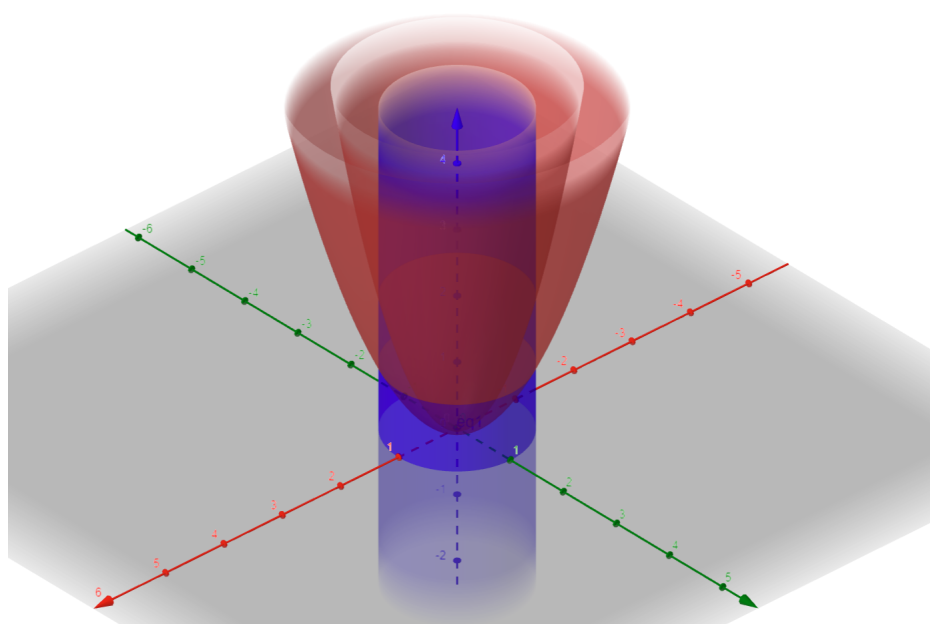


MTMM.00.341
Kõrgem matemaatika II



2024

Ülesannete kogu

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{array}{lll}
 (Const)' & = & 0 \\
 (x^\alpha)' & = & \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \alpha \neq 0 \\
 (e^x)' & = & e^x \\
 (a^x)' & = & a^x \ln a \\
 (\ln |x|)' & = & \frac{1}{x} \\
 (\sin x)' & = & \cos x \\
 (\cos x)' & = & -\sin x \\
 (\tan x)' & = & \frac{1}{\cos^2 x} \\
 (\cot x)' & = & -\frac{1}{\sin^2 x} \\
 (\log_a x)' & = & \frac{1}{x \ln a} \\
 (\arcsin x)' & = & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arccos x)' & = & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arctan x)' & = & \frac{1}{1+x^2} \\
 (\operatorname{arccot} x)' & = & -\frac{1}{1+x^2}
 \end{array}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{ll}
 (1) \int 0 \, dx = C & (9) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\
 (2) \int dx = x + C & (10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\
 (3) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1 & (11) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\
 (4) \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & (12) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \\
 (5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (13) \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \\
 (6) \int e^x dx = e^x + C & (14) \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C \\
 (7) \int \sin x \, dx = -\cos x + C & (15) \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \\
 (8) \int \cos x \, dx = \sin x + C & (16) \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C
 \end{array}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1	Vektorruum, vektorruumi alamruum	1
1.1	Vektorruum	1
1.2	Vektorruumi alamruum	2
2	Vektorite lineaarne sõltumatus	3
2.1	Lineaarne sõltumatus	3
3	Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid	5
3.1	Lineaarne kate	5
3.2	Baas ja vektori koordinaadid	5
3.3	Vektori koordinaadid uuel baasil	6
4	Arvread	7
4.1	Arvread	7
4.2	Geomeetriline rida	8
5	Harmoonilised read, positiivsed arvread	9
5.1	Harmooniline rida ja integraaltunnus	9
5.2	Positiivsete arvride võrdluslaused	10
6	Arvride koondumine	11
6.1	Absoluutne koonduvus	11
6.2	Vahelduvate märkidega read	12
6.3	Absoluutne ja tingimisi koonduvus	12
7	Astmeread. Tayloriga read	13
7.1	Astmeread, koonduvuspiirkond	13
7.2	Astmeritta arendamine	14
7.3	Taylori ja Maclaurini read	14
8	Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond	15
8.1	Fourier' read	15
8.2	Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond	16
9	Piirväärtus ja pidevus	17
9.1	Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus	17
9.2	Kahe muutuja funktsiooni pidevus	18
10	Esimest ja kõrgemat järku osatuletised	19
10.1	Esimest järku osatuletised	19
10.2	Kõrgemat järku osatuletised	19
10.3	Pinna puutujatasand ja normaal	20

