

Kategoorieooria

2024 kevad

PDF kompileeritud:
6. märts 2024. a.

Kategooria definitsioon

Definitsioon (Kategooria)

Kategooria $\mathcal{C}$ koosneb järgmistest andmetest:

- kollektsioon $\text{Ob}(\mathcal{C})$ **objekte** (tähistatakse ka $\mathcal{C}_0$), mille liikmete jaoks kasutatakse sümboleid $A, B, C, \dots$;
- iga $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral hulk $\mathcal{C}(A, B)$ **morfisme** (ehk **nooli**), mille liikmete jaoks kasutatakse sümboleid, $f, g, h, \dots$ ning mille korral fakti $f \in \mathcal{C}(A, B)$ väljendatakse kirjutisega $f: A \rightarrow B$ või kirjutisega $A \xrightarrow{f} B$;
- reegel, mis igale morfismipaarile paigutuses $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ seab vastavusse morfismi $A \xrightarrow{g \circ f} C$, mida kutsutakse nende morfismide **kompositsiooniks**;
- iga objekti A peal mingi fikseeritud **ühikmorfism** $1_A: A \rightarrow A$.

Lisaks, iga $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ korral peab kehtima $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ ning iga $f: A \rightarrow B$ korral peab kehtima $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.



Terminoloogiat noolte kohta

Kui meil on antud nool $f: A \rightarrow B$, siis objekti A nimetatakse noole f **lähteobjektiks** ning objekti B noole f **sihtobjektiks**.

Kui on antud kaks noolt $f, g: A \rightarrow B$, ehk kui noolte f ja g lähteobjektid ja sihtobjektid ühtivad, ütleme et nooled f ja g on **paralleelsed**.

Kategoriate näited: *hulkade kategoria* **Set**

Näide (Hulkade kategoria **Set**)

Hulkade kategoria objektideks on hulgad ja morfismideks on kujutused. Detailsemalt rääkides:

- $\text{Ob}(\mathbf{Set})$ on kõikide hulkade kollektsioon;
- $\mathbf{Set}(X, Y)$ on kõikide funktsioonide $X \rightarrow Y$ hulk;
- morfismide $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ kompositsioon on kujutuste kompositsioon $g \circ f$ järjestakendamise mõttes;
- ühikmorfism $1_X: X \rightarrow X$ on samasuskujutus.

Edaspidi kasutame hulkade kategoriat tihti näitena, seega tähistame edasises hulki sümbolitega X, Y, Z , et eristada neid suvalise kategoria objektidest.

Kategooria definitsiooni tehnilisi aspekte:

objektide kollektsiooni suurus

Kategooria definitsiooni juures oli ebamääraselt öeldud, et kategooria objektid moodustavad *kollektsiooni*.

Hulki on liiga palju, et neist hulka moodustada

Kuna kõik hulgad koos ei moodusta hulka (Russelli paradoks), ning tahame siiski hulkade kategooriast rääkida, siis peame lubama kategooria objektide kollektsioonil olla mingi hulgast suurem kogum.

Võtame seisukoha, et **Set** on tegelikult kõigi **väikeste hulkade** kategooria, ning kõikide väikeste hulkade kogum on **suur hulk** (mõnikord kasutatakse sõna *klass*). Väike hulk on seega hulk tavalises mõttes, ning kasutame neist rääkides sõna *väike* ainult siis, kui on tarvis midagi rõhutada. Iga väike hulk on ka suur hulk, aga iga suur hulk ei pruugi olla väike hulk.

Väikesed kategooriad

Väike kategooria on kategooria, mille objektid moodustavad väikese hulga. Ka väikesed kategooriad on huvipakkuvad. Väikese kategooria objekte tähistatakse tihti väikeste tähtedega $x, y, z, \dots$ nagu hulga elemente.

Näide (Diskreetne kategooria hulgal X)

Kui antud hulk X , saame moodustada kategooria **disc**(X), mida kutsutakse *diskreetseks kategooriaks hulgal X* . Selle kategooria

- objektide hulgaks on X , s.t. $\text{Ob}(\mathbf{disc}(X)) := X$ ning
- ainsad morfismid on ühikmorfismid, ehk kui $x \neq y$, siis $\mathbf{disc}(X)(x, y) := \emptyset$, ning $\mathbf{disc}(X)(x, x) := \{1_x\}$.

Näide (Tühi kategooria)

Eelmise näite erijuhuks (võttes $X = \emptyset$) on ka tühi kategooria, millel ei ole ühtegi objekti, ega ühtegi morfismi.

Järjestatud hulga väikeste kategooriatena

Osaliselt järjestatud hulk on hulk P koos seosega $\leq$, mis on

- refleksiiivne, ehk iga $x \in X$ korral kehtib $x \leq x$,
- transitiivne, ehk kui $x \leq y \leq z$, peab kehtima ka $x \leq z$, ning
- anti-sümmeetriline, ehk kui $x \leq y \leq x$, peab kehtima $x = y$.

Näide (Osaliselt järjestatud hulk, vaadatud kategooriana)

Antud osaliselt järjestatud hulk $(P, \leq)$, saame vaadata kategooriat $\hat{P}$, kus $\text{Ob}(\hat{P}) = P$, ning kus $\hat{P}(x, y)$ on tühi kui $x \not\leq y$, ning kui $x \leq y$, siis $\hat{P}(x, y)$ sisaldab parajasti ühte noolt, mida tähistame $x \xrightarrow{[x \leq y]} y$.

- Noolte $x \xrightarrow{[x \leq y]} y \xrightarrow{[y \leq z]} z$ kompositsioon on $x \xrightarrow{[x \leq z]} z$ ning
- objekti $x \in \text{Ob}(\hat{P})$ ühikmorfism on $x \xrightarrow{[x \leq x]} x$.

Morfismide tähised $[x \leq y]$ on lihtsalt formaalsed avaldised.

Diskreetsed, õhukesed ja kodiskreetsed kategooriad

Osad vaadatud näited olid morfismihulkade mõttes teatud aspektist triviaalsed. Kuna ka tulevikus on tarvis kaaluda selliste omadustega kategooriaid, siis toome need siin eraldi definitsioonidena välja.

Definitsioon (Morfismide poolest vaesed kategooriad)

Kategooriat $\mathcal{C}$ nimetatakse

- **diskreetseks**, kui selle ainsad morfismid on ühikmorfismid, s.t. iga hulk $\mathcal{C}(A, B)$ on tühi, välja arvatud juhul $A = B$, mil kehtib $\mathcal{C}(A, A) = \{1_A\}$;
- **õhukeseks**, kui iga $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathcal{C}(A, B)$ sisaldab ülimalt ühte elementi ning
- **kodiskreetseks**, kui iga $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral $\mathcal{C}(A, B)$ sisaldab täpselt ühte elementi.

Kategooria definitsiooni tehnilisi aspekte:

morfismihulkade lõikumatus

Kategooria definitsiooni juures nõutakse ka mõnikord, et morfismihulgad on paarikaupa lõikumatud. See tähendab, et

$$\text{kui } A \neq A' \text{ või } B \neq B', \text{ siis } \mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \emptyset.$$

Sellele eeldusele ei pea praktikas enamasti tähelepanu pöörama, aga üks selle eelduse tagajärg on, et kui on antud selle kategooria suvaline morfism f , siis see kuulub parajasti ühte neist hulkadest, ehk f on nool $A \rightarrow B$ mingite üheselt määratud objektide A ja B jaoks.

Lõplikud kategooriad

Väikest kategooriat $\mathcal{C}$ kutsutakse **lõplikuks**, kui selle objektide hulk $\mathcal{C}$ on lõplik, ning kui kõik morfismihulgad $\mathcal{C}(x, y)$ on lõplikud.

Näide (Lõplikud diskreetsed kategooriad)

Diskreetne kategooria lõplikul on lõplik, nagu ka lõplik järjestatud hulk, kui seda kategooriana vaatame.

Aeg-ajalt on kasulik defineerida mingi spetsiifilise kujuga lõplik kategooria, näiteks järgmiselt.

Näide (Iseseisev nool)

Olgu $\mathbb{2}$ kategooria, kus on täpselt kaks objekti, s.t. $\text{Ob}(\mathbb{2}) := \{a, b\}$, ning kus lisaks ühikmorfismidele on parajasti üks morfism, mille suunaks on $a \rightarrow b$.

Kategooriate näiteid: *matemaatilised struktuurid*

Kuigi väikesed kategooriad on olulised, kõige tihedamini kasutatakse kategooriaid siiski suurte kategooriate kontekstis.

Enamasti, kui kaalutakse mingit matemaatilist struktuuri, on struktuuriga assotsieeritud ka mingi teisenduse mõiste.

Vaatame mõningaid näiteid, kus struktuur on defineeritud ühel hulgal, ning teisendused on struktuuriga kooskõlalised kujutused hulkade vahel.

Näide (Matemaatiliste struktuuride kategooriad)

- **Vect $_{\mathbb{K}}$** - vektorruumid üle korpuse $\mathbb{K}$ ja lineaarkujutused;
- **Top** - topoloogilised ruumid ja pidevad kujutused;
- **Graph** - graafid ja graafide homomorfismid;
- **Pos** - osaliselt järjestatud hulgad ja järjestust säilitavad kujutused (*pos* $\sim$ *partially ordered set*).

Morfismide valik

Kui me matemaatiliste struktuuride vahelistelt kujutustelt ei nõua struktuuriga kooskõlalisust, siis kategooria vaatepunktist *ei ole see struktuur nähtav*.

Näiteks, kui võtta kategooria, kus objektid on *rühmad* ning morfismid on lihtsalt *funktsioonid*, oleksid rühmad seal kategoorias isomorfsed parajasti siis, kui nende vahel leidub suvaline bijektsioon.

Siiski, meil võib olla kategooria objektide vahel mitu erinevat valikut morfismide jaoks.

Näide (Hulkade ja seoste kategooria)

Kategooria **Rel** objektideks on hulgad ning morfismideks $X \rightarrow Y$ on seosed, ehk hulga $X \times Y$ alamhulgad.

Nõnda morfisme muutes võivad kategooria omadused samuti tunduvalt muutuda.

