

Kategooriateooria 2024

Kodutöö 3

Tähtaeg: 03.04.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 2.5 punkti. Valida järgnevast endale meeltmööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Olgu $\mathcal{2} := [a \rightarrow b]$ kategooria, kus on täpselt kaks objekti a ning b , üks nool $t: a \rightarrow b$, ning ainsad muud nooled on ühikmorfismid. Kui $\mathcal{C}$ on suvaline kategooria, siis funktoore kategooriat $\mathbf{Arr}(\mathcal{C}) := \mathbf{Fun}(\mathcal{2}, \mathcal{C})$ kutsutakse kategooria $\mathcal{C}$ **noolte kategooriaks**, kuna selle objektid, ehk funktooriid $\mathcal{2} \rightarrow \mathcal{C}$, on üks-üheses vastavuses kategooria $\mathcal{C}$ morfismidega. Seega, kui ütleme, et $f: A \rightarrow B$ on kategooria $\mathbf{Arr}(\mathcal{C})$ objekt, siis vastab see funktooriga $F_f: \mathcal{2} \rightarrow \mathcal{C}$, kus $F_f(a) = A$, $F_f(b) = B$ ning $F_f(t) = f$.

Abiks järgnevate ülesannete juures võib võtta arvesse järgmise tähelepaneku.

Tähelepanek. Selleks, et morfismide pere $(F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A))_{A \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ oleks loomulik teisendus $\alpha: F \Rightarrow G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, piisab loomulikkuse ruudu kommuteerumisest ühikmorfismidest erinevate morfismide $t: A \rightarrow B$ jaoks. (Kuna see ruut on ühikmorfismide puhul automaatselt kommuteeruv.)

Ülesanne 1. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria ning olgu $f: A \rightarrow B$ ning $g: A' \rightarrow B'$ kategooria $\mathcal{C}$ morfismid, mis on isomorfsed kategooria $\mathbf{Arr}(\mathcal{C})$ objektidena. Näidata, et

- (1p) kui f on isomorfism kategoorias $\mathcal{C}$, siis g on isomorfism kategoorias $\mathcal{C}$,
- (1p) kui f on monomorfism kategoorias $\mathcal{C}$, siis g on monomorfism kategoorias $\mathcal{C}$.

Ülesanne 2. Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Näidata, et

- (1p) saame vaadata funktoori $\text{id}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Arr}(\mathcal{C})$, mis viib objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ noolte kategooria objektiks $(A \xrightarrow{1_A} A) \in \text{Ob}(\mathbf{Arr}(\mathcal{C}))$,
- (1p) saame vaadata funktoori $\text{dom}: \mathbf{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$, mis viib objekti $(A \xrightarrow{f} B) \in \text{Ob}(\mathbf{Arr}(\mathcal{C}))$ objektiks $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$,
- (1.5p) kehtib $\text{id} \dashv \text{dom}$, ehk funktoori $\text{id}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Arr}(\mathcal{C})$ on vasakpoolseks kaasfunktooriga funktooriga $\text{dom}: \mathbf{Arr}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$. (Võib näiteks leida adjunktsiooni kouhiku ja näidata selle universaalomadust.)

Ülesanne 3. (1.5p) Olgu $\text{disc}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Cat}$ funktoori, mis konstrueerib hulga X diskreetse kategooria hulga X (nagu eelmises ülesannete komplektis) ning olgu $\text{Ob}: \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Set}$ funktoori, mis seab väikesele kategooriale vastavusse selle objektide hulga. Näidata, et $\text{disc} \dashv \text{Ob}$.

Ülesanne 4. (1p) Olgu $\Delta_1: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ konstantne funktoori ühe-elementilisele hulga. Tõestada, Q on kategoorias $\mathcal{C}$ algobjekt parajasti siis, kui esitatav funktoori

$$\mathcal{C}(Q, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

on funktooriga Δ_1 loomulikult isomorfne.

Ülesanne 5. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.