

Analüütiline geomeetria

I loeng. Vektori mõiste, tehted vektoritega

Õppematerjalid

Analüütilise geomeetria soovitatavad eestikeelsed õppematerjalid:

- 1 Aine **Analüütiline geomeetria** loengute slaidid ja ülesannete kogumikud asuvad veebilehel <http://courses.ms.ut.ee>.
- 2 Mati Väljas, **Analüütiline geomeetria**, Tallinna Tehnikaülikooli Kirjastus, 2012,
- 3 Ü. Lumiste, K. Ariva, **Analüütiline geomeetria**, Tallinn, Valgus, 1973.

Analüütiline geomeetria

Analüütiline geomeetria



Pinnateooria, Riemanni pinnad

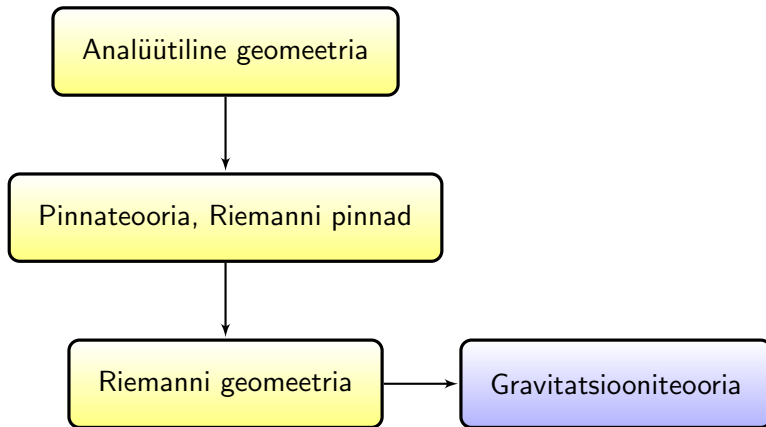
Analüütiline geomeetria

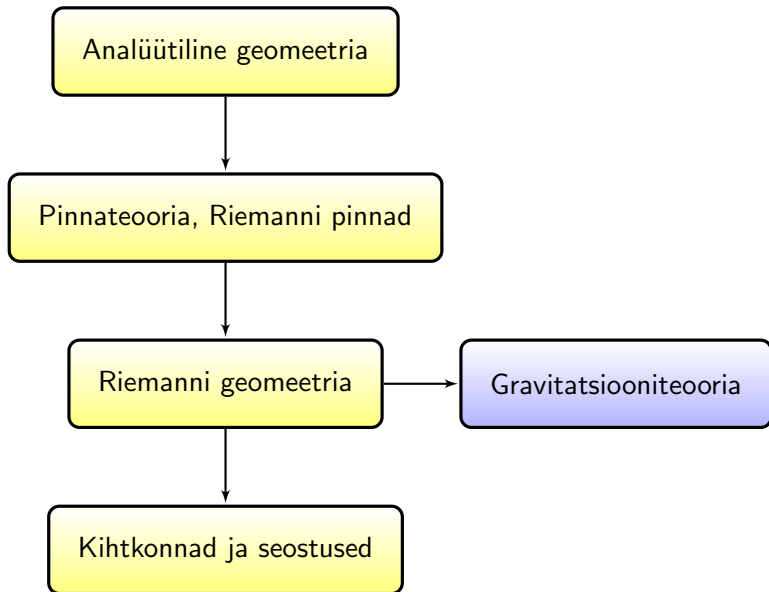


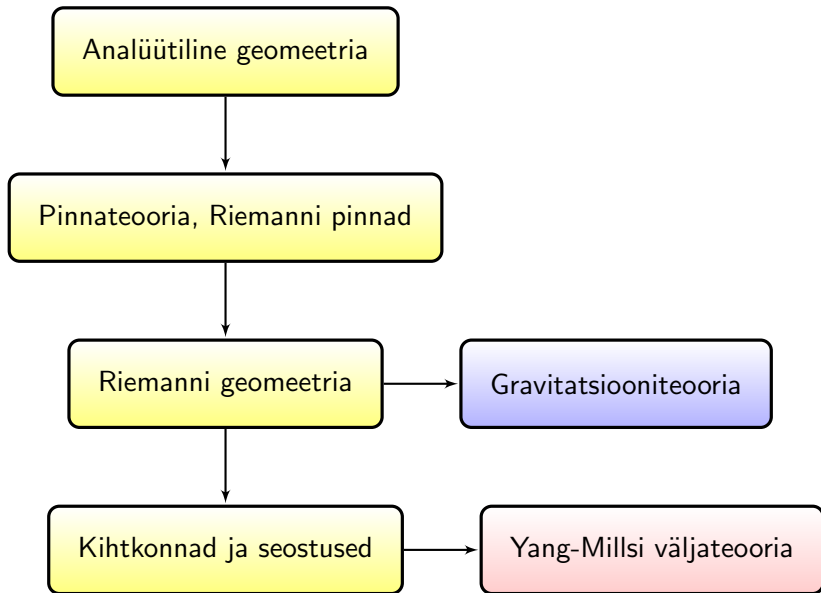
Pinnateooria, Riemanni pinnad

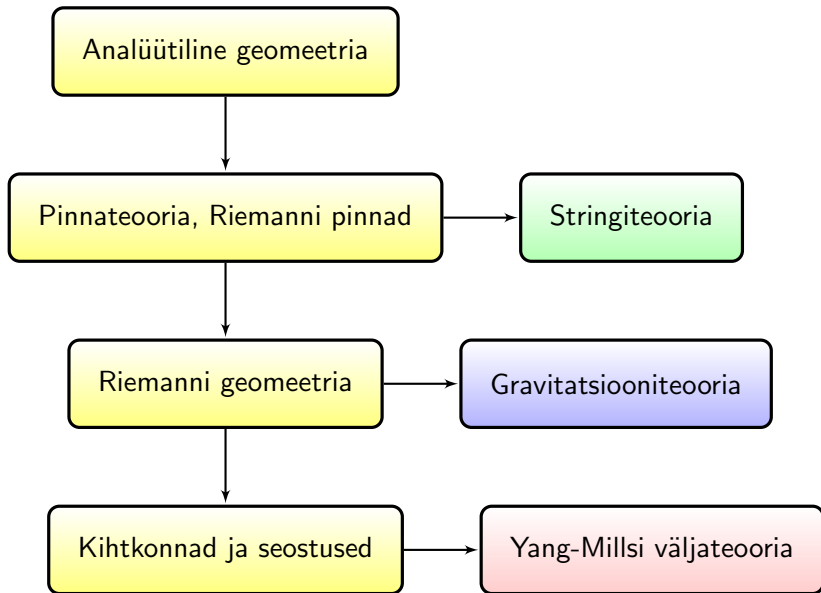


Riemanni geomeetria









Eukleidiline geomeetria

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on **eukleidiline ruum**, so geomeetriline ruum, kus kehtib **eukleidiline geomeetria**.

Eukleidiline geomeetria

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on **eukleidiline ruum**, so geomeetriline ruum, kus kehtib **eukleidiline geomeetria**. Eukleidilise geomeetria algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid.

Eukleidiline geomeetria

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on **eukleidiline ruum**, so geomeetriline ruum, kus kehtib **eukleidiline geomeetria**. Eukleidilise geomeetria algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on saksa matemaatiku **D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika**. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

Eukleidiline geomeetria

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on **eukleidiline ruum**, so geomeetriline ruum, kus kehtib **eukleidiline geomeetria**. Eukleidilise geomeetria algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on saksa matemaatiku **D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika**. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

- 1 algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**;

Eukleidiline geomeetria