Kategooriate näiteid: *meetrilised ja Banachi ruumid*

Näide (Banachi ruumide kategooria **Ban**)

Banachi ruumide kategooria **Ban** morfismideks on normiga ≤ 1 operaatorid. Morfismideks võib võtta ka kõik pidevad operaatorid, aga siis kategooria omadused kannatavad.

Näide (Meetriliste ruumide kategooria **Met**)

Meetrilistel ruumidel on kategooriateooria sees eriline osa. Kategooriateooria vaatepunktist on parem, kui

- meetrilise ruumi punktide vahel on lubatud lõpmatud kaugused, ehk meetrika on funktsioon

$$\mathbf{d}: M \times M \rightarrow [0, \infty]$$

- ning morfismideks võtta 1-Lipschitz kujutused, ehk tingimust $\mathbf{d}(f(x), f(y)) \leq \mathbf{d}(x, y)$ rahuldavad kujutused.

Monomorfismid

Kuna kategoorias ei ole morfismid kujutused, vaid lihtsalt abstraktsed nooled, ei saa seal rääkida üldjuhul morfismi injektiivsuse mõistest.

Siiski, kategooria kontekstis on võimalik rääkida morfismidest, mis rahuldavad injektiivsetele kujutustele sarnaseid omadusi.

Definitsioon (Monomorfism)

Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f: A \rightarrow B$ nimetatakse **monomorfismiks**, kui iga morfismipaari $u, v: U \rightarrow A$ korral kehtib

$$f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v.$$

Lühidalt öeldes, monomorfism on *vasakult taandatav morfism*.

Monomorfismidest

Näide (Monomorfismid hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias **Set** on monomorfismideks injektiivsed kujutused.

Tegelikult, kõikide eespool vaadatud matemaatiliste struktuuride kategooriates on monomorfismid parajasti injektiivsed teisendused. Aga näiteks järjestatud hulgas, vaadatuna kategooriana, on kõik nooled monomorfismid.

Lause (Monomorfismide komponeerimisest)

Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ antud morfismid $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Siis,

- 1 kui f ja g on monomorfismid, on ka $g \circ f: A \rightarrow C$ monomorfism;
- 2 kui $g \circ f$ on monomorfism, siis ka f on monomorfism.

Isomorfismid

Definitsioon (Isomorfism)

Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $A \xrightarrow{f} B$ nimetatakse **isomorfismiks**, kui see on *pööratav*, ehk sellel leidub *pöördmorfism*. S.t. et leidub selline morfism $A \xleftarrow{g} B$, et $g \circ f = 1_A$ ja $f \circ g = 1_B$.

- Morfismi f pöördmorfismi (kui see leidub) tähistatakse kirjutisega f^{-1} .
- Kui leidub isomorfism $A \rightarrow B$, siis öeldakse, et A ja B on **isomorfsed** objektid. Objektide A ja B isomorfsust väljendatakse kirjutisega $A \cong B$.

Lause (Isomorfismide klassi komponeerimise suhtes kinnisus)

Isomorfismide kompositsioon on isomorfism.

Lause (Isomorsus on ekvivalentsiseos)

Isomorfsus on kategooria objektide klassil ekvivalentsiseos.

Isomorfsed objektid käituvad kategooria seisukohast täpselt ühtemoodi. Seega, kui kategoorias on kaks objekti isomorfsed, võime me neist mõelda sisuliselt kui ühest ja samast asjast, mis on ainult pealiskaudselt erinevad.

Näide (Isomorfismid hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias on isomorfismideks bijektsioonid.

Iga kaks ühe-elementilist hulka $\{a\}$ ning $\{b\}$ on hulkade kategoorias isomorfsed. *Isomorfismi täpsuseni* on kategoorias **Set** ühe-elementilisi hulki ainult üks.

Lõppobjektid

Definitsioon (Lõppobjekt)

Kategooria $\mathcal{C}$ objekti P nimetatakse **lõppobjektiks**, kui iga objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral leidub parajasti üks morfism $A \rightarrow P$.

Kategoorias võib leiduda lõppobjekte mitu, kuid isomorfismi täpsuseni leidub neid vaid üks.

Lause (Lõppobjekti unikaalsus)

Kui P ja P' on kaks kategooria $\mathcal{C}$ lõppobjekti, siis leidub (unikaalne) isomorfism $P \rightarrow P'$.

Sellest õigustatult tähistagu edaspidi $\mathbb{1}$ kategooria mingit suvaliselt valitud lõppobjekti (kui see leidub).

Lõppobjekti näiteid

Näide (Lõppobjektid hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias on iga ühe-elementiline hulk lõppobjektiks.

Samal põhjusel on tihti ühe-elementiline struktuur lõppobjektiks matemaatiliste struktuuride kategooriates.

Näide (Lõppobjektid algebralise struktuuride kategooriates)

Kategooriates $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$, $\mathbf{Grp}$, $\mathbf{Top}$, $\mathbf{Met}$ on lõppobjektiks ühe-elementiline struktuur. Kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ oleks see näiteks null-vektorrühm $\{0\}$.

Piisab sellest, et ühe-elementiline struktuur eksisteeriks, ning et sinna suunduvad kujutused oleksid struktuuride morfismiks.

Duaalsus ja algbjekt

Duaalsed definitsioonid

Igal kategooria kontekstis tehtud definitsioonil on olemas *duaalne* definitsioon, mis on saadud definitsioonis kõik nooled ümber pöörates. Lõppobjekti definitsioonis nooled ümber pöörates saame *algbjekti* definitsiooni.

Definitsioon (Algbjekt)

Kategooria $\mathcal{C}$ objekti P nimetatakse **algbjektiks**, kui iga objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral leidub parajasti üks morfism $A \leftarrow P$.

Tavaliselt järjestatakse ka definitsioonis natukene asju ringi, ning kohandatakse tähistusi.

Definitsioon (Algbjekt, uuesti, aga samaväärselt)

Kategooria $\mathcal{C}$ objekti Q nimetatakse **algbjektiks**, kui iga objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral leidub parajasti üks morfism $Q \rightarrow A$.

Duaalsus ja alobjekt

Duaalsuse suur pluss on, et igast esialgse definitsiooni kohta tõestatud tulemusest järeldub automaatselt duaalse definitsiooni jaoks duaalne tulemus, mis on saadud tulemuses nooli ümber pöörates.

Lause (Algobjekti unikaalsus)

Kui Q ja Q' on kaks kategooria $\mathcal{C}$ alobjekti, siis leidub (unikaalne) isomorfism $Q \rightarrow Q'$.

Seega, analoogiliselt lõppobjektiga, on õigustatud sümboli $\mathbb{0}$ sisetoomine alobjekti tähistamiseks.

Algobjekti näited

Näide (Algobjekt kategoorias **Set**)

Hulkade kategoorias **Set** on algobjektiks tühi hulk $\emptyset$.

Kui kaalutavate matemaatiliste struktuuride kategooriasse kuulub tühi hulk koos triviaalse struktuuriga, nagu juhtub näiteks kategooriates **Met**, **Top** või **Pos**, siis on see tühi struktuur tolles kategoorias algobjektiks. Kui meie matemaatilise struktuuri definitsiooniga käib kaasa vähemalt üks konstant, siis tühja struktuuri ei leidu, ning seega kategoorias peab midagi muud algobjektiks olema.

Näide (Algobjektid algebraliste struktuuride kategooriates)

- Kategoorias **Vect** _{$\mathbb{R}$} on algobjektiks null-vektorrum $\{0\}$,
- rühmade kategoorias **Grp** on algobjektiks rühm $\{1\}$,
- ringide kategoorias **Ring** on algobjektiks ring $\{0, 1\}$.

Epimorfismid

Dualiseerides monomorfismi mõiste, saame *epimorfismi* mõiste.

Definitsioon (Epimorfism)

Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f: A \rightarrow B$ nimetatakse **epimorfismiks**, kui iga morfismipaari $u, v: B \rightarrow V$ korral kehtib

$$u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v.$$

Lühidalt öeldes, epimorfism on *paremalt taandatav morfism*.

Epimorfismi võib vaadata kui sürjektiivsuse ühte üldistust. Praktikas ei pruugi enamuses matemaatiliste struktuuride kategooriates epimorfismid sürjektiivsed olla, kuid teatud kujutise kattev olemist epimorfsus siiski karakteriseerib.

Siit näeb, et sürjektiivsus ja injektiivsus on teatud mõttes duaalsed omadused.

Epimorfismidest

Lause (Epimorfismide komponeerimisest)

Olgu kategoorias $\mathcal{C}$ antud morfismid $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$. Siis,

- 1 kui f ja g on epimorfismid, on ka $g \circ f: A \rightarrow C$ epimorfism;
- 2 kui $g \circ f$ on epimorfism, siis ka g on epimorfism.

Kui kategooria morfismideks on (struktuuriga kooskõlalised) kujutused, siis iga sürjektiivne kujutus on epimorfism, kuid vastupidine üldjuhul ei kehti.

Näide (Sürjektiivsed ja mitte-sürjektiivsed epimorfismid)

- Epimorfismid on sürjektiivsed kategooriates **Set**, **Pos**, **Top**, **Vect** _{$\mathbb{R}$} ja **Grp**, aga ei pruugi olla monoidide kategoorias.
- Banachi ruumide kategoorias **Ban** ning ka Hausdorffi ruumide kategoorias **Top**_{Haus} vastab epimorfsus aga hoo-piski kujutise tihedusele.

Diagrammid

Väga üldises mõistes, **diagramm** kategoorias $\mathcal{C}$ on illustreeriv pilt (teatud üldises mõttes graaf), mida kasutame kategooria kontekstis andmete esitamiseks, et oleks näha milliste objektide vahel morfismid paiknevad. Natuke täpsemalt, diagramm on graaf, kus tipud kannavad kategooria objektide nimesid ning nooled kannavad kategooria morfismide nimesid. Näiteks saame vaadata diagrammi

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{v} & B & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{f} \end{array} & D \\ & \nwarrow h & \uparrow u & & \\ & & C & & \end{array}$$

Tulevikus, kui toome sisse *funktori* mõiste, saame rääkida diagrammidest natukene kitsamas ja täpsemas tähenduses.

