

Analüütiline geomeetria

Loeng: Üleminek ühelt reeperilt teisele. Baasiteisenduse maatriks. Koordinaatide teisendused.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem. Reeper koosneb alguspunktist O ja kolmest **mittekomplanaarsest** vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem. Reeper koosneb alguspunktist O ja kolmest **mittekomplanaarsest** vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Tähistame reeperit järgmiselt $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem. Reeper koosneb alguspunktist O ja kolmest **mittekomplanaarsest** vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Tähistame reeperit järgmiselt $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Reeper $\Re$ määrab koordinaadisüsteemi järgmiselt: olgu P ruumi mingi punkt, punkti P kohavektorit tähistame $\vec{r}_p = \overrightarrow{OP}$, kohavektorit avaldame kujul

$$\vec{r}_p = x_p \vec{e}_1 + y_p \vec{e}_2 + z_p \vec{e}_3,$$

kus reaalarvud x_p, y_p, z_p on üheselt määratud ja neid nimetatakse nii punkti P , kui ka selle kohavektori $\vec{r}_p$ **koordinaatideks**. Sellisel juhul kirjutame $P(x_p, y_p, z_p)$ ja $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem. Reeper koosneb alguspunktist O ja kolmest **mittekomplanaarsest** vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Tähistame reeperit järgmiselt $\Re = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Reeper $\Re$ määrab koordinaadisüsteemi järgmiselt: olgu P ruumi mingi punkt, punkti P kohavektorit tähistame $\vec{r}_p = \overrightarrow{OP}$, kohavektorit avaldame kujul

$$\vec{r}_p = x_p \vec{e}_1 + y_p \vec{e}_2 + z_p \vec{e}_3,$$

kus reaalarvud x_p, y_p, z_p on üheselt määratud ja neid nimetatakse nii punkti P , kui ka selle kohavektori $\vec{r}_p$ **koordinaatideks**. Sellisel juhul kirjutame $P(x_p, y_p, z_p)$ ja $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$.

Ruumi kontseptsioonis meie lähtume sellest, et ruumis pole eristatuid suundi, kõik suunad on samaväärsed, ruum on **homogeenne**. Meie varustame ruumi kolme koordinaatteljega, seega see on täiendav struktuur, mida ruumis endas pole.

Ruumi koordinaadisüsteemi mõiste tugineb **reeperi** mõistele. Kui ruumis on antud reeper, siis sellega ruumis on määratud koordinaadisüsteem. Reeper koosneb alguspunktist O ja kolmest **mittekomplanaarsest** vektorist $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Tähistame reeperit järgmiselt $\mathfrak{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Reeper $\mathfrak{R}$ määrab koordinaadisüsteemi järgmiselt: olgu P ruumi mingi punkt, punkti P kohavektorit tähistame $\vec{r}_p = \overrightarrow{OP}$, kohavektorit avaldame kujul

$$\vec{r}_p = x_p \vec{e}_1 + y_p \vec{e}_2 + z_p \vec{e}_3,$$

kus reaalarvud x_p, y_p, z_p on üheselt määratud ja neid nimetatakse nii punkti P , kui ka selle kohavektori $\vec{r}_p$ **koordinaatideks**. Sellisel juhul kirjutame $P(x_p, y_p, z_p)$ ja $\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$.

Ruumi kontseptsioonis meie lähtume sellest, et ruumis pole eristatuid suundi, kõik suunad on samaväärsed, ruum on **homogeenne**. Meie varustame ruumi kolme koordinaatteljega, seega see on täiendav struktuur, mida ruumis endas pole.

Sellega seoses tekib oluline ja sügav küsimus: kuidas sõltuvad meie võrrandid koordinaadisüsteemi valikust.

Selle küsimuse võime sõnastada teisel kujul:

kuidas teisenevad võrrandid üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele?

Selle küsimuse võime sõnastada teisel kujul:

kuidas teisenevad võrrandid üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele?

Selleks meil peavad olema valemid, mis näitavad, kuidas toimub üleminek ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Selleks kasutame reepereid.

Selle küsimuse võime sõnastada teisel kujul:

kuidas teisenevad võrrandid üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele?