11 Täisdiferentsiaal. Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil	22
11.1 Täisdiferentsiaal	22
11.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine	23
11.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	24
12 Ekstreemumid. Optimiseerimine	25
12.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid	25
12.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas	26
12.3 Optimiseerimine	26
12.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis	27
12.5 Taylorigi valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *	27
13 Lagrange'i kordajate meetod	28
13.1 Lagrange'i kordajate meetod	28
13.2 Tuletis antud suunas, gradient	28
13.3 Vähimruutude meetod *	30
14 Kahekordse integraali arvutamine	31
14.1 Kahekordse integraali arvutamine	31
15 Muutujavahetus kahekordses integraalis	33
15.1 Muutujavahetus kahekordses integraalis	33
15.2 Üleminek polaarkoordinaatidele	33
16 Kahekordse integraali rakendused	35
16.1 Kahekordse integraali geomeetrilised rakendused	35
16.1.1 Tasandilise kujundi pindala	35
16.1.2 Keha ruumala	35
16.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused	36
16.2.1 Tasandilise kujundi mass	36
16.2.2 Tasandilise kujundi massikeske	37
17 Kolmekordsed integraalid	38
17.1 Kolmekordse integraali arvutamine	38
17.2 Üleminek silinderkoordinaatidele	39
18 Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused	40
18.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele	40
18.2 Kolmekordse integraali rakendused	41
18.2.1 Keha ruumala leidmine	41
18.2.2 Keha mass ja massikeske	42
19 Joonintegraalid	44
19.1 Esimest liiki joonintegraalid	44
19.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendused	45
19.2 Teist liiki joonintegraalid*	45
19.2.1 Teist liiki joonintegraali rakendused	46
20 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid. Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	47
20.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend	47
20.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	47
20.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	49

21 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid. Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid	50
21.1 Homogeensed funktsioonid	50
21.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid	50
21.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid	51
22 Bernoulli diferentsiaalvõrrandid. Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid. Numbrilised meetodid	52
22.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrandid	52
22.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid	52
22.3 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine ligikaudselt	53
23 Teist järku diferentsiaalvõrrandid	54
23.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel . .	54
23.2 Konstantsete kordajatega lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid	55
24 Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	56
25 Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	58
25.1 Lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid	58
25.2 Lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid	59
26 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	60
26.1 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine	60
26.2 Lineaarsed konstantsete kordajatega n -järku diferentsiaalvõrrandid	61
26.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	62
27 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	63
27.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid	63
27.2 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	64
28 Kordamine kontrolltööks nr. 3	65
28.1 Ülesanded kordamiseks	65
29 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	68
30 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Eksami näidisülesanded	69
30.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid	69
30.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II	70
30.2.1 Eksami teooria osa	70
30.2.2 Eksami ülesannete teemad	70
30.3 Eksami näidisülesanded	70
31 Vastused	71

Praktikum 1

Vektorruum, vektorruumi alamruum

1.1 Vektorruum

Definitsioon 1.1

Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks** üle reaalarvude $\mathbb{R}$, kui sellel hulgal on defineeritud lineaarsed tehted: hulga V elementide liitmine ja hulga V elementide korrutamine reaalarvuga nii, et iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ korral kehtib $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$ ning iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\mathbf{a} \in V$ korral kehtib $k\mathbf{a} \in V$. Kehtivad aksioomid:

VR1. Liitmise assotsiatiivsus: iga $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ korral $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

VR2. Hulgas leidub nullelement $\theta \in V$ nii, et iga $\mathbf{a} \in V$ korral $\mathbf{a} + \theta = \mathbf{a}$, $\theta + \mathbf{a} = \mathbf{a}$;

VR3. Iga elemendi $\mathbf{a} \in V$ korral leidub vastandelement $-\mathbf{a} \in V$ nii, et $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \theta$, $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \theta$;

VR4. Liitmise kommutatiivsus: iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ korral $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$;

VR5. Iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ja iga $k \in \mathbb{R}$ korral $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$;

VR6. Iga $\mathbf{a} \in V$ ja iga $k, l \in \mathbb{R}$ korral $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$;

VR7. Iga $\mathbf{a} \in V$ ja $k, l \in \mathbb{R}$ korral $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$;

VR8. Iga $\mathbf{a} \in V$ korral $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

Ülesanne 1.1. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid arvude liitmise ja korrutamise suhtes?