Diagrammi kommuteerumine

Diagrammi kommuteerumine tähendab, et kui graafis noolte komponeerimisel saame kaks paralleelset noolt, on kompositsioonid võrdsed. Näiteks ruudu

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ C & \xrightarrow{w} & D \end{array}$$

kommuteerumine tähendab, et $w \circ h = g \circ f$, kuna need mõlemad on paralleelsed nooled $A \rightarrow D$ ning kolmnurga

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & C \end{array}$$

kommuteerumine tähendab, et $g \circ f = h$.

Üldise kategooria kontekstis saab anda objektide korrutise mõiste hulkade ja funktsioonide diagrammi

$$X \xleftarrow{x \mapsto (x,y)} X \times Y \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} Y$$

omadusi kategooriate keeles iseloomustades.

Definitsioon (Korrutis)

Kategooria $\mathcal{C}$ objekti P koos kahe morfismiga $p_A: P \rightarrow A$ ja $p_B: P \rightarrow B$ nimetatakse objektide A ja B **korrutiseks** kategoorias $\mathcal{C}$, kui diagramm

$$A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} B$$

on universaalne selles mõttes, et suvalise teise diagrammi

$$A \xleftarrow{u_A} U \xrightarrow{u_B} B$$

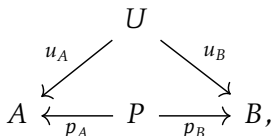
korral leidub parajasti üks morfism $m: U \rightarrow P$, mis rahuldab tingimusi

$$p_A \circ m = u_A \quad \text{ja} \quad p_B \circ m = u_B.$$

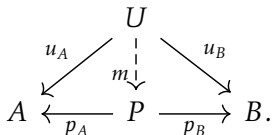
$m \sim \text{mediator}$

Korrutise definitsioon diagramme kasutades

Diagramme saame siin definitsiooni juures kasutada järgmiselt. Korrutise definitsiooni alguses ette antud andmeid saame illustreerida diagrammiga



mis esitab olukorda, kus meil on korrutise diagramm ja mingi teine diagramm, ning oleks tarvis kuidagi neid võrrelda. Korrutise definitsioon ütleb nüüd, et nende *sisendandmete* juures tekib meil *väljundina* nool $m: U \rightarrow P$, mida illustreerime diagrammiga

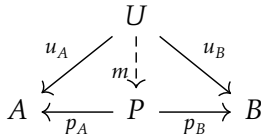


Korrutise definitsioon diagramme kasutades

Viimaks, tingimusi

$$p_A \circ m = u_A \quad \text{ja} \quad p_B \circ m = u_B$$

väljendame öeldes, et diagramm



kommuteerub, mis siin tähendab nende kahe kolmnurga kommuteerumist.

Korrutise definitsioon diagramme kasutades

Saame nüüd selle kõik uuesti kokku võtta esitades korrutise definitsiooni sissetoodud tähistusi kasutades.

Definitsioon (Korrutis)

Kategoorias $\mathcal{C}$ on objektide A ja B korrutis kolmik (P, p_A, p_B) , kus $A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} B$, mis rahuldab tingimust, et iga teise kolmiku (U, u_A, u_B) korral, kus $A \xleftarrow{u_A} U \xrightarrow{u_B} B$, leidub unikaalne morfism $m: U \rightarrow P$, mis paneb diagrammi

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow u_A & \downarrow m & \searrow u_B & \\ A & \xleftarrow{p_A} & P & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

kommuteeruma.

Korrutis on morfismide paaripanija

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow u_A & \downarrow m & \searrow u_B & \\ A & \xleftarrow{p_A} & P & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

Korrutise antud vastavusest, mis konstrueerib morfismipaarist

$$A \xleftarrow{u_A} U \xrightarrow{u_B} B$$

noole $m: U \rightarrow P$, mõtleme kui operatsioonist, mis võtab nooled u_A ja u_B , ning paneb need paari üheks nooleks $m: U \rightarrow P$. Seega tähistatakse tihti peale noolt m paari tähistust (u_A, u_B) kasutades.

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \swarrow u_A & \downarrow (u_A, u_B) & \searrow u_B & \\ A & \xleftarrow{p_A} & P & \xrightarrow{p_B} & B \end{array}$$

Korrutise isomorfismi täpsuseni üheselt määratus

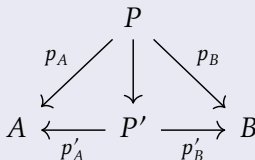
Kategooria objektide korrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Lause (Korrutise isomorfismini üheselt määratus)

Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on

$$A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} B \quad \text{ning} \quad A \xleftarrow{p'_A} P' \xrightarrow{p'_B} B$$

mõlemad objektide A ja B korrutised, siis leidub isomorfism $P \rightarrow P'$.
Veelgi täpsemalt, see isomorfism on üheselt määratud, kui nõuame, et see paneks diagrammi



kommuteeruma.

Tähistused korrutise jaoks

Kuna korrutis on isomorfismi täpsuseni üheselt määratud, siis nagu lõppobjekti ning algobjekti puhul tegime, toome sisse tähise $A \times B$ objekti P jaoks.

Kui räägime kategooria objektide A ja B korrutisest $A \times B$, siis see alati käib kaasas koos *projektsioonidega*

$$A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B.$$

Kategooriateooria vaatepunktist on projektsioonid p_A ja p_B korrutise juures olulisemad, kui objekt $A \times B$ ise.

Siiski, mugavuse mõttes räägime aeg-ajalt siiski ainult objektist $A \times B$ kui A ja B korrutisest, aga vaikimisi mõistame, et objektiga $A \times B$ käivad siiski kaasas ka projektsioonid.

Korrutise leidumisest

Suvalise kategooria $\mathcal{C}$ ja suvaliste objektide A ja B puhul ei pruugi leiduda morfisipaari $A \xleftarrow{p_A} A \times B \xrightarrow{p_B} B$, mis rahuldaks korrutise definitsioonis nõutud tingimust.

Seega, suvalises kategoorias ei pruugi korrutisi leiduda, aga kõikides matemaatiliste struktuuride kategooriate näidetes, mida vaadanud oleme, on korrutised olemas.

Näide (Hulkade korrutised)

Hulkade kategoorias on tavaline hulkade Cartesiuse korrutis koos oma projektsioonidega ka kategooriateooria mõttes korrutiseks.

Näide (Algebraaliste struktuuride korrutised)

Algebraaliste struktuuride kategooriates on tavaliselt objektide korrutiseks Cartesiuse korrutis koos komponenthaaval defineeritud tehetega.

Veel korrutiste näiteid

Näide (Banachi ruumide ja meetriliste ruumide korrutised)

Kategoorias **Ban** on objektide A ja B korrutiseks vektorruumide korrutis $A \times B$ normiga $\|(a, b)\| = \max(\|a\|, \|b\|)$. Analoomilised näevad välja korrutised meetriliste ruumide kategoorias.

Näide (Topoloogiliste ruumide korrutis)

Kategoorias **Top** on objektide (X, τ_X) ning (Y, τ_Y) korrutis nii nagu topoloogia kursuses õpetatakse. Selleks on $(X \times Y, \tau_{X \times Y})$, kus $\tau_{X \times Y}$ on kõigi hulkade $U \times V$, kus $U \in \tau_X$, $V \in \tau_Y$, tekitatud topoloogia.

Näide (Korrutised osaliselt järjestatud hulgas)

Kui $(P, \leq)$ on osaliselt järjestatud hulk, siis sellele vastavas kategoorias $\hat{P}$ on korrutisteks alumised rajad järjestuse $\leq$ suhtes, mis võivad, või võivad mitte eksisteerida.

Korrutise omadusi

Toome sisse tähistuse $!_A^{\mathbb{1}}: A \rightarrow \mathbb{1}$ unikaalse lõppobjekti suunduva noole jaoks.

Järgmine tulemus ütleb, et lõppobjekt on korrutamise jaoks neutraalseks elemendiks.

Lause (Lõppobjektiga korrutamine)

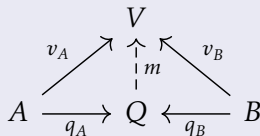
Kui kategoorias $\mathcal{C}$ on lõppobjekt $\mathbb{1}$, siis objekti $\mathbb{1}$ korrutis suvalise objektiga $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ leidub ning selleks on diagramm $\mathbb{1} \xleftarrow{!_A^{\mathbb{1}}} A \xrightarrow{1_A} A$. Seega saame kirjutada $\mathbb{1} \times A \cong A$.

Lause viimase väitena toodud kirjutis $\mathbb{1} \times A \cong A$ tuleneb sellest, et kuna kategoorias on objektide korrutis isomorfismi täpsuseni üheselt määratud, siis suvaline fikseeritud objektide A ja $\mathbb{1}$ korrutis $\mathbb{1} \leftarrow \mathbb{1} \times A \rightarrow A$ peab olema isomorfne lauses antud korrutisega $\mathbb{1} \xleftarrow{!_A^{\mathbb{1}}} A \xrightarrow{1_A} A$.

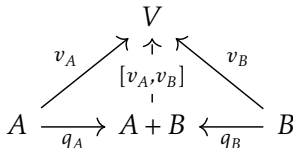
Kokorrutis

Definitsioon (Kokorrutis)

Öeldakse, et diagramm $A \xrightarrow{q_A} Q \xleftarrow{q_B} B$ kategoorias $\mathcal{C}$ on objektide A ja B **kokorrutis**, kui iga diagrammi $A \xrightarrow{v_A} V \xleftarrow{v_B} B$ korral leidub unikaalne tingimusi $m q_A = v_A$ ning $m q_B = v_B$ rahuldav nool $m: Q \rightarrow V$.



Nii nagu korrutisegi korral, toome mingi fikseeritud kokorrutise jaoks sisse tähistuse $A + B$ ning morfismi m tähistame $[v_A, v_B]$.



Kokorrutised hulkade kategoorias

Hulkade kategoorias kokorrutisteks lõikumatud ühendid.

Näide (Hulkade lõikumatu ühend kokorrutisena)

Kui hulgad X ja Y on lõikumatud, siis nende hulkade ühend $X \cup Y$ koos sisestustega $X \hookrightarrow X \cup Y \hookleftarrow Y$ on kategoorias **Set** objektide X ja Y kokorrutis.

