pigem see, et näidata diferentsiaalvõrrandi olemust, ja kui lihtsalt te-kivad diferentsiaalvõrrandid kii-ruste kaudu või siis kuidas saab protsesse kirja panna kiirus-te abil isegi selliste protsesside kohta, mille peale me igapäeva-selt ei tule.

Näide 6.2 Järgmine näide on diferentsiaalvõrranditele iseloomulikum. Oletame, et võtame laenu 1000 eurot (liit)intressiga 5% aastas. Soovime teada, milliseks kujuneb antud intressi korral laenatud summa suvalisel ajahetkel t aastat (ehk kui suureks meie laen kasvab). Selle suuruse arvutamine ei ole raske, aga enam mitte nii lihtne, kui eelmises näites. Antud ülesande saame kirja panna järgmiselt.

Olgu laenu suurus hetkel t tähistatud $y = y(t)$. Laenu summa kasvab kiirusega 5% iseendast ehk

$$y' = 0.05y.$$

Lisaks on antud $y(0) = 1000$. Sellisena on laenu summa suuruse arvutamise seadust lihtne meelde jätta. Nagu hiljem selgub, on seda ülesannet suhteliselt lihtne lahendada.

◇ ◇ ◇

Protsendid kirjutame tihti skaalas $[0, 1]$ ehk siin $5\% = 0.05$. Seega esimese aasta lõpuks muutub summa y eurolt $y + 0.05y$ eurole.

Näide 6.3 Bioloogilise liigi arvukus. Olgu $y = y(t)$ mõne liigi isendite (näiteks teatud bakterite) arv ajamomendil t .

Malthuse seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus y' on võrdeline isendite arvuga:

$$y' = k y \quad \text{või teisiti} \quad \frac{dy}{dt} = k y,$$

kus k on võrdeegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete hea kättesaadavuse korral, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne.

Antud võrrandiga $y'(t) = k y(t)$ kirjeldatakse liigi arvukuse muutumise kiirust igal ajamomendil t , otsitavaks on liigi arvukus $y(t)$ ise.

Diferentsiaalvõrranditel on tavaliselt lõpmata palju lahendeid. Selleks, et ülesanne oleks korrektselt püstitatud ja saaks välja valida mudelile sobiva(d) lahendi(d), peavad olema antud veel mingid lisatingimused, näiteks antud olukorras bakterite arv mingil algmomendil $t = t_0$. Tihti võib algmomendi võtta $t_0 = 0$. Näiteks võib siis algtingimuseks olla $y(0) = 10^6$ bakterit mingis keskkonnas.

Märgime, et algtingimuse $y(0) = y_0$ korral on esialgse võrrandi lahendiks

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Näeme, et $k > 0$ korral toimub liigi eksponentsiaalne kasv ja $k < 0$ korral liigi eksponentsiaalne kahanemine.

◇ ◇ ◇

Thomas Robert Malthus
(1766 - 1834)



Allikas: Wikipedia
Malthus oli inglise demograaf ja majandusteadlane.

6.2 Diferentsiaalvõrranditest üldiselt

Kui eelnevalt vaatlesime vaid lihtsamaid diferentsiaalvõrrandite näiteid, siis tegelikult on diferentsiaalvõrrandite liike ja nendega seotud ülesandeid palju ja neil kõigil on oma olemuselt ja lahendamismeetoditelt olulised erinevused.

Märkus 6.1

Diferentsiaalvõrrandite korral peame paratamatult mainima mitme muutuja funktsioone, mida me ei ole veel õppinud. Esituses teeme seda nii vähe kui võimalik. Olgu öeldud, et sarnaselt ühe muutuja funktsioonile, nimetatakse antud eeskirja $z = f(x, y)$ kahe muutuja funktsiooniks f , kui igale argumentide paarile x ja y seatakse vastavusse üks ja ainult üks arv z .

Meie vajadusi rahuldab esialgu intuiivselt tajutav, aga tegelikkuses täpsustamist vajav definitsioon.

Definitsioon 6.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 6.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Definitsioon 6.3

Hariliku diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** intervallis (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, mis on selles intervallis diferentseeruv ning mille asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles intervallis.

Märkus 6.2

Antud kursuses tegeleme põhiliselt esimest järku harilike diferentsiaalvõrranditega. Seega kõik vaadeldavad mõisted käivad **esimest järku harilike diferentsiaalvõrrandite** kohta ning edaspidi kirjutame lihtsalt “diferentsiaalvõrrandid”.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse otsitava funktsiooni võrrandis esinevate **tuletiste kõrgeimat järku**.

6.3 Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 6.4

Esimest järku normaalkujuliseks diferentsiaalvõrrandiks nimetakse võrrandit

$$y' = f(x, y),$$

kus otsitavaks on funktsioon $y = y(x)$.

Normaalkujust üldisem on esimest järku diferentsiaalvõrrand

$$F(x, y, y') = 0.$$

Näide 6.4 Võrrandid

$$y' = \frac{y^2}{x} - 1, \quad y'' = \frac{y^2}{x} - 1$$

on vastavalt esimest järku ja teist järku diferentsiaalvõrrandid.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 6.5

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

sellist lahendit $y = y(x)$, mis rahuldab **algtingimust**

$$y(x_0) = y_0, \tag{6.2}$$

nimetatakse **Cauchy ülesandeks** või ka **algtingimusega ülesandeks**.

Olgu võrrandis (6.1) funktsioon f määratud mingis piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$.

Definitsioon 6.6

Võrrandi (6.1) **üldlahendiks** piirkonnas D nimetatakse ühest parameetrist C sõltuvat lahendit (täpsemalt, lahendite peret) $y = y(x, C)$, milles iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral saab leida parameetri C sellise väärtuse C_0 , et $y = y(x, C_0)$ rahuldab algtingimust (6.2).

Definitsioon 6.7

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ **erilahendiks** nimetatakse mistahes funktsiooni $y = y(x, C_0)$, mis saadakse üldlahendist $y = y(x, C)$, kui anda selles parameetrile C konkreetne väärtus C_0 .

Näide 6.5 Võrrandi

$$y' = 8$$

üldlahendiks on $y = 8x + C$, kus C on suvaline reaalarv. Siin iga $C \in \mathbb{R}$ ja iga $x \in \mathbb{R}$ korral

$$y'(x) = (8x + C)' = 8$$

ning iga $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ korral tingimus $y(x_0) = y_0$ ehk $8x_0 + C_0 = y_0$ määrab parameetri C sobiva väärtuse C_0 . Niisiis on tegemist üldlahendiga piirkonnas $\mathbb{R}^2$.

Kui võtame näiteks $C = 1$ ja $C = -1$, siis saame erilahendid $y(x) = 8x + 1$, $y(x) = 8x - 1$, mis graafiliselt on mõlemal juhul sirged tõusuga 8.

◇ ◇ ◇

Märkus 6.3

Kui lahendatakse konkreetset Cauchy ülesannet (6.1), (6.2), siis võrrandi üldlahendi leidmisel ei pöörata tihti erilist tähelepanu võimaliku piirkonna D väljaselgitamisele, oluline on vaid, et oleks olemas mingi piirkond D , kus $(x_0, y_0) \in D$.

Näide 6.6 Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1.$$

Võrrandi $y' = -y^2$ üldlahendiks on funktsioon $y(x) = \frac{1}{x+C}$, kuna

$$y'(x) = \left(\frac{1}{x+C} \right)' = -\frac{1}{(x+C)^2} = -y^2(x).$$

Konstandi C saame leida algtingimusest

$$y(0) = \frac{1}{0+C} = 1 \quad \text{ehk} \quad C = 1.$$

Seega Cauchy ülesande lahendiks on funktsioon $y(x) = \frac{1}{x+1}$, mis on määratud hulgal $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

◇ ◇ ◇

6.4 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 6.8

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x) dx + g(y) dy = 0. \quad (6.3)$$

Kui algselt on antud normaalkujuline võrrand

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)},$$

siis saab selle kirjutada kujul

$$f(x) dx - g(y) dy = 0,$$

seejuures tuleb muidugi eraldi analüüsida punktihulka, kus $g(y) = 0$, sest algvõrrandis $g(y) \neq 0$.

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi (6.3) lahendamiseks tuleb leida määramata integraalid ja lahendid saadakse (üldjuhul ilmutamatult) võrdusega

$$\int f(x) dx + \int g(y) dy = C,$$

millest määratakse (vähemalt lokaalselt) funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$. Me ei anna siin formaalselt üldlahendi mõistet, kuid see on analoogiline normaalkujulise võrrandi puhul antuga: teatava piirkonna igat punkti läbiva lahendi saab parameetri C konkretiseerimisel.