Selleks meil peavad olema valemid, mis näitavad, kuidas toimub üleminek ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Selleks kasutame reepereid. Olgu ruumis antud kaks reeperit

$$\mathfrak{R}_1 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \quad \mathfrak{R}_2 = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}.$$

Selle küsimuse võime sõnastada teisel kujul:

kuidas teisenevad võrrandid üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele?

Selleks meil peavad olema valemid, mis näitavad, kuidas toimub üleminek ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Selleks kasutame reepereid. Olgu ruumis antud kaks reeperit

$$\mathfrak{R}_1 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \quad \mathfrak{R}_2 = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}.$$

Olgu P ruumi E^3 mingi punkt ja olgu (x_p, y_p, z_p) punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_1$ ja (x'_p, y'_p, z'_p) punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_2$. Antud loengu eesmärk on leida

kuidas punkti P koordinaadid (x_p, y_p, z_p) avalduvad selle punkti (x'_p, y'_p, z'_p) koordinaatide kaudu.

Selle küsimuse võime sõnastada teisel kujul:

kuidas teisenevad võrrandid üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele?

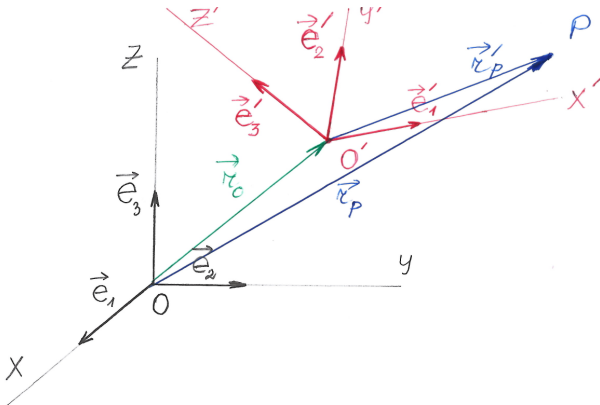
Selleks meil peavad olema valemid, mis näitavad, kuidas toimub üleminek ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Selleks kasutame reepereid. Olgu ruumis antud kaks reeperit

$$\mathfrak{R}_1 = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}, \quad \mathfrak{R}_2 = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}.$$

Olgu P ruumi E^3 mingi punkt ja olgu (x_p, y_p, z_p) punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_1$ ja (x'_p, y'_p, z'_p) punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_2$. Antud loengu eesmärk on leida

kuidas punkti P koordinaadid (x_p, y_p, z_p) avalduvad selle punkti (x'_p, y'_p, z'_p) koordinaatide kaudu.

Koordinaatide teisenemise valemite leidmiseks **fikseerime teise reeperi $\mathfrak{R}_2$ asendi esimese reeperi $\mathfrak{R}_1$ suhtes** alguspunkti O' ja baasvektorite $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ koordinaatide (esimeses reeperis) abil.



$$\begin{aligned} \vec{OO}' = \vec{r}_0 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + a_{13}\vec{e}_3, \quad O'(a_{11}, a_{12}, a_{13}) \\ \begin{cases} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3, \end{cases} & A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi.

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi. On kasulik moodustada 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi. On kasulik moodustada 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit A nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks**.

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi. On kasulik moodustada 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit A nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks**. **Kas suvaline 3-järku ruutmaatriks sobib baasiteisenduse maatriksiks?**

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi. On kasulik moodustada 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit A nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks**. **Kas suvaline 3-järku ruutmaatriks sobib baasiteisenduse maatriksiks?** Vastus: EI!

Olgu $O'(a_1, a_2, a_3)$ (st $\overrightarrow{OO'} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$) ja

$$\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_2 = a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3,$$

$$\vec{e}'_3 = a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3.$$

12 arvu (parameetrit) täielikult määravad teise reeperi asendit esimese reeperi suhtes, kusjuures parameetrid a_1, a_2, a_3 määravad teise reeperi alguspunkti O' ja parameetrid a_{ij} määravad teise reeperi baasi. On kasulik moodustada 3-järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit A nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks**. **Kas suvaline 3-järku ruutmaatriks sobib baasiteisenduse maatriksiks?** Vastus: EI!
Baasiteisenduse maatriks peab teisendama **baasi** $\rightarrow$ **teiseks baasiks**, kuid baas koosneb **mittekomplanaarsetest vektoritest**!