(a) $\mathbb{N}$

(c) $\mathbb{Q}$

(e) $\mathbb{C}$

(b) $\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{R}$

(f) $\mathbb{R}^+$

Ülesanne 1.2. Defineerime hulgal $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n), \\ k(a_1, \dots, a_n) &= (ka_1, \dots, ka_n), \quad k \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Tõestage, et selliste (n.ö. komponenthaaval defineeritud) tehete suhtes on hulk $\mathbb{R}^n$ vektorruum.

Ülesanne 1.3. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid maatriksite liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes.

(a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk

(e) $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R})$

(b) kõigi n -ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk

(f) $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$

(c) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk

(g) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$

(h) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

$$(i) \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Ülesanne 1.4. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktiivisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid.

- (a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
- (b) kõigi ülimalt n . astme polünoomfunktsioonide hulk $\mathbb{R}_n[x]$
- (c) kõigi n -astme polünoomfunktsioonide hulk
- (d) lõigul $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk $C_{[a,b]}$

1.2 Vektorruumi alamruum

Definitsioon 1.2

Vektorruumi V mittetühja alamhulka U nimetatakse **vektorruumi V alamruumiks**, kui

AR1. iga $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ korral $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V liitmise suhtes);

AR2. iga $\mathbf{a} \in U$ ja $k \in \mathbb{R}$ korral $k\mathbf{a} \in U$ (s.t. U on kinnine vektorruumi V skalaariga korrutamise suhtes);

Ülesanne 1.5. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi $\mathbb{R}^4$ alamruumid.

- (a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}$

Ülesanne 1.6. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V alamruumid.

- (a) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk
- (b) $V = \mathbb{E}_3$, fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk
- (c) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$
- (d) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
- (e) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- (f) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}$
- (g) $V = \mathbb{R}^5$, $\{(a, b, c, d, e) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a + e = b + d\}$

Praktikum 2

Vektorite lineaarne sõltumatus

2.1 Lineaarne sõltumatus

Definitsioon 2.1

Vektorruumi V vektorite süsteemi $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mistahes $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ korral võrdusest

$$k_1 \mathbf{a}_1 + k_2 \mathbf{a}_2 + \dots + k_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Teoreem 2.1

Nullist erinevate vektorite süsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui selles süsteemis leidub vähemalt üks vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina.

Ülesanne 2.1. Olgu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektorruumi V vektorid. Kui vektorruumi elemendid $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorruumi elemendid $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ja $\mathbf{c} + \mathbf{a}$ on lineaarselt sõltumatud?

Ülesanne 2.2. Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $\mathbf{a}_1 = (k, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, k, 1)$ ja $\mathbf{a}_3 = (0, 1, k)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.3. Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $\mathbf{a}_1 = (1, k, k^2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, l, l^2)$ ja $\mathbf{a}_3 = (1, m, m^2)$ oleksid lineaarselt sõltuvad?

Ülesanne 2.4. Näidake, et vektorruumi V vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 5)$, $\mathbf{a}_2 = (5, 3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (-15, -2, 21)$

(b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $f_1(x) = x^2 + 5$, $f_2(x) = x^2 - 4x + 3$, $f_3(x) = x^2 + 16x + 13$

(c) $V = \mathbb{C}$, $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$

(d) $V = \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sin^2 x$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = 1$

Ülesanne 2.5. Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V on lineaarselt sõltumatud.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_1 = (5, 3, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4, 2)$

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{a}_1 = (x, y, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$,

(c) $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 2.6. Uurige, kas järgmised vektorite süsteemid funktsioonide vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

(a) $x + 2, x - 2$

(e) $x^2 + 2x, 3x^2 - 1, x + 4$

(b) $6x + 9, 8x + 12$

(f) $\sin x, \cos x$

(c) $1, (x - 1)^2, x - 1$

(g) $\sin x, \cos x, \sin 2x$

(d) $4 - x, 2x + 3, 6x + 8$

(h) $x^2, x|x|$

Praktikum 3

Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid

3.1 Lineaarne kate

Definitsioon 3.1

Vektorruumi V alamhulka, mis koosneb vektorite $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ kõigist lineaarkombinatsioonidest, nimetatakse vektorite $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ **lineaarseks katteks** ehk lineaarkatteks. Seega

$$L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m) = \{k_1\mathbf{a}_1 + \dots + k_m\mathbf{a}_m, \quad k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}.$$

Ülesanne 3.1.

Leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ vektorite $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ lineaarne kate, kui

- (a) $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_5 = (0, 1, 2, 3)$
- (b) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 3, 0, 3)$, $\mathbf{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$
- (c) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (4, 2, 3, 5)$, $\mathbf{a}_4 = (0, 2, 1, 3)$

3.2 Baas ja vektori koordinaadid

Definitsioon 3.2

Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks** ehk tekitajate süsteemiks, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.