Näide 6.7 Võrrand

$$dx + dy = 0$$

on eraldatud muutujatega võrrand. Selle lahenditeks on määramata integraalide leidmisel saadud

$$x + y = C,$$

kus $C \in \mathbb{R}$ on suvaline.

◇ ◇ ◇

Näide 6.8 Eraldatud muutujatega võrrandiks on

$$xdx + ydy = 0,$$

mille integreerimine annab

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$$

ehk

$$x^2 + y^2 = C,$$

kus $C = 2C_1 > 0$. Siin on selge, et ei saa lubada juhtumit $C < 0$, aga $C = 0$ korral saadakse ainult punkt $(0, 0)$, mida ei ole mõistlik lugeda võrrandi lahendiks.

◇ ◇ ◇

Näide 6.9 Võrrand

$$\frac{1}{y}y' = x + 1$$

on eraldatud muutujatega võrrand kirjutatuna

$$\frac{1}{y}dy = (x + 1)dx.$$

Integreerides saame

$$\ln|y| = \frac{(x+1)^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

millest

$$|y| = e^{C_1} e^{\frac{(x+1)^2}{2}} = C_2 e^{\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad C_2 \in (0, \infty).$$

Sellest omakorda tulevad lahendid

$$y(x) = C e^{\frac{(x+1)^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

mis on kooskõlas sellega, et algvõrrandis ei ole lubatud juhtum $y = 0$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 6.9

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamiseks teisendatakse see eraldatud muutujatega võrrandiks

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0,$$

mille lahendamist juba käsitlesime. Eraldi tuleb analüüsida punktihulki, kus $f_2(x) = 0$ või $g_1(y) = 0$. Need võivad anda lisalahendeid, sest kui $f_2(x_0) = 0$, siis sirge $x = x_0$ on algvõrrandi lahend, sest siis $dx = 0$ (konstantse funktsiooni tuletis on 0), samuti $g_1(y_0) = 0$ korral on lahendiks $y = y_0$, sest siis $dy = 0$.

Võrrandi vasakul pool on liige $\frac{y'}{y}$, mille sisuks on näidata muutuja y suhtelist kasvukiirust (efektiivsus ennast taas toota, kui $y = y(x)$ rollis on mingi bioloogiline protsess ajas x). Siin suhteline kasvukiirus on lineaarne. Lineaarse kasvukiirusega muutujaks osutub selline lahend, nagu me allpool saame.

Näide 6.10 Lahendame võrrandi

$$xyy' = \frac{x^2 + 2}{y - 1}.$$

Selles muutujate eraldamine viib kujuni

$$(y^2 - y) dy = \left(x + \frac{2}{x}\right) dx.$$

Integreerimine annab

$$\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| + C,$$

millest funktsiooni $y = y(x)$ ilmutamine ei ole tehniliselt väga elementaarne.

◇ ◇ ◇

6.5 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 6.10

Esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x), \quad (6.4)$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Funktsioone p_0 ja p_1 nimetatakse võrrandi (6.4) kordajateks, funktsiooni f aga **vabaliikmeks**.

Teoreem 6.1

Olgu võrrandi (6.4) kordajad p_0 ja p_1 ning vabaliige f pidevad funktsioonid vahemikus (a, b) , kusjuures $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral. Olgu $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in \mathbb{R}$ mingid etteantud arvud. Siis on võrrandil (6.4) olemas parajasti üks lahend y , mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$.

Märkus 6.4

Vahemiku (a, b) all võib siin mõelda ka tõkestamata intervalli, s.o (a, ∞) , $(-\infty, b)$ või $(-\infty, \infty)$.

Märkus 6.5

Kui $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis võib selle kordajaga esialgse võrrandi läbi jagada ning sel juhul on **esimest järku lineaarne võrrand kujul**

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad (6.5)$$

kus p ja f on antud funktsioonid ning y on otsitav.

Järgnevas esitame võrrandi (6.4) lahendamise eeskirja, mille käigus tõestame ühtlasi teoreemi 10.1.

Definitsioon 6.11

Võrrandile (6.4) vastavaks homogeenseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0 y' + p_1 y = 0$$

ehk peale jagamistehet (eeldusel, et $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral)

$$y' + py = 0, \quad (6.6)$$

$$\text{kus } p = \frac{p_1}{p_0}.$$

Võrrandit (6.6) vaatleme eralduvate muutujatega võrrandina, mis peale muutujate eraldamist saab kuju

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0.$$

Selle integreerimine annab

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

ehk

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Siin kirjutises $\int p(x)dx$ all peame silmas ühte funktsiooni p algfunktsiooni. Lisaks sellele on võrrandi (6.6) lahendiks $y = 0$, mis jäi vaatluse alt välja muutujate eraldamisel. Seega on võrrandi (6.6) lahendiks

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.7)$$

Selle aruteluga oleme saanud, et viimati toodud võrduses on esindatud võrrandi (6.6) kõik lahendid: iga lahendi y korral jõuame esituseni (6.7). Kirjutiste lühendamiseks tähistame

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Võrrandi (6.5) lahenditeks on

$$y = y_h + y_* = Ce^{-\int p(x)dx} + y_*, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (6.8)$$

kus y_* on võrrandi (6.5) üks konkreetne lahend.

Näitame, et iga $C \in \mathbb{R}$ korral on (6.8) võrrandi (6.5) lahend. Saame

$$(y_h + y_*)' + p(y_h + y_*) = y_h' + py_h + y_*' + py_* = f.$$

Võrrandi (6.5) lahendi y_* leidmiseks on olemas nn. parameetri (või konstandi) C varieerimise meetod: funktsioon y_* leitakse kujul

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $C = C(x)$ on otsitav funktsioon. Asetades selle võrrandisse (6.5), saame

$$\left(C(x)e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

ehk

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

millest jääb alles

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

ehk

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx} f(x).$$

Selle integreerimisel (piisab ühest funktsioonist $C = C(x)$) saame

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx$$

(ka siin peame silmas ühte konkreetset algfunktsiooni) ja

$$y_*(x) = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx.$$

Selle asendamisel esituses (6.8) saame

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx \right), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.9)$$

Kui nõutakse võrrandi (6.5) (või (6.4)) lahendit, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, siis (6.8) annab võrduse

$$C e^{-\int p(x)dx} \Big|_{x=x_0} + y_*(x_0) = y_0,$$

millest C saab üheselt määrata, sest eksponentfunktsiooni väärtus ei võrdu nulliga. Teoreemi 10.1 tõestamist silmas pidades oleme näidanud algtingimustega ülesande lahendi olemasolu iga väljavalitud $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in \mathbb{R}$ korral. Lahendi ühesuses veendumiseks oletame, et algtingimustega ülesandel on 2 lahendit y_1 ja y_2 , s.t

$$\begin{cases} y_1' + py_1 = f, \\ y_1(x_0) = y_0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_2' + py_2 = f, \\ y_2(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Siis $y = y_1 - y_2$ rahuldab võrduseid

$$\begin{cases} y' + py = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

milles diferentsiaalvõrrandi lahend esitub (6.7) abil, aga $C = 0$, sest eksponentfunktsiooni väärtus $x = x_0$ korral erineb nullist. Niisiis $y = 0$ ehk $y_1 = y_2$.

Teoreemi 10.1 arvestades võib öelda, et (6.9) on võrrandi (6.5) üldlahend piirkonnas $(a, b) \times \mathbb{R}$. Muidugi on ka (6.7) võrrandi (6.6) üldlahend samas piirkonnas.

Lineaarse võrrandi üldlahend on vastava homogeense võrrandi üldlahendi ja algvõrrandi ühe konkreetse lahendi summa

Näide 6.11 Vaatleme võrrandit

$$y' = k y,$$

mis on juba homogeenne kujul (6.6), kus $p(x) = -k$. Siis $-\int p(x)dx = kx$ ja võrrandi üldlahend on

$$y(x) = C e^{kx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

ja seda piirkonnas $\mathbb{R}^2$. Nägime eespool, et vaadeldav võrrand kirjeldab liigi arvukuse muutust.

◇ ◇ ◇

Näide 6.12 Lahendame lineaarse mittehomoogeense võrrandi

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Siin

$$p(x) = -\frac{2}{x+1}, \quad -\int p(x)dx = \int \frac{2dx}{x+1} = \ln(x+1)^2$$

ja

$$e^{-\int p(x)dx} = (x+1)^2,$$

mistõttu vastava homogeenuse võrrandi üldlahend on

$$y = C(x+1)^2, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.10)$$

Algvõrrandi üks konkreetne lahend on

$$y_* = (x+1)^2 \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} dx = \frac{(x+1)^4}{2}$$

ning üldlahend

$$y = C(x+1)^2 + \frac{(x+1)^4}{2}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (6.11)$$

ja seda hulgal $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) \times \mathbb{R}$. Täpsemalt öeldes, (6.11) (ja ka (6.10)) esitavad kumbki kaks üldlahendit vastavalt piirkondades $\{(x, y) | x > -1, y \in \mathbb{R}\}$ ja $\{(x, y) | x < -1, y \in \mathbb{R}\}$.