Teoreem

Maatriks A on baasiteisenduse maatriks parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Kui $\det A > 0$, siis reeperi orientatsioon ei muutu (baasiteisenduse maatriks A säilitab reeperi orientatsiooni) ja kui $\det A < 0$, siis reeperi orientatsioon muutub.

Tõestus.

Teoreem

Maatriks A on baasiteisenduse maatriks parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Kui $\det A > 0$, siis reeperi orientatsioon ei muutu (baasiteisenduse maatriks A säilitab reeperi orientatsiooni) ja kui $\det A < 0$, siis reeperi orientatsioon muutub.

Tõestus. Kehtib valem (V. loeng) $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = \det A (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Maatriksarvutuses 3-järku maatriksit A nimetatakse **regulaarseks maatriksiks**, kui $\det A \neq 0$. Regulaarsete kolmandat järku maatriksite hulka tähistatakse $GL_3(\mathbb{R}) \subset M_3(\mathbb{R})$, kus $M_3(\mathbb{R})$ on 3-järku ruutmaatriksite hulk.

Teoreem

Maatriks A on baasiteisenduse maatriks parajasti siis, kui $\det A \neq 0$. Kui $\det A > 0$, siis reeperi orientatsioon ei muutu (baasiteisenduse maatriks A säilitab reeperi orientatsiooni) ja kui $\det A < 0$, siis reeperi orientatsioon muutub.

Tõestus. Kehtib valem (V. loeng) $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = \det A (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Maatriksarvutuses 3-järku maatriksit A nimetatakse **regulaarseks maatriksiks**, kui $\det A \neq 0$. Regulaarsete kolmandat järku maatriksite hulka tähistatakse $GL_3(\mathbb{R}) \subset M_3(\mathbb{R})$, kus $M_3(\mathbb{R})$ on 3-järku ruutmaatriksite hulk.

Teoreem

Kui x_p, y_p, z_p on punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_1$, x'_p, y'_p, z'_p on punkti P koordinaadid reeperis $\mathfrak{R}_2$, siis kehtib

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_{13}z'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_{23}z'_p + a_2, \\z_p &= a_{31}x'_p + a_{32}y'_p + a_{33}z'_p + a_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse **ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele**.

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse **ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele**. Oletame, et ruumis E on antud kolm reeperit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ja

$$\mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{R}_2,$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse **ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele**. Oletame, et ruumis E on antud kolm reeperit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ja

$$\mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{R}_2 \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{R}_3,$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse **ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele**. Oletame, et ruumis E on antud kolm reeperit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ja

$$\mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{R}_2 \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{R}_3, \quad \mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, C} \mathfrak{R}_3.$$

Tasandi korral

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p + a_1, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p + a_2.\end{aligned}$$

Valemit (1) nimetatakse **ruumi punkti koordinaatide teisenemise valemiks üleminekul ühelt reeperilt teisele**. Oletame, et ruumis E on antud kolm reeperit $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ ja

$$\mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{R}_2, \quad \mathfrak{R}_2 \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{R}_3, \quad \mathfrak{R}_1 \xrightarrow{\vec{0}, C} \mathfrak{R}_3.$$

Juhime tähelepanu sellele, et reeperite alguspunktid ühtivad $O \equiv O' \equiv O''$, st üleminekul ühelt reeperilt teisele muutuvad ainult baasivektorid. Leiame, kuidas baasiteisenduse maatriks C avaldub baasiteisenduste maatriksite A, B kaudu. Teeme seda tasandi korral.

