

Kategoriateooria 2024

Kodutöö 2

Tähtaeg: 20.03.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 2.5 punkti. Valida järgnevast endale meeltemööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Ülesanne 1. (1.5p) Olgu $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ suvaline funktor ja leidugu kateoorias $\mathcal{D}$ lõppobjekt $\mathbb{1}$. Näidata, et kujutuste pere

$$\alpha_A := !_{F(A)}^{\mathbb{1}}: F(A) \rightarrow \mathbb{1}$$

moodustab loomuliku teisenduse $F \rightarrow \Delta_{\mathbb{1}}$, kus $\Delta_{\mathbb{1}}$ on konstantne funktor lõppobjektile.

Ülesanne 2. Olgu $2 := \{0, 1\}$ kahe-elementiline hulk ning olgu $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ loengu slaididel toodud funktor.

- (1p) Veenduda, et vastavus $X \mapsto \mathcal{P}(X) := \{U \subseteq X\}$ annab funktori $\mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.
- (1.5p) Näidata, et funktsioonide pere

$$\alpha_X: \mathbf{Set}(X, 2) \rightarrow \mathcal{P}(X) \quad f \mapsto \{x \in X \mid f(x) = 1\},$$

kus $X \in \text{Ob}(\mathbf{Set}^{\text{op}})$, moodustab loomuliku isomorfismi $\mathbf{Set}(-, 2) \rightarrow \mathcal{P}$. Siin $\mathbf{Set}(-, 2)$ tähistab kontravariantset esitatavat funktorit $\mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Ülesanne 3. (1.5p) Näidata, et slaididel toodud konstruktsioon, mis konstrueerib hulgast X väikese kateooria $\mathbf{disc}(X)$ (diskreetne kateooria hulgal X), annab funktori $\mathbf{disc}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ hulkade kateooriast väikeste kateooriate kateooriasse.

Ülesanne 4. Olgu A kateooria $\mathcal{C}$ objekt. Defineerime kateooria objekti A alamobjektide kateooria $\mathbf{Sub}(A)$ järgnevalt:

- $\mathbf{Sub}(A)$ objektideks on paarid (U, u) , kus $U \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ning $u: U \rightarrow A$ on monomorfism kateoorias $\mathcal{C}$;
- kateoorias $\mathbf{Sub}(A)$ on morfismideks $(U, u) \rightarrow (U', u')$ kateooria $\mathcal{C}$ tingimust $u' \circ f = u$ rahuldavad morfismid $f: U \rightarrow U'$;
- objekti $(U, u) \in \text{Ob}(\mathbf{Sub}(A))$ ühikmorfismiks on kateooria $\mathcal{C}$ morfism 1_U ning morfisme komponeerime nagu kateoorias $\mathcal{C}$.

Näidata, et

- (1p) $\mathbf{Sub}(A)$ on õhuke kateooria;
- (1p) vastavuse $(U, v) \mapsto U$ saab teha funktoriks $F: \mathbf{Sub}(A) \rightarrow \mathcal{C}$;
- (1p) saame defineerida loomuliku teisenduse $F \Rightarrow \Delta_A$, kus $\Delta_A: \mathbf{Sub}(A) \rightarrow \mathcal{C}$ on konstantne funktor objektile A .

Ülesanne 5. (1.5p) Olgu $\mathbf{Top}$ topoloogiliste ruumide ja pidevate kujutuste kateooria. Näidata, et vastavust $(X, \tau_X) \mapsto \tau_X$, mis seab topoloogilisele ruumile vastavusse topoloogia, saab vaadata funktorina $\mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Ülesanne 6. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.