◇ ◇ ◇

Näide 6.13 Keha temperatuuri $T = T(t)$ muutumist ajas t kirjeldab ligikaudselt võrrand

$$T' = k(T - T_*),$$

kus T_* on ümbritseva õhu temperatuur, k aga konstantne kordaja.

Siin vastav homogeenne võrrand on

$$T' = kT$$

ja selle üldlahend on näites 10.11 toodu põhjal

$$T(t) = Ce^{kt}, C \in \mathbb{R}.$$

Algvõrrandi üheks lahendiks sobib $T(t) = T_*$, $t \in \mathbb{R}$, seega on võrrandi üldlahend $T(t) = Ce^{kt} + T_*$, $C \in \mathbb{R}$. Kui algmomendil $t = 0$ on keha temperatuur T_0 , siis tingimus $T(0) = T_0$ annab võrduse $C + T_* = T_0$, millest $C = T_0 - T_*$ ja algtingimusega ülesande lahend on

$$T(t) = (T_0 - T_*)e^{kt} + T_*.$$

◇ ◇ ◇

Peatükk 7

Maatriksid ja determinandid

7.1	Maatriksi mõiste	124
7.2	Tehted maatriksitega	125
7.3	Maatriksite korrutamine	127
7.4	Teist ja kolmandat järku determinant	131
7.5	Kõrgemat järku determinant	133
7.6	Determinantide omadused	134

Kontrolltöö teemad

1. Maatriksid: omadused ja tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinantide omadused.
4. Determinandi väärtuse arvutamine, arendades determinanti rea või veeru järgi.

Eksamiteemad

1. Maatriksid: mõisted, omadused, tehted.
2. Maatriksi miinor, elemendile vastav miinor ja alamdeterminant.
3. Determinandi mõiste ja omadused.
4. Determinandi arendamine rea või veeru järgi.

7.1 Maatriksi mõiste

Definitsioon 7.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristkülikukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi **elementideks**, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse **$m \times n$ maatriksist**.

Maatriksi elemendi a_{ij} esimene indeks i näitab rida (*reaindeks*) ja teine indeks j näitab veergu (*veeruindeks*), milles element asetseb. Tavaliselt tähistatakse maatriksit ladina tähestiku suure tähega (näiteks $A, B, \dots$) ning maatriksi elemente tähistatakse indeksi(te)ga varustatud väikese tähega (näiteks $a_{ij}, b_{ij}, \dots$). Lühidalt saab sama maatriksit A esitada ka kujul

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

või veelgi lühemalt

$$A = (a_{ij}).$$

Näide 7.1 Maatriksiteks on näiteks

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = (5), \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & -\pi \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Siinjuures $a_{12} = 8$, $b_{11} = 5$, $c_{43} = -\pi$ ja $d_{21} = 0$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 7.2

Kui maatriksi ridade ja veergude arv on võrdne, $m = n$, siis nimetame maatriksit **ruutmaatriksiks** või ka **n -järku ruutmaatriksiks**.

Kui maatriksis on ainult üks rida või veerg, siis nimetame seda maatriksit ka **vektoriks**, täpsemalt **reavektoriks** ja **veeruvektoriks**. Üldine $m \times n$ maatriks koosneb m reavektorist ja n veeruvektorist.

Näide 7.2 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = (1 \ 2 \ 3 \ 4), \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Siin A on 3. järku ruutmaatriks, B on reavektor ja C on veeruvektor.

◇ ◇ ◇

7.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 7.3

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$$A = B, \text{ kui } a_{ij} = b_{ij} \text{ iga } i = 1, \dots, m \text{ ja } j = 1, \dots, n \text{ korral.}$$

Näide 7.3 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hoolimata sellest, et maatriksi C viimase veeru elemendid on kõik nullid, ei ole maatriksid A ja C võrdsed. Maatriksid A ja C ei ole omavahel võrdsed, sest neil on erinev arv veerge. Seejuures maatriksid A ja B on võrdsed ainult siis, kui $b_{11} = 1$, $b_{12} = 2$, $b_{21} = 4$ ja $b_{22} = 5$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 7.4

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis A ja B **summaks** nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad, s.t

$$C = A + B, \quad \text{kui } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Maatriksite liitmisele sarnaselt saab defineerida ka maatriksite lahutamise.

Definitsioon 7.5

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis A ja B **vaheks** nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide vahed, s.t

$$C = A - B, \quad \text{kui } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Näide 7.4 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maatrikseid A ja C (ning B ja C) ei ole võimalik omavahel liita, kuna A on 2×3 maatriks ja C on 3×2 maatriks. Küll aga saame leida A ja B summa ning vahe

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 11 \\ 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 7.6

Maatriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse maatriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t

$$\lambda A = B = (b_{ij}), \quad \text{kui } b_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Arv λ on üldjuhul reaalarv, kuid võib olla ka kompleksne.

Maatriksi A **vastandmaatriksiks** nimetatakse maatriksit $-A$ ehk arvuga -1 korrutatud maatriksit A .

Näide 7.5 Korrutame eelmise näite maatriksit A arvuga 2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 16 \\ 4 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sama tulemuse saaksime, kui liidaksime $A + A = 2A$.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 7.7

Nullmaatriksiks nimetatakse maatriksit, mille kõik elemendid võrduvad nulliga, s.t

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad o_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Nullmaatriksit tähistatakse sageli ka sümboliga θ .

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul maatrikstehete jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C, & (\text{liitmise assotsiatiivsus}) \\ A + B &= B + A, & (\text{liitmise kommutatiivsus}) \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B, \\ A + O &= A. \end{aligned}$$

Sageli on vaja antud maatriksi ridades esinevad arvud paigutada hoopis veergudesse.

Definitsioon 7.8

Maatriksi $A = (a_{ij})$, ($i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$) **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude äravahetamisel, s.t

$$A^T = (a_{ji}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Üleminekut maatriksilt A maatriksile A^T , kus maatriksi A read kirjutatakse A^T veergudeks, nimetatakse maatriksi A **transponeerimiseks**.

Näide 7.6 Vaatleme maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Olgu maatriksid A ja B samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul transponeeritud maatriksite jaoks kehtivad järgmised omadused:

$$\begin{aligned} (A^T)^T &= A, \\ (A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T. \end{aligned}$$

7.3 Maatriksite korrumine

Maatriksite korrumine on samuti maatrikstehe, kuid on oluliselt keerulisem ning seetõttu pühendame sellele spetsiaalselt eraldi alapeatüki. Maatriksite korrumine ei ole kergesti tajutav. Vaatleme esiteks lihtsa näite varal, miks korrumustehe niimoodi defineeritakse, nagu me selles peatükis seda teeme.

Vaatleme lineaarseid võrrandeid

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1, \\ 7x_1 + 3x_2 &= 5. \end{aligned}$$

Selle süsteemi lahendiks on $x_1 = 2$ ja $x_2 = -3$, mida saab kindlaks teha vahetu kontrolliga. Märgime süsteemi kordajad maatriksiks

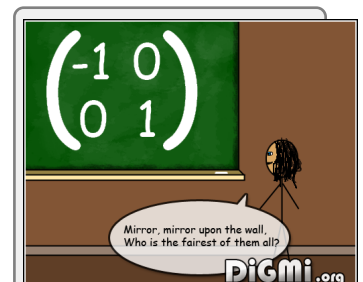
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix},$$

lahendi teiseks maatriksiks (veeruvektoriks)

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ja süsteemi vabaliikme

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$



Tahvlil on nn. „peegeldusmaatriks“.

Teostame korrutamise järgnevalt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) \\ 7 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

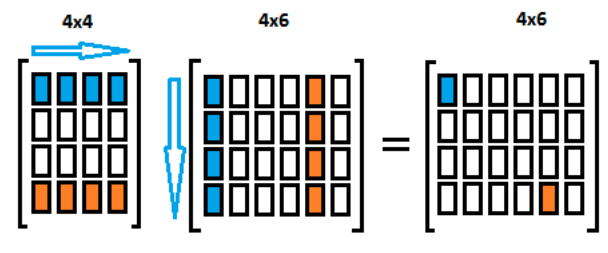
mille kirjutame lühidalt $Ax = y$. Siin näeme maatriksite A ja x korrutamise eeskirja. Kui lisaks kehtib analoogiline võrdus $Bz = x$, siis saame $ABz = y$ ehk $Cz = y$, kus $C = AB$. Tekkinud maatriksite korrutamise eeskirja esitame järgnevas ja see hõlmab juba leitud korrutist Ax .

