

Kategoriateooria 2024

Kodutöö 1

Tähtaeg: 06.03.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 2.5 punkti. Valida järgnevast endale meeltemööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Ülesanne 1. (1p) Näidata, et morfism $f: A \rightarrow B$ on kategoorias $\mathcal{C}$ monomorfism parajasti siis, kui kujutus

$$\mathcal{C}(U, A) \rightarrow \mathcal{C}(U, B), \quad u \mapsto f \circ u$$

on injektiivne iga kategooria $\mathcal{C}$ objekti U korral.

Ülesanne 2. (1p) Tuua, koos põhjendusega, näide kategooriast, milles algobjekti ei leidu. (Ei pea olema tegu matemaatiliste struktuuride kategooriaga.)

Ülesanne 3. (1p) Miks (ühikuga) ringide kategoorias on algobjektiks ring $\mathbb{Z}$ ja mitte ring $\{0\}$?

Ülesanne 4. (1.5p) Näidata, et kui P on kategoorias $\mathcal{C}$ lõppobjekt ning objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on isomorfne objektiga P , siis ka objekt A on kategoorias $\mathcal{C}$ lõppobjekt.

Ülesanne 5. Urida korrutiste olemasolu

- (1.5p) diskreetsetes kategooriates,
- (1.5p) kodiskreetsetes kategooriates.

Definitsioon. Öeldakse, et kategooria $\mathcal{C}$ morfismid $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ on **ühiselt monomorfsed**, kui iga objekti $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ning iga morfismipaari $u, v: U \rightarrow C$ korral kehtib

$$(f \circ u = f \circ v \wedge g \circ u = g \circ v) \Rightarrow u = v.$$

S.t. saame f ja g ühiselt vasakult taandada (aga ainult ühiselt).

Ülesanne 6. (2.5p) Olgu $A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$ kategoorias $\mathcal{C}$ objektide A ja B korrutis. Näidata, et morfism $f: M \rightarrow A \times B$ on monomorfism parajasti siis, kui morfismid $p_A f$ ja $p_B f$ on ühiselt monomorfsed.

Ülesanne 7. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.