

Maatriksi Jordani normaalkuju

Vaatleme maatrikseid üle korpuse K ning eeldame, et kõik vaadeldavad vektorruumid on lõplikumõõtmelised. Elemendile $k \in K$ vastavaks m . järku *Jordani kastiks* nimetatakse m . järku ruutmaatriksit kujul

$$J_m(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & & 0 \\ & k & 1 & \\ & & k & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & k \end{pmatrix}.$$

(Siin ja edaspidi: kui mõned maatriksi elemendid on jäetud kirjutamata, siis see tähendab seda, et need elemendid on nullid.) *Jordani maatriks* on maatriks kujul

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_s)} \end{pmatrix}.$$

Vektorruumi V (üle korpuse K) lineaarteisenduse φ *annulleerivaks polünoomiks* nimetatakse nullist erinevat polünoomi $g(x) \in K[x]$, mille korral $g(\varphi)$ on nullteisendus, $g(\varphi) = 0$. Cayley-Hamiltoni teoreemi põhjal on lineaarteisenduse karakteristlik polünoom tema annulleerivaks polünoomiks. Kehtib järgmine väide (teoreem VIII.5.5, kõik viited on M. Kilbi raamatule “Algebra I”).

Teoreem 1 *Kui vektorruumi V (üle korpuse K) lineaarteisendusel φ leidub selline annulleeriv polünoom, mis lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis on teisendusel φ olemas kanooniline baas, s.t. baas, mille suhtes selle teisenduse maatriks on Jordani maatriks.*

Eriti oluline on selle teoreemi järgmine järeldus.

Järeldus 1 *Olgu V vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$. Siis igal lineaarteisendusel $\varphi \in \text{End}(V)$ on olemas kanooniline baas.*

Teiste sõnadega: iga maatriksi $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ korral leidub Jordani maatriks $J(A) \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ ja regulaarne maatriks $C \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ nii, et

$$C^{-1}AC = J(A).$$

Kui seejuures A on lineaarteisenduse φ maatriks baasi B suhtes, siis maatriksi C veergudeks on kanoonilise baasi vektorite koordinaadid baasi B suhtes. Maatriksit $J(A)$ nimetatakse maatriksi

A Jordani normaalkujuks. Seega maatriksi A Jordani normaalkuju on iga maatriksiga A sarnane Jordani maatriks.

Selgitame pisut, kuidas näeb välja maatriksi Jordani normaalkuju. Olgu $\varphi \in \text{End}(V)$ ning olgu A teisenduse φ maatriks mingi baasi suhtes. Oletame, et teisenduse φ karakteristlik polünoom esitub kujul

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{r_m},$$

kus $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ on paarikaupa erinevad. Teoreemi VIII.5.4 põhjal on

$$V = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1 e)^{r_1} \dot{+} \text{Ker}(\varphi - \lambda_2 e)^{r_2} \dot{+} \dots \dot{+} \text{Ker}(\varphi - \lambda_m e)^{r_m},$$

kus e on vektorruumi V samasusteisendus. Sääljuures on iga $i \in \{1, \dots, m\}$ korral alamruum $U_i := \text{Ker}(\varphi - \lambda_i e)^{r_i}$ φ -invariantne, s.t. $\varphi(U_i) \subseteq U_i$.

Kui U on vektorruumi V mingi φ -invariantne alamruum, siis võime vaadelda vektorruumi U lineaarteisendust $\varphi_U : U \rightarrow U$, mis on defineeritud võrdusega

$$\varphi_U(u) = \varphi(u) \in U$$

iga $u \in U$ korral. Kui U on φ -invariantne ja $k \in K$, siis on U ka $(\varphi - ke)$ -invariantne, sest

$$(\varphi - ke)(u) = \varphi(u) - ku \in U$$

iga $u \in U$ korral.