Definitsioon 3.3

Vektorruumi **baasiks** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ nimetatakse selle vektorruumi lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.

Lause 3.1

n -mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem baas.

Definitsioon 3.4

Olgu V vektorruum, olgu $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ selle vektorruumi baas ja $\mathbf{a} \in V$. Kui $\mathbf{a} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$, siis kordajaid $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ nimetatakse vektori $\mathbf{a}$ **koordinaatideks** baasi $\mathbf{e}$ suhtes.

Ülesanne 3.2. Leidke vektorruumi $\mathbb{C}$ vektori $-5 + 4i$ koordinaadid baasi $\mathbf{e} = \{-1 + 2i, 2 + i\}$ suhtes.

Ülesanne 3.3. Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$

- (a) baasist

- (b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas
- (c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas
- (d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem

Ülesanne 3.4. Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ vektorite $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ suhtes.

Ülesanne 3.5. Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leidke vektori $\mathbf{a} = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:

- (a) $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$
- (b) $\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 1)$
- (c) $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 4, 9)$

Ülesanne 3.6. On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $\mathbf{e}_1 = (2, 1, -3)$, $\mathbf{e}_2 = (3, 2, -5)$ ja $\mathbf{e}_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $\mathbf{a} = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

3.3 Vektori koordinaadid uuel baasil

Olgu $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ja $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ vektorruumi V kaks baasi ning olgu vektor $\mathbf{a} \in V$.

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{a} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + x'_n \mathbf{e}'_n.$$

Seosed koordinaatide vahel uuel ja vanal baasil on

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kus A on baasiteisenduse maatriks ja on teada seosed

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + \dots + a_{n1} \mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}'_n = a_{1n} \mathbf{e}_1 + \dots + a_{nn} \mathbf{e}_n.$$

Ülesanne 3.7. Leidke üleminekumaatriks vektorruumi V baasilt $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ baasile $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ ja leidke vektori $\mathbf{a}$ koordinaadid nende baaside suhtes, kui

- (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{e}_2 = (2, 3, 3)$, $\mathbf{e}_3 = (3, 7, 1)$, $\mathbf{e}'_1 = (3, 1, 4)$, $\mathbf{e}'_2 = (5, 2, 1)$, $\mathbf{e}'_3 = (1, 1, -6)$, $\mathbf{a} = (9, 4, -1)$
- (b) $V = \mathbb{C}$, $\mathbf{e}_1 = 1 - i$, $\mathbf{e}_2 = 1 + i$, $\mathbf{e}'_1 = 2$, $\mathbf{e}'_2 = 2i$, $\mathbf{a} = 2 + 2i$

4.1 Arvread

Definitsioon 4.1

Arvrida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ nimetatakse **koonduvaks**, kui tema osasummade jada $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ koondub, s.t. kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k = S.$$

Arvu S nimetatakse rea $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ summaks. Arvrida, mis ei koonu, nimetatakse **hajuvaks**.

Ülesanne 4.1. Leidke järgmiste ridade osasummade jadad (S_n) ja summad S .

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n$

Ülesanne 4.2. Leidke read, mille osasummad on järgmised.

(a) $S_n = \ln(n+2)$

(c) $S_n = \frac{1}{n+1}$

(b) $S_n = \frac{n+3}{n+1}$

(d) $S_n = n+1$

Lause 4.1

Koondumise tarvilik tingimus (arvrea hajumise tunnus). Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub, siis tema üldliige läheneb nullile:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0. \quad (4.1)$$

Tarviliku tingimuse kehtimine **ei ole piisav** rea koondumise üle otsustamiseks. Kui tingimus (4.1) ei ole täidetud, siis võib kindlalt öelda, et rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ hajub. Seetõttu nimetatakse tarvilikku tingimust ka arvrea hajumise tunnuseks.

Ülesanne 4.3. Näidake hajuvuse tunnuse abil, et järgmised arvread hajuvad.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$

4.2 Geomeetriline rida

Lause 4.2

Geomeetriline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

koondub siis ja ainult siis, kui $|q| < 1$. Geomeetrilise rea summa avaldub sel juhul

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Tehted koonduvate ridadega

1. Kui reas lisada või ära jätta lõplik arv liikmeid, siis see ei mõjuta rea koonduvust. Koonduv rida jääb koonduvaks ning hajuv rida jääb hajuvaks.
2. Kui rida koondub, siis koondub ka rida $\sum cu_k$, kus c on reaalarv, seejuures kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty} cu_k = c \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

3. Kui kaks rida $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ koonduvad, siis koonduvad ka read, mis on moodustatud nende ridade summast ja vahest ning kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Ülesanne 4.4. Tehke kindlaks, kas järgmised geomeetrilised read koonduvad või hajuvad. Koondumise korral leidke rea summa S .