Definitsioon 7.9

Kui maatriksi A veergude arv võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i -nda rea elemendid maatriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ maatriks ja B on $n \times p$ maatriks.



Joonis: <http://www.cmssoft.com.br/opencl-tutorial/case-study-matrix-multiplication/>

Näide 7.7 Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Näeme, et maatriks A on 2×1 maatriks, B on 1×2 maatriks ja C on 2×3 maatriks. Seega saab maatrikseid A ja B korrutada järgmiselt:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

ja

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2) = (11).$$

Ei ole olemas korrutisi AC ja CA , kuna nende ridade ja veergude arv omavahel ei sobi. Küll aga saab leida korrutise BC :

$$\begin{aligned}
BC &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 9 & 3 \cdot 7 + 4 \cdot 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 15 + 32 & 18 + 36 & 21 + 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 54 & 61 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Märkus 7.1

Viimasest näitest nägime, et AB ja BA andsid erineva tulemuse. Selle kohta öeldakse, et **maatriksite korrutamine ei ole kommutatiivne** ehk üldjuhul (ka ruutmaatriksite korral)

$$A B \neq B A.$$

Näide 7.8 Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leiame maatriksite A ja B korrutised:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 4 & 9 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.9 Maatriksitel on palju kasutusvaldkondi. Vaatleme ühte nendest. Olgu antud punkt tasandil koordinaatidega (x, y) . Sel juhul

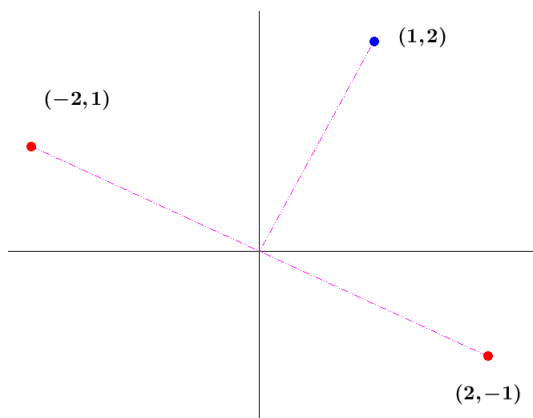
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

s.t veeruvektorit maatriksiga A (vasakult) korrutades saadakse tasandil punkt, mille kohavektor on võrreldes punkti (x, y) kohavektoriga pööratud 90° (x -telje suhtes kellaosuti liikumise suunas). Näiteks:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kui tahame punktile vastavat vektorit pöörata 270° kellaosuti liikumise suunas, siis tuleb veeruvektorit korrutada maatriksiga A kolm korda. Seega

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Sedalaadi teisendusi on rohkesti. Maatrikskuju võimaldab neid teisendusi lihtsamalt kirja panna. Näiteks järgmine maatriks pöörab punkti kohavektorit kolmemõõtmelises ruumis 30° ümber x -telje kellaosuti liikumise vastassuunas, kui vaadelda x -telje poolt:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav. Siis maatriksite korrutamisel on järgmised **omadused**:

$$\begin{aligned} (AB)C &= A(BC), & (\text{korrutamise assotsiatiivsus}) \\ (A+B)C &= AC+BC, & (\text{distributiivsus}) \\ \lambda(AB) &= (\lambda A)B = A(\lambda B), & \text{iga } \lambda \in \mathbb{R} \text{ korral} \\ (AB)^T &= B^T A^T, \\ AO &= O, \\ OA &= O. \end{aligned}$$

Enne üldise determinandi mõiste juurde minekut vaatleme eraldi teist ja kolmandat järku determinante.

7.4 Teist ja kolmandat järku determinant

Paljude sisult hoopis erinevate probleemide lahendamine viib sageli ühe ja sellesama seaduse järgi koostatud avaldistele. Sellisel juhul tasub nende avaldiste omadusi uurida omaette küsimusena. Väga paljud probleemid viivad avaldisteni, mida nimetatakse teist järku determinantideks. Olgu meil näiteks neli arvu a , b ja c , d võrdelised, s.t

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

siis $ad = cb$ ehk

$$ad - cb = 0.$$

Seda võrdust on võimalik esitada teisiti kujul

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 0.$$

Definitsioon 7.10

Teist järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Toodud tabelit tuleb mõista avaldisena, mis saadakse, korrutades tabeli peadiagonaalil seisvad arvud a ja d ning lahutades tulemusest kõrvaldiagonaalil seisvate arvude b ja c korrutise.

Vaatleme näiteks võrrandite süsteemi

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 5x - 2y &= -11. \end{aligned}$$

Korrutades esimest võrrandit arvuga -2 , saame võrrandisüsteemi esitada kujul

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2)x + 1 \cdot (-2)y &= 1 \cdot (-2), \\ 5 \cdot 1x + (-2) \cdot 1y &= -11 \cdot 1. \end{aligned}$$

Lahutades esimesest võrrandist teise

$$(2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1)x = 1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1,$$

näeme, et avaldades x , tekivad jagatistes teist järku determinantide avaldised

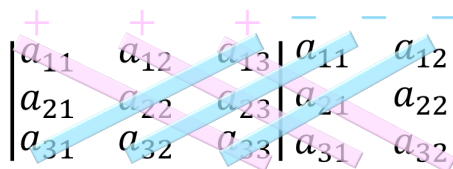
$$x = \frac{1 \cdot (-2) - (-11) \cdot 1}{2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{9}{-9} = -1.$$

Definitsioon 7.11

Kolmandat järku determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Ilma süsteemse lähenemiseta on viimast avaldist pisut raske meelde jätta. Seetõttu kasutataksegi koolimatemaatikas pigem lihtsamat viisi: determinandi parempoolse kriipsu järele kirjutatakse esimene ja teine veerg. Sel juhul tekib kuus diagonaali (suunaga vasakult paremale), millel on täpselt kolm elementi.

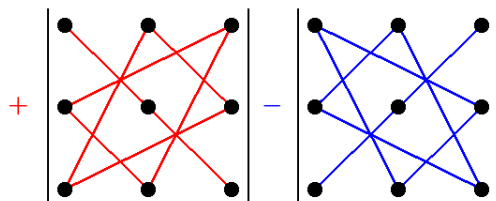


Seda determinandi arvutamise eeskirja meeldejätmise reeglit kutsutakse ka **Sarruse reegliks**, mis on nime saanud prantsuse matemaatiku Pierre Frédéric Sarrus'i (1798-1861) järgi.

Järjekorras ülevalt alla võetud diagonaali elementide korrutised liidetakse. Järjekorras alt üles võetud diagonaali elementide korrutised lahutatakse.

Sellist lisaveergude abi **ei saa kasutada** kõrgemat (alates 4.) järku determinantide korral.

Kolmandat järku determinandi arvutamise eeskirja tegelik skemaatiline esitus näeks välja aga järgmine:



Paneme tähele, et kolmnurkade väikseim külg on paralleelne suure diagonaaliga. Nüüd peaks valemi visuaalne tuletaamine olema üsna lihtne.

Näide 7.10 Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

väärtuse (n-ö kolmnurkadega graafilise esituse abil).

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 = 15 - 10 + 8 - 24 - 1 + 50 = 38.$$

◇ ◇ ◇

Arvutades nüüd lisaveergude abil (Sarruse reegel), näeme, et tekivad samasugused kolmeliikmelised korrutised:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-1) \\ - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot (-2) \cdot 5 = 38.$$

◇ ◇ ◇

7.5 Kõrgemat järku determinant

Olgu antud n -järku **ruutmaatriks** $A = (a_{ij})$. Maatriksi A determinanti tähistame

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definitsioon 7.12

Ruutmaatriksi A **elemendile** a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Toome ära determinandi rekursiivse definitsiooni.

Definitsioon 7.13

Esimest järku ruutmaatriksi A determinant $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant. Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse **determinandi arendamiseks** i -nda rea järgi.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinandi arendada mingi j -nda veeru järgi. Determinandi tähistusi: $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Täpsemalt öeldes, determinant on teisendus (teatud liiki funktsioon), mis seab igale ruutmaatriksile vastavusse ühe kindla arvu. Tüüpiliselt tähistatakse seda teisendust $\det A$.

$m \times n$ **maatriksi** A **k -järku miinoriks** nimetatakse sellest maatriksist väljaalitud mingi k rea ja mingi k veeru ühistest elementidest moodustatud k -järku alamruutmaatriksi determinanti $M_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}$ (või M_k , kui rida ja veerge ei ole vaja rõhutada), kusjuures ridade ja veergude järjekord säilitatakse.

On olemas ka teistsuguseid definitsioone, kuid nende jaoks on lisaks vaja teada mitmeid uusi mõisteid.