Antud loengukursuse geomeetriliseks ruumiks on **eukleidiline ruum**, so geomeetriline ruum, kus kehtib **eukleidiline geomeetria**. Eukleidilise geomeetria algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**, seega on nad meie jaoks defineerimata mõisted. Eukleidilises ruumis kehtivad eukleidilise geomeetria aksiomid. Kaasaegses geomeetrias on erinevaid eukleidilise geomeetria aksiomaatikaid (aksioomide süsteem). Kõige tuntum on saksa matemaatiku **D. Hilbert'i eukleidilise geomeetria aksiomaatika**. Selle aksiomaatika lühikirjeldus:

- 1 algmõisted on **punkt, sirge ja tasand**;
- 2 nende vahelised seosed on **vahelsus** (nt punktid sirgel), **sisalduvus** (punkt ja sirge, punkt ja tasand, sirge ja tasand), **kongruentsus**, **geomeetriline võrdsus** (nt võrdsed lõigud, võrdsed nurgad, võrdsed kolmnurgad).

D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*.

Pikkused ja nurgad

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid.

Pikkused ja nurgad

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B , mis asuvad antud sirgel. Süsteemi, mis koosneb kahest punktist, tähistame AB või BA , nimetatakse **lõiguks**. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid.

Pikkused ja nurgad

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B , mis asuvad antud sirgel. Süsteemi, mis koosneb kahest punktist, tähistame AB või BA , nimetatakse **lõiguks**. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud selle pikkus, kusjuures pikkus on **positiivne reaalarv**, kui punktid on erinevad ja pikkus on **null** siis ja ainult siis, kui punktid ühtivad. Lõigu AB pikkust tähistame $|AB|$.

Pikkused ja nurgad

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B , mis asuvad antud sirgel. Süsteemi, mis koosneb kahest punktist, tähistame AB või BA , nimetatakse **lõiguks**. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud selle pikkus, kusjuures pikkus on **positiivne reaalarv**, kui punktid on erinevad ja pikkus on **null** siis ja ainult siis, kui punktid ühtivad. Lõigu AB pikkust tähistame $|AB|$.