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^{n+1}}{7^n} \right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{e^{n-3}}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 + 2^n}{4^{n+2}}$

Ülesanne 4.5. Pall kukub 2 meetri kõrguselt ja põrkab igal põrgatusel $\frac{2}{5}$ kõrgusele tagasi (võrreldes oma viimase kõrgusega).

Leidke palli poolt läbitud vertikaalne vahemaa.

Ülesanne 4.6. Esitage lõpmatu perioodiline kümnendmurd 7.(36) hariliku murruna (kahe täisarvu jagatisena).

Ülesanne 4.7. (IT) Kahendsüsteemi arv teisendatakse kümnendsüsteemi arvuks järgmise valemi abil:

$$b_0, b_1 b_2 b_3 \dots |_2 = b_0 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \frac{b_3}{2^3} + \dots$$

Esitage kahendarv $1,101010\dots |_2$ ühe kümnendsüsteemi murruna (ratsionaalarvuna).

Praktikum 5

Harmoonilised read, positiivsed arvread

5.1 Harmooniline rida ja integraaltunnus

Lause 5.1

Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots \quad (5.1)$$

koondub parajasti siis, kui $\alpha > 1$ ja hajub, kui $\alpha \leq 1$.

Ülesanne 5.1. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{(-4)^{n+1}}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-0.9}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{6^n}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}$

Definitsioon 5.1

Positiivseks arvreaks nimetatakse rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, kus $u_k \geq 0$ iga $k = 0, 1, \dots$ korral.

Lause 5.2

Rea koonduvuse integraaltunnus. Olgu funktsioon f pidev ning monotoonselt kahanev funktsioon piirkonnas $[0, \infty)$ ja olgu $u_k = f(k)$. Positiivsete liikmetega rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub siis ja ainult siis, kui päratu integraal $\int_0^{\infty} f(x) dx$ koondub.

Ülesanne 5.2. Uurige järgmiste ridade koonduvust integraaltunnuse abil.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

(d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

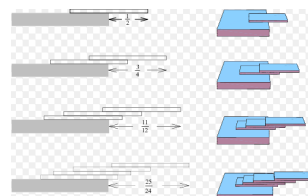
Ülesanne 5.3. Tudeng sai kontrolltöös 1 punkti 10-st (10%). Iga järeltöö maksimaalsed punktide arvu suurendatakse 10 võrra.

Tudengi eelmise töö saadud punktid kantakse üle protsentides tehtava töö maksimaalsest võimalikust. Kui tudeng saab igas töös 1 punkti juurde, siis mitu järeltööd läheb vaja, et tudeng saaks lõpuks kokku 50% järeltöö punktidest? Kas on võimalik kogusummana saada ka täispunktid?

Selgituseks: II töös on tudengil ees 2 punkti 20-st (10%), ta saab ühe juurde ja kokku $2+1=3$. III töös on tudengil ees $\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{9}{2}$ p. 30-st (15%), ta saab ühe juurde ja kokku $\frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}$ jne.

Ülesanne 5.4. Paigutame n kaarti järgmiselt: ülalt teine kaart toetab ülemist poole pealt, ülalt kolmas kaart eelmist $3/4$ pealt,

neljas kaart eelmist $5/6$ pealt (üldiselt $(2n-1)/(2n)$ pealt) jne. Teoreetiliselt jääb selline kaardipakk tasakaalu. Kui kaugele lauast on võimalik n kaartist koosneva paki ülemist äärt viia? Proovige kodus järgi! Lihtsam on paigutada kergeid õhukesti plaate, kui näiteks raskeid raamatuid (joonis: <http://mathworld.wolfram.com/>).



5.2 Positiivsete arvridade võrdluslaused

Lause 5.3

Esimene võrdluslause. Olgu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sellised positiivsed read, et

$$0 \leq u_k \leq v_k \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ koondub, siis koondub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ hajub, siis hajub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

Lause 5.4

Teine võrdluslause. Eldame, et read $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ on positiivsete liikmetega read ning eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{v_k} = L \neq 0$.

Sel juhul rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Ülesanne 5.5. Millised järgmistest ridadest koonduvad ja millised hajuvad?

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{9n-1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+3}}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)4^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n^2-n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+3}{n^3+3}}$

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^3$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^{4/3}}$

(l) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{5^n}$

Praktikum 6

Arvidade koondumine

6.1 Absoluutne koonduvus

Definitsioon 6.1

Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \quad (6.1)$$

nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \quad (6.2)$$

on koonduv.

