

Analüütiline geomeetria

VII loeng. Tasandi võrrandid.

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper).

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

- 1 parameetriline võrrand;

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

- 1 parameetriline võrrand;
- 2 ilmutamata võrrand.

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

- 1 parameetriline võrrand;
- 2 ilmutamata võrrand.

Pinna parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned}x &= \psi(u, v), \\y &= \chi(u, v), \\z &= \xi(u, v),\end{aligned}$$

kus $\psi(u, v), \chi(u, v), \xi(u, v)$ on kahemuutuja funktsioonid ja u, v on pinna parameetrid ning $u, v \in U \subset \mathbb{R}^2$ on pinna parameetrilise võrrandi määramispiirkond.

Antud paragrahvis eukleidilise ruumi dimensioon võrdub kolmega, st meie vaatleme eukleidilist ruumi E^3 . Paragrahvi uurimisobjekt on tasand ja eesmärk on leida, kuidas tasandit saab kirjeldada ja uurida võrrandite abil, kui ruumis on antud koordinaadisüsteem (reeper). Tasand on pinna erijuht. Pinna võrrandi leidmiseks on kaks lähenemist:

- 1 parameetiline võrrand;
- 2 ilmutamata võrrand.

Pinna parameetriliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\begin{aligned}x &= \psi(u, v), \\y &= \chi(u, v), \\z &= \xi(u, v),\end{aligned}$$

kus $\psi(u, v), \chi(u, v), \xi(u, v)$ on kahemuutuja funktsioonid ja u, v on pinna parameetrid ning $u, v \in U \subset \mathbb{R}^2$ on pinna parameetrilise võrrandi määramispiirkond. Kasutades pinna punkti kohavektorit, võime pinna parameetrilise võrrandi kirjutada vektorkujul (pinna parameetiline vektorvõrrand)

$$\vec{r}(u, v) = (\psi(u, v), \chi(u, v), \xi(u, v)).$$

Tasand on üheselt määratud, kui

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud kaks **mittekollineaarset vektorit** $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud kaks **mittekollineaarset vektorit** $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub üks ja ainult üks tasand $\mathfrak{P}$ selline, et ta läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi **rihi**. Tuletame tasandi $\mathfrak{P}$ parameetrilise võrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$.

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud kaks **mittekollineaarset vektorit** $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub üks ja ainult üks tasand $\mathfrak{P}$ selline, et ta läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi **rihi**. Tuletame tasandi $\mathfrak{P}$ parameetrilise võrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ tasandi punkti A kohavektor.

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud kaks **mittekollineaarset vektorit** $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub üks ja ainult üks tasand $\mathfrak{P}$ selline, et ta läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi **rihi**. Tuletame tasandi $\mathfrak{P}$ parameetrilise võrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ tasandi punkti A kohavektor. On ilmne, et $\vec{r} - \vec{r}_0$ on tasandi vektor. Seega (vt teise loengu materjalid)

Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud kaks **mittekollineaarset vektorit** $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub üks ja ainult üks tasand $\mathfrak{P}$ selline, et ta läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi **rihi**. Tuletame tasandi $\mathfrak{P}$ parameetrilise võrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ tasandi punkti A kohavektor. On ilmne, et $\vec{r} - \vec{r}_0$ on tasandi vektor. Seega (vt teise loengu materjalid)

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u \vec{r}_1 + v \vec{r}_2,$$

kus reaalarvud u, v on üheselt määratud. Tasandi $\mathfrak{P}$ **parameetriliseks vektorvõrandiks** nimetatakse võrrandit

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u \vec{r}_1 + v \vec{r}_2,$$

kus u, v on tasandi parameetrid.