Eespool tõestatud teoreemist järeldeb

$$\begin{aligned}x_p &= a_{11}x'_p + a_{12}y'_p, \\y_p &= a_{21}x'_p + a_{22}y'_p,\end{aligned}$$

Eespool tõestatud teoreemist jäeldub

$$x_p = a_{11}x'_p + a_{12}y'_p,$$

$$y_p = a_{21}x'_p + a_{22}y'_p,$$

$$x'_p = b_{11}x''_p + b_{12}y''_p,$$

$$y'_p = b_{21}x''_p + b_{22}y''_p,$$

Eespool tõestatud teoreemist järeldeb

$$x_p = a_{11}x'_p + a_{12}y'_p,$$

$$y_p = a_{21}x'_p + a_{22}y'_p,$$

$$x'_p = b_{11}x''_p + b_{12}y''_p,$$

$$y'_p = b_{21}x''_p + b_{22}y''_p,$$

$$x_p = c_{11}x''_p + c_{12}y''_p,$$

$$y_p = c_{21}x''_p + c_{22}y''_p.$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \implies c_{11} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \implies c_{11} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{11} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B esimese veeru elementidega korrutamise abil.

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \implies c_{11} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{11} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B esimese veeru elementidega korrutamise abil.
Kehtib

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \implies c_{11} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{11} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B esimese veeru elementidega korrutamise abil.
Kehtib

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \implies c_{12} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}.$$

Kehtib

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \implies c_{11} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{11} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B esimese veeru elementidega korrutamise abil.
Kehtib

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \implies c_{12} = (a_{11} \ a_{12}) \times \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix}.$$

Maatriksi C element c_{12} on moodustatud maatriksi A esimese rea elementide maatriksi B teise veeru elementidega korrutamise abil.
Üldiselt, kui maatriksi C element c_{ij} on moodustatud maatriksi A i -nda rea elementide maatriksi B j -nda veeru elementide korrutamise abil, siis maatriksit C nimetatakse maatriksite A, B korrutiseks ja kirjutatakse $C = A \cdot B$.

Teoreem

Kui

$$\mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{R}', \quad \mathfrak{R}' \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{R}'', \quad \mathfrak{R} \xrightarrow{\vec{0}, C} \mathfrak{R}'',$$

siis $C = A \cdot B$.

Teoreem

Kui

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{X}', \quad \mathfrak{X}' \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{X}'', \quad \mathfrak{X} \xrightarrow{\vec{0}, C} \mathfrak{X}'',$$

siis $\boxed{C = A \cdot B}$.

Mainime, et maatriksite korrutamine on mittekommutatatiivne $A \cdot B \neq B \cdot A$ ja assotsiatiivne $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Teoreem

Kui

$$\mathfrak{K} \xrightarrow{\vec{0}, A} \mathfrak{K}', \quad \mathfrak{K}' \xrightarrow{\vec{0}, B} \mathfrak{K}'', \quad \mathfrak{K} \xrightarrow{\vec{0}, C} \mathfrak{K}'',$$

siis $\boxed{C = A \cdot B}$.

Mainime, et maatriksite korrutamine on mittekommutatiiivne $A \cdot B \neq B \cdot A$ ja assotsiatiivne $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Nüüd kitsendame reeperite klassi, st eeldame, et diagrammis $\mathfrak{K} \xrightarrow{\vec{r}_0, A} \mathfrak{K}'$ reeperid on **ristreeperid**. On ilmne, et baasiteisenduse maatriks ei saa enam olla ainult regulaarne maatriks, kuid ta peab rahuldama lisa tingimust. Leiame selle tingimuse. Esiteks esimese reeperi baas $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ on ristbaas, st

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1, \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Teiseks arvestame, et teise reeperi baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ on ka ristbaas

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_1 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_3, \vec{e}'_3 \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle = 0.$$

Teiseks arvestame, et teise reeperi baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ on ka ristbaas

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_1 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_3, \vec{e}'_3 \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle = 0.$$

Kehtib $\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3$, järelikult

$$(a_{11})^2 + (a_{21})^2 + (a_{31})^2 = 1. \quad (2)$$

Teiseks arvestame, et teise reeperi baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ on ka ristbaas

$$\begin{aligned}\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_1 \rangle &= \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_3, \vec{e}'_3 \rangle = 1, \\ \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \rangle &= \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle = 0.\end{aligned}$$