Näide 7.11 Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele $a_{13} = 4$, $a_{21} = 2$ ja $a_{32} = 3$ vastavad järgmised miinorid:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.12 Leiame determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Arendame selle näiteks kolmanda veeru järgi:

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{1+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot \mathbf{(-1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+3} \cdot \mathbf{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot \mathbf{0} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Esimene ja viimane liidetav on null. Edasi arvutame teise ja kolmanda liidetava kolmandat järku determinandid ning tulemuseks saame

$$D = 7 - 16 = -9.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 7.2

Determinandi väärtuse leidmiseks arendame seda maatriksi mingi rea või veeru järgi (kasulik on valida selline, kus on palju nulle). Edasi saab tekkinud ühe võrra madalamat järku determinanti omakorda arendada mistahes rea või veeru järgi, jne. Siinjuures on enne arendamist kasulik determinanti lihtsustada. Näiteks determinandi arendamisel mingi rea (või veeru) järgi on seda lihtsam teha, kui selles reas (või veerus) on ainult üks nullist erinev element.

7.6 Determinantide omadused

Omadus 7.1

Maatriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda maatriksi determinandi väärtust:

$$|A| = |A^T|.$$

Näide 7.13 Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$|A| = 0 - 24 - 10 - 0 + 36 - 20 = -18, \quad |A^T| = 0 - 10 - 24 - 0 + 36 - 20 = -18.$$

◇ ◇ ◇

Märkus 7.3

Esimesest omadusest jäeldub, et kõik determinantide omadused, mis kehtivad ridade kohta, kehtivad ka veergude kohta. Järgmistes determinandi omaduste sõnastustes mõeldakse ridade ja veergude all maatriksi ridu ja veerge.

Omadus 7.2

Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.

Näide 7.14 Leiame

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad \begin{vmatrix} b & d \\ a & c \end{vmatrix} = bc - da = -(ad - cb).$$

◇ ◇ ◇

Omadus 7.3

Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.

Põhjendus (võrdus). Olgu esialgne determinant $|A|$. Teise omaduse järgi nende kahe võrdse rea vahetamine muudab determinandi märki, s.t $|A| = -|A|$. Viimane kehtib vaid juhul, kui $|A| = 0$.

Näide 7.15 Järgmisel determinandil on I ja III rida võrdsed:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 12 + 0 - 2 - 12 - 0 = 0.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 7.4

Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.

Põhjendus. Determinandi arvutamisel nullidest rea (või veeru) järgi arendades on kasutatava summa igas liidetavas olevas korrutises teguriks alati 0.

Näide 7.16 Kuna järgneval determinandil koosneb kolmas veerg nullidest, siis determinandi väärtus võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 7.5

Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k , s.t

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Näide 7.17 Teise rea elementide ühise kordaja 10 võime determinandist välja tuua:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 30 & 10 & -10 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 7.6

Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.

Märkus 7.4

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Näide 7.18 Omaduse 11.6 põhjal on võimalik arvutusi kolmanda veeru korral teha näiteks järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1+1 \\ 2 & 0 & 2+2 \\ 2 & 5 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \\ = 0 + (0 + 12 + 10 - 0 - 10 - 6) = 6.$$

Saadud determinantide summa esimeses determinandis on kaks võrdset veergu, omaduse 11.3 põhjal on selle determinandi väärtus null.

◇ ◇ ◇

Omadus 7.7

Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).

Märkus 7.5

See omadus ütleb näiteks, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 5a_3 & b_2 + 5b_3 & c_2 + 5c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Antud omadust kasutatakse arvutuste lihtsustamisel näiteks siis, kui soovitakse teatud elemendid teisenduse abil nullideks viia.

Näide 7.19 Arvutame 2. järku determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Teist järku determinandi arvutuseeskirja põhjal teame, et $D = 4 - 6 = -2$. Vaatame, kuidas toimib viimane omadus. Lahutame teisest reast kolmekordse esimese rea:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 - 3 & 4 - 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

◇ ◇ ◇

Näide 7.20 Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 \text{ I} \\ -3 \text{ I} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 - 26 & 33 - 34 & 8 - 8 \\ 40 - 39 & 54 - 51 & 13 - 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \text{ III} \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 7.8

Sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t

$$|AB| = |A||B|.$$

Peatükk 8

Pöördmaatriks.

Lineaarvõrrandisüsteemid

8.1	Maatriksi pöördmaatriks	140
8.2	Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil	143
8.3	Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil	146
8.4	Maatriksi astak	148
8.5	Lineaarvõrrandisüsteemid	150
8.6	Crameri peajuht	152
8.7	Gaussi elimineerimismeetod	153
8.8	Süsteemi üldlahend ja erilahend	155
8.9	Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem	157

Kontrolltöö teemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Pöördmaatriksi leidmine valemiga ja ridade elementaarteisendustega.
2. Maatriksvõrrandite lahendamine. Maatriksi astaku leidmine.
3. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahendi leidmine.

Eksamiteemad

1. Pöördmaatriksi mõisted, omadused. Ühikmaatriks. Regulaarne ja singulaarne maatriks.
2. Maatriksi astak ja selle leidmine.
3. Lineaarvõrrandisüsteemi mõiste, lahend, süsteemi maatriks ja laiendatud maatriks.
4. Kronecker-Capelli teoreemi sõnastus. Crameri peajuht.
5. Gaussi meetod lineaarvõrrandisüsteemi lahendamiseks. Süsteemi lahend, üld- ja erilahend.
6. Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem. Triviaalne lahend.

8.1 Maatriksi pöördmaatriks

Antud alapeatükis eeldame, et maatriksid on n -järku ruutmaatriksid kujul

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definitsioon 8.1

Öeldakse, et arvud $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ asuvad maatriksi A **peadiagonaalil** ning elemendid $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ asuvad kõrvaldiagonaalil.

Definitsioon 8.2

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Märkus 8.1

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib

$$AE = A, \quad EA = A,$$

kus E on n -järku ühikmaatriks.

Näide 8.1 Olgu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$AE = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 & 1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Definitsioon 8.3

Ruutmatriksi A **pöördmatriksiks** nimetatakse sellist matriksit A^{-1} , millega antud matriksit A korrutades saadakse ühikmatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Märkus 8.2

Matriksi korrutamine pöördmatriksiga on kommutatiivne

$$AA^{-1} = A^{-1}A.$$

Matriksi A pöördmatriks, kui ta eksisteerib, on üheselt määratud (vt. [28]).

On selge, et n -järku nullmatriksil O ei saa leiduda pöördmatriksit, kuna $OA = O$ suvalise n -järku matriksi A korral.

Näide 8.2 Matriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

on aga teineteise pöördmatriksid, kuna

$$AB = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Omadus 8.1

Olgu A ja B sama järku ruutmatriksid, millel leiduvad pöördmatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Tõestus. Näitame võrduse kehtivust, milleks kasutame matriksite korrutamise assotsiatiivsuse omadust:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1}) = A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E.$$

Seega pöördmatriksi definitsiooni põhjal kehtib toodud väide.

□

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks, siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A (ridade elementaarteisenduste abil) ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1} .

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Meetod tuleb saksa matemaatikult Carl Friedrich Gaussilt (1777-1855) ja saksa geodeedi (kaardistus- ja maamõõduõpetus) Wilhelm Jordani (1842-1899) nimedest.

Paremaks eristamiseks on maatriksid A ja E eraldatud püstkriipsuga.

Definitsioon 8.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea ära vahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Näide 8.3 Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi A^{-1} . Selleks kirjutame kõrvuti maatriksi A ja ühikmaatriksi E (eraldades püstkriipsuga)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Kuna soovime maatriksi A teisendada ühikmaatriksiks, siis alustame elemendist a_{11} ja teeme sellest ühe ning siis elemendi a_{21} nulliks. Selleks korrutame laiendatud maatriksi $(A|E)$ esimese rea arvuga $\frac{1}{2}$ ning tekkinud maatriksis lahutame teisest reast 4-kordse esimese rea:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array} \right) - 4I$$

kirjutame viimati märgitud teisenduse siinkohal välja

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 - 4 \cdot 1 & -7 - 4 \cdot (-\frac{3}{2}) & 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} & 1 - 4 \cdot 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Peadiagonaalile ühe saamiseks korrutame viimati saadud maatriksi teist rida arvuga -1 ning järgmises etapis teisendame elemendi $-\frac{3}{2}$ nulliks (selleks peame esimesele reale liitma $\frac{3}{2}$ -kordse teise rea)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \cdot (-1) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) + \frac{3}{2}II$$

NB! Need teisendused on mõeldud millegi leidmiseks. Seega on nad vahetehted, abivahendid, mis ei riku otsitava leidmist. Kui te aga rakendate neid esialgsele maatriksile endale, siis maatriks muutub, s.t et näiteks üldjuhul maatriksis ei ole lubatud kahte rida omavahel vahetada.