Eeldame, et ruumis on antud reeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Eeldame, et ruumis on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0), X(x, y, z), \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetrline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 u + x_2 v, \\ y = y_0 + y_1 u + y_2 v, \\ z = z_0 + z_1 u + z_2 v. \end{cases} \quad (1)$$

Eeldame, et ruumis on antud reeper $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetriline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 u + x_2 v, \\ y = y_0 + y_1 u + y_2 v, \\ z = z_0 + z_1 u + z_2 v. \end{cases} \quad (1)$$

Võrrandisüsteemi (1) nimetatakse tasandi **parameetriliseks võrrandiks**. Tasandi parameetrilise võrrandi võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + x_1 u + x_2 v, y_0 + y_1 u + y_2 v, z_0 + z_1 u + z_2 v).$$

Tasandi parameetriline vektorvõrrand on tuletatud tingimusel, et on antud tasandi punkt A ja riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$.

Eeldame, et ruumis on antud reeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetriline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 u + x_2 v, \\ y = y_0 + y_1 u + y_2 v, \\ z = z_0 + z_1 u + z_2 v. \end{cases} \quad (1)$$

Võrrandisüsteemi (1) nimetatakse tasandi **parameetriliseks võrrandiks**. Tasandi parameetrilise võrrandi võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + x_1 u + x_2 v, y_0 + y_1 u + y_2 v, z_0 + z_1 u + z_2 v).$$

Tasandi parameetriline vektorvõrrand on tuletatud tingimusel, et on antud tasandi punkt A ja riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Moodustame kolmiku $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Antud kolmikut võime vaadelda tasandi reeperina.

Eeldame, et ruumis on antud reeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetriline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1 u + x_2 v, \\ y = y_0 + y_1 u + y_2 v, \\ z = z_0 + z_1 u + z_2 v. \end{cases} \quad (1)$$

Võrrandisüsteemi (1) nimetatakse tasandi **parameetriliseks võrrandiks**. Tasandi parameetrilise võrrandi võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + x_1 u + x_2 v, y_0 + y_1 u + y_2 v, z_0 + z_1 u + z_2 v).$$

Tasandi parameetriline vektorvõrrand on tuletatud tingimusel, et on antud tasandi punkt A ja riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Moodustame kolmiku $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$. Antud kolmikut võime vaadelda tasandi reeperina. Tasandi reeper määrab tasandi koordinaadisüsteemi, kus A on alguspunkt ja $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ on koordinaattelgede sihivektorid. Parameetrid u, v on tasandi punkti koordinaadid reeperi $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ poolt tekitatud koordinaadisüsteemis.

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkti A ja on risti vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi **normaalvektoriks**. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi normaalvektor $\vec{N}$.

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkti A ja on risti vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi **normaalvektoriks**. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi normaalvektor $\vec{N}$. Eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ tema kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor.

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkti A ja on risti vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi **normaalvektoriks**. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi normaalvektor $\vec{N}$. Eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ tema kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. Suvalise tasandi punkti X korral kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$. Järelikult

Pinna ilmutamata võrrandiks nimetatakse võrrandit $F(x, y, z) = c$, kus $F(x, y, z)$ on ruumi koordinaatide kolmemuutuja funktsioon ja c on reaalarv. Ruumi punkt koordinaatidega (x, y, z) on pinna punkt, kui selle koordinaadid rahuldavad pinna võrrandit. Leiame tasandi ilmutamata võrrandi. Tasand on üheselt määratud, kui

- 1 on antud tasandi punkt A ;
- 2 on antud nullvektorist erinev vektor $\vec{N} \neq \vec{0}$.

Leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib punkti A ja on risti vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi **normaalvektoriks**. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud tasandi punkt A ja tasandi normaalvektor $\vec{N}$. Eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu X tasandi suvaline punkt ja $\vec{r}$ tema kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. Suvalise tasandi punkti X korral kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$.

Järelikult

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0. \quad (2)$$

Leitud võrrandit (2) nimetatakse **tasandi vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu**. Kui on antud tasandi riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$, siis võime kasutada rihi vektorite vektorkorrutist $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ tasandi normaalvektorina.

Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$.

Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga. Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga. Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0. \quad (3)$$

Võrrandit (3) nimetatakse **tasandi vektorvõrrandiks rihi kaudu**. Nüüd kasutame ruumi reeperit ja eeldame, et on antud tasandi punkti A kohavektori $\vec{r}_0$ ja normaalvektori $\vec{N}$ koordinaadid, st $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$.

Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga. Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0. \quad (3)$$

Võrrandit (3) nimetatakse **tasandi vektorvõrrandiks rihi kaudu**. Nüüd kasutame ruumi reeperit ja eeldame, et on antud tasandi punkti A kohavektori $\vec{r}_0$ ja normaalvektori $\vec{N}$ koordinaadid, st $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{N} = (A, B, C)$. Tasandi vektorvõrrandi kuju vektorite $\vec{r}_0, \vec{N}$ koordinaatide kaudu on järgmine

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Leitud võrrandi võime kirjutada kujul

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (4)$$

kus $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Tasandi võrrandit (4) nimetatakse tasandi **üldvõrrandiks**. See on tasandi ilmutamata võrrand. Näeme, et tasandi korral pinna ilmutamata võrrandi $F(x, y, z) = c$ vasakpool on **lineaarfunktsioon**.

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.

Lahendus.

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.

Lahendus. Kasutame tasandi üldvõrrandit kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.

Lahendus. Kasutame tasandi üldvõrrandit kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Seega

$$5(x - 4) + 3(y + 2) - 6(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 3y - 6z - 8 = 0.$$

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.

Lahendus. Kasutame tasandi üldvõrrandit kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Seega

$$5(x - 4) + 3(y + 2) - 6(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 3y - 6z - 8 = 0.$$

Olgu $Ax + By + Cz + D = 0$ tasandi $\mathfrak{P}$ üldvõrrand. Leiame selle tasandi parameetrilise võrrandi.

Tasandi üldvõrrand sisaldab geomeetrilist informatsiooni tasandi kohta, nt võrrandi kordajad A, B, C moodustavad tasandi normaalvektori, st $\vec{N} = (A, B, C)$.

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkti $A(4, -2, 1)$ ja tasandi normaalvektor on $\vec{N} = (5, 3, -6)$.

Lahendus. Kasutame tasandi üldvõrrandit kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Seega

$$5(x - 4) + 3(y + 2) - 6(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x + 3y - 6z - 8 = 0.$$

Olgu $Ax + By + Cz + D = 0$ tasandi $\mathfrak{P}$ üldvõrrand. Leiame selle tasandi parameetrilise võrrandi. Selleks peab olema leitud tasandi punkt ja kaks mittekollineaarset vektorit (riht). Tasandi punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $Ax + By + Cz + D = 0$, seega tuleb leida selle võrrandi üks lahend.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $Ax = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $Ax = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Leiame tasandi kaks mittekolleaarset vektorit. Tasandi mistahes vektor on risti tasandi normaalvektoriga. Järelikult otsitavate vektorite koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peavad rahuldama võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $Ax = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Leiame tasandi kaks mittekolleaarset vektorit. Tasandi mistahes vektor on risti tasandi normaalvektoriga. Järelikult otsitavate vektorite koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peavad rahuldama võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

Eelduse kohaselt $A \neq 0$. Leiame

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3.$$

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $Ax = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Leiame tasandi kaks mittekolleaarset vektorit. Tasandi mistahes vektor on risti tasandi normaalvektoriga. Järelikult otsitavate vektorite koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peavad rahuldama võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

Eelduse kohaselt $A \neq 0$. Leiame

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3.$$

Võrrandi lahendid on leitud, nad moodustavad lahendite parve, kus parve parameetrid on α_2, α_3 . Moodustame nullist erineva teist järku determinandi,

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev vektor, tasandi võrrandi kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. Olgu $A \neq 0$. Lahendame järgmiselt: olgu $y = z = 0$, siis tasandi võrrand on $Ax = -D$, selle lahend on $x = -\frac{D}{A}$. Seega tasandi punkt on leitud, see on $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Leiame tasandi kaks mittekollineaarset vektorit. Tasandi mistahes vektor on risti tasandi normaalvektoriga. Järelikult otsitavate vektorite koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ peavad rahuldama võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

Eelduse kohaselt $A \neq 0$. Leiame

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3.$$

Võrrandi lahendid on leitud, nad moodustavad lahendite parve, kus parve parameetrid on α_2, α_3 . Moodustame nullist erineva teist järku determinandi, nt

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esimese lahendi saame, kui $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ ja teise, kui $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$.
Seega vektorid

$$\vec{r}_1 = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right), \quad \vec{r}_2 = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right),$$

on tasandi mittekollineaarsed vektorid.

