

Kategoriateooria 2024

Kodutöö 6

Tähtaeg: 08.05.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 2.5 punkti. Valida järgnevast endale meeltmööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Ülesanne 1. (1p) Leidugu kategoorias $\mathcal{C}$ lõppobjekt $\mathbb{1}$. Näidata, et $\{\mathbb{1}\}$ on kategooria $\mathcal{C}$ reflektiivne alamkategooria.

Ülesanne 2. (1p) Vaatame järjestatud hulki $\mathbb{R}$ ning $[0, \infty)$ (mõlemad tavalise reaalarvude järjestusega) kategooriatena, kus leidub (unikaalne) nool $[x \leq y]: x \rightarrow y$ parajasti siis, kui $x \leq y$. Näidata, et $[0, \infty)$ on kategooria $\mathbb{R}$ reflektiivne alamkategooria.

Ülesanne 3. (1.5p) Olgu $\mathbf{Arr}(\mathbf{Set})$ kategooria $\mathbf{Set}$ noolte kategooria ($\mathbf{Arr}(\mathcal{C})$ on defineeritud nagu kodutöös 3). Vaatame kategoorias $\mathbf{Arr}(\mathbf{Set})$ täielikku alamkategooriat $\mathcal{M}$, kus objektideks on injeksioonid. Näidata, et $\mathcal{M}$ on kategooria $\mathbf{Arr}(\mathbf{Set})$ reflektiivne alamkategooria. Vihje: iga funktsioon $f: X \rightarrow Y$ on esitatav kompositsioonina

$$X \xrightarrow{e_f} \text{Im}(f) \xrightarrow{m_f} Y,$$

kus e_f on sürjektiivne ning m_f on injektiivne.

Ülesanne 4. (1.5p) Olgu $\mathbf{Cat}'$ kategooria, mille objektideks on väikesed kategooriad, ning kus morfismideks on funktsioonid objektihulkade vahel. Näidata, kategooria $\mathbf{Cat}'$ on ekvivalentne kategooriaga $\mathbf{Set}$.

Ülesanne 5. Iga järgneva kaasfunktorite paari korral kirjutada välja adjunksiooni ühik ja koühik (ei pea midagi tõestama, iga õige vastus annab 0.5p).

- (1) Olgu $\mathcal{C}$ kategooria, mille iga kahe objekti $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ jaoks leidub nende objektide korrutis $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$. Siis leidub meil kaasfunktorite paar

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{A \mapsto (A, A)} \\ \perp \\ \xleftarrow{A \times B \mapsto (A, B)} \end{array} \mathcal{C} \times \mathcal{C}.$$

- (2) Olgu $\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ kõigi alamhulkade hulga funktor (nagu kodutöös 2) ning käitugu $\mathcal{P}^{\text{op}}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^{\text{op}}$ samamoodi (lihtsalt nooled kategooriates on vastupidi). Siis kehtib

$$\mathbf{Set}^{\text{op}} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathcal{P}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathcal{P}^{\text{op}}} \end{array} \mathbf{Set}.$$

- (3) Leidugu väikeses kategoorias $\mathcal{C}$ lõppobjekt $\mathbb{1}$ ja olgu $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ funktorite $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kategooria. Siis saame vaadata funktorit $\text{ev}_{\mathbb{1}}: \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{D}$, mis seab funktorile F vastavusse selle väärtuse $F(\mathbb{1})$. Lisaks saame vaadata funktorit $\Delta: \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, mis seab objektile $D \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ vastavusse konstantse funktori $\Delta_D \in \text{Ob}(\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$. Siis

$$\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathbb{1}}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\Delta} \end{array} \mathcal{D}.$$

Ülesanne 6. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.