Omadus 6.1

D'Alembert'i koonduvustunnus. Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \begin{cases} < 1, & \text{rida koondub absoluutselt,} \\ > 1, & \text{rida hajub,} \\ = 1, & \text{ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Omadus 6.2

Cauchy tunnus. Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|u_k|} \begin{cases} < 1, & \text{rida koondub absoluutselt,} \\ > 1, & \text{rida hajub,} \\ = 1, & \text{ei saa otsustada.} \end{cases}$$

Ülesanne 6.1. Uurige d'Alembert'i tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

- | | | | |
|---|--|--|---|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ | (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{5^n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1}$ | (j) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-e)^n}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(n+3)!}{n! 5^{2n}}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$ | (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5}{3^n}$ | (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! n!}$ | (l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n 3^n}{(2n+1) \ln n}$ |

Ülesanne 6.2. Uurige Cauchy tunnuse abil järgmiste ridade koonduvust.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+5)^n}$ | (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n\sqrt{n}}$ | (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n} \right)^n$ |
| (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{4n+2} \right)^n$ | (f) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ | (j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$ |
| (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ | (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ | (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ |
| (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 1.5^n \sin \frac{\pi}{n}$ | (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ | (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2}$ |

6.2 Vahelduvate märkidega read

Definitsioon 6.2

Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k, \text{ kus } a_k > 0. \quad (6.3)$$

Lause 6.1

Leibnizi koonduvustunnus. Kui

1. $a_0 \geq a_1 \geq \dots a_n \geq \dots$ (üldliikmete absoluutväärtuste jada on monotoonselt kahanev);
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$,

siis vahelduvate märkidega rida (6.3) koondub.

Ülesanne 6.3. Uurige järgmiste vahelduvate märkidega ridade koonduvust.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{10}\right)^n$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-0.99)^n$

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{\ln n^2}$

6.3 Absoluutne ja tingimisi koonduvus

Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv. Kui koondub rida (6.2), siis sellest järeldub, et koondub ka rida (6.1).

Definitsioon 6.3

Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ koondub, aga ei koonu absoluutselt, siis sellist rida nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Ülesanne 6.4. Millised järgmistest ridadest on absoluutselt koonduvad, millised on tingimisi koonduvad ja millised on hajuvad?

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n3^n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(h) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\pi n + \frac{1}{n}\right)$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \arcsin \frac{\pi}{4n}$

Praktikum 7

Astmeread. Taylori read

7.1 Astmerekad, koonduvuspiirkond

Definitsioon 7.1

Astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (7.1)$$

koonduvuspiirkonnaks nimetatakse hulka

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub} \right\}. \quad (7.2)$$

Astmerea (7.1) **absoluutse koonduvuse piirkonnaks** nimetatakse hulka

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \text{rida } \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ koondub absoluutselt} \right\}. \quad (7.3)$$

Definitsioon 7.2

Arvu R nimetatakse astmerea **koonduvusraadiuseks**.

Eeldusel $R > 0$ nimetatakse vahemikku $(-R, R)$ rea (7.1) **koonduvusvahemikuks**.

Rea $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - a)^k$ korral on vastav koonduvusvahemik $(a - R, a + R)$.

Koonduvusraadiuse leidmiseks kasutatakse järgmisi piirväärtusi eeldusel, et $a_k \neq 0$ alates mingist kohast (s.t on olemas $k_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $a_k \neq 0$ iga $k \geq k_0$ korral) ja piirväärtused eksisteerivad:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \quad R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}. \quad (7.4)$$

Ülesanne 7.1. Leidke järgmiste ridade koonduvusraadius, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n+3}$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)! x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 5^n (x-1)^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{3^n}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^{2n+1}}{n!}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{n-1} x^n$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} (2x+5)^n$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-3)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n} (x-4)^n$

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

(l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

7.2 Astmeritta arendamine

Astmerea summa $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ on pidev funktsioon igas lõigus $[a, b] \subset (-R, R)$, kus R on selle rea koonduvusraadius. Seda rida võib lõigus $[a, b]$ liikmeti integreerida. Erijuhul $[0, x] \subset (-R, R)$

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Rida võib liikmeti diferentseerida igas punktis $x \in (-R, R)$, s.t.

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}.$$

Ülesanne 7.2. Arendage järgmised funktsioonid astmeritta.