Oletame, et on antud punkt O ja kaks kiirt, mis lähtuvad punktist O . Süsteemi, mis koosneb punktist O ja kahest sellest punktist lähtuvast kiirest, nimetatakse **nurgaks**. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise nurga korral on määratud selle suurus.

Pikkused ja nurgad

Kasutades algmõisteid ja nende vaheliseid seoseid, tuuakse sisse uusi mõisteid. Näiteks, olgu antud sirge ja kaks punkti A, B , mis asuvad antud sirgel. Süsteemi, mis koosneb kahest punktist, tähistame AB või BA , nimetatakse **lõiguks**. Punktid, mis asuvad sirgel punktide A ja B vahel, on lõigu AB sisepunktid. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise lõigu AB korral on määratud selle pikkus, kusjuures pikkus on **positiivne reaalarv**, kui punktid on erinevad ja pikkus on **null** siis ja ainult siis, kui punktid ühtivad. Lõigu AB pikkust tähistame $|AB|$.

Oletame, et on antud punkt O ja kaks kiirt, mis lähtuvad punktist O . Süsteemi, mis koosneb punktist O ja kahest sellest punktist lähtuvast kiirest, nimetatakse **nurgaks**. Eukleidilises geomeetrias eeldame, et suvalise nurga korral on määratud selle suurus. Lihtsustades, võib öelda, et eukleidiline geomeetria on **pikkused ja nurgad**.

Eukleidiline ruum

Eukleidilist ruumi tähistame E . Antud aines vaatleme kahte eukleidilist ruumi, kus üheks eukleidiliseks ruumiks on tasand E^2 (antud juhul me ei eelda, et tasand asub kolmemõõtmelises ruumis), ja teiseks on kolmemõõtmeline eukleidiline ruum E^3 .

Eukleidiline ruum

Eukleidilist ruumi tähistame E . Antud aines vaatleme kahte eukleidilist ruumi, kus üheks eukleidiliseks ruumiks on tasand E^2 (antud juhul me ei eelda, et tasand asub kolmemõõtmelises ruumis), ja teiseks on kolmemõõtmeline eukleidiline ruum E^3 .

Olgu X, Y eukleidilise ruumi E punktid. Sellega on määratud lõik XY . Punktid X, Y ei ole järjestatud ja selleks on kaks võimalust: XY või YX . Kui nüüd seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte interpreteerime lõigu alguspunktina ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktina, siis lõigul on määratud **suund**, st meie lõik muutub suunatud lõiguks.

Eukleidiline ruum

Eukleidilist ruumi tähistame E . Antud aines vaatleme kahte eukleidilist ruumi, kus üheks eukleidiliseks ruumiks on tasand E^2 (antud juhul me ei eelda, et tasand asub kolmemõõtmelises ruumis), ja teiseks on kolmemõõtmeline eukleidiline ruum E^3 .

Olgu X, Y eukleidilise ruumi E punktid. Sellega on määratud lõik XY . Punktid X, Y ei ole järjestatud ja selleks on kaks võimalust: XY või YX . Kui nüüd seda tüüpi tähistuses esimesel kohal olevat tähte interpreteerime lõigu alguspunktina ja teisel kohal olevat tähte lõigu lõpp-punktina, siis lõigul on määratud **suund**, st meie lõik muutub suunatud lõiguks.

Definitsioon

Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt, so suund, nimetatakse suunatud lõiguks ehk **seotud vektoriks**. Seotud vektorit alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistame edaspidi $\overline{XY}$ abil. Kõigi seotud vektorite hulka tähistame $\overline{E}$ abil.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele. Seotud vektori $\overline{XY}$ **pikkuseks**, tähistame $|\overline{XY}|$, nimetame teda määrava lõigu pikkust, st $|\overline{XY}| = |XY|$. Seega pikkusega null on seotud nullvektorid ja ainult need.

Seotud vektorid

Seotud vektorit, mille algus- ja lõpp-punkt langevad kokku, nimetatakse **seotud nullvektoriks**. Eukleidilise geomeetria tähtsaimad mõisted, st pikkus ja nurk, saab üle kanda seotud vektoritele. Seotud vektori $\overline{XY}$ **pikkuseks**, tähistame $|\overline{XY}|$, nimetame teda määrava lõigu pikkust, st $|\overline{XY}| = |XY|$. Seega pikkusega null on seotud nullvektorid ja ainult need.

