

Aine Algebra II eksamiküsimused

Kristo Väljako

Sügis 2024

Eksam koosneb kirjalikust ja suulisest osast. Kirjalikus osas on 10 ülesannet antud mõistete defineerimiseks või tõestamiseks lihtsamate tõestuste osast. Kirjaliku osa kirjutamiseks on ette nähtud 30 kuni 40 minutit.

Pärast kirjaliku osa tegemist valib tudeng omale 2 eksamipiletit. Igal eksamipiletil on üks tõestus keerulisemate tõestuste hulgast. Tudengil on aega vähemalt tund aega, et ette valmistada suuliselt tahvlil piletitel olevate tulemuste tõestused. Esinemise ajal on võib materjale vaadata maksimaalselt üks kord ühe minuti jooksul.

Keerulisemad küsimused:

1. Tõestada Cayley teoreem: iga rühm on isomorfne mingi substitutsiooni-rühma alamrühmaga. (Teoreem 1.32)
2. Tõestada Ω -algebrate homomorfismiteoreem. (Teoreem 1.40)
3. Tõestada, et rühma kongruentsid ja normaalsed alamrühmad on üksüheses vastavuses. (Teoreem 1.53)
4. Tõestada, et ringi kongruentsid ja ideaalid on üksüheses vastavuses. (Teoreem 1.62)
5. Tõestada kaks tarvilikku ja piisavat tingimust selleks, et R -mooduli (R on ring) alammodulite summa oleks otsesumma. (Teoreem 1.83)
6. Tõestada teoreem, mis seob omavahel R -moodulite sisemised ja välised otsesummad. (Teoreem 1.89)
7. Tõestada väide selle kohta, kuidas saab leida vektorruumi kahe lõpliku-mõõtmelise alamruumi summa baasi. (Lause 1.91)
8. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et vektorruumi lõplikumõõtmeliste alamruumide summa oleks otsesumma. (Teoreem 1.95)
9. Tõestada, et kui f ja g on nullist erinevad n muutuja polünoomid üle nullitegureita ringi R , siis fg kõrgeim liige on f ja g kõrgeimate liikmete korrutis. (Lause 2.6)

10. Sümmeetriliste n -muutuja polünoomide ring on kõigi n -muutuja polünoomide ringi alamring. (Lause 2.12)
11. Tõestada, et iga sümmeetriline polünoom on esitatav polünoomina sümmeetrilistest põhipolünoomidest. (Teoreem 2.16)
12. Tõestada, et kui K on korpus ja $p \in K[X]$ on vähemalt teise astme taandumatu polünoom, siis saab konstrueerida korpuse K laiendi, milles polünoomil p leidub juur. (Lause 2.21)
13. Tõestada, et iga mittekonstantse polünoomi jaoks üle korpuse leidub lahutuskorpus. (Teoreem 2.23)
14. Tõestada, et igal reaalarvuliste kordajatega mittekonstantsel polünoomil leidub kompleksarvuline juur. (Lause 2.28)
15. Tõestada algebra põhiteoreem. (Teoreem 2.29)
16. Tõestada, et igal lineaarteisendusel mittetriviaalsel vektorruumil leidub kanooniline baas. (Teoreem 3.17)
17. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisenduse φ annulleeriv polünoom lahutub kahe ühistegurita polünoomi korrutiseks, siis V lahutub teatud φ -invariantsete alamruumide otsesummaks. (Lause 3.29)
18. Tõestada, et kui vektorruumi V lineaarteisendusel φ leidub selline annulleeriv polünoom, mis lahutub lineaartegurite korrutiseks, siis on lineaarteisendusel φ olemas kanooniline baas. (Teoreem 3.30)
19. Tõestada Cayley-Hamiltoni teoreem. (Teoreem 3.41)
20. Tõestada tulemus vektorruumi baasi kaasbaasi kohta. (Lause 4.9)
21. Tõestada, et vektorruumi ja tema teise kaasruumi vahel on loomulik isomorfism. (Teoreem 4.13)
22. Tõestada, et n -mõõtmelise vektorruumi ruutfunktsionaalide, n muutuja ruutvormide ja n -ndat järku sümmeetriliste ruutmaatriksite vahel on üksühene vastavus. (Lause 4.29)
23. Tõestada, et igal ruutfunktsionaalil on olemas kanooniline baas. (Teoreem 4.34)
24. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvormi positiivsete kordajate arv tema kanoonilises kujus ei sõltu kanoonilisest baasist. (Teoreem 4.40)
25. Tõestada, et reaalarvuliste kordajatega ruutvorm on positiivselt määratud parajasti siis, kui tema maatriksi kõik peamiinorid on positiivsed. (Teoreem 4.46)
26. Tõestada, et sama järku tsüklilised rühmad on isomorfsed. (Teoreem 5.5)