Kehtib $\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3$, järelikult

$$(a_{11})^2 + (a_{21})^2 + (a_{31})^2 = 1. \quad (2)$$

Analoogiliselt

$$(a_{12})^2 + (a_{22})^2 + (a_{32})^2 = 1, \quad (3)$$

$$(a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2 = 1, \quad (4)$$

Teiseks arvestame, et teise reeperi baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ on ka ristbaas

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_1 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_3, \vec{e}'_3 \rangle = 1,$$

$$\langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 \rangle = \langle \vec{e}'_2, \vec{e}'_3 \rangle = \langle \vec{e}'_1, \vec{e}'_3 \rangle = 0.$$

Kehtib $\vec{e}'_1 = a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3$, järelikult

$$(a_{11})^2 + (a_{21})^2 + (a_{31})^2 = 1. \quad (2)$$

Analoogiliselt

$$(a_{12})^2 + (a_{22})^2 + (a_{32})^2 = 1, \quad (3)$$

$$(a_{13})^2 + (a_{23})^2 + (a_{33})^2 = 1, \quad (4)$$

ja

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \quad (5)$$

$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0, \quad (6)$$

$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{32} + a_{31}a_{33} = 0. \quad (7)$$

Definitsioon

Maatriksit A nimetatakse **ortogonaalseks maatriksiks**, kui selle elemendid rahuldavad tingimusi (2) - (7). Teist järku ortogonaalsete maatriksite (tasandi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(2) \subset GL_2(\mathbb{R})$ ja kolmandat järku ortogonaalsete maatriksite (ruumi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(3) \subset GL_3(\mathbb{R})$.

Definitsioon

Maatriksit A nimetatakse **ortogonaalseks maatriksiks**, kui selle elemendid rahuldavad tingimusi (2) - (7). Teist järku ortogonaalsete maatriksite (tasandi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(2) \subset GL_2(\mathbb{R})$ ja kolmandat järku ortogonaalsete maatriksite (ruumi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(3) \subset GL_3(\mathbb{R})$.

Uurime teist järku ortogonaalse maatriksi struktuuri. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

baasiteisenduse maatriks.

Definitsioon

Maatriksit A nimetatakse **ortogonaalseks maatriksiks**, kui selle elemendid rahuldavad tingimusi (2) - (7). Teist järku ortogonaalsete maatriksite (tasandi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(2) \subset GL_2(\mathbb{R})$ ja kolmandat järku ortogonaalsete maatriksite (ruumi reeperite baasiteisenduste maatriksid) hulka tähistatakse $O(3) \subset GL_3(\mathbb{R})$.

Uurime teist järku ortogonaalse maatriksi struktuuri. Olgu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

baasiteisenduse maatriks. Seega

$$\begin{aligned}(a_{11})^2 + (a_{21})^2 &= 1, \\ (a_{12})^2 + (a_{22})^2 &= 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} &= 0.\end{aligned}$$

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$.

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. Eeldame
 $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$.

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. Eeldame $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Viimase võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. Eeldame $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Viimase võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Tähistame

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = \lambda.$$

Kehtib kas $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$ või $a_{11} = 0, a_{22} = 0$. Eeldame $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0$. Viimase võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Tähistame

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} = \lambda.$$

Leiame

$$A = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \mp \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \pm \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}.$$

Lisaks, kui $a_{11} = a_{22} = 0$, on meil veel neli maatriksit

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teoreem

Teist järku ortogonaalse maatriksi determinandi absoluutväärtus võrdub arvuga 1, st $|\det A| = 1$.