Kokorrutise universaalomadus on täidetud funktsiooni tükiti defineerimisega.

$$\begin{array}{ccccc} & & V & & \\ & \nearrow f & \uparrow [f,g] & \nwarrow g & \\ X & \hookrightarrow & X \cup Y & \hookleftarrow & Y \end{array}$$

$$[f,g](z) := \begin{cases} f(z), & \text{kui } z \in X; \\ g(z), & \text{kui } z \in Y. \end{cases}$$

See töötab aga ainult siis, kui X ja Y on lõikumatud.

Kokorrutised hulkade kategoorias

Kui hulgad pole lõikumatud, saame siiski moodustada nende kokorrutise, asendades hulgad enne ühendi võtmist lõikumatu-
te isomorfsete versioonidega.

Näide (Hulkade kokorrutis lõikumatu ühendina)

Hulkade kategoorias **Set** on suvaliste hulkade X ja Y kokorrutiseks nende lõikumatu ühend $X \sqcup Y$ koos injeksioonidega $X \rightarrow X \sqcup Y \leftarrow Y$.

Hulkade lõpmatu lõikumatu ühend konstrueeritakse mõnikord hulgana $X \sqcup Y := \{(0, x) \mid x \in X\} \cup \{(1, y) \mid y \in Y\}$ koos injeksioonidega

$$X \xrightarrow{x \mapsto (0, x)} X \sqcup Y \xleftarrow{(1, y) \mapsto y} Y,$$

mille kujutised on lõikumatud.

Kokorrutised algebraliste struktuuride kategooriates

Näide

Vektorruumide kategoorias on vektorruumide V ja V' kokorrutiseks nende Cartesiuse korrutis $V \times V'$ koos kujutustega

$$V \xrightarrow{v \mapsto (v,0)} V \times V' \xleftarrow{(0,v') \mapsto v'} V'.$$

Analoogilised näevad kokorrutised välja Abeli rühmade kategoorias ning kommutatiivsete monoidide kategoorias.

Kokorrutise lihtne kirjeldus eelnevas näites oli suuresti tingitud algebralise struktuuri tehte kommutatiivsusest. Üldisemal juhul algebraliste struktuuride kokorrutised tavaliselt küll leiuvad, aga nende konkreetne kirjeldus on tehnilisem.

Intuiitiivselt võttes, algebrate kokorrutis on algebrate lõikumatu ühendi poolt vabalt moodustatud algebra, faktoriseeritud esialgsetes struktuurides kehtivate võrduste järgi.

Veel kokorrutiste näiteid

Näide (Banachi ruumide kokorrutised)

Kategoorias **Ban** on objektide A ja B kokorrutiseks vektorruumide korrutis $A \times B$ normiga $\|(a, b)\| = \|a\| + \|b\|$.

Näide (Meetriliste ruumide kokorrutised)

Meetriliste ruumide kokorrutis on nende lõikumatu ühend, kus eri komponentides olevate elementide vahel kaugus on ∞ .

Näide (Topoloogiliste ruumide kokorrutis)

Kategoorias **Top** on objektide (X, τ_X) ning (Y, τ_Y) kokorrutiseks ruumide lõikumatu ühend $(X \sqcup Y, \tau_{X \sqcup Y})$, kus $U \in \tau_{X \sqcup Y}$ parajasti siis, kui $U \cap X \in \tau_X$ ja $U \cap Y \in \tau_Y$.

Näide (Kokorrutised osaliselt järjestatud hulgas)

Kui $(P, \leq)$ on osaliselt järjestatud hulk, siis sellele vastavas kategoorias $\hat{P}$ on kokorrutisteks ülemised rajad järjestuse $\leq$ suhtes.

Võrdust rahuldavate elementide hulk

Aeg-ajalt on tarvis vaadata võrdust rahuldavate elementide kogumit. Analüüsist tuttav näide võiks olla võrdust $\sin(x) = x$ rahuldavate reaalarvude hulk

$$E := \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = x\}.$$

Siin paneme tähele, et E on täpselt nende argumentide $x \in \mathbb{R}$ hulk, mille korral funktsioonid

$$\mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sin} \\ \xrightarrow{1_{\mathbb{R}}} \end{array} \mathbb{R}$$

kokku langevad. Kõik andmed ühele pildile kokku pannes saame diagrammi

$$E \xhookrightarrow{e} \mathbb{R} \begin{array}{c} \xrightarrow{\sin} \\ \xrightarrow{1_{\mathbb{R}}} \end{array} \mathbb{R}.$$

Seda, et E on lahendite hulk, iseloomustab võrdus $\sin e = 1_{\mathbb{R}}e$. Seda, et E on pole liiga väike (ei sisalda piisavalt lahendeid), iseloomustab universaalomadus.

Võrdsustaja

Intuitsioon matemaatiliste struktuuride kategooriates

Võrdsustaja leiab suurima alamstruktuuri, kus etteantud võrdus rahuldatud on.

Definitsioon (Võrdsustaja)

Öeldakse, et nool $E \xrightarrow{e} A$ kategoorias $\mathcal{C}$ on morfismipaari $f, g: A \rightarrow B$ **võrdsustaja**, kui

- $fe = ge$ ning
- iga võrdust $fu = gu$ rahuldava noole $u: U \rightarrow A$ korral leidub unikaalne tingimust $em = u$ rahuldav nool $m: U \rightarrow E$.

$$\begin{array}{ccccc} U & & & & \\ \downarrow m & \searrow u & & & \\ E & \xrightarrow{e} & A & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} & B \end{array}$$

Võrdustaja näited

Näide (Võrdsustajad kategoorias **Set**)

Kui $f, g: X \rightarrow Y$ on funktsioonid, siis nende võrdsustaja kategoorias **Set** on alamhulga $E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$ sisestus.

$$E \xhookrightarrow{e} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

Sama või sarnane võrdsustaja konstruktsioon kehtib tihtipeale ka matemaatiliste struktuuride kategooriates, kuna E saab olema kanoonilisel viisil alamstruktuur.

Näide (Lineaarkujutuse tuum võrdsustajana)

Kui $f: A \rightarrow B$ on morfism kategoorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ ning $0: A \rightarrow B$ on konstantselt null kujutus, siis f ja 0 võrdsustaja on lineaarkujutuse f tuum $\ker(f) := \{x \in A \mid f(x) = 0\}$.

Võrdsustajad ja monomorfismid

Lause

Kui morfism $e: E \rightarrow A$ kategoorias $\mathcal{C}$ on mingi morfismipaari $f, g: A \rightarrow B$ võrdsustaja, siis e on monomorfism.

Sellisel kujul monomorfismid on piisavalt olulised, et omaette nime kanda. Morfismi, mis on mingi morfismipaari võrdsustaja, nimetatakse **regulaarseks monomorfismiks**.

Matemaatiliste struktuuride kategooriates kipuvad regulaarsed monomorfismid olema alamstruktuuride sisestused.

Näide

- Algebraliste struktuuride kategooriates on tavaliselt kõik monomorfismid regulaarsed (kuna iga morfismi kujutis on alamstruktuur).
- Kategooriates **Pos** ning **Top** ainult alamstruktuuride sisestused regulaarsed monomorfismid.

Võrdsustaja isomorfismi täpsuseni üheselt määratus

Nii nagu ka eelnevate universaalomadusega antud konstruktsioonide puhul, on ka võrdsustaja isomorfismi täpsuseni üheselt määratud.

Lause (Võrdsustaja isomorfismi täpsuseni üheselt määratus)

Kui $e: E \rightarrow A$ ja $e': E' \rightarrow A$ on morfismipaari $f, g: A \rightarrow B$ võrdsustajad, leidub isomorfism $E \rightarrow E'$. Lisaks, kui nõuda isomorfismilt kolmnurga

$$\begin{array}{ccc} E & & \\ \downarrow & \searrow e & \\ E' & \xrightarrow{e'} & A \end{array}$$

kommuteeruma panemist, on isomorfism üheselt määratud.

Kovõrdsustaja

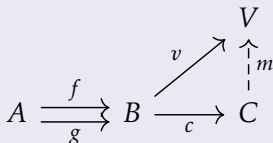
Intuitsioon matemaatiliste struktuuride kategooriates

Kovõrdsustaja leiab suurima faktorstruktuuri, kus etteantud võrdus rahuldatud on.

Definitsioon (Kovõrdsustaja)

Õeldakse, et nool $B \xrightarrow{c} C$ kategoorias $\mathcal{C}$ on morfismipaari $f, g: A \rightarrow B$ **kovõrdsustaja**, kui

- $cf = cg$ ning
- iga võrdust $vf = vg$ rahuldava noole $v: B \rightarrow V$ korral leidub unikaalne tingimust $mc = v$ rahuldav nool $m: C \rightarrow V$.



Kovõrdsustajad hulkade kategoorias **Set**

Näide (Kovõrdsustajad kategoorias **Set**)

Kujutuste $f, g: X \rightarrow Y$ kovõrdsustaja kategoorias **Set** on faktorhulga $Y/\sim$ faktorkujutus

$$\pi_{\sim}: Y \rightarrow Y/\sim, \quad y \mapsto [y],$$

kus $\sim$ on vähim tingimust

$$\forall x \in X. f(x) \sim g(x)$$

rahuldav ekvivalentsiseos hulgal Y ning $[y]$ on elemendi y ekvivalentsiklass.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \xrightarrow{\pi_{\sim}} Y/\sim$$

Võime kujutustepaarist $f, g: X \rightarrow Y$ mõelda kui hulga X elementide $x \in X$ poolt parametrizeeritud samasuste $f(x) \sim g(x)$ hulgast, mille kehtimist hulgas Y soovime.

Algebraliste struktuuride kovõrdsustajad

Näide (Algebraliste struktuuride kovõrdsustajad)

Algebraliste struktuuride kategooriates on kovõrdsustajad sarnased hulkade juhule, aga peame võtma hoopis väikseima tingimusi $f(x) \sim g(x)$ rahuldava *kongruentsi*.

Näide (Alamvektorrühmi järgi faktoriseerimine)

Kui W on vektorruumi V alamruum, siis sisestuse $W \hookrightarrow V$ ning konstantselt null kujutuse $0: W \rightarrow V$ kovõrdsustajaks on faktorruum V/W koos faktorkujutusega $V \rightarrow V/W$.

Näide (Täisarvud mooduli n järgi)

Kui $\mathbb{Z}$ on täisarvude aditiivne rühm, siis iga naturaalarvu $n \geq 0$ korral on rühmade kategoorias morfismide

$$\mathbb{Z} \begin{array}{c} \xrightarrow{x \mapsto nx} \\ \xrightarrow{x \mapsto x} \end{array} \mathbb{Z}$$

kovõrdsustajaks on rühm $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ koos faktorkujutusega $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$.