27. Tõestada, et perioodiline Abeli rühm on oma p -komponentide otsesumma. (Teoreem 5.22)
28. Tõestada, et Abeli rühm on vaba parajasti siis, kui ta on isomorfne lõpmatute tsükliliste rühmade välise otsesummaga. (Teoreem 5.36)
29. Tõestada, et lõpliku baasiga vaba Abeli rühma iga nullist erinev alamrühm on vaba. (Teoreem 5.40)

Lihtsamad tõestused:

1. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et kujutus kahe rühma vahel oleks rühmade homomorfism. (Lause 1.8)
2. Tõestada, et kui kahe homomorfismi kompositsioon on defineeritud, siis see korutus on homomorfism. (Lause 1.14)
3. Tõestada, et rühma mittetühi alamhulk on selle rühma alamrühm parajasti siis, kui see alamhulk on kinnine pöördelemendi võtmise ja korutamise suhtes. (Lause 1.26)
4. Tõestada, et kui $\varphi: B \rightarrow A$ on Ω -algebrate homomorfism, siis $\varphi(B) = \text{Im } \varphi$ on A alamalgebra. (Lause 1.28)
5. Tõestada, et Ω -algebra alamalgebrate ühisosa on alamalgebra. (Lause 1.31)
6. Tõestada, et loomulik projektsioon faktoralgebrale on surjektiivne homomorfism. (Lause 1.36)
7. Tõestada, et Ω -algebrate homomorfismi tuum on kongruents. (Lause 1.38)
8. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühma kaks vasakpoolset kõrvalklassi oleksid võrdsed. (Lause 1.43)
9. Tõestada, et rühma alamrühma kõik vasakpoolsed kõrvalklassid on sama võimsusega. (Lause 1.45)
10. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus selleks, et rühma alamrühm oleks normaalne. (Lause 1.52)
11. Tõestada, et R -moodulite homomorfism $\varphi: A_R \rightarrow B_R$ on injektiivne parajasti siis, kui kehtib $\text{Ker } \varphi = \{0\}$. (Lause 1.77)
12. Tõestada, et lõplikumõõtmelise vektorruumi baasi tükeldus tekitab selle vektorruumi lahutuse otsesummaks. (Lause 1.96)
13. Tõestada, et kui lõplikumõõtmeline vektorruum V on oma alamruumide otsesumma, siis nende alamruumide baaside ühend on V baas. (Lause 1.97)

14. Tõestada, et üksliikmete leksikograafiline järjestus on järjestusseos. (Lemma 2.4)
15. Tõestada, et üksliikmete leksikograafiline järjestus on kooskõlas korrumisega. (Lemma 2.5)
16. Tõestada, et kui φ on vektorruumi V lineaarteisendus, siis V ühemõõtmelised φ -invariantsed alamruumid on parajasti φ omavektorite lineaarsed katted. (Lause 3.9)
17. Tõestada, et vektorruumi $V \neq \{0\}$ nilpotentsel lineaarteisendusel on täpselt üks omaväärtus, milleks on 0. (Lause 3.14)
18. Tõestada tulemus lineaarteisenduse ja tema maatriksi annulleerivate polünoomide kohta. (Lause 3.27)
19. Tõestada, et igal ruutmaatriksil üle korpuse on olemas annulleeriv polünoom. (Lause 3.28)
20. Tõestada tulemus, mis kirjeldab Jordani kasti minimaalse polünoomi. (Lause 3.38)
21. Tõestada tulemus, mis kirjeldab lineaarse funktsionaali maatriksi muutumist üleminekul ühelt baasilt teisele. (Lause 4.8)
22. Tõestada, et kui korpuse karakteristika ei ole 2, siis ruutfunktsionaali määrav sümmeetriline bilineaarne funktsionaal on üheselt määratud. (Lause 4.24)
23. Tõestada tulemus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormi kanoonilise kuju kohta. (Lause 4.37)
24. Tõestada tarvilik ja piisav tingimus kompleksarvuliste kordajatega ruutvormide ekvivalentsuseks. (Teoreem 4.39)
25. Tõestada, et kui G on n -ndat järku tsükliline rühm moodustajaga g , siis element g^k on rühma G moodustaja parajasti siis, kui $\text{SÜT}(k, n) = 1$. (Lause 5.12)
26. Tõestada, et Abeli rühma p -komponent on selle rühma alamrühm. (Lemma 5.19)
27. Tõestada, et iga Abeli rühm on isomorfne mingi vaba Abeli rühma faktorrühmaga. (Lause 5.37)

