

Kategoriateooria 2024

Kodutöö 7-8

Tähtaeg: 29.05.2024, loengu algus

Kodutöö eest on võimalik koguda maksimaalselt 5 punkti. Valida järgnevast endale meeltmööda ülesandeid, ning esitada lahendused kas paberil, saata e-posti teel, või laadida ülesse Moodle keskkonda.

Ülesanne 1. Olgu (T, μ, η) monaad kategoorial **Set**. Tõestada, et T -algebrate kategoorias $\mathcal{C}^T$

- (1) (1.5p) on lõppobjektiks algebra $(\mathbb{1}, !)$, kus $\mathbb{1}$ on ühe-elementiline hulk ja $!$ on unikaalne funktsioon lõppobjekti;
- (2) (1.5p) on algobjektiks algebra $(T(\emptyset), \mu_\emptyset)$.

Ülesanne 2. Olgu $\mathcal{R}$ kategooria $\mathcal{C}$ reflektiivne alamkategooria, kusjuures $I: \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{C}$ olgu alamkategooria sisestus ning $R: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{R}$ olgu funktori I vasakpoolne kaasfunktor.

- (1) (1.5p) Kirjutada välja selle adjunktisiooni indutseeritud monaad (T, μ, η) ja näidata, et μ on loomulik isomorfism.
- (2) (3p) Näidata, et kanooniline funktor $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{C}^T$ on ekvivalentsifunktor.

Ülesanne 3. Olgu (T, μ, η) monaad kategoorial $\mathcal{C}$. Siis selle monaadi **Kleisli kategooria** $\mathcal{C}_T$ defineeritakse järgmiselt:

- $\text{Ob}(\mathcal{C}_T) := \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- $\mathcal{C}_T(A, B) := \mathcal{C}(A, T(B))$ iga $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C}_T)$ korral;
- ühikmorfismiks objektile A on $\eta_A \in \mathcal{C}(A, T(A)) = \mathcal{C}_T(A, A)$;
- morfismide $(A \xrightarrow{f} T(B)) \in \mathcal{C}_T(A, B)$ ja $(B \xrightarrow{g} T(C)) \in \mathcal{C}_T(B, C)$ kompositsioon

$$(A \xrightarrow{g \circ_T f} T(C)) \in \mathcal{C}_T(A, C)$$

on defineeritud kategooria $\mathcal{C}$ morfismina $\mu_C \circ T(g) \circ f$

$$A \xrightarrow{f} T(B) \xrightarrow{T(g)} TT(C) \xrightarrow{\mu_C} T(C).$$

Näidata, et

- (1) (3p) $\mathcal{C}_T$ on tõepoolest kategooria.

Ülesanne 4. (2.5p) Olgu $f: A \rightarrow B$ morfism nullobjektiga kategoorias $\mathcal{C}$. Näidata, et järgmised väited on samaväärsed:

- (1) (K, k) , kus $k: K \rightarrow A$, on morfismi f tuum;
- (2) diagramm

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathbb{0} \\ k \downarrow & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

on tagasitõmbamisruut.

Ülesanne 5. (1p-1.5p) Pakkuda välja ja lahendada ise mingi ülesanne.