Vaatleme alamruumi U_1 ja teisendust $(\varphi - \lambda_1 e)_{U_1} : U_1 \rightarrow U_1$. See teisendus on nilpotentne, sest

$$((\varphi - \lambda_1 e)_{U_1})^{r_1}(a) = (\varphi - \lambda_1 e)^{r_1}(a) = 0$$

iga $a \in U_1 = \text{Ker}(\varphi - \lambda_1 e)^{r_1}$ korral. Nilpotentse lineaarteisenduse jaoks saab leida kanoonilise baasi teoreemi VIII.4.3. kasutades. Olgu B_1 teisenduse $(\varphi - \lambda_1 e)_{U_1}$ kanooniline baas (vektorruumis U_1). Siis teisenduse $(\varphi - \lambda_1 e)_{U_1}$ maatriks baasi B_1 suhtes on Jordani maatriks, mille päädiagonaalil on nullid. Et $\varphi = (\varphi - \lambda_1 e) + \lambda_1 e$, siis ka $\varphi_{U_1} = (\varphi - \lambda_1 e)_{U_1} + (\lambda_1 e)_{U_1}$ ning

$$\begin{aligned} A_{\varphi_{U_1}}^{B_1} &= A_{(\varphi - \lambda_1 e)_{U_1}}^{B_1} + A_{(\lambda_1 e)_{U_1}}^{B_1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ? & 0 \\ & 0 & \ddots \\ & & \ddots & ? \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & ? & 0 \\ & \lambda_1 & \ddots \\ & & \ddots & ? \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

s.t. teisenduse φ_{U_1} maatriks baasi B_1 suhtes on Jordani maatriks, mille päädiagonaalil on kõikjal λ_1 .

Samamoodi saab leida kanoonilised baasid B_i kõigi teisenduste φ_{U_i} jaoks. Võtame $B := B_1 \cup \dots \cup B_m$. Lause III.5.18 põhjal on B otsesumma V baas. Olgu $B_i = \{b_i^1, b_i^2, \dots, b_i^{s_i}\}$, $i = 1, \dots, m$. (Hiljem näeme, et $s_i = r_i$.) Siis maatriksi $A_{\varphi_{U_1}}^{B_1}$ kujust näeme, et iga $j \in \{1, \dots, s_1\}$ korral

$$\varphi(b_1^j) = \varphi_{U_1}(b_1^j) = 0 \cdot b_1^1 + \dots + \varepsilon b_1^{j-1} + \lambda_1 b_1^j + 0 \cdot b_1^{j+1} + \dots + 0 \cdot b_1^{s_1} + 0 \cdot b_2^1 + \dots + 0 \cdot b_m^{s_m},$$

kus ε on kas 0 või 1. Seega maatriksi A_φ^B s_1 esimest veergu, kuhu need koordinaadid kirjutatakse, on sellised, nagu veerud Jordani maatriksis olema peavad. Samamoodi on see ka ülejäänud veergudega. Järelikult A_φ^B on Jordani maatriks, B on φ kanooniline baas ja

$$J(A) = A_\varphi^B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{\varphi U_1}^{B_1}} & & & 0 \\ & \boxed{A_{\varphi U_2}^{B_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_{\varphi U_m}^{B_m}} \end{pmatrix}$$

Seega $J(A)$ näeb välja järgmiselt:

$$J(A) = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \dots \lambda_1} \\ \vdots \\ \boxed{\lambda_1 \dots \lambda_1} \end{pmatrix}}_{r_1 \text{ veergu}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_m \dots \lambda_m} \\ \vdots \\ \boxed{\lambda_m \dots \lambda_m} \end{pmatrix}}_{r_m \text{ veergu}} \end{pmatrix}$$

Element $\lambda_i \in K$ peab päädiagonaalil esinema täpselt r_i korda (s.t. $s_i = r_i$) sellepärast, et maatriksid A ja $J(A)$ on sarnased ning sarnaste maatriksite karakteristlikud polünoomid on võrdsed (lause VIII.2.9).