Olgu $\overline{AB}, \overline{AC}$ kaks seotud vektorit alguspunktiga punktis A ja eeldame, et nad ei ole nullvektorid. Iga seotud vektor määrab kiirt, mis lähtub punktist A . Seega meil on süsteem, mis koosneb punktist A ja kahest kiirest, ja, vastavalt eukleidilise ruumi aksiomaatikale, sellega on määratud nurk. Lepime kokku, et nurga suurus on määratud ühe seotud vektori pööramisega ümber punkti A **lühemat teed pidi** teisele vektorile. Vastavat nurka nimetatakse **seotud vektorite $\overline{AB}, \overline{AC}$ vaheliseks nurgaks** ja tähistatakse $\angle(\overline{AB}, \overline{AC})$. Antud definitsioonist järeldeb, et

$$0 \leq \angle(\overline{AB}, \overline{AC}) \leq \pi.$$

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud järgmiste andmetega:

- 1 alguspunkt,
- 2 pikkus,
- 3 suund.

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud järgmiste andmetega:

- 1 alguspunkt,
- 2 pikkus,
- 3 suund.

Paneme tähele, et kahe punkti X, Y korral ($X \neq Y$) meil on kaks järjestust, seega meil on kaks seotud vektorit $\overrightarrow{XY}$ ja $\overrightarrow{YX}$.

Vastandvektor

Seotud vektor on üheselt määratud järgmiste andmetega:

- ① alguspunkt,
- ② pikkus,
- ③ suund.

Paneme tähele, et kahe punkti X, Y korral ($X \neq Y$) meil on kaks järjestust, seega meil on kaks seotud vektorit $\overrightarrow{XY}$ ja $\overrightarrow{YX}$. Seotud vektorit $\overrightarrow{YX}$ nimetame seotud vektori $\overrightarrow{XY}$ **vastandvektoriks** ja vastandvektorit tähistame $-\overrightarrow{XY}$, seega $\overrightarrow{YX} = -\overrightarrow{XY}$. Kehtivad seosed

$$-(-\overrightarrow{XY}) = \overrightarrow{XY}, \quad -\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{XX}, \quad |-\overrightarrow{XY}| = |\overrightarrow{XY}|.$$

Kollineaarsed seotud vektorid

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame **kollineaarseks** seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui leidub **sirge** selline, et lõigud AB, CD on paralleelsed selle sirgega. Kui seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{CD}$ on kollineaarsed, siis kirjutame $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Kolm seotud vektorit $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{KL} \in \overline{E}^3$ (ruumi vektorid) nimetatakse **komplanaarseteks**, kui leidub **tasand** selline, et lõigud AB, CD, KL on paralleelsed selle tasandiga.

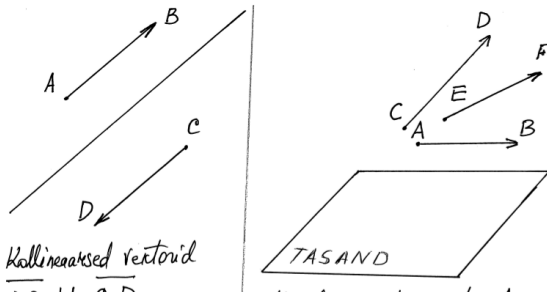
Märkus. Nullvektor on kollineaarne suvalise seotud vektoriga.

Kollineaarsed seotud vektorid

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame **kollineaarseks** seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui leidub **sirge** selline, et lõigud AB, CD on paralleelsed selle sirgega. Kui seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{CD}$ on kollineaarsed, siis kirjutame $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Kolm seotud vektorit $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{KL} \in \overline{E}^3$ (ruumi vektorid) nimetatakse **komplanaarseteks**, kui leidub **tasand** selline, et lõigud AB, CD, KL on paralleelsed selle tasandiga.

Märkus. Nullvektor on kollineaarne suvalise seotud vektoriga.



Samasuunaline vektor

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui

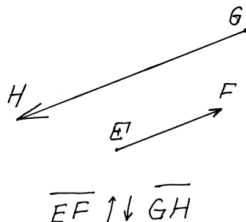
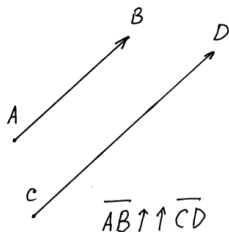
- 1 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, seotud vektor $\overline{AB}$ on kollineaarne seotud vektoriga $\overline{CD}$,
- 2 seotud vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$ ($\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$) abil.

Samasuunaline vektor

Definitsioon

Seotud vektorit $\overline{AB}$ nimetame samasuunaliseks (vastassuunaliseks) seotud vektoriga $\overline{CD}$, kui

- 1 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, seotud vektor $\overline{AB}$ on kollineaarne seotud vektoriga $\overline{CD}$,
- 2 seotud vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (suunad on vastupidised). Öeldut tähistame $\overline{AB} \uparrow \overline{CD}$ ($\overline{AB} \updownarrow \overline{CD}$) abil.