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

(c) $f(x) = \ln(1+x)$

(b) $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$

(d) $F(x) = \int \arctan x^2 dx$

7.3 Taylори ja Maclaurini read

Definitsioon 7.3

Funktsiooni f **Taylori reaks** punktis c nimetatakse astmerida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad (7.5)$$

mille kordajad (Taylori kordajad) on $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Seega on funktsiooni f **Taylori rida** punktis c

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n + \dots \quad (7.6)$$

Maclaurini reaks nimetatakse Taylori rida, kus $c = 0$.

Ülesanne 7.3. Arendage järgmised funktsioonid Taylori ritta punktis $c = 0$.

(a) $x e^{2x}$

(c) $\frac{1}{1+x^3}$

(e) $e^x + \frac{1}{1+x}$

(g) $\cos \frac{x^2}{\sqrt{3}}$

(b) $\frac{1}{1-3x}$

(d) $\ln(1+x^2)$

(f) $\cos x - \sin x$

(h) $e^{\frac{\pi}{2}x}$

Ülesanne 7.4. Arendage integraalimärgi all olev avaldis Taylori ritta (astmeritta) ning integreerides liikmeti, arvutage nende integraalide väärtused täpsusega 10^{-8} .

(a) $\int_0^{0.2} \sin x^2 dx$

(c) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$

(e) $\int_0^{0.5} \frac{\arctan x}{x} dx$

(b) $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$

(d) $\int_0^{0.5} e^{-x^3} dx$

(f) $\int_0^1 x \sin x^3 dx$

Ülesanne 7.5. Arendage funktsioon $f(x) = \sqrt{x}$ Taylori ritta punktis $c = 1$, kirjutades välja vähemalt rea neli esimest liiget.

Praktikum 8

Fourier' read. Mitme muutuja funktsiooni määramispiirkond

8.1 Fourier' read

Definitsioon 8.1

Funktsiooni f **trigonomeetriliseks Fourier' reaks** lõigus $[-\pi, \pi]$ nimetatakse rida

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

kus kordajad a_k, b_k on määratud võrdustega

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

$2l$ -perioodiline funktsioon f ,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{\pi}{l} x \right),$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos k \frac{\pi}{l} x \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin k \frac{\pi}{l} x \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Teoreem 8.1

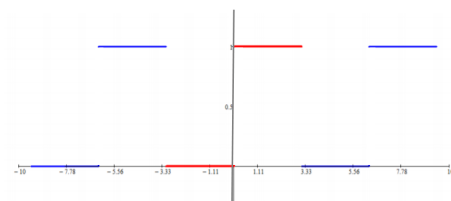
Dirichlet' teoreem. Kui funktsioon f on tükiti sile lõigus $[-\pi, \pi]$, siis selle funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$, kusjuures

1. funktsiooni f pidevuspunktides $x \in [-\pi, \pi]$, $S(x) = f(x)$,
2. funktsiooni f katkevuspunktides võrdub rea summa funktsiooni f parempoolse ja vasakpoolse piirväärtuse aritmeetilise keskmisega ehk kui $c \in (-\pi, \pi)$ on funktsiooni f katkevuspunkt, siis

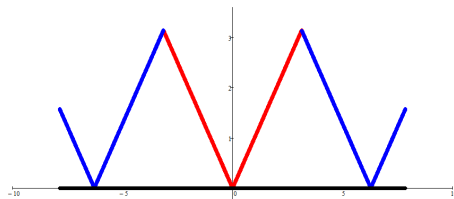
$$S(x) = \frac{1}{2} (f(c-0) + f(c+0)).$$

Ülesanne 8.1. Leidke 2π -perioodilise ruutlaine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

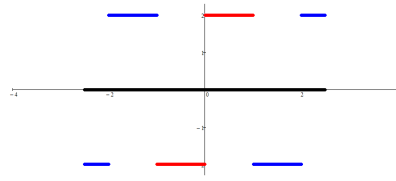


Ülesanne 8.2. Leidke 2π -perioodilise kolmnurkse laine $f(x) = |x|$ Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui $x \in [-\pi, \pi]$.



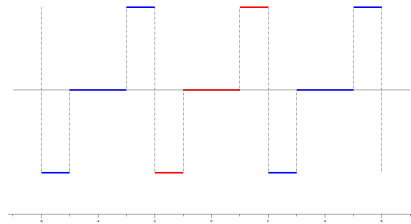
Ülesanne 8.3. Leidke 2-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$



Ülesanne 8.4. Leidke 4-perioodilise laine f Fourier' rida ja uurige selle koonduvust, kui

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & 1 < x < 2. \end{cases}$$



8.2 Kahe ja kolme muutuja funktsiooni määramispiirkond

Definitsioon 8.2

Kahe muutuja funktsiooni **määramispiirkonnaks** nimetatakse argumentide x ja y väärtuspaaride (x, y) hulka, mille puhul funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud.