1. ülesanne. Leida nilpotentse maatriksi

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{pmatrix}, \quad c) A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

Teame, et nilpotentse maatriksi ainus omaväärtus on 0. See tähendab, et maatriksi A Jordani normaalkuju $J(A)$ koosneb vaid kastidest $J_k(0)$:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Olgu s_k , $k = 1, 2, 3, 4$, Jordani kastide $J_k(0)$ arv maatriksis $J(A)$. Arvude s_1, s_2, s_3, s_4 leidmiseks lahendame lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4 - \text{rank}(A) \\ s_2 + s_3 + s_4 = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^2) \\ s_3 + s_4 = \text{rank}(A^2) - \text{rank}(A^3) \\ s_4 = \text{rank}(A^3) - \text{rank}(A^4) \end{cases} \quad (1)$$

Selleks leiame maatriksi A astaku:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega $\text{rank}(A) = 2$. Kuna $A^2 = A^3 = A^4 = 0$, siis $\text{rank}(A^2) = \text{rank}(A^3) = \text{rank}(A^4) = 0$. See tähendab, et süsteem (1) on kujul

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 4 - \text{rank}(A) \\ s_2 + s_3 + s_4 = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^2) \\ s_3 + s_4 = \text{rank}(A^2) - \text{rank}(A^3) \\ x_4 = \text{rank}(A^3) - \text{rank}(A^4) \end{cases} \quad (2)$$

ja tema lahendiks on $s_4 = s_3 = 0$, $s_2 = 2$ ja $s_1 = 0$. Sellega oleme saanud, et

$$J(A) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

2. ülesanne. Leida maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordani normaalkuju.

Leiame maatriksi karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 - \lambda & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 3 - \lambda & 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -3 + \lambda & 0 & 1 \\ 3 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & -2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{1+2}(3-\lambda) \begin{vmatrix} -3+\lambda & 0 & 1 \\ -5 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(3-\lambda)^2(-1)^{3+3}(3-\lambda) \begin{vmatrix} -3+\lambda & 0 \\ -5 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -(3-\lambda)^2(-3-\lambda)(-2-\lambda) = -(3-\lambda)^3(2+\lambda).
\end{aligned}$$

Seega $\lambda_1 = 3$ ja $r_1 = 3$ ning $\lambda_2 = -2$ ja $r_2 = 1$. Teame, et

$$J(B) = \begin{pmatrix} 3 & ? & 0 & 0 \\ 0 & 3 & ? & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Seega omaväärtusele -2 vastab üks esimest järku kast ning jääb leida vaid omaväärtusele 3 vastavate Jordani kastide arvud. Kuna selle omaväärtuse kordsus on 3 , siis talle ei saa vastata 4 . järku kaste, s.t. $s_4 = 0$. Niisiis tuleb s_1, s_2, s_3 leidmiseks lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 3 - \text{rank}(B - 3E) \\ s_2 + s_3 = \text{rank}(B - 3E) - \text{rank}(B - 3E)^2 \\ s_3 = \text{rank}(B - 3E)^2 - \text{rank}(B - 3E)^3 \end{cases}.$$

Selleks leiame maatriksi $B - 3E$ astaku:

$$B - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seega $\text{rank}(B - 3E) = 2$. Kuna

$$(B - 3E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 25 & 0 & -25 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B - 3E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 125 & 0 & -125 & 0 \\ -125 & 0 & 125 & 0 \end{pmatrix},$$

siis $\text{rank}(B - 3E)^2 = \text{rank}(B - 3E)^3 = 1$. Süsteemi lahendamisel saame $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ ja $s_3 = 0$. Sellega oleme saanud, et maatriksi B Jordani normaalkuju sisaldab ühe esimest ja ühe teist järku omaväärtusele 3 vastava kasti, s.t.