Seose järgi faktoriseerimine

Nägime, et kovõrdsustaja toomis näidetes faktoriseerimise operatsioonina. Vaatame täpsemalt, kuidas saab ekvivalentsiseose järgi faktorhulga võtmist kovõrdsustajana kirjeldada.

Olgu $R \subseteq X \times X$ hulgal X antud ekvivalentsiseos. Alamhulga R sisestust $R \hookrightarrow X \times X$ saame korrutise projektsioonidega $p_1, p_2: X \times X \rightarrow X$ komponeerida, mis annab meile morfismipaari

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{(x,y) \mapsto x} \\ \xrightarrow{(x,y) \mapsto y} \end{array} X.$$

Selle morfismipaari kovõrdsustaja hulkade kategoorias ongi faktorkujutus $\pi_R: X \rightarrow X/R$.

Siin saab panna tähele, et kovõrdsustaja otseselt ei hooli sellest, kas seos R on ekvivalentsiseos või mitte. (Kuna kovõrdsustaja faktoriseerib seose R indutseeritud ekvivalentsiseose järgi.)

Seosed kategooriate kontekstis

Eelnevast skeemist motiveerituna võib kategooria $\mathcal{C}$ suvalisest morfismipaarist $r_1, r_2: R \rightarrow A$, mille kovõrdsustajat tahame võtta, mõelda kui teatud kujul antud seosest objektil A .

Tõepoolest, kui meie kategoorias on korrutised, siis saame korrutise universaalomadusega morfismid r_1 ja r_2 paari panna

$$\begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & \swarrow r_1 & \downarrow (r_1, r_2) & \searrow r_2 & \\ A & \xleftarrow{p_1} & A \times A & \xrightarrow{p_2} & A \end{array}$$

morfismiks $(r_1, r_2): R \rightarrow A \times A$. Kui (r_1, r_2) on monomorfism, ongi meil sisuliselt tegemist seosega tavalises mõttes.

Teistpidi, iga noolt $r: R \rightarrow A \times A$ saame korrutise projektsioonidega komponeerides teha morfismipaariks $r_1, r_2: R \rightarrow A$.

Seose morfismipaarina esitamine on meile mugavam.

Regulaarsed epimorfismid

Lause

Kui morfism $c: B \rightarrow C$ kategoorias $\mathcal{C}$ on mingi morfismipaari $f, g: A \rightarrow B$ kovõrdsustaja, siis c on epimorfism.

Morfismi, mis on mingi morfismipaari kovõrdsustaja, nimetatakse **regulaarseks epimorfismiks**.

Matemaatiliste struktuuride kategooriates kipuvad regulaarsed epimorfismid olema kanoonilised pealekujutused $A \rightarrow A/\sim$ faktorstruktuuridele, ehk *faktorkujutused* (quotient map).

Näide

- Algebraaliste struktuuride kategooriates on tavaliselt sürjektsioonid regulaarseteks epimorfismideks.
- Kategooriates **Pos** ning **Top** sürjektiivusest ei piisa et olla faktorkujutus, seega leidub mitte-regulaarseid epimorfisme.

Tagasitõmbaja

Tagasitõmbaja on mitmeotstarbeline tööriist, millega saab näiteks

- arvutada morfismi tuuma (seosena),
- arvutada alamobjektide originaale,
- arvutada ühisosasid.

Tagasitõmbajat võib vaadata ka operatsioonina, mis teeb diagrammist kujul $A \rightarrow C \leftarrow B$ kommutatiivse ruudu universaalsel viisil.

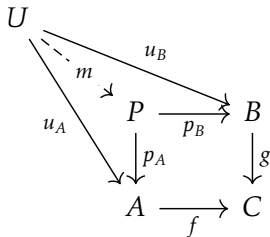
$$\begin{array}{ccccc} & B & & P & \longrightarrow & B \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\quad} & A & \longrightarrow & C \end{array}$$

Tagasitõmbaja definitsioon

Definitsioon

Morfismipaari $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ **tagasitõmbajaks** kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse morfismipaari $A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} B$, mille korral

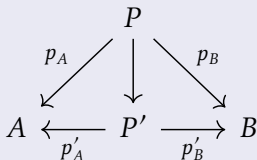
- $f p_A = g p_B$ ning
- iga tingimust $f u_A = g u_B$ rahuldava morfismipaari $A \xleftarrow{u_A} U \xrightarrow{u_B} B$ korral leidub parajasti üks tingimusi $p_A m = u_A$ ja $p_B m = u_B$ rahuldav morfism $m: U \rightarrow P$.



Tagasitõmbajate ühesus

Lause

Kui $A \xleftarrow{p_A} P \xrightarrow{p_B} B$ ning $A \xleftarrow{p'_A} P' \xrightarrow{p'_B} B$ on kategoorias $\mathcal{C}$ morfismi-paari $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ tagasitõmbajad, siis leidub isomorfism $P \rightarrow P'$. See isomorfism on unikaalne, kui sellelt lisaks nõuda diagrammi



kommuteeruma panemist.

Tagasitõmbajate tähistustest

Kui ruut

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & B \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A & \longrightarrow & C \end{array}$$

rahuldab tagasitõmbaja universaalomadust, s.t. $A \leftarrow P \rightarrow B$ on nooltepaari $A \rightarrow C \leftarrow B$ tagasitõmbaja, nimetatakse seda ruutu **tagasitõmbamisruuduks** või **tagasitõmbaja ruuduks**. Selle tähistamiseks pannakse kohati ka ruudu sisse tagasitõmbaja objekti juurde väike nurga sümbol.

Tagasitõmbajad hulkade kategoorias

Näide (Tagasitõmbaja hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias **Set** on morfismide $X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ tagasitõmbajaks hulk $P := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ koos projektsioonidega

$$X \xleftarrow{x \mapsto (x, y)} P \xrightarrow{(x, y) \mapsto y} Y.$$

Sama tagasitõmbaja esitus töötab tavaliselt ka teistes matemaatiliste struktuuride kategooriates, kus P saab endale lisaks loomulikult indutseeritud struktuuri.

Näide (Funktsiooni tuum tagasitõmbajana)

Kui võtame kategoorias **Set** funktsioonide $X \xrightarrow{f} Y \xleftarrow{f} X$ tagasitõmbaja, siin on selleks hulk $\{(x, y) \in X \times X \mid f(x) = f(y)\}$, mis on täpselt funktsiooni f tuum, seose mõttes.

Morfismi tuumapaar

Definitsioon (Tuumapaar)

Kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f: A \rightarrow B$ **tuumapaariks** nimetatakse morfismide $A \xrightarrow{f} B \xleftarrow{f} A$ tagasitõmbajat $A \xleftarrow{k_1} K \xrightarrow{k_2} A$.

Morfismi tuumapaar on morfismipaar $k_1, k_2: K \rightarrow A$, millest mõtleme kui morfismi tuuma seosest.

Näide (Tuumapaarid hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias on funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ tuumapaari $k_1, k_2: K \rightarrow X$ paaripanemisel saadud funktsioon $K \rightarrow X \times X$ (isomorfismi täpsuseni) selle funktsiooni (seose mõttes) tuuma alamhulgana sisestus.

Morfismi tuumapaar on alati teatud kategoorises mõttes ekvivalentsiseos, kuid selle väite täpne tähendus meie kursuse raamesse ei mahu.

Monomorfismide äratundmine kasutades tuumapaare

Morfism $f: X \rightarrow Y$ on injektiivne parajasti siis, kui selle tuumaks on diagonaalseos

$$\{(x, y) \mid x, y \in X, f(x) = f(y)\} = \ker(f) = \Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Suvalise kategooria $\mathcal{C}$ objekti A jaoks on diagonaalseoseks morfismipaar $1_A, 1_A: A \rightarrow A$, mida korrutisega paari pannes saame

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \swarrow 1_A & \downarrow (1,1) & \searrow 1_A & \\ A & \xleftarrow{p_1} & A \times A & \xrightarrow{p_2} & A. \end{array}$$

Diagonaalmorfismi $A \rightarrow A \times A$ tähistatakse mõnikord ka Δ .

Lause (Monomorfismid ja triviaalsed tuumapaarid)

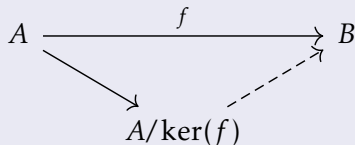
Kategooria $\mathcal{C}$ morfism $f: A \rightarrow B$ on monomorfism parajasti siis, kui selle tuumapaariks on $A \xleftarrow{1_A} A \xrightarrow{1_A} A$.

Nõrk Homomorfismiteoreem

Tähistagu $\ker(f)$ morfismi f tuumapaari ning $A/\ker(f)$ tuumapaari kovõrdsustajat.

Lause

Kui morfismil $f: A \rightarrow B$ leidub tuumapaar, ning sellel tuumapaaril leidub kovõrdsustaja $A \rightarrow A/\ker(f)$, siis morfism f faktoriseerub unikaalselt läbi kovõrdustaja $A \rightarrow A/\ker(f)$.



Lisaks, morfismi f tuumapaar on ka kovõrdsustaja $A \rightarrow A/\ker(f)$ tuumapaariks.

Lauses antud $A/\ker(f) \rightarrow B$ ei pruugi olla monomorfism, kuigi algebrate kategooriates see monomorfismiks on.

Tagasitõmbaja kasutamine originaali arvutamisel

Näide

Olgu $f: X \rightarrow Y$ morfism hulkade kategoorias **Set** (s.t. funktsioon $X \rightarrow Y$) ning olgu Z hulga Y alamhulk. Siis saame vaadata alamhulga sisestust $Z \hookrightarrow Y$ ning moodustada diagrammi

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \xrightarrow{f|_{f^{-1}(Z)}} & Z \\ \subseteq \downarrow & \lrcorner & \downarrow \subseteq \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

mis on hulkade kategoorias tagasitõmbamisruut.

Eelnevas diagrammis tähistab $f|_{f^{-1}(Z)}$ funktsiooni f ahendit hulgale $f^{-1}(Z)$.