Esimese lahendi saame, kui $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ ja teise, kui $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$.
Seega vektorid

$$\vec{r}_1 = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right), \quad \vec{r}_2 = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right),$$

on tasandi mittekollineaarsed vektorid.

Teoreem

Kui tasandi üldvõrrand on $Ax + By + Cz + D = 0$, siis kaks mittekollineaarset vektorit

$$\vec{r}_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \vec{r}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

sellised, et nende koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0,$$

moodustavad tasandi rihi.

Näide

Koostada tasandi parameetriline võrrand, kui tasandi üldvõrrand on $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Näide

Koostada tasandi parameetriline võrrand, kui tasandi üldvõrrand on $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Vastus: $\vec{r}(u, v) = (u, v, -1 - 2u + 3v)$.

Näide

Koostada tasandi parameetriline võrrand, kui tasandi üldvõrrand on $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Vastus: $\vec{r}(u, v) = (u, v, -1 - 2u + 3v)$.

Teoreem

Olgu antud kaks tasandit

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Tasandid on paralleelsed parajasti siis, kui leidub arv λ selline, et

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \quad (5)$$

Tasandid ühtivad parajasti siis, kui lisaks valemitele (5) kehtib $D_2 = \lambda D_1$.

Tõestus.

Tõestus.

Tarvilikus.

Tõestus.

Tarvilikus. Olgu tasandid paralleelsed. Siit järeldeb, et tasandite normaalvektorid on kollineaarsed. Seega $\vec{N}_2 \parallel \vec{N}_1$, kus $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$. Vektorite kollineaarsuse tingimuse tõttu leidub arv λ selline, et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järeldeb (5).

Tõestus.

Tarvilikus. Olgu tasandid paralleelsed. Siit järeldeb, et tasandite normaalvektorid on kollineaarsed. Seega $\vec{N}_2 \parallel \vec{N}_1$, kus $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$. Vektorite kollineaarsuse tingimuse tõttu leidub arv λ selline, et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järeldeb (5). Olgu tasandid ühtivad. Siis teise tasandi võrrand on $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. Olgu $P(x_0, y_0, z_0)$ tasandite ühine punkt. Kehtib

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0.$$

Tõestus.

Tarvilikus. Olgu tasandid paralleelsed. Siit jäeldub, et tasandite normaalvektorid on kollineaarsed. Seega $\vec{N}_2 \parallel \vec{N}_1$, kus $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$. Vektorite kollineaarsuse tingimuse tõttu leidub arv λ selline, et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit jäeldub (5). Olgu tasandid ühtivad. Siis teise tasandi võrrand on $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. Olgu $P(x_0, y_0, z_0)$ tasandite ühine punkt. Kehtib

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0.$$

Järelikult $\lambda(-D_1) + D_2 = 0$ ja $D_2 = \lambda D_1$.

Tõestus.

Tarvilikus. Olgu tasandid paralleelsed. Siit järeldeb, et tasandite normaalvektorid on kollineaarsed. Seega $\vec{N}_2 \parallel \vec{N}_1$, kus $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$. Vektorite kollineaarsuse tingimuse tõttu leidub arv λ selline, et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järeldeb (5). Olgu tasandid ühtivad. Siis teise tasandi võrrand on $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. Olgu $P(x_0, y_0, z_0)$ tasandite ühine punkt. Kehtib

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0.$$

Järelikult $\lambda(-D_1) + D_2 = 0$ ja $D_2 = \lambda D_1$.

Piisavus. Olgu kehtib (5) ja $D_2 = \lambda D_1$. On ilmne, et võrrandid

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

on ekvivalentssed ja nende lahendihulgad ühtivad. Seega ka vastavad tasandid ühtivad.

