

Kategoriateooria 2024

Kodutöö 4

Tähtaeg: 17.04.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 2.5 punkti. Valida järgnevast endale meeltemööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Ülesanne 1. (1p) Olgu $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ kategooria $\mathcal{C}$ ühikfunktor. Näidata, et kui $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ on funktori $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ vasakpoolne kaasfunktor, siis $F \cong \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$. (S.t. F on funkoriga $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ loomulikult isomorfne, ehk isomorfne funktorite kategoorias.)

Ülesanne 2. (1.5p) Olgu $\mathbb{1}$ lõppobjekt kategoorias $\mathcal{C}$ ning $\mathbb{0}$ algobjekt kategoorias $\mathcal{D}$. Näidata, et konstantne funktor

$$\Delta_{\mathbb{0}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \quad C \mapsto \mathbb{0}$$

on vasakpoolseks kaasfunktoriks konstantsele funktorile

$$\Delta_{\mathbb{1}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \quad D \mapsto \mathbb{1}.$$

Ülesanne 3. (1.5p) Näidata, et kui väikeses kategoorias $\mathcal{I}$ leidub algobjekt $\mathbb{0}$, siis suvalise funktori $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ piir leidub, ja selleks on objekt $D(\mathbb{0})$ koos projektsioonide perega

$$p_i := D(!_i^{\mathbb{0}}): D(\mathbb{0}) \rightarrow D(i),$$

kus indeks i jookseb üle kategooria $\mathcal{I}$ objektide ning $!_i^{\mathbb{0}}: \mathbb{0} \rightarrow i$ on unikaalne morfism $\mathbb{0} \rightarrow i$ kategoorias $\mathcal{I}$.

Ülesanne 4. (?p) Mõni eelmise kodutöö adjunktsioonide kohta käiv ülesanne, mida juba pole esitatud.

Ülesanne 5. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.