Võrdsed seotud vektorid ja vektori mõiste

Definitsioon

Seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{CD}$ on (geomeetriliselt) võrdsed (tähistame $\overline{AB} = \overline{CD}$ abil), kui on täidetud kaks tingimust

- 1 seotud vektorid on samasuunalised $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$,
- 2 seotud vektorite pikkused on võrdsed $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Võrdsed seotud vektorid ja vektori mõiste

Definitsioon

Seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{CD}$ on (geomeetriliselt) võrdsed (tähistame $\overline{AB} = \overline{CD}$ abil), kui on täidetud kaks tingimust

- ① seotud vektorid on samasuunalised $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$,
- ② seotud vektorite pikkused on võrdsed $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Definitsioon

Olgu $\overline{AB}$ seotud vektor. Moodustame seotud vektorite klassi, kuhu kuuluvad **kõik** seotud vektoriga $\overline{AB}$ võrdsed seotud vektorid. Vastavat klassi nimetame **vektoriks** ja tähistame $\overrightarrow{AB}$ abil. Seotud nullvektorite klassi nimetatakse **nullvektoriks** ja tähistatakse $\vec{0}$ abil.

Märkus. Võrdsete seotud vektorite klassi mõnikord nimetatakse **vabavektoriks**

Vektori mõiste

Vektoreid tähistame noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Selline tähistus rõhutab seda, et vektoril ei ole alguspunkti ja lõpp-punkti.

Vektori mõiste

Vektoreid tähistame noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Selline tähistus rõhutab seda, et vektoril ei ole alguspunkti ja lõpp-punkti.

Olgu $\overline{AB}$ seotud vektor. Eespool antud vektori definitsioonist jäeldub, et seotud vektoriga $\overline{AB}$ assotsieerub temaga võrdsete seotud vektorite klass või seotud vektor tekitab temaga võrdsete seotud vektorite klassi, mida nimetatakse vektoriks.

Vektori mõiste

Vektoreid tähistame noolega varustatud ladina tähestiku väikeste tähtedega $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$. Selline tähistus rõhutab seda, et vektoril ei ole alguspunkti ja lõpp-punkti.

Olgu $\overrightarrow{AB}$ seotud vektor. Eespool antud vektori definitsioonist järeldub, et seotud vektoriga $\overrightarrow{AB}$ assotsieerub temaga võrdsete seotud vektorite klass või seotud vektor tekitab temaga võrdsete seotud vektorite klassi, mida nimetatakse vektoriks. Seega kui meie tegeleme vektoritega, siis antud käsitluses meie tegeleme seotud (võrdsete) vektorite klassidega. Kuid mõnikord on lihtsam töötada mitte vektoriga (see on seotud vektorite klass) $\vec{a}$, vaid selle klassi mingi esindajaga, st seotud vektoriga. Selleks kasutame nn **vektori rakendamist punktist**. Tõepoolest kui on antud vektor $\vec{a}$, siis **ruumi igas punktis A** ta määrab **seotud vektori** $\overrightarrow{AB}$ nii, et kehtib $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Seotud vektori $\overrightarrow{AB}$ kohta ütleme, et see on **vektor $\vec{a}$ rakendatud punktist A** .

Pikkus ja nurk

Vektori mõistet defineeritakse eukleidilises ruumis, seega eukleidilise geomeetria tähstaimad mõisted, so pikkus ja nurk, saab laiendada vektoritele. Olgu $\vec{a}$ vektor, fikseerime suvalise punkti A ja rakendame vektori $\vec{a}$ punktist A , saame seotud vektori $\overline{AB}$. Vektori $\vec{a}$ pikkust defineerime järgmiselt

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Pikkus ja nurk

Vektori mõistet defineeritakse eukleidilises ruumis, seega eukleidilise geomeetria tähestaimad mõisted, so pikkus ja nurk, saab laiendada vektoritele. Olgu $\vec{a}$ vektor, fikseerime suvalise punkti A ja rakendame vektori $\vec{a}$ punktist A , saame seotud vektori $\overline{AB}$. **Vektori $\vec{a}$ pikkust** defineerime järgmiselt

$$|\vec{a}| = |\overline{AB}|.$$

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ kaks vektorit ja A ruumi punkt. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ punktist A , tekivad seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$. **Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka** defineerime järgmiselt

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\overline{AB}, \overline{AC}).$$

Kollineaarsed, komplanaarsed vektorid, ühikvektor

Vektor on üheselt määratud, kui on antud

- ① selle vektori **pikkus**,
- ② selle vektori **suund**.

Analoogiliselt pikkusega ja vektorite vahelise nurgaga, kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõisted saab laiendada seotud vektoritelt vektoritele.

Definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid, A ruumi mingi punkt. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ punktist A , saame seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$. Vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ nimetame kollineaarseteks vektoriteks, kui seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$ on kollineaarsed. Komplanaarsuse mõistet defineeritakse analoogiliselt.

Kollineaarsed, komplanaarsed vektorid, ühikvektor

Vektor on üheselt määratud, kui on antud

- ① selle vektori **pikkus**,
- ② selle vektori **suund**.