Kui on täidetud tingimus (5), siis eespool tõestatud teoreemist järeldeb, et tasandite rihi vektorid rahuldavad võrrandit

$$A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0.$$

Seega kui on leitud ühe tasandi rihi vektorid, siis nad on ka teise tasandi rihi vektorid.

Kui on täidetud tingimus (5), siis eespool tõestatud teoreemist järeldeb, et tasandite rihi vektorid rahuldavad võrrandit

$$A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0.$$

Seega kui on leitud ühe tasandi rihi vektorid, siis nad on ka teise tasandi rihi vektorid. Seega tasandid on paralleelsed.

Kui on täidetud tingimus (5), siis eespool tõestatud teoreemist järeldub, et tasandite rihi vektorid rahuldavad võrrandit

$$A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0.$$

Seega kui on leitud ühe tasandi rihi vektorid, siis nad on ka teise tasandi rihi vektorid. Seega tasandid on paralleelsed.

Tasandite paralleelsuse tingimuse (5) võime kirjutada ka kujul $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0$. Seega tasandid on paralleelsed parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kui tasandid ei ole paralleelsed, siis nad lõikuvad ja lõikejoon on sirge. Seega kui tasandite võrrandid on

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

ja tasandid ei ole paralleelsed, siis lõikejoon on sirge ning selle sirge punktide koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Eelduse kohaselt tasandid ei ole paralleelsed, järelikut kehtib

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0.$$

Leiame sirge punkti ja sihivektori, kui sirge on määratud tasandite võrranditest moodustatud võrrandisüsteemiga. Olgu

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Võrrandisüsteemis (6) fikseerime koordinaadi z väärtuse, nt võtame $z = 0$. Siis

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Lineaarvõrrandisüsteemi (7) peadeterminant on nullist erinev, st

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

seega leidub antud võrrandisüsteemi üks ja ainult lahend.

Olgu x_0, y_0 võrrandisüsteemi (7) lahend. Siis punkt $P(x_0, y_0, 0)$ on sirge punkt ja selle punkti võtame sirge alguspunktiks. Nüüd leiame sirge sihivektori. Tuletame meelde, et vektorid $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1), \vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ on tasandite normaalvektorid. Järelikult **tasandite lõikesirge sihivektor on risti nii $\vec{N}_1$, kui ka $\vec{N}_2$** . Siit järeldub, et normaalvektorite **vektorkorrutis** $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ on kollineaarne lõikesirge sihivektoriga. Seega vektor $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ sobib lõikesirge sihivektoriks.

Teoreem

Olgu sirge kahe tasandi lõikesirge, st

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Vektor

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

on lõikesirge sihivektor.

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$.

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.$$

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.$$

Kuna P, Q, R on tasandi punktid, vektorid $\vec{r}_1 = \overrightarrow{PQ}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{PR}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Kehtib

$$\vec{r} - \vec{r}_0 =$$

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.$$

Kuna P, Q, R on tasandi punktid, vektorid $\vec{r}_1 = \overrightarrow{PQ}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{PR}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Kehtib

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}_0 &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{r}_1 &= \end{aligned}$$

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.$$

Kuna P, Q, R on tasandi punktid, vektorid $\vec{r}_1 = \overrightarrow{PQ}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{PR}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Kehtib

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\vec{r}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

$$\vec{r}_2 =$$

Näide

On antud tasandid $3x + y - z + 1 = 0$, $5x + 3y + z + 2 = 0$. Kas tasandid on paralleelsed? Koostada lõikesirge kanooniline võrrand.

Vastus: $\frac{x}{1} = \frac{y+3/4}{-2} = \frac{z-1/4}{1}$.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub üks ja ainult üks tasand, mis läbib vastavaid punkte P, Q, R . Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud punktide P, Q, R koordinaadid. Olgu $P(x_0, y_0, z_0), Q(x_1, y_1, z_1), R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi leidmiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi vektorite kaudu

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0.$$

Kuna P, Q, R on tasandi punktid, vektorid $\vec{r}_1 = \overrightarrow{PQ}, \vec{r}_2 = \overrightarrow{PR}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Kehtib

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\vec{r}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

$$\vec{r}_2 = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).$$

Vektorvõrrandi vasakpool on kolme vektori segakorrutis, seega valemi vasakpool on võrdne vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga.