Esitame ka viimati kirja pandud teisenduse n-ö nähtaval kujul, seega

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1+0 & -\frac{3}{2}+\frac{3}{2} & \frac{1}{2}+3 & 0+(-\frac{3}{2}) \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right).$$

Näeme, et oleme maatriksi A viinud ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks. Seega A pöördmaatriksiks on püstkriipsust paremal pool olev maatriks

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On lihtne veenduda, et $AA^{-1} = E$ (või $A^{-1}A = E$). Seega definitsiooni põhjal on maatriks A^{-1} tõepoolest maatriksi A pöördmaatriks.

◇ ◇ ◇

8.2 Võrrandisüsteemi lahendi leidmine pöördmaatriksi abil

Esitleme maatriksvõrrandite ideed näite varal. Olgu antud kolm lineaarset võrrandit

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}$$

Otsitavaks on siin tundmatud x_1, x_2 ja x_3 . Maatriksite võrdumise omadusest saaksime selle süsteemi kirja panna kujul

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Tähistades

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

näeme, et esialgne süsteem on esitatav kujul

$$Ax = b.$$

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saaksime viimast võrdust korrutada (vasakult) pöördmaatriksiga A^{-1}

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b.$$

Kuna $A^{-1}A = E$ ja $Ex = x$, siis saamegi võrrandisüsteemi lahendi

$$x = A^{-1}b.$$

Näide 8.4 Olgu vaja lahendada süsteem

$$\begin{aligned}x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4, \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8, \\2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 13.\end{aligned}$$

Selle süsteemi võiksime lahendada ka asendusvõttega nii, et avaldame näiteks x_1 esimesest võrrandist ja asendame ta teise ja kolmandasse võrrandisse jne. Maatrikskujul lahendades ei pruugi töömaht olla väiksem, küll aga on lahendus ülevaatlikum. Tähistame

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Kui leidub A^{-1} , siis lahend avaldub kujul $x = A^{-1}b$. Osutub, et siin

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sel juhul

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 80 + 91 \\ 4 + 24 - 26 \\ 0 + 16 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Võrrandisüsteemi lahendiks on $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ ja $x_3 = 3$. Võib kontrollida, et tõepoolest

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} = b.$$

Näitame, kuidas saadakse pöördmaatriks Gauss-Jordani meetodiga:

$$\begin{aligned}(A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -I \\ -2I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ 2II \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} III \\ 2III \\ \cdot(-1) \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -4II \\ \\ \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) = (E|A^{-1}).\end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 8.5

Vaatleme ühte lihtsat ideed salakoodi loomiseks. Vastaku eesti (lihtsas) tähestikus igale tähele naturaalarv

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

o	p	r	s	t	u	v	$\tilde{o}$	$\ddot{a}$	$\ddot{o}$	$\ddot{u}$
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Näiteks

$$\begin{pmatrix} 12 & 22 & 21 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lõvi}.$$

On teada, et tähtede vastavatest arvudest on koostatud sõnum, mis mahutatakse 3×6 maatriksisse S . Sõnum korrutatakse „kodeerijaga“ A (see on saatjale ja samuti teile teada)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teile jõuab kodeeritud sõnum

$$AS = \begin{pmatrix} 90 & 91 & 93 & 87 & 81 & 132 \\ 82 & 79 & 66 & 89 & 96 & 113 \\ 137 & 154 & 213 & 99 & 44 & 231 \end{pmatrix}.$$

Sõnumi saate teada, kui korrutate viimast võrdust vasakult pöördmaatriksiga A^{-1} . Leidke pöördmaatriks A^{-1} ja „muukige“ esialgne sõnum lahti.

◇ ◇ ◇

8.3 Pöördmaatriksi leidmine determinantide meetodil

Definitsioon 8.5

Ruutmaatriksit A , mille determinant ei võrdu nulliga, nimetatakse **regulaarseks**. Vastasel juhul nimetatakse ruutmaatriksit A **singulaarseks**.

Lause 8.1

Maatriksil eksisteerib pöördmaatriks parajasti siis, kui maatriks on regulaarne.

Olgu antud n -järku determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definitsioon 8.6

Elemendi a_{ij} **alamdeterminandiks** A_{ij} nimetatakse sellele *elemendile* vastava *miinori* M_{ij} *korrutist teguriga* $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Näide 8.6 Olgu antud determinant

$$\begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Elementidele $a_{13} = 4$, $a_{21} = 2$ ja $a_{32} = 3$ vastavad järgmised alamdeterminandid:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21},$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 8.1

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, s.o kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus A_{ij} on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Näide 8.7 Olgu antud maatriks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Leiame esiteks maatriksi A determinandi $|A|$. Selleks teisendame eelnevalt determinandis teist veergu, liites teisele reale kolmanda rea. Seejärel arendame saadud determinanti teise veeru järgi:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+2} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Kuna $|A| = 2 \neq 0$, siis maatriks A on regulaarne ja pöördmaatriks A^{-1} on olemas. Leiame maatriksi A kõigile elementidele vastavad alamdeterminandid

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Seega

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Lähtudes pöördmaatriksi definitsioonist teeme kontrolli. Selleks leiame

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

◇ ◇ ◇

8.4 Maatriksi astak

Olgu antud suvaline $m \times n$ maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definitsioon 8.7

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse **maatriksi A k -järku miinoriks**.

Näide 8.8 Vaatleme maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A esimest järku miinoriteks on kõik tema elemendid. Kui me valime 2. ja 3. rea, siis teist järku miinoriteks on näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Teist järku miinoreid on kokku 18. Kolmandat järku miinoreid on 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix}.$$

Kõrgemat järku miinoreid ei ole võimalik moodustada, kuna maatriksil on ainult kolm rida.

◇ ◇ ◇

Definitsioon 8.8

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse $\text{rank } A$, $\text{rank}(A)$ või $r(A)$.

Igale maatriksile A seatakse vastavusse üheselt määratud mittenegatiivne täisarv – maatriksi A astak.

Näide 8.9 Vaatleme maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Maatriksi A kõik kolmandat järku miinorid võrduvad nulliga, kuna neis on vähemalt üks nullidest koosnev veerg.

Leiame teist järku miinorid, kus nullveerge ei ole

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega on kõik nii teist kui kolmandat järku miinorid võrdsed nulliga. Kuna esimest järku miinoriteks on maatriksi elemendid ja tegemist ei ole nullmaatriksiga, siis leidub nullist erinev esimest järku miinor $(1, 3, 4, -2, -6 \text{ ja } -8)$ ning maatriksi A astak on üks ehk $\text{rank } A = 1$. Näeme, et astaku leidmine miinorite abil võib olla töömahukas protsess.

◇ ◇ ◇

Efektiivsem viis **maatriksi astaku leidmiseks** on kasutada maatriksi ridade elementaarteisendusi, eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks.

Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Näide 8.10 Leiame järgmise 4×5 maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

astaku ridade elementaarteisenduste abil.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2I \\ +2I \\ -6I \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 14 & -6 & 1 \\ 0 & 12 & -19 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3II \\ -4II \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +III \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Näeme, et maatriksil B on vähemalt üks nullist erinev kolmandat järku miinor

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3,$$

mistõttu $\text{rank } B = 3$ ning samuti $\text{rank } A = 3$.

◇ ◇ ◇

8.5 Lineaarvõrrandisüsteemid

Vaatleme võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (8.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Definitsioon 8.9

Võrrandisüsteemi (8.1) nimetatakse **lineaarseks**, kuna tundmatud $x_1, \dots, x_n$ esinevad ainult esimeses astmes. Etteantud arvud a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, on võrrandisüsteemi **kordajad** ja b_i , $i = 1, \dots, m$, on võrrandisüsteemi **vabaliikmed**.

Definitsioon 8.10

Süsteemi (8.1) **lahendiks** nimetatakse sellist tundmatute $x_1, \dots, x_n$ väärtuste komplekti, mille korral on rahuldatud kõik süsteemi (8.1) võrrandid.

Definitsioon 8.11

Süsteemi, millel lahend puudub, nimetatakse vastuoluliseks.

Näide 8.11 Võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

on vastuoluline, kuna mõlemad võrrandid ei saa korraga olla rahuldatud. Näiteks, kui asendada esimesest võrrandist $x = 1 - y$ teise võrrandisse, saaksime väärade lause $1 = 2$. Seevastu ühest võrrandist koosneval süsteemil

$$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases}$$

on lõpmata palju lahendeid.

◇ ◇ ◇

Märkus 8.3

Olenevalt võrrandite ja tundmatute arvust (ning kordajatest) võib süsteemil (8.1) olla üksainus lahend, mitte ühtegi lahendit või lõpmata palju lahendeid.