Analoogiliselt pikkusega ja vektorite vahelise nurgaga, kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõisted saab laiendada seotud vektoritelt vektoritele.

Definitsioon

Olgu $\vec{a}, \vec{b}$ vektorid, A ruumi mingi punkt. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ punktist A , saame seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$. Vektoreid $\vec{a}, \vec{b}$ nimetame kollineaarseteks vektoriteks, kui seotud vektorid $\overline{AB}, \overline{AC}$ on kollineaarsed. Komplanaarsuse mõistet defineeritakse analoogiliselt.

Vektorite hulka tähistame $\mathbf{E}$. Kui dimensioon on oluline, siis kirjutame $\mathbf{E}^3$ kolmemõõtmelise ruumi korral, $\mathbf{E}^2$ tasandi korral.

Definitsioon

Ühikvektoriks nimetatakse vektorit pikkusega 1, st $|\vec{a}| = 1$.



Vektorite liitmine

Vektorite liitmine:

Vektorite liitmine

Vektorite liitmine: Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b}$.

Vektorite liitmine

Vektorite liitmine: Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b}$. Fikseerime punkti $A \in E$ ja rakendame esimese vektori $\vec{a}$ punktist A , tekib seotud vektor $\overrightarrow{AB}$. Nüüd rakendame teise vektori $\vec{b}$ punktist B , saame seotud vektori $\overrightarrow{BC}$. Vektorit $\overrightarrow{AC}$ nimetatakse **vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ summaks** ja tähistatakse $\vec{a} + \vec{b}$ või $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Kui tähistada $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, siis võime kirjutada kas $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ või $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Nii defineeritud liitmist nimetatakse **kolmnurga reegliks**.

Vektorite liitmine

Vektorite liitmine: Olgu antud kaks vektorit $\vec{a}, \vec{b}$. Fikseerime punkti $A \in E$ ja rakendame esimese vektori $\vec{a}$ punktist A , tekib seotud vektor $\overrightarrow{AB}$. Nüüd rakendame teise vektori $\vec{b}$ punktist B , saame seotud vektori $\overrightarrow{BC}$. Vektorit $\overrightarrow{AC}$ nimetatakse **vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ summaks** ja tähistatakse $\vec{a} + \vec{b}$ või $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Kui tähistada $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, siis võime kirjutada kas $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ või $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Nii defineeritud liitmist nimetatakse **kolmnurga reeglaks**.

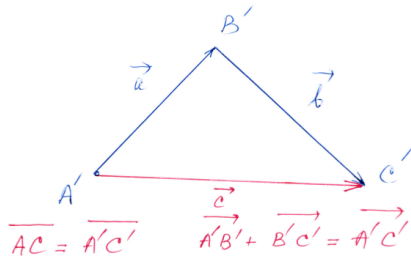
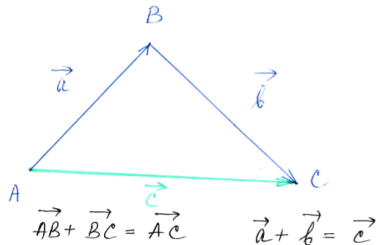
Näitame, et ülalpool antud vektorite summa definitsioon on korrektne, st ei sõltu punkti A valikust. Fikseerime teise punkti $A' \neq A$ ja kordame ülalpool kirjeldatud protsessi. Tekib teine kolmnurk $\triangle A'B'C'$. Kehtib

$$AB \parallel A'B', |AB| = |A'B'|, BC \parallel B'C', |BC| = |B'C'|.$$

Seega $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Järelikult $|AC| = |A'C'|$, $AC \parallel A'C'$ ja joonisel näeme, et seotud vektorid on samasuunalised $\overrightarrow{AC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{A'C'}$.

Seega seotud vektorid on võrdsed $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Võrdsed seotud vektorid tekitavad ühte ja sama vektori, st $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \vec{c}$.

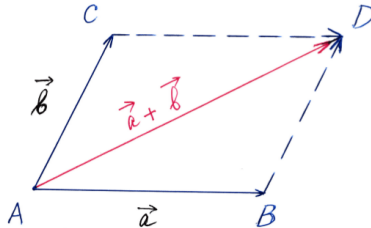
Vektorite liitmine



Kolmnurk $\triangle ABC$ on võrdne kolmnurgaga

$\triangle A'B'C'$ $\vec{AC} = \vec{A'C'}$

Vektorite liitmine



Vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ on rakendatud ühest ja samast punktist A (seotud vektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$). ABCD on vektoritele $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ehitatud rööpkülik. On ilmne, et selle rööpküliku diagonaali poolt tekitatud vektor $\overrightarrow{AD}$ on vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ summa. Siit järeldab

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ (kommutatiivsus).}$$

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Seotud vektori $-\overline{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overline{AB}$. Seotud vektori $\overline{AB}$ vastandvektor on $-\overline{AB}$. Seotud vektori $-\overline{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