Definitsioon

Ortogonaalsed matriksid A nimetatakse **spetsiaalseks ortogonaalseks matriksiks**, kui $\det A = 1$. Spetsiaalsete ortogonaalsete matriksite hulka tähistatakse $SO(2)$

Uurime teist järku spetsiaalse ortogonaalse matriksi kuju. Eelmise teoreemi tõestusest järeldub, et teist järku spetsiaalse ortogonaalse matriksi jaoks on kaks võimalust

$$\text{i) } A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix}.$$

Võtame kasutusele uue parameetri τ , kus $\lambda = \tan \tau$ ja $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$. Kasutades parameetrit τ ja trigonomeetrilist valemit

$$1 + \tan^2 \tau = \frac{1}{\cos^2 \tau},$$

leiame matriksite A_1, A_2 kuju

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & -\cos \tau \end{pmatrix}.$$

Geomeetriliselt baasiteisenduse maatriks A_1 määrab tasandi reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ pööret ümber reeperi alguspunkti (kui $\vec{r}_0 = \vec{0}$) nurga τ võrra kellaosuti liikumise suuna vastupidises suunas, kui $\tau > 0$ ja kellaosuti liikumise suunas, kui $\tau < 0$ (vt joonis). Parameetri τ määramispiirkond on vahemik $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kuid nüüd võime laiendada parameetri τ määramispiirkonda $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ haarates maatrikseid

$$B_2 \left(\tau = \frac{\pi}{2} \right), \quad B_3 \left(\tau = -\frac{\pi}{2} \right).$$

On lihtne veenduda, et kõik teist järku spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid (A_1, A_2, B_2, B_3) moodustavad maatriksite üheparameetrilise parve

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Teoreem

Teist järku spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid $SO(2)$ moodustavad ühe parameetrilise parve

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & -\sin \tau \\ \sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Teist järku spetsiaalne ortogonaalne maatriks $A(\tau)$ määrab tasandi reeperi pööret nurga τ võrra.

Täiendav materjal. Defineerime kujutust ψ , mis seab igale kompleksarvule $z = a + ib$ vastavusse teist järku maatriksi

$$\psi(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Kujutusel ψ on järgmised omadused:

$$\psi(z_1 \cdot z_2) = \psi(z_1) \cdot \psi(z_2), \quad |z| = \det \psi(z), \quad \psi(\bar{z}) = (\psi(z))^T.$$

Leidke, millised kompleksarvud kujutuse ψ korral vastavad spetsiaalsetele ortogonaalsetele matriksitele. Kasutades seda, tõestage

$$A(\tau_1 + \tau_2) = A(\tau_1) \cdot A(\tau_2).$$

Järelikult, koordinaadisüsteemi pöördel ümber alguspunkti nurga τ võrra punkti koordinaadid teisenevad järgmiselt

$$\begin{aligned}x &= \cos \tau x' - \sin \tau y', \\ y &= \sin \tau x' + \cos \tau y' .\end{aligned}$$

Ortogonaalsed matriksid determinandiga -1 on seotud tasandi peegeldustega. Kui tasandil on antud sirge l , siis tasandi peegelduseks nimetatakse kujutust $R : E^2 \rightarrow E^2$, mis seab tasandi igale punktile vastavusse sümmeetrilise punkti antud sirge suhtes (vt [joonis](#)). On ilmne, et sirge l punktid jäävad paigale (peegelduse püsipunktid) ja peegeldus on tasandi vektorite lineaarteisendus.

Peegeldusel on idempotentsuse omadus, st kui peegeldust rakendada kaks korda järjest, siis tulemuseks on tasandi samasusteisendus $\text{id}_{E^2}(P) = P$, st $R^2 = \text{id}_{E^2}$. Märgime, et maatriks B_1 on idempotentne maatriks, st $B_1^2 = I$, kus I on ühikmaatriks. Maatriks B_1 teisendab reeperit $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ reeperiks $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1$ ja see on lähtereeperi peegeldus esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes. On võimalik tõestada, et kahe ristreeperi korral (alguspunktid ühtivad, orientatsioonid võivad olla erinevad) ühte ristreeperit saab teisendada teiseks pöörde ja peegelduse kompositsiooni abil.

Eksami küsimused

- 1 Baasiteisenduse maatriks. Teoreem baasiteisenduse maatriksist. Koordinaatide teisenemise valemid.
- 2 Üleminek ühelt ristreeperilt teisele ristreeperile. Ortogonaalsed maatriksid. Teoreem ortogonaalse maatriksi determinandist.
- 3 Spetsiaalsed ortogonaalsed maatriksid. Teoreem teist järku spetsiaalse ortogonaalse maatriksi struktuurist.