Vektorvõrrandi vasakpool on kolme vektori segakorrutis, seega valemi vasakpool on võrdne vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga. Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Vektorvõrrandi vasakpool on kolme vektori segakorrutis, seega valemi vasakpool on võrdne vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga. Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkte $P(2, 1, 3)$, $Q(-1, 2, 5)$, $R(3, 1, 0)$.

Vektorvõrrandi vasakpool on kolme vektori segakorrutis, seega valemi vasakpool on võrdne vektorite koordinaatidest moodustatud kolmandat järku determinandiga. Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Näide

Koostada tasandi üldvõrrand, kui tasand läbib punkte $P(2, 1, 3)$, $Q(-1, 2, 5)$, $R(3, 1, 0)$.

Vastus: $2y - z + 1 = 0$.

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi punkt $M \notin \mathfrak{P}$. Punkti M kohavektorit tähistame $\vec{R}$.

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi punkt $M \notin \mathfrak{P}$. Punkti M kohavektorit tähistame $\vec{R}$. Leiame punkti M kauguse d tasandini $\mathfrak{P}$. Selleks moodustame vektoritele $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahuka.

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi punkt $M \notin \mathfrak{P}$. Punkti M kohavektorit tähistame $\vec{R}$. Leiame punkti M kauguse d tasandini $\mathfrak{P}$. Selleks moodustame vektoritele $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahuka. Selle rööptahuka põhi on vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpkülik $\mathfrak{R}$. Kaugus d on võrdne rööptahuka kõrgusega.

Olgu antud tasandi $\mathfrak{P}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi punkt $M \notin \mathfrak{P}$. Punkti M kohavektorit tähistame $\vec{R}$. Leiame punkti M kauguse d tasandini $\mathfrak{P}$. Selleks moodustame vektoritele $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahuka. Selle rööptahuka põhi on vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpkülik $\mathfrak{R}$. Kaugus d on võrdne rööptahuka kõrgusega. Kõrguse leidmiseks kasutame valemit

$$d = \frac{V}{S},$$

kus V on rööptahuka ruumala ja S on rööpküliku $\mathfrak{R}$ pindala. Rööptahuka ruumala V on võrdne vektorite $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ segakorrutise absoluutväärtusega ja rööpküliku pindala S on võrdne vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ vektorkorrutise pikkusega. Seega

$$d = \frac{|(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}. \quad (8)$$

Vektorkorrutis $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ on tasandi normaalvektor, tähistame $\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = (A, B, C)$.

Kasutades normaalvektorit, võime valemi (8) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|}.$$

Kasutades normaalvektorit, võime valemi (8) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|}.$$

Olgu $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame

$$\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Seega kauguse arvutamise valem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Kasutades normaalvektorit, võime valemi (8) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|}.$$

Olgu $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame

$$\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Seega kauguse arvutamise valem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Näide

Leida punkti $A(3, 1, -1)$ kaugus tasandini $x - y - 5z + 2 = 0$.

Kasutades normaalvektorit, võime valemi (8) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|}.$$

Olgu $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame

$$\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Seega kauguse arvutamise valem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Näide

Leida punkti $A(3, 1, -1)$ kaugus tasandini $x - y - 5z + 2 = 0$.

Vastus: $d = \sqrt{3}$.

Eksami küsimused

- 1 Pinna parameetriline võrrand. Tasandi parameetriline vektorvõrrand ja parameetriline võrrand koordinaatides.
- 2 Tasandi vektorvõrrand tasandi normaalvektori ja tasandi rihi kaudu. Tasandi üldvõrrand. Tasandi võrrand, kui ta läbib kolme punkti.
- 3 Teoreem tasandi rihist, kui on antud tasandi üldvõrrand.
- 4 Tasandite paralleelsuse tarvilik ja piisav tingimus.
- 5 Teoreem kahe tasandi lõikesirge sihivektorist.
- 6 Punkti kaugus tasandini.