Mõisted, mida tuleb tunda:

- n -aarne tehe,
- tüüp,
- Ω -algebra,
- monoid,
- rühm,
- ring,
- korpus,
- vektorruum,
- moodul üle ringi,
- homomorfism,
- endomorfism,
- isomorfism,
- automorfism,
- alamalgebra,
- alamhulga poolt tekitatud alamalgebra,
- kongruents,
- faktorhulk,
- faktoralgebra,
- kujutuse tuum,
- alamrühma kõrvalklass,
- rühma järk,
- normaalne alamrühm,
- faktorrühm,
- rühmade homomorfismi tuum,
- ringi ideaal,
- faktoring,
- vektorruumi faktorruum,
- Ω -algebrate otsekorrutis,
- moodulite väline otsesumma,
- alammoodulite summa,
- alammoodulite sisemine otsesumma.
- n -muutuja polünoom,
- üksliige,
- sarnased üksliikmed,
- polünoomi liige,
- üksliikme aste,
- polünoomi aste,
- üksliikmete leksikograafiline järjestus,
- homogeenne polünoom,
- sümmeetriline polünoom,
- sümmeetrilised põhipolünoomid,
- polünoomi juur,
- alamkorpus,
- korpuse laiend,
- taandumatu polünoom,
- polünoomi lahutuskorpus,
- algebraliselt kinnine korpus.
- Jordani kast,
- Jordani maatriks,
- blokk-diagonaalne maatriks,
- lineaarteisenduse kanooniline baas,
- maatriksi Jordani normaalkuju,
- φ -invariantne alamruum,
- ringi nilpotentne element ja tema nilpotentsuse indeks,
- lineaarteisenduse ja maatriksi annulleeriv polünoom,
- minimaalne polünoom.
- Lineaarne funktsionaal,
- vektorruumi kaasruum,
- vorm,
- lineaarvorm,
- ruutvorm,
- lineaarse funktsionaali maatriks,
- üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele,
- kaasbaas,
- teine kaasruum,
- bilineaarne funktsionaal,
- bilineaarse funktsionaali maatriks,
- bilineaarvorm,
- sümmeetriline bilineaarne funktsionaal,
- ruutfunktsionaal,
- ruutfunktsionaali maatriks,
- ruutvormi maatriks,
- ruutvormi kanooniline kuju,
- ruutfunktsionaali kanooniline baas,
- ekvivalentsed ruutvormid,

- ruutvormi normaalkuju (üle kompleksarvude ja reaalarvude),
- positiivselt (negatiivselt) määratud ruutvorm,
- ruutmaatriksi peamiinor.
- Rühma elemendi poolt tekitatud alamrühm,
- tsükliline rühm ja selle tekitaja,
- rühma elemendi järk,
- perioodiline rühm,
- Abeli rühma p -komponent,
- p -rühm,
- Abeli rühma elementide lineaarkombinatsioon ja lineaarne kate,
- Abeli rühma elementide süsteemi lineaarne sõltuvus (sõltumatus),
- Abeli rühma moodustajate süsteem ja baas,
- vaba Abeli rühm.