- 1 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on **kommutatiivne**;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektor on $-\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $-\overrightarrow{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

- ① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on **kommutatiivne**;
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, vektorite liitmine on **assotsiatiivne**;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektor on $-\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $-\overrightarrow{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

- ① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on **kommutatiivne**;
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, vektorite liitmine on **assotsiatiivne**;
- ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektor on $-\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $-\overrightarrow{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

- ① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on **kommutatiivne**;
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, vektorite liitmine on **assotsiatiivne**;
- ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- ④ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Liitmise omadused

Olgu $\vec{a}$ mingi vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ vabalt fikseeritud punktist A , saame seotud vektori $\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $\overrightarrow{AB}$ vastandvektor on $-\overrightarrow{AB}$. Seotud vektori $-\overrightarrow{AB}$ poolt tekitatud vektorit tähistame $-\vec{a}$ ja edaspidi nimetame vektori $\vec{a}$ vastandvektoriks. Vektorite liitmise omadused:

- ① $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, vektorite liitmine on **kommutatiivne**;
- ② $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, vektorite liitmine on **assotsiatiivne**;
- ③ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- ④ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Tõestame omadust 4. Fikseerime punkti A , rakendame vektori $\vec{a}$ punktist A , tekib seotud vektor $\overrightarrow{AB}$. Nüüd rakendame vastandvektorit $-\vec{a}$ punktist B , tekib teine seotud vektor $\overrightarrow{BA}$. Kasutame kolmnurga reeglit

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Vektorite lahutamine

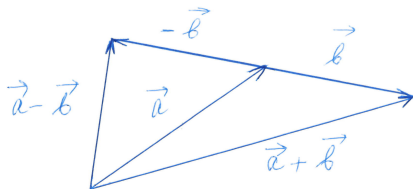
Järgnevas meie sageli kasutame vektorite lahutamist. Algebra seisukohalt vektorite lahutamine ei ole sõltumatu algebraline operatsioon ja tegelikult taandub vektorite liitmisele, st lahutamine on liitmise erijuht. Tõepoolest defineerime lahutamise järgmiselt

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Vektorite lahutamine

Järgnevas meie sageli kasutame vektorite lahutamist. Algebra seisukohalt vektorite lahutamine ei ole sõltumatu algebraline operatsioon ja tegelikult taandub vektorite liitmisele, st lahutamine on liitmise erijuht. Tõepoolest defineerime lahutamise järgmiselt

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$



Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Olgu A, B, C ruumi erinevad punktid ja $\triangle ABC$ nendega määratud kolmnurk.

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Olgu A, B, C ruumi erinevad punktid ja $\triangle ABC$ nendega määratud kolmnurk. Eukleidilises ruumis kehtib võrratus $|AC| \leq |AB| + |BC|$.

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Olgu A, B, C ruumi erinevad punktid ja $\triangle ABC$ nendega määratud kolmnurk. Eukleidilises ruumis kehtib võrratus $|AC| \leq |AB| + |BC|$. Arvestades, et vektorite liitmist defineeritakse kolmnurga reegli abil, saame tähtsa võrratuse

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Olgu A, B, C ruumi erinevad punktid ja $\triangle ABC$ nendega määratud kolmnurk. Eukleidilises ruumis kehtib võrratus $|AC| \leq |AB| + |BC|$. Arvestades, et vektorite liitmist defineeritakse kolmnurga reegli abil, saame tähtsa võrratuse

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Võrdsus kehtib **ainult** samasuunaliste vektorite korral.

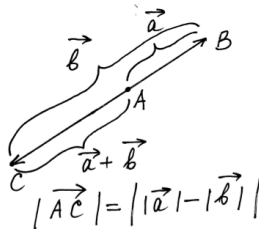
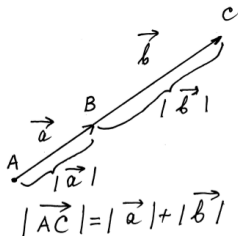
Summa pikkus

Kuidas vektorite summa pikkus avaldub liidetavate vektorite pikkuste kaudu?

Olgu A, B, C ruumi erinevad punktid ja $\triangle ABC$ nendega määratud kolmnurk. Eukleidilises ruumis kehtib võrratus $|AC| \leq |AB| + |BC|$. Arvestades, et vektorite liitmist defineeritakse kolmnurga reegli abil, saame tähtsa võrratuse

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Võrdsus kehtib **ainult** samasuunaliste vektorite korral.



Korrutamine arvuga

Teine tehe on vektorite korrutamine reaalarvudega. Olgu $\vec{a}$ mingi vektor ja α reaalarv. Tuletame meelde, et vektor on täielikult määratud, kui on antud tema **pikkus ja suund**.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ ja reaalarvu α korrutiseks nimetatakse vektorit $\alpha \vec{a}$, mis määratakse järgmiselt

- 1 (pikkus) $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$,
- 2 (suund) $\alpha \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kui $\alpha > 0$, ja $\alpha \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, kui $\alpha < 0$, (kui $\alpha = 0$, siis esimesest tingimusest järeldub, et $\alpha \vec{a} = \vec{0}$).