Definitsioon 8.12

Süsteemi (8.1) kordajatest moodustatud maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse selle **süsteemi maatriksiks**. Veeurvektoreid

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ja

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

nimetatakse vastavalt tundmatute ja vabaliikmete vektoriks.

Süsteem (8.1) on esitatav **maatrikskujul**

$$Ax = b. \quad (8.2)$$

Teoreem 8.2

Kronecker-Capelli teoreem ([16, 18]). Süsteem (8.2) on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi

$$L = (A | b)$$

astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem (8.2) on lahenduv parajasti siis, kui

$$\text{rank } A = \text{rank } L.$$

Teoreem on nime saanud saksa matemaatiku Leopold Kroneckeri (1823-1891) ja itaalia matemaatiku Alfredo Capelli (1855-1910) järgi.

Antud teoreemi on lihtsam rakendada siis, kui oleme tutvunud Gaussi elimineerimismeetodiga.

Näide 8.12 Vaatleme juba tuttavat võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}.$$

Siis

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega maatriksi A astak saab olla vaid 1 (nullist erinevate miinorite kõrgeim järk). Laiendatud maatriksil leidub aga nullist erinev teist järku miinor M

$$(A | b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Kuna A ja $(A | b)$ astakud on erinevad, siis süsteemil ei ole lahendit. Viimast nägime juba eespool.

◇ ◇ ◇

8.6 Crameri peajuht

Definitsioon 8.13

Õeldakse, et lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga**, kui

- 1) tundmatute arv n võrdub võrrandite arvuga m , s.t $n = m$,
- 2) süsteemi maatriks A on regulaarne, s.t $|A| \neq 0$.

Šveitsi matemaatik Gabriel Cramer (1704-1752).

Lause 8.2

Kui lineaarvõrrandisüsteemi korral on tegemist Crameri peajuhuga, siis on sellel süsteemil täpselt üks lahend [18].

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete vektoriga b .

Tegemist on rohkem teoreetilise väärtusega, kuna praktikas osutub Crameri valemite kasutamine töömahukaks.

Näide 8.13 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x - 2y = -11. \end{cases}$$

Arvutame

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 5 = -9.$$

Sel juhul

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 \\ -\mathbf{11} & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-2 + 11}{-9} = \frac{9}{-9} = -1$$

ja

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{1} \\ 5 & -\mathbf{11} \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-22 - 5}{-9} = \frac{-27}{-9} = 3.$$

◇ ◇ ◇

8.7 Gaussi elimineerimismeetod

Vaatame järgmist kolmevõrrandilist süsteemi:

$$\begin{array}{lcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x + 3y - 2z & = & -5 \\ 2x - y + 4z & = & 7 \\ -3x + 2y - 3z & = & -1. \end{array} \right.$$

Idee on teisendada see süsteem samaväärsele kolmnurksele kujule

$$\begin{array}{lcl} x + b_4y + c_4z & = & d_4 \\ y + c_5z & = & d_5 \\ z & = & d_6 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} x + 3y - 2z & = & -5 \\ y - \frac{8}{7}z & = & -\frac{17}{7} \\ z & = & 3, \end{array} \right.$$

kus kordajate uued indeksid näitavad, et need kordajad võivad muutuda. Nüüd saab viimasest võrrandist esimese suunas järk järgult muutujad asendada.

Gaussi elimineerimismeetod. Olgu antud lineaarvõrrandisüsteem

$$Ax = b.$$

1. Võrrandisüsteem esitatakse laiendatud maatriksina

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

2. Laiendatud maatriks $(A|b)$ teisendatakse **ridade elementaar-teisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi A peadiagonaalist allpool (või ülalpool) olevad elemendid teisendatakse nullideks.

Kui ridade teisendamisega saadakse nullid maatriksi A mõlemale poole (pea)diagonaali, siis räägitakse nn *Gaussi täielikust elimineerimismeetodist* või *Gauss-Jordani elimineerimismeetodist*.

Märkus 8.4

Laiendatud maatriksi kahe rea vahetamine ei tähenda midagi muud, kui kahe võrrandi vahetamist. Nullist erineva arvuga korrutamine tähendab tegelikult ühe võrrandi vasaku ja parema poole korrutamist selle arvuga. Mingile reale mingi teise rea liitmine tähendab aga ühele võrrandile mingi teise võrrandi juurde liitmist.

Seega sisuliselt teisendatakse võrrandisüsteemi, jättes tundmatud $x_1, \dots, x_n$ ja tehtemärgid kirjutamata.

Meetod tuleb saksa matemaatikult **Carl Friedrich Gaussi** (1777-1855) järgi ja töötati välja 19. sajandi alguses. Sama meetod on lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks kasutusel ka tänapäeva arvutites.



Maali autor:
Christian Albrecht Jensen
(Wikipedia)

Gaussi panus matemaatikasse on väga märkimisväärne. Lisaks tegeles ta astronoomiaga, geodeesiaga, optikaga, statistikaga, magnetismiga jne. See on see sama Gauss, kes esitas algebra põhiteoreemi kohta esimese arvestava tõestuse. Statistikas on siiani tuntud normaaljaotus ja Gaussi kõver. Kui meil kroonil punasel 10-kupüürilisel kroonil Jakob Hurt, siis sakslastel oli kuulus 10-margane, kuhu peale oli paigutatud Carl Friedrich Gauss.



Gaussile omistatakse ilus lause:

Matemaatika on loodusteaduse kuninganna, arvuteooria - matemaatika kuninganna.

Märkus 8.5

Gaussi elimineerimismeetod võimaldab teada saada, kas antud võrrandisüsteem on lahenduv ja kui on, siis ka leida selle lahendi.

Näide 8.14 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi $(A|b)$ ja teisendame selle Gauss-Jordani meetodi põhjal nõutud kujule

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{array} \right) & \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{2} \\ -3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{7}{2} & -3 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{2}{7} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right) -\frac{1}{2}II \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 8.15 Vaatame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -5 \\ 2x - y + 4z = 7 \\ -3x + 2y - 3z = -1. \end{cases}$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi $(A|b)$ ja rakendame Gaussi täieliku elimineerimise meetodit

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} -2I \\ 3I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & -7 & 8 & 17 \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 11 & -9 & -16 \end{array} \right) -11II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & -\frac{17}{7} \\ 0 & 0 & \frac{25}{7} & \frac{75}{7} \end{array} \right) \begin{array}{l} 2III \\ \frac{8}{7}III \\ \cdot \frac{7}{25} \end{array} \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) -3II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 8.16 Lahendame süsteemi

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 4x + y = 6, \end{cases}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Kasutame teisenduste jaoks Gaussi meetodit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ -3I \\ -4I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ \\ -II \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Viimane rida muutus nullideks, sest kolmas võrrand osutus esimese kahe summaks s.t viimane võrrand teiseses võrduseks $0 = 0$. Näeme, et $\text{rank } A = \text{rank } L = 2$ ja Kronecker-Capelli teoreemi tõttu leidub süsteemil vähemalt üks lahend, milleks on $y = 2$ ja $x = 1$. Lahend on ühene, sest $\text{rank } A = 2 = n$.

◇ ◇ ◇

8.8 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Definitsioon 8.14

Lineaarvõrrandisüsteemi **üldlahendiks** nimetatakse lõplikust arvust parameetritest sõltuvat lahendite kogumit, millest parameetritele suvalisi reaalarvulisi väärtusi omistades saadakse kõik süsteemi lahendid. Tundmatuid, mis on valitud parameetriteks, nimetatakse *vabadeks tundmatuteks*.

Definitsioon 8.15

Lineaarvõrrandisüsteemi **erilahendiks** nimetatakse sellist lahendit, mis saadakse üldlahendist vabadele parameetritele (tundmatutele) konkreetsete arvuliste väärtuste andmise teel.

Näide 8.17 Lahendame Gaussi meetodiga süsteemi

$$\begin{cases} 4y + z = 2 \\ 2x + 6y - 2z = 3 \\ 4x + 8y - 5z = 4 \end{cases} \text{ ehk } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Erinevate etappide teisendused paneme siinjuhl kirja järjekorranumbrite 1), 2), ... abil.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -5 & 4 \end{array} \right) \begin{matrix} 1) I \leftrightarrow \frac{1}{2} II \\ 2) II \leftrightarrow \frac{1}{2} I \\ 3) -4I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right) \begin{matrix} \\ 2) \cdot \frac{1}{4} \\ 1) II \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim -3II \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Näeme, et maatriksite A ja $(A|b) = L$ astakud on $\text{rank } A = \text{rank } L = 2$. Seega leidub lahend, mille kirjutame välja võrrandite kujul

$$\begin{cases} x &= \frac{7}{4}z \\ y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z. \end{cases}$$

Näeme, et kõik lahendid saab avaldada muutuja z kaudu, kusjuures z võib olla suvaline reaalarv. Seetõttu nimetataksegi muutujat z ka **vabaks tundmatuks**. Võrrandisüsteemi **üldlahendiks**

$$x = \frac{7}{4}c, \quad y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, \quad z = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

mis on ühe vaba tundmatuga lahend (*vabade tundmatute arv* on võrdne $n - r = 3 - 2 = 1$). Üldlahendi võib ka kirja panna kujul

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{4}c, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}c, c \right), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Erilahenditeks on näiteks $c = 0$, $c = 1$ ja $c = 2$ korral

$$(x, y, z) = (0, \frac{1}{2}, 0), \quad (x, y, z) = (\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 1), \quad (x, y, z) = (\frac{7}{2}, 0, 2).$$

◇ ◇ ◇

Näide 8.18 Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} 2x + 6y - 2z = 3. \end{cases}$$

Siin on 3 tundmatut ja 1 võrrand. On selge, et lahendeid on lõpmata palju. Antud juhul on vabade tundmatute arvuks $n - r = 3 - 1 = 2$. Olgu vabadeks tundmatuteks x ja y . Sel juhul

$$2z = -3 + 2x + 6y \Leftrightarrow z = -\frac{3}{2} + x + 3y$$

ja süsteemi üldlahend on esitatav kujul

$$(x, y, z) = (c_1, c_2, -\frac{3}{2} + c_1 + 3c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Süsteemi erilahendid on näiteks

$$(x, y, z) = \left(0, 0, -\frac{3}{2} \right), \quad (x, y, z) = \left(0, 1, \frac{3}{2} \right), \quad (x, y, z) = \left(1, 0, -\frac{1}{2} \right).$$

◇ ◇ ◇

Märkus 8.6

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A | b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend

$r = n = m$ korral on Crameri peajuht, $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).

2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)

$r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust, $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

8.9 Homogeenne lineaarvõrrandisüsteem

Definitsioon 8.16

Lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b$$

nimetatakse **homogeenseks**, kui kõigi tema võrrandite vabaliikmed võrduvad nulliga, s.t kui b on nullvektor: $b = 0$. Vastasel korral nimetatakse võrrandisüsteemi **mittehomogeenseks**.

Märkus 8.7

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = 0$ on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend $x = 0$ (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend.

Märkus 8.8

Kui võrrandisüsteemi maatriksi A determinant $|A| = 0$ (juhul $n = m$), siis maatriksi A astak r on väiksem kui tundmatute arv n . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on $n - r$.

Näide 8.19 Vaatleme homogeenet süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Elimineerimismeetodiga lahendades saame

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-3I]{-2I} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2II}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-II} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Näeme, et homogeense süsteemi korral ei ole vaja süsteemi maatriksit laiendada, sest astakutingimus on alati täidetud. Viimasest teisendusmaatriksist on näha, et $|A| = 0$. Kuna maatriksi A astak $r = 2 < 3$, siis on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Vabu tundmatuid on $n - r = 3 - 2 = 1$. Valime vabaks tundmatuks tundmatu x_3 , s.t. $x_3 = c$, kus $c \in \mathbb{R}$ on suvaline reaalarv. Sel juhul süsteemi üldlahend avaldub kujul

$$x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Viimast võib kirja panna ka kujul

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R},$$

s.t. süsteemi lahend avaldub vektori $x = (1, -1, 1)^T$ kordsena. Kui fikseerida arv c , näiteks $c = 2$, siis süsteemi üheks erilahendiks on

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2.$$

◇ ◇ ◇

Teoreem 8.3

[18] Suvalise lineaarvõrrandisüsteemi

$$Ax = b$$

üldlahend x võrdub tema mingi erilahendi x_* ning vastava homogeense süsteemi

$$Ax_0 = 0$$

üldlahendi x_0 summaga

$$x = x_* + x_0.$$

Mõnikord võib antud teoreem osutada väga kasulikuks ja lubab süsteemi lahenduvuse uurimist veidi lihtsustada. Meie kursusel seda teadma ei pea.

Näide 8.20 Vaatleme vaid ühest võrrandist koosnevat süsteemi

$$\begin{cases} x + y + z = 3. \end{cases}$$

Vastavaks homogeenseks süsteemiks on

$$\begin{cases} x + y + z = 0. \end{cases}$$

Lihtne on näha, et esialgse süsteemi erilahendiks sobib vektor ühtedest,

$$x_* = (1, 1, 1)^T, \quad (1 + 1 + 1 = 3).$$

Homogeensel süsteemil on kaks vaba tundmatut. Kirjutame selle üldlahendi kujul

$$x_0 = (c_1, c_2, -c_1 - c_2)^T, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sel juhul esialgse süsteemi üldlahend avaldub kahe vektori summana:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x_* + x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

◇ ◇ ◇

Kirjandus

- [1] D. R. Bellhouse. Abraham De Moivre: Setting the Stage for Classical Probability and Its Applications. CRC Press, 2011.
- [2] D. R. Causton. A Biologist's Basic Mathematics. Edward Arnold, 1983.
- [3] M. M. Dougherty, J. Gieringer. First Year Calculus For Students of Mathematics and Related Disciplines (veebikonspekt).
- [4] E. Dummit. Calculus I. Introduction to Differentiation (veebikonspekt). 2013.
- [5] C. Fletcher. Physics with Calculus. Volume I (Classical Mechanics). California, 1994.
- [6] R. Flood, R. Wilson. Kuulsad matemaatikud. Valgus, 2014.
- [7] G. Gamow. My World Line. Viking Press, 1970.
- [8] R. J. Gillings. The So-Called Euler-Diderot Incident. Am. Math. Mont. vol. 61 (2), 77-80, 1954.
- [9] J. Grabiner. A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings. MAA, 2010.
- [10] J. V. Grabiner. Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus. Amer. Math. Mon. 90 (3): 185-194, 1983.
- [11] J. Grimbleby. Systems and Circuits (loengukonspekt). University of Reading.
- [12] A. P. Hillman, G. L. Alexanderson, M. E. Newton. Complex Numbers and Trigonometry (veebikonspekt), 2005.
- [13] D. Hoffman. Contemporary Calculus (veebikonspekt). Bellevue College.
- [14] D. Hughes-Hallett, A. M. Gleason, P. F. Lock, D. E. Flath. Applied Calculus. Wiley, 2010.
- [15] A. D. Hwang. Calculus for Mathematicians, Computer Scientists, and Physicists. An Introduction to Abstract Mathematics (loengukonspekt). College of the Holy Cross,
- [16] K. Kaarli. Algebra praktikum. Lineaarvõrrandisüsteemid. Tartu, 1986.
- [17] G. Kangro. Matemaatiline analüüs I. Tallinn, 1965.

- [18] M. Kilp. Algebra I. Tartu, 2005.
- [19] M. Kline. Mathematical Thought From Ancient to Modern Times, Volume 2. Oxford University Press, 1990.
- [20] J. Knisley, K. Shirley. Calculus: A Modern Approach (veebikonspekt), 2002.
- [21] T. R. Kuphaldt. Lessons In Electric Circuits, Volume II - AC, 2007.
- [22] Ü. Lepik. Kaos ja kord. Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997.
- [23] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [24] A. Parring. Algebra ja geomeetria (veebikonspekt), 2005.
- [25] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid: teooria, näiteid, ülesandeid. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.
- [26] C. A. Pickover. The Math Book. Sterling, New York, 2009.
- [27] I. Piir. Füüsika ajalugu. Ilmamaa, 2013.
- [28] P. Puusemp. Lineaaralgebra. Avita, 2008.
- [29] V. Luigelaht, E. Reiman. Matemaatika tehnikumidele. Tallinn, Valgus, 1978.
- [30] G. Rägo. Kõrgem matemaatika I. Tallinn, 1962.
- [31] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [32] S. W. Smith. The Scientist and Engineer Guide to Digital Signal.
- [33] V. Soomer. Kõrgem matemaatika (loengukonspekt).
- [34] V. Soomer. Matemaatiline analüüs. Tartu Riiklik Ülikool, 1988.
- [35] I. Stewart. 17 Equations that Changed the World. Profile Books, 2013.
- [36] S. T. Tan. Single Variable Calculus. Brooks/Cole 2010.
- [37] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass. Thomas' Calculus 11th. Pearson, 2005.
- [38] K. Tsishchanka. Section 9.4. Areas and Lengths in Polar Coordinates (veebikonspekt). New York University 2010.
- [39] A. J. Washington. Basic Technical Mathematics with Calculus. 10th ed. Pearson, 2014.