Ülesanne 8.5. Leidke järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad $\mathcal{D}$ ja skitseerige need.

(a) $f(x, y) = x + \sqrt{y}$

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(j) $f(x, y) = \ln(x^2 + y) + \sin x$

(c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$

(k) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y} - \sqrt{x}}$

(d) $f(x, y) = \ln(x + y)$

(l) $f(x, y) = \frac{\ln(1 + x)}{\ln(1 + y)}$

(e) $f(x, y) = \ln(x + y) + \frac{1}{\ln x}$

(f) $f(x, y) = 3 + \sqrt{-(x - y)^2}$

(m) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{3 - x^2 - y^2}$

(g) $f(x, y) = x + e + \arccos y$

(n) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(h) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

Ülesanne 8.6. Leidke järgmiste kolme muutuja funktsioonide määramispiirkonnad E .

(a) $f(x, y, z) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z}$

(d) $f(x, y, z) = \arcsin x - \arccos(yz)$

(b) $f(x, y, z) = \sqrt{x(z^2 + 1)} - \sqrt{ye^z}$

(e) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

(c) $f(x, y, z) = \ln(xy) + \ln z$

(f) $f(x, y, z) = \frac{1}{3 + \cos \pi x + \cos \pi y + \cos \pi z}$

9.1 Kahe muutuja funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 9.1

Olgu $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ning olgu $M_0 = (x_0, y_0)$ hulga $\mathcal{D}$ kuhjumispunkt (igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Funktsiooni $f(x, y)$ **piirväärtuseks** punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile $M_0(x_0, y_0)$ nimetatakse arvu A , kui argumendi tõkestamatu lähenemine punktile (x_0, y_0) toob kaasa funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste tõkestamatu lähenemise arvule A . Kui arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile M_0 , siis kirjutatakse

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

Ülesanne 9.1. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-2,1)} x^2 y$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} (2x + 3y)$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,2)} \frac{x + \sin \pi x}{y}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sin x}{x};$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{y}$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{1+xy}-1}$

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - \sqrt{16 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$

(h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{2 + x^2 + y^2}$

(i) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{x - \sqrt{y}}{x + \ln x}$

(j) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow 0+}} \frac{\ln(xy)}{x \sin y}$

(k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

(l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{3}{xy}$

(m) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{xy}{\tan xy}$

(n) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,10)} \frac{\sin 5x}{xy}$

(o) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}$

(p) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$

Kui funktsioonil $z = f(x, y)$ on punktile M_0 mööda kahte erinevat lähenemisteed erinevad piirväärtused, siis piirväärtust $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ ei leidu.

Ülesanne 9.2. Näidake, et järgmiseid piirväärtusi ei eksisteeri.

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x+y};$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{xy+1}{x^2-y^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2+xy};$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy^2-1}{y-1}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y-x^2}.$

9.2 Kahe muutuja funktsiooni pidevus

Definitsioon 9.2

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse **pidevaks** punktis M_0 , kui funktsioon on selles punktis määratud ning funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega lähenemisel sellele punktile:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Vastasel korral nimetatakse funktsiooni **katkevaks** punktis M_0 .

Ülesanne 9.3. Näidake, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

(a) $f(x, y) = \frac{xy}{\sin x + e^y};$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

(b) $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{\ln z};$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$

Praktikum 10

Esimest ja kõrgemat järku osatuletised Puutujatasand ja normaal

10.1 Esimest järku osatuletised

Definitsioon 10.1

Funktsiooni $z = f(x, y)$ *esimest järku osatuletiseks argumendi x järgi* nimetatakse piirväärtust

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ *esimest järku osatuletiseks argumendi y järgi* nimetatakse piirväärtust

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Ülesanne 10.1. Leidke definitsiooni kasutades järgmiste funktsioonide osatuletised.

- (a) $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ (c) $f(x, y) = y^2$ (e) $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$
(b) $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$ (d) $f(x, y) = \ln(x^2 y)$

Ülesanne 10.2. Leidke järgmiste funktsioonide osatuletised.

- (a) $f(x, y) = e^{2x+3y}$ (f) $f(x, y) = \frac{2x}{y} + 4$ (l) $f(x, y) = x^y$
(b) $f(x, y) = x^3 y + 2x$ (g) $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^4}$ (m) $f(x, y) = (x + y)^y$
(c) $f(x, y, z) = x^3 y z^2 + 7y$ (h) $f(x, y) = \cos(4x - y)$ (n) $f(x, y) = (1 + xy)^{xy}$
(d) $f(