Korrutamine arvuga

Teine tehe on vektorite korrutamine reaalarvudega. Olgu $\vec{a}$ mingi vektor ja α reaalarv. Tuletame meelde, et vektor on täielikult määratud, kui on antud tema **pikkus ja suund**.

Definitsioon

Vektori $\vec{a}$ ja reaalarvu α korrutiseks nimetatakse vektorit $\alpha \vec{a}$, mis määratakse järgmiselt

- ① (pikkus) $|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|$,
- ② (suund) $\alpha \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, kui $\alpha > 0$, ja $\alpha \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, kui $\alpha < 0$, (kui $\alpha = 0$, siis esimesest tingimusest järeldub, et $\alpha \vec{a} = \vec{0}$).

Kasutades definitsiooni võime tõestada, et arvuga -1 korrutatud vektor on võrdne antud vektori vastandvektoriga, so

$$(-1) \vec{a} = -\vec{a}.$$

Omadused

Kõigepealt näitame, et vektorite pikkused on võrdsed. Tõepoolest

$$|(-1) \vec{a}| = |-1| |\vec{a}| = |\vec{a}|, \quad |-\vec{a}| = |\vec{a}|,$$

seega $|(-1) \vec{a}| = |-\vec{a}|$. Vektor $(-1) \vec{a}$ on vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$ ja vektor $-\vec{a}$ (so vektori $\vec{a}$ vastandvektor) on ka vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$. Järelikult $(-1) \vec{a} \uparrow\uparrow -\vec{a}$, kust järeldub $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$.

Omadused

Kõigepealt näitame, et vektorite pikkused on võrdsed. Tõepoolest

$$|(-1) \vec{a}| = |-1| |\vec{a}| = |\vec{a}|, \quad |-\vec{a}| = |\vec{a}|,$$

seega $|(-1) \vec{a}| = |-\vec{a}|$. Vektor $(-1) \vec{a}$ on vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$ ja vektor $-\vec{a}$ (so vektori $\vec{a}$ vastandvektor) on ka vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$. Järelikult $(-1) \vec{a} \uparrow\uparrow -\vec{a}$, kust järeldub $(-1) \vec{a} = -\vec{a}$.

Järgnevas sageli kasutame **ühikvektori mõistet**. Vektorit nimetatakse ühikvektoriks, kui selle pikkus on 1, st kui $\vec{e}$ on ühikvektor, siis $|\vec{e}| = 1$.

Omadused

Kõigepealt näitame, et vektorite pikkused on võrdsed. Tõepoolest

$$|(-1)\vec{a}| = |-1||\vec{a}| = |\vec{a}|, \quad |-\vec{a}| = |\vec{a}|,$$

seega $|(-1)\vec{a}| = |-\vec{a}|$. Vektor $(-1)\vec{a}$ on vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$ ja vektor $-\vec{a}$ (so vektori $\vec{a}$ vastandvektor) on ka vastassuunaline vektoriga $\vec{a}$. Järelikult $(-1)\vec{a} \uparrow\uparrow -\vec{a}$, kust järeldub $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Järgnevas sageli kasutame **ühikvektori mõistet**. Vektorit nimetatakse ühikvektori, kui selle pikkus on 1, st kui $\vec{e}$ on ühikvektor, siis $|\vec{e}| = 1$. Olgu $\vec{a}$ nullvektorist erinev vektor. Sageli on kasulik moodustada vektoriga $\vec{a}$ **samasuunalise ühikvektori** $\vec{e}$. Seda saab teha järgmise valemi abil

$$\vec{e} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (1)$$

Märkus. Järgnevas samasuunalise vektori arvutamist valemi (1) abil nimetame vektori $\vec{a}$ **normeerimiseks**.

Omadused

Reaalarvudega korrutamisel on järgmised omadused:

- ① $\alpha (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{b},$
- ② $(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a},$
- ③ $(\alpha \beta) \vec{a} = \alpha (\beta \vec{a}),$
- ④ $1 \vec{a} = \vec{a}.$

Eksami küsimused

- 1 Seotud vektori mõiste. Nullvektor, vastandvektor, kollineaarsed, komplanaarsed ja võrdsed seotud vektorid. Seotud vektori pikkus ja nurk seotud vektorite vahel.
- 2 Võrdsed seotud vektorid. Vabavektori mõiste. Võrdsed vabavektorid. Vabavektori pikkus ja nurk vabavektorite vahel. Kollineaarsed ja komplanaarsed vabavektorid.
- 3 Vabavektorite liitmine. Omadused. Vabavektorite korrutamine arvudega. Omadused. Vabavektorite lineaarkombinatsioon. Ühikvektori mõiste.