Alamobjektid

Hulkade puhul saame rääkida alamhulkadest, ning matemaatiliste struktuuride korral saame tavaliselt rääkida alamstruktuuridest.

Võttes alamstruktuuri iseloomustuseks selle, et see peaks tulema koos sisestuskujutusega, saame suvalise kategooria $\mathcal{C}$ objekti A alamobjekte modelleerida nooltena $U \rightarrow A$.

Definitsioon (Alamobjekt)

Olgu A kategooria $\mathcal{C}$ objekt. Monomorfisme $U \rightarrow A$ nimetame objekti A **alamobjektideks**.

Monomorfimide tähistamiseks kasutatakse mõnikord ka noolt $A \rightharpoonup B$. Eriti siis, kui mõtleme neist, kui alamobjektidest.

Alamobjekti originaali arvutamine tagasitõmbajatega

Järgmine lause näitab, et tagasitõmbajaid saab kasutada kategoorias alamobjekti originaali leidmiseks.

Lause

Olgu $f: A \rightarrow C$ kategooria $\mathcal{C}$ suvaline morfism ning olgu $g: B \rightarrow C$ monomorfism. Kui

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_B} & B \\ p_A \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

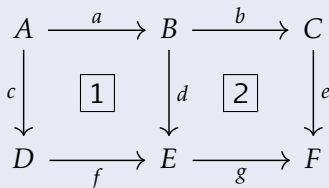
on tagasitõmbamisruut, on ka $p_A: P \rightarrow A$ monomorfism.

Tagasitõmbamisruutude kleepimine

Tuleb välja, et tagasitõmbamisruute saab kleepida.

Lause

Kui ruudud $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ on tagasitõmbamisruudud on ka kleepimisel saadud ruut $\boxed{1} \boxed{2}$ tagasitõmbamisruut.



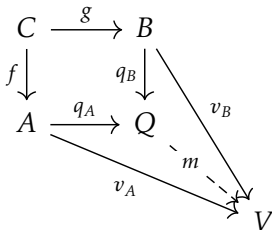
Kehtib ka osaline vastupidine väide. Kui $\boxed{1} \boxed{2}$ on tagasitõmbamisruut ning $\boxed{2}$ on tagasitõmbamisruut, on ka $\boxed{1}$ tagasitõmbamisruut.

Väljatõukaja definitsioon

Definitsioon

Morfismipaari $A \xleftarrow{f} C \xrightarrow{g} B$ **väljatõukajaks** kategoorias $\mathcal{C}$ nimetatakse morfismipaari $A \xrightarrow{q_A} Q \xleftarrow{q_B} B$, mille korral

- $q_A f = q_B g$ ning
- iga tingimust $v_A f = v_B g$ rahuldava morfismipaari $A \xrightarrow{v_A} V \xleftarrow{v_B} B$ korral leidub parajasti üks tingimusi $m q_A = v_A$ ja $m q_B = v_B$ rahuldav morfism $m: Q \rightarrow V$.



Väljatõukajate tähistustest

Kui ruut

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Q \end{array}$$

rahuldab väljatõukaja universaalomadust, s.t. $A \rightarrow Q \leftarrow B$ on nooltepaari $A \leftarrow C \rightarrow B$ väljatõukaja, nimetatakse seda ruutu **väljatõukamisruuduks** või **väljatõukaja ruuduks**. Selle tähistamiseks pannakse kohati ka ruudu sisse väljatõukaja objekti juurde väike nurga sümbol.

Väljatõukajad hulkade kategoorias

Näide (Tagasitõmbaja hulkade kategoorias)

Hulkade kategoorias **Set** on morfismide $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ väljatõukajaks hulk $Q := (X \sqcup Y)/\sim$ koos kujutustega

$$X \xrightarrow{x \mapsto [x]} Q \xleftarrow{[y] \mapsto y} Y,$$

kus $\sim$ on vähim tingimust

$$\forall z \in Z. f(z) \sim g(z)$$

rahuldav ekvivalentsiseos hulgal $X \sqcup Y$.

Siit näeme, et kategoorias **Set** on väljatõukaja nagu kokorutis (lõikumatu ühend), aga teatud elemendid samastatakse. Võime väljatõukajast mõelda kui lõikumisega kleepimisest, kus morfismid $X \leftarrow Z \rightarrow Y$ kirjeldavad kuidas X ja Z kleepida tuleks.

Lõikumisega ühendid hulkade kategoorias

Näide (Lõikumisega ühend)

Olgu X ja Y suvalised hulgad, $X \cap Y$ nende ühisosa ning $X \cup Y$ nende (lõikumisega) ühend. Siis alamhulkade sisestuste ruut

$$\begin{array}{ccc} X \cap Y & \hookrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \hookrightarrow & X \cup Y \end{array}$$

on kategoorias **Set** väljatõukamisruut. (See ruut on tegelikult ka tagasitõmbamisruut.)

Kuna kategooria **Set** vaatepunktist on elementide ümbertähistamisel saadud hulgad isomorfsed (ehk moraalselt samad), anname diagrammiga kujul $X \hookleftarrow Z \hookrightarrow Y$ teada, et Z on hulkade X ja Y ühisosa. Väljatõukaja arvutabki selle diagrammi põhjal vastava lõikumisega ühendi.

Vaadatud konstruktsioonid tööriistadena

Vaadatud konstruktsioonid võimaldavad abstraktse kategooria kontekstis teha suurt osa tüüpilistest tegevustest, mis matemaatiliste struktuuride juures ette tulevad:

- struktuuride korrutamine, faktoriseerimine, kleepimine,
- originaalide ja ühisosade võtmine,
- alamobjektide ja seostega arvutamine.

Kategooriaid saab klassifitseerida selle järgi, kuidas need tüüpilised operatsioonid käituvad. Vastavalt sellele võib kategooria olla parem ühe või teise teooria arendamiseks.

Näiteks vaatame kursuse lõpupoole põgusalt Abeli kategooriad, kus on nullobjekt (s.t. algobjekt on ka lõppobjekt) ning kus korrutised ja kokorrutised teatud mõttes kokku langevad. Abeli kategooriat võib vaadata lineaaralgebra üldistusena.

Korrutiste, võrdsustajate ja tagasitõmbajate juurde tuleme tagasi siis, kui teemaks tuleb *piiri* mõiste, mille erijuhuna neid kolme konstruktsiooni vaadata saab.

Et saaksime sellise ühendava vaatepunkti võtta, peame esmalt rääkima funktoritest ja loomulikest teisendustest ning nende kohta natukene teooriat arendama.

Sissejuhatus funktoritesse

Kuna ka kategooriad on matemaatilised struktuurid, saame vaadata kategooriatevahelisi morfisme $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, mida kutsutakse *funktoriteks*.

Intuitsioon funktorite kohta

Nii nagu *funktsioon* on mingi abstraktne operatsioon hulkade vahel, siis *funktor* on mingi abstraktselt antud matemaatiline konstruktsioon, mis on kategooria struktuuriga (morfismide ja nende komponeerimisega) kooskõlas.

Selline matemaatiliste konstruktsioonide abstraktsioon võimaldab meil rangelt konstruktsioone omavahel võrrelda, kasutades *loomulikke teisendusi*.

Universaalomadustega antud konstruktsioonid, nagu eelnevalt vaatasime, on üks funktorite ning loomulike teisenduste allikas.

Funktori definitsioon

Definitsioon (Funktor)

Kui $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on kategooriad, siis **funktor** $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ koosneb

- (suurte hulkade) kujutusest

$$\text{Ob}(F): \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D}),$$

kusjuures $\text{Ob}(F)(A)$ asemel kirjutame lihtsalt $F(A)$ ning

- iga $A, B \in \mathcal{C}$ korral antud kujutusest

$$F_{A,B}: \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{D}(F(A), F(B)),$$

kus $F_{A,B}(f)$ asemel kirjutame lihtsalt $F(f)$.

Need operatsioonid peavad rahuldama tingimusi

- $F(gf) = F(g)F(f)$ iga kategooria $\mathcal{C}$ komponeeritava morfismipaari $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ korral ning
- $F(1_A) = 1_{F(A)}$ iga objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral.

Funktorid säilitavad kommutatiivseid diagramme

Funktori $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ kujutus $\text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$ ning kujutuste pere $(F_{A,B})_{A,B \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$ võimaldavad kujutada diagramme kategoorias $\mathcal{C}$ diagrammideks kategoorias $\mathcal{D}$, diagrammi igale elemendile funktorit rakendades.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow i \\ C & \xrightarrow{h} & D \end{array} \xrightarrow{j} E \quad \mapsto \quad \begin{array}{ccccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & & \\ F(g) \downarrow & & \downarrow F(i) & & \searrow F(j) \\ F(C) & \xrightarrow{F(h)} & F(D) & \xrightarrow{F(k)} & F(E) \end{array}$$

Funktori komponeerimisega kooskõla annab lisaks selle, et kommutatiivsed diagrammid kujutuvad kommutatiivseteks diagrammideks.

Funktorite näiteid

Näide (Ühikfunktor)

Iga kategooria $\mathcal{C}$ korral leidub ühikfunktor $1_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$,

Näide (Konstantsed funktorid)

Kui $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ on kategooriad ning D on mingi kategooria $\mathcal{D}$ fikseeritud objekt, saame vaadata konstantset funktorit $\text{const}_{\mathcal{D}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, mis viib kõik kategooria $\mathcal{C}$ objektid objektiks D ning kõik kategooria $\mathcal{C}$ morfismid morfismiks 1_D .

Näide (Järjestust säilitavad kujutused)

Kui P ja P' on osaliselt järjestatud hulgad ning $\hat{P}$ ja $\hat{P}'$ on neile vastavad kategooriad, siis järjestust säilitavad kujutused $P \rightarrow P'$ vastavad täpselt funktoritele $\hat{P} \rightarrow \hat{P}'$.

Funktorite näiteid

Näide (Vaba vektorruum hulgal X)

Kui X on hulk, siis saame konstrueerida vektorruumi

$$\mathbb{R}[X] := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{supp}(f) < \infty\},$$

kus tehted on punktiviisiliselt defineeritud. See konstruktsioon annab *vaba vektorruumi funktori* $\mathbb{R}[-] : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Näide (Hulkadest Banachi ruumidesse)

Hulgast X saab konstrueerida Banachi ruumi $\ell^1(X)$. See vastavus annab funktori $\ell^1 : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Ban}$.