$$J(B) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

3. ülesanne. Leida vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) lineaarteisenduse φ kanooniline baas ja φ maatriks selle baasi suhtes, kui φ maatriks baasi e suhtes on

$$\begin{aligned} a) A &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}, & b) A &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \\ c) A &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & d) A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ e) A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a) Eespool nägime, et antud maatriksi ainus omaväärtus on 0 ja selle kordsus on 4. Seega $V = \text{Ker}(\varphi - 0 \cdot 1_V)^4 = \text{Ker}\varphi^4$. Kuna $A^2 = 0$, siis lineaarteisenduse φ nilpotentsuse indeks on 2 ja $\text{Ker}\varphi^2 = V$. Seega on meil V alamruumide jada

$$\{0\} = \text{Ker}\varphi^0 \subset \text{Ker}\varphi^1 \subset \text{Ker}\varphi^2 = V.$$

Leiame $\text{Ker}\varphi$ mingi baasi. Kuna A on φ maatriks baasi e suhtes, siis φ tuuma kuuluvad sellised vektorid, mille koordinaatide vektorid baasi e suhtes ($\mathbb{R}^4$ elemendid) on sellise homogeense lineaarvõrrandisüsteemi lahendid, mille maatriks on A . $\text{Ker}\varphi$ baasi leidmine on samaväärne selle võrrandisüsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi leidmisega. Lahendame selle süsteemi Gaussi meetodil:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Valime sõltuvateks tundmatuteks x_2, x_3 ning avaldame need vabade tundmatute x_1, x_4 kaudu:

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 - 5x_4, \\ x_3 &= 2x_4. \end{aligned}$$

Andes tundmatutele x_1, x_4 väärtused teist järku ühikmaatriksi ridadest saame lahendite fundamentaalsüsteemi vektoreiks (s.t. $\text{Ker}\varphi$ baasiks)

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 3, 0, 0), \\ a_2 &= (0, -5, 2, 1). \end{aligned}$$

Täiendame nüüd $\text{Ker}\varphi$ baasi a_1, a_2 vektorruumi V baasiks vektorite

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 0, 0, 0), \\ b_2 &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

abil. Edasi leiame vektorid $\varphi(b_1)$ ja $\varphi(b_2)$ (täpsemalt öeldes nende koordinaatide vektorid baasi e suhtes). Korrutades maatriksit A paremalt veeruvektoritega b_1^t ja b_2^t saame, et

$$\begin{aligned}\varphi(b_1) &= (3, 9, 0, 0), \\ \varphi(b_2) &= (-7, -1, -8, -4).\end{aligned}$$

Kuna vektorid $\varphi(b_1), \varphi(b_2) \in \text{Ker}\varphi$ on lineaarselt sõltumatud ja $\dim(\text{Ker}\varphi) = 2$, siis $\varphi(b_1), \varphi(b_2)$ on $\text{Ker}\varphi$ baas. Seega φ kanooniline baas on

$$B = \{\varphi(b_1), b_1, \varphi(b_2), b_2\}.$$

Lisaks teame, et $J(A) = C^{-1}AC$, kus

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Leiame maatriksi A karakteristliku polünoomi:

$$\begin{aligned}|A - XE| &= \begin{vmatrix} -2 - X & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 - X & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 - X & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 - X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 - X & 4 \\ -1 & 2 - X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 - X & 0 \\ 0 & -1 - X \end{vmatrix} \\ &= (-4 + X^2 + 4)(1 + X)^2 = X^2(1 + X)^2.\end{aligned}$$

Seega $\lambda_1 = 0$ ja $r_1 = 2$ ning $\lambda_2 = -1$ ja $r_2 = 2$. Järelikult

$$V = \text{Ker}(\varphi - 0 \cdot 1_V)^2 \dot{+} \text{Ker}(\varphi + 1 \cdot 1_V)^2 = \text{Ker}(\varphi^2) \dot{+} \text{Ker}(\varphi + 1_V)^2 = U_1 \dot{+} U_2,$$

kus $U_1 = \text{Ker}(\varphi^2)$ ja $U_2 = \text{Ker}(\varphi + 1_V)^2$. Seejuures $\dim(U_1) = 2 = \dim(U_2)$, U_1 ja U_2 on φ -invariantsed alamruumid ning $\psi_1 := \varphi|_{U_1}$ ja $\psi_2 := (\varphi + 1_V)|_{U_2}$ on nilpotentsed lineaarteisendused vastavalt ruumidel U_1 ja U_2 . Leiame kanoonilise baasi nii ψ_1 kui ψ_2 jaoks.

Alustame teisendusest ψ_1 . Teame, et

$$\{0\} = \text{Ker}(\psi_1^0) \subseteq \text{Ker}(\psi_1^1) \subseteq \text{Ker}(\psi_1^2) = U_1.$$

Leiame $\text{Ker}(\psi_1^1) = \text{Ker}(\varphi)$ baasi. Selleks lahendame homogeenise lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga A :

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabaks tundmatuks x_2 saame lahendite fundamentaalsüsteemi ($\text{Ker}(\psi_1)$ baasi), mis koosneb ühest vektorist $a_1 = (2, 1, 0, 0)$. Et $\dim(\text{Ker}(\psi_1)) = 1 < \dim(U_1)$, siis tuleb leida veel ka $\text{Ker}(\psi_1^2) = \text{Ker}(\varphi^2)$ baas. Teisenduse φ^2 maatriks baasi e suhtes on

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Võtame vastava homogeenise lineaarvõrrandisüsteemi vabadeks tundmatuteks x_1, x_2 . Siis

$$\begin{aligned} x_3 &= -2x_1 + 4x_2, \\ x_4 &= 3x_1 - 6x_2. \end{aligned}$$

Seega $\text{Ker}(\psi_1^2)$ baasiks sobivad näiteks vektorid

$$\begin{aligned} a_2 &= (1, 0, -2, 3), \\ a_3 &= (0, 1, 4, -6). \end{aligned}$$

Kuna a_1 ja a_2 on lineaarselt sõltumatud, siis täiendab vektor a_2 alamruumi $\text{Ker}(\psi_1)$ baasi ruumi U_1 baasiks. Et $\text{Ker}(\psi_1)$ on ühemõõtmeline vektorruum, siis $\psi_1(a_2)$ on $\text{Ker}(\psi_1)$ baas ja $\{\psi_1(a_2), a_2\}$ on ψ_1 kanooniline baas, kusjuures

$$\psi_1(a_2) = \varphi(a_2) = A(\overline{a_2})_e = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Leiame nüüd kanoonilise baasi ψ_2 jaoks. Selleks leiame $\text{Ker}(\psi_2) = \text{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasi. Selleks lahendame homogeenise lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga $A + E$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabadeks tundmatuteks x_3 ja x_4 saame $\text{Ker}(\psi_2)$ baasiks

$$\begin{aligned} b_1 &= (0, 0, 1, 0), \\ b_2 &= (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Kuna $\dim(U_2) = 2$, siis $\text{Ker}(\psi_2) = U_2$ ja b_1, b_2 on kanooniline baas ψ_2 jaoks. Seega kanooniline baas φ jaoks on

$$B = \{\varphi(a_2), a_2, b_1, b_2\}.$$

Kuna

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi(a_2)) &= \varphi^2(a_2) = 0, \\ \varphi(a_2) &= \varphi(a_2), \\ \varphi(b_1) &= (\psi_2 - 1_V)(b_1) = \psi_2(b_1) - 1_V(b_1) = -b_1, \\ \varphi(b_2) &= (\psi_2 - 1_V)(b_2) = \psi_2(b_2) - 1_V(b_2) = -b_2, \end{aligned}$$

siis

$$J(A) = A_\varphi^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kusjuures üleminekumaatriks baasilt e baasile B on

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Maatriksil A on üksainus omaväärtus 1 kordsusega 4. Seega $V = \text{Ker}(\varphi - 1_V)^4$. Tähistame $\psi := \varphi - 1_V$. Siis ψ maatriks baasi e suhtes on

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ja $(A - E)^3 = 0$, siis

$$\{0\} \subset \text{Ker}\psi \subset \text{Ker}\psi^2 \subset \text{Ker}\psi^3 = V.$$

Lahendades homogeenised lineaarvõrrandisüsteemid maatriksitega $A - E$ ja $(A - E)^2$ saame $\text{Ker}\psi$ baasiks

$$\begin{aligned} a_1 &= (-2, -1, 1, 0), \\ a_2 &= (1, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

ja $\text{Ker}\psi^2$ baasiks

$$\begin{aligned} b_1 &= (1, 1, 0, 0), \\ b_2 &= (-1, 0, 1, 0), \\ b_3 &= (1, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

Täiendame süsteemi b_1, b_2, b_3 vektorruumi V baasiks vektoriga

$$c = (0, 0, 0, 1).$$

Siis $\psi(c) = (0, 1, 1, 0) \in \text{Ker}\psi^2$ ja $\text{Ker}\psi^2 = \text{Ker}\psi \dot{+} \langle \psi(c) \rangle$. Nüüd $\psi^2(c) = (-2, -2, 2, 2) \in \psi^2(c)$. Kuna $\dim(\text{Ker}\psi) = 2$, siis tuleb vektor $\psi^2(c)$ täiendada alamruumi $\psi^2(c)$ baasiks. Teeme seda vektori $a_2 = (1, 0, 0, 1)$ abil. Seega φ kanooniline baas on

$$B = \{\psi^2(c), \psi(c), c, a_2\}$$

ja

$$J(A) = \text{diag}(J_3(1), J_1(1)).$$

e) Maatriksi A karakteristlik polünoom on $-(1+X)^5$, mis tähendab, et ainus omaväärtus on $\lambda_1 = -1$ ja selle kordsus on $n_1 = 5$. Seega $V = \text{Ker}(\varphi + 1_V)^5 = U_1$. Tähistame $\psi := (\varphi + 1_V)_{U_1} = \varphi + 1_V$. Siis

$$A_\psi = A + E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lahendame homogeense lineaarvõrrandisüsteemi maatriksiga $A + E$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Võttes vabadeks muutujateks x_1, x_3, x_5 saame üldlahendi

$$\begin{aligned} x_4 &= x_1, \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

ja $\text{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasiks

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 0, 1, 0), \\ a_2 &= (0, 0, 1, 0, 0), \\ a_3 &= (0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Kuna $(A + E)^2 = 0$, siis $\text{Ker}(\psi^2) = V$. Täiendame $\text{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasi a_1, a_2, a_3 vektorruumi V baasiks vektoritega

$$\begin{aligned} b_1 &= (0, -1, 0, 0, 0), \\ b_2 &= (0, 0, 0, -1, 0). \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \psi(b_1) &= (1, 1, 1, 1, 1), \\ \psi(b_2) &= (1, 1, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Kuna süsteem $\psi(b_1), \psi(b_2), a_3$ on lineaarselt sõltumatu, siis saame süsteemi $\psi(b_1), \psi(b_2)$ täiendada $\text{Ker}(\varphi + 1_V)$ baasiks vektori a_3 abil. Seega ψ kanooniline baas on

$$B = \{\psi(b_1), b_1, \psi(b_2), b_2, a_3\}$$

ja

$$A_\psi^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et $A_\psi^B = A_{\varphi+1_V}^B = A_\varphi^B + A_{1_V}^B = A_\varphi^B + E$, siis

$$A_\varphi^B = A_\psi^B - E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. ülesanne. Leida idempotentse maatriksi (s.o. maatriksi, mille korral $A^2 = A$) Jordani normaalkuju.

5. ülesanne. Kasutades Jordani normaalkuju ja eksponentfunktsiooni Taylori rida leida

$$e^{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$