Näide (Hulkadest topoloogilistesse ruumidesse)

Diskreetse ja kodiskreetse topoloogilise ruumi konstruktsioonid annavad funktorid **disc**, **codisc**: $\mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Unustavad funktorid

Kui $\mathcal{C}$ on mingi matemaatiliste struktuuride kategooria, siis tavaliselt on võimalik vaadata funktooreid, mis kas kogu struktuuri, või osa struktuurist, ära unustavad.

Näide (Unustamine vektorruumidest hulka)

Saame vaadata unustavat funktorit

$$U: \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad (V, +, 0, (\lambda \cdot -)_{\lambda \in \mathbb{R}}) \mapsto V,$$

mis unustab ära vektorruumi liitmise tehte, nullelemendi, ning skalaariga korrutamise tehted, ning jätab alles ainult vektorite hulga.

Näide (Unustamine vektorruumidest Abeli rühmas)

Saame vaadata unustavat funktorit

$$U: \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Ab}, \quad (V, +, 0, (\lambda \cdot -)_{\lambda \in \mathbb{R}}) \mapsto (V, +, 0),$$

mis unustab ära ainult vektorruumi skalaariga korrutamise tehted, ning jätab alles vektorite aditiivse Abeli rühma.

Alamkategoriad ja nende sisestused

Definitsioon (Alamkategooria)

Kategooriat $\mathcal{D}$ nimetatakse kategooria $\mathcal{C}$ alamkategooriaks, kui $\text{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \text{Ob}(\mathcal{C})$ ning iga $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ korral $\mathcal{D}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$.

Kui $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{D})$ korral $\mathcal{D}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$, siis öeldakse, et $\mathcal{D}$ on **täielik** alamkategooria.

Konstruktsioon (Alamkategooria sisestusfunktor)

Kui $\mathcal{D}$ on kategooria $\mathcal{C}$ alamkategooria, siis saame vaadata sisestusfunktorit $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$.

Näide (Abeli rühmad kõigi rühmade seas)

Abeli rühmade kategooria **Ab** on rühmade kategooria **Grp** täielik alamkategooria.

Mitte-täieliku alamkategooria mõiste pole praktikas eriti hästi käituv ning seda on soovitatav vältida.

Nooli ümber pööravad konstruktsioonid

Kohati tuleb ette konstruktsioone, mis pööravad noolte suuna ümber. See tähendab, et morfismile $X \rightarrow Y$ saab seatud vastavusse morfism $F(X) \leftarrow F(Y)$.

Näide (Alamhulkade hulk ning originaali võtmine)

Igale hulga X saame seada vastavusse selle hulga kõigi alamhulkade hulga $\mathcal{P}(X)$. Kujutus $f: X \rightarrow Y$ indutseerib originaali võtmise kujutuse

$$\mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad U \mapsto f^{-1}(U) := \{x \in X \mid f(x) \in U\}.$$

Näide (ℓ^∞ konstruktsioon)

Igast hulgast X saab konstrueerida Banachi ruumi $\ell^\infty(X)$. Kujutus $f: X \rightarrow Y$ indutseerib morfismi

$$\ell^\infty(Y) \rightarrow \ell^\infty(X), \quad (\lambda_y)_{y \in Y} \mapsto (\lambda_{f(x)})_{x \in X}.$$

Duaalsed kategooriad

Et sellised morfisme ümber pööravaid konstruktsioone saaks funktoritena vaadata, toome sisse duaalse kategooria mõiste.

Iga kategooria $\mathcal{C}$ jaoks saame vaadata selle **duaalset kategooriat** $\mathcal{C}^{\text{op}}$, mis on saadud kategooria $\mathcal{C}$ noole ümber pööramisel.

Konstruktsioon (Kategooriaga duaalne kategooria)

Olgu $\mathcal{C}$ kategooria. Sellest saame konstrueerida kategooria $\mathcal{C}^{\text{op}}$, kus

- $Ob(\mathcal{C}^{\text{op}}) := Ob(\mathcal{C})$ (objektideks on täpselt kategooria $\mathcal{C}$ objektid)
- $\mathcal{C}^{\text{op}}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$ (nooled on vastupidise suunaga)
- $g \circ^{\text{op}} f := f \circ g$, kus $\circ^{\text{op}}$ on kategooria $\mathcal{C}^{\text{op}}$ komponeerimine,
- objekti $A \in \mathcal{C}^{\text{op}}$ ühikmorfismiks on $1_A \in \mathcal{C}(A, A) = \mathcal{C}^{\text{op}}(A, A)$.

Kontravariantsed funktorid

Duaalse kategooria konstruktsioon võimaldab meil vaadata nooli ümber pööravaid konstruktsioone funktoritena.

Definitsioon (Kontravariantne funktor)

Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad. Funktorit $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ nimetatakse **kontravariantseks funktoriks** kategooriast $\mathcal{C}$ kategooriasse $\mathcal{D}$.

Funktorit tavalises mõttes nimetatakse kohati ka **kovariantseks funktoriks**, kui soovitakse rõhutada, et konstruktsioon ei pööra nooli ümber.

Näide

Eelnevalt välja toodud näited annavad funktorid

$$\mathcal{P}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$$

ning

$$\ell^{\infty}: \mathbf{Set}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ban}.$$

Olulised funktoirite klassid

Definitsioon (Täpsed funktoirid ja täielikud funktoirid)

Kui funktoir $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ on selline, et kujutused

$$F_{A,B}: \mathcal{C}(A,B) \rightarrow \mathcal{C}(F(A),F(B)), \quad f \mapsto F(f)$$

on iga $A,B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral

- *injektiivsed*, öeldakse, et F on **täpne**
(see tähendab et iga paralleelsete noolte paari f,g korral $F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$) ;
- *sürjektiivsed*, öeldakse, et F on **täielik**
(see tähendab, et iga $A,B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ja $g: F(A) \rightarrow F(B)$ korral kehtib $g = F(f)$ mingi $f: A \rightarrow B$ jaoks) ;
- *bijektiivsed*, öeldakse, et F on **täielik ja täpne**.

Täpsete funktorite ja täielike funktorite näiteid

Näide (Alamkategoria sisestused)

Iga alamkategoria sisestus $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ on täpne funktor ning täieliku alamkategoria sisestus on täielik ja täpne funktor.

Näide (Unustavad funktorid)

Unustavad funktorid, näiteks $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Set}$, on tavaliselt täpsed, aga mitte täielikud.

Näide (Järjestust peegeldavad kujutused)

Kui P ja P' on osaliselt järjestatud hulgad ning $\hat{P}$ ja $\hat{P}'$ on neile vastavad kategooriad, siis järjestust säilitavad ja peegeldavad kujutused $P \rightarrow P'$ vastavad täpselt täielikele funktoritele $\hat{P} \rightarrow \hat{P}'$.

Morfismide omaduste säilitamine ja peegeldamine

Definitsioon (Monomorfismide säilitamine ja peegeldamine)

Öeldakse, et funktor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

- **säilitab monomorfisme**, kui iga kategooria $\mathcal{C}$ morfismi korral kehtib implikatsioon

$$f \text{ on monomorfism} \Rightarrow F(f) \text{ on monomorfism ;}$$

- **peegeldab monomorfisme**, kui iga kategooria $\mathcal{C}$ morfismi korral kehtib implikatsioon

$$F(f) \text{ on monomorfism} \Rightarrow f \text{ on monomorfism.}$$

Analoogiliselt saab defineerida isomorfismide ja epimorfismide säilitamise ja peegeldamise.

Morfismide omaduste säilitamine ja peegeldamine

Lause

Täpne funktor peegeldab monomorfisme ja epimorfisme.

Lause

Iga funktor säilitab isomorfisme.

Lause

Täielik ja täpne funktor peegeldab isomorfisme.

Paneme aga tähele, et need tingimused pole tarvilikud. Näiteks algebrate kategooriate unustavad funktorid (nagu $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Set}$) peegeldavad tavaliselt isomorfisme.

Samas, unustav funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ isomorfisme ei peegelda, kuna bijektiivse pideva kujutuse pöördkujutus ei pruugi olla pidev.

Funktorite komponeerimine

Nagu struktuuride morfismidest võiks loota, on ka funktoereid võimalik komponeerida.

Konstruktsioon

Olgu $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ funktorid. Siis saame konstrueerida nende funktoirite kompositsiooni $\mathcal{C} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{E}$, mis on defineeritud seostega

$$(G \circ F)(A) := G(F(A)) \text{ ning}$$

$$(G \circ F)(f) := G(F(f)).$$

Selline komponeerimistehe assotsiatiivne, ehk

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

ning selle komponeerimise neutraalseteks elementideks on ühik-funktorid, ehk

$$F \circ 1_{\mathcal{C}} = F = 1_{\mathcal{D}} \circ F.$$

Kategooriate kategooria?

Kuna saame funktoreid assotsiatiivselt komponeerida, ning meil on olemas ka ühikfunktorid, oleks loomulik moodustada kategooria, mille objektideks on kategooriad ning mille morfismideks on funktorid.

Takistus

Kategooriad on liiga palju, et neist kategooriat moodustada.

Täpsemalt, Russelli paradoksi tõttu ei saa me moodustada kõikide kategooriate *suurt hulka*. Seda probleemi pole aga väikeste kategooriate puhul.

Näide (Väikeste kategooriate kategooria **Cat**)

Saame vaadata väikeste kategooriate kategooriat **Cat**, mille objektideks on väikesed kategooriad ning mille morfismideks on funktorid.

Väga suur kategooria CAT

Kuigi kõigi kategooriate kollektsioon ei saa olla suur hulk, võiksime öelda, et see kogum on *väga suur hulk* ning defineerida vastavalt *väga suure kategooria* mõiste, kus objektide kollektsioon on väga suur hulk ning kus kollektsioonid $\mathcal{C}(A, B)$ on suured hulgad.

Näide (Suurte kategooriate väga suur kategooria CAT)

Saame konstrueerida *väga suure kategooria* **CAT**, mille objektideks on (suured) kategooriad, ning mille morfismideks on funktorid.

Võime mugavuse mõttes eeldada, et kasutame matemaatilisi aluseid, mis võimaldavad väga suurte hulcade olemasolu.

Esitatavad funktorid

Kategooria $\mathcal{C}$ igale objektipaarile $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ saame seada vastavusse hulga $\mathcal{C}(A, B)$. Selle vastavuse saab teha funktoriks nii $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ suhtes kui ka $B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ suhtes.

Konstruktsioon (Kovariantne esitatav funktor)

Olgu U kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekt. Saame vaadata funktorit $\mathcal{C}(U, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, mis seab objektile $A \in \mathcal{C}$ vastavusse hulga $\mathcal{C}(U, A)$ ning kategooria $\mathcal{C}$ morfismile $f: A \rightarrow B$ vastavusse kujutuse

$$\mathcal{C}(U, f): \mathcal{C}(U, A) \rightarrow \mathcal{C}(U, B), \quad u \mapsto f \circ u.$$

Konstruktsioon (Kontravariantne esitatav funktor)

Olgu V kategooria $\mathcal{C}$ fikseeritud objekt. Saame vaadata funktorit $\mathcal{C}(-, V): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, mis seab objektile $A \in \mathcal{C}$ vastavusse hulga $\mathcal{C}(A, V)$ ning kategooria $\mathcal{C}$ morfismile $f: A \rightarrow B$ vastavusse kujutuse

$$\mathcal{C}(f, V): \mathcal{C}(B, V) \rightarrow \mathcal{C}(A, V), \quad v \mapsto v \circ f.$$

Kategooriate korrutis

Nägime, et $\mathcal{C}(A, B)$ on mõlemas muutujas eraldi funktor, aga tegelikult tahaks seda vaadata kahe muutuja funktorina. Selleks vaatame kategooriate korrutise mõistet.

Konstruksioon (Kategooriate korrutis)

Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ kategooriad. Siis saame konstrueerida nende korrutise $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, mis on kategooria, kus

- $Ob(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) := Ob(\mathcal{A}) \times Ob(\mathcal{B}) = \{(A, B) \mid A \in Ob(\mathcal{A}), B \in Ob(\mathcal{B})\}$
- $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})((A, B), (A', B')) := \mathcal{A}(A, A') \times \mathcal{B}(B, B')$, ehk morfismideks on paarid $(f, g): (A, B) \rightarrow (A', B')$, kus $f: A \rightarrow A'$ ning $g: B \rightarrow B'$.

Objekti $(A, B) \in Ob(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ ühikuks on $(1_A, 1_B)$ ning komponeerimine on defineeritud punktiviisiliselt, ehk

$$(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g').$$

Kahe muutuja funktorid

Definitsioon (Kahe muutuja funktor)

Funktorit $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ kutsutakse **kahe muutuja funktoriks**, ehk **bifunktoriks**.

Kahe muutuja funktorite eripära

Paneme tähele, et bifunktor $F: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ rahuldab iga kategooria $\mathcal{A}$ morfismi $f: A \rightarrow A'$ ning kategooria $\mathcal{B}$ morfismi $g: B \rightarrow B'$ jaoks tingimust

$$F(f, 1_{B'}) \circ F(1_A, g) = F(f, g) = F(1_{A'}, g) \circ F(f, 1_B).$$

$$\begin{array}{ccc} F(A, B) & \xrightarrow{F(1, g)} & F(A, B') \\ F(f, 1) \downarrow & & \downarrow F(f, 1) \\ F(A', B) & \xrightarrow{F(1, g)} & F(A', B') \end{array}$$

Kategooria mor-funktor, ehk hom-funktor

Konstruktsioon (Mor-funktor)

Olgu $\mathcal{A}$ kategooria. Siis saame vaadata funktorit

$$\mathcal{C}(-, -): \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad (A, B) \mapsto \mathcal{C}(A, B),$$

mis seab morfismidele $A \xleftarrow{f} A'$ ning $B \xrightarrow{g} B'$ vastavusse kujutuse

$$\mathcal{C}(f, g): \mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{g \circ - \circ f} \mathcal{C}(A', B'), \quad u \mapsto g \circ u \circ f.$$

Loengu 8 (08. märts 2024) piir

Loengutes on seisuga 08. märts 2024 kaetud eelnevatel slaididel sisalduv materjal.

Loomulik teisendus, ehk funktorite morfism

Peamine põhjus, miks funktorite teooria on rikkalikum funktsioonide teoriast, on see, et funktorite vahel saab vaadata morfisme.

Kui funktorid on abstraktsed konstruktsioonid, siis *loomulik teisendus*, ehk konstruktsioonide morfism, võimaldab meil konstruktsioone omavahel võrrelda.

Loomuliku teisenduse definitsioon

Definitsioon (Loomulik teisendus)

Olgu $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ funktorid. **Loomulikuks teisenduseks** $\alpha: F \Rightarrow G$ nimetame morfismide peret

$$\alpha = (\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A))_{A \in \text{Ob}(\mathcal{C})},$$

mis rahuldab tingimust, et iga kategooria $\mathcal{C}$ morfismi $f: A \rightarrow B$ korral kommuteerub diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B), \end{array}$$

mis tähendab võrdust $\alpha_B \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_A$.

Näiteid loomulikest teisendustest

Näide (Ühikteisendused)

Iga funktori $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jaoks leidub ühikteisendus $1_F: F \Rightarrow F$, mille komponendiks kohal $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on ühikmorfism

$$(1_F)_A := 1_{F(A)}: 1_{F(A)} \rightarrow 1_{F(A)}.$$

Näide (Loomulikud teisendused bifunktoritest)

Kui $F: \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ on bifunktor, ning $g: B \rightarrow B'$ on morfirm kategoorias $\mathcal{B}$, siis saame vaadata loomulikku teisendust

$$F(-, g): F(-, B) \Rightarrow F(-, B'),$$

mille komponent kohal $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ on morfirm

$$F(-, g)_A := F(1_A, g): F(A, B) \rightarrow F(A, B').$$

Analoogiliselt saame $f: A \rightarrow A'$ jaoks loomuliku teisenduse

$$F(f, -): F(A, -) \rightarrow F(A', -).$$

Näiteid loomulikest teisendustest

Näide (Kontravariantsete esitatavate funktoore teisendused)

Bifunktori näidet mor-funktorile rakendades saame, et iga kategooria $\mathcal{C}$ morfism $g: B \rightarrow B'$ annab loomuliku teisenduse

$$\mathcal{C}(-, g): \mathcal{C}(-, B) \Rightarrow \mathcal{C}(-, B')$$

mille komponendiks kohal $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on kujutus

$$\mathcal{C}(-, g)_A := \mathcal{C}(A, g): \mathcal{C}(A, B) \rightarrow \mathcal{C}(A, B'), \quad f \mapsto g \circ f.$$

Analoogiliselt saame iga $A \xleftarrow{f} A'$ korral loomuliku teisenduse

$$\mathcal{C}(f, -): \mathcal{C}(A, -) \Rightarrow \mathcal{C}(A', -)$$

Hiljem näeme, et tegelikult on iga esitatavate funktoore vaheline loomulik teisendus sellisel kujul.

Loomulike teisenduste kollektsioon

Kui fikseerime funktorid $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, siis saame kõikide loomulike teisenduste $F \Rightarrow G$ kollektsiooni

$$\mathbf{Nat}(F, G) := \{ \text{loomulikud teisendused } F \Rightarrow G \}$$

Märkus

Üldjuhul, näiteks kui $\mathcal{C}$ ei ole väike kategooria, ei pruugi $\mathbf{Nat}(F, G)$ olla hulk, kuna loomulikke teisendusi on liiga palju.

Siiski, $\mathbf{Nat}(F, G)$ on suur hulk.

Kui $\mathcal{C}$ on väike kategooria, on $\mathbf{Nat}(F, G)$ hulk.

Loomulike teisenduste (vertikaalne) komponeerimine

Olgu antud funktorid $F, G, H: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ning kaks järjestikust loomuliku teisendust

$$F \xRightarrow{\alpha} G \xRightarrow{\beta} H.$$

Siis saame loomulikke teisendusi α ning β komponentviisiliselt komponeerida, mis annab loomuliku teisenduse $\beta \circ \alpha: F \rightarrow H$. Täpsemalt $\beta \circ \alpha$ komponent kohal $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on

$$(\beta \circ \alpha)_A := \beta_A \circ \alpha_A.$$

Loomuliku teisendust $\beta \circ \alpha$ nimetatakse loomulike teisenduste α ning β **(vertikaalseks) kompositsiooniks**.

Funktorite kategooria

Morfismide kollektsiooni suuruse tõttu ei saa me üldjuhul moodustada funktoritest kategooriat.

Konstruktsioon (Funktorite (lokaalselt suur) kategooria)

Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad, siis $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ (või $\mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$) tähistab lokaalset suurt kategooriat, mille

- *objektideks on funktorid $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$,*
- *morfismideks $F \rightarrow G$ on loomulikud teisendused $F \Rightarrow G$, s.t. $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) := \mathbf{Nat}(F, G)$,*
- *loomulikke teisendusi komponeerime komponenthaaval,*
- *ühikmorfismideks on ühikteisendused.*

Märkus

Kui $\mathcal{C}$ on väike kategooria, siis $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ on (lokaalselt väike) kategooria.

Loomulikud isomorfismid

Definitsioon

Loomulikku teisendust $\alpha: F \Rightarrow G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nimetatakse **loomulikuks isomorfismiks**, kui kõik selle komponendid

$$\alpha_A: F(A) \rightarrow G(A)$$

on isomorfismid kategoorias $\mathcal{D}$.

Lause

Loomulikud isomorfismid on isomorfismideks lokaalselt suures kategoorias $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$.

Yoneda lemma

Teoreem (Yoneda lemma)

Iga funktori $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ ning objekti $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ korral on kujutus

$$\theta_{F,A}: [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}](\mathcal{C}(-, A), F) \rightarrow F(A), \quad \alpha \mapsto \alpha_A(1_A)$$

bijektsioon. Lisaks, see kujutuste pere on loomulik $F \in [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Set}]$ ning $A \in \mathcal{C}^{\text{op}}$ suhtes

Märkus

Siis näeme, et loomulik teisendus $\alpha: \mathcal{C}(-, A) \Rightarrow F$ on kogunesti ära määratud ühe komponendi α_A poolt, ning isegi väärtuse $\alpha_A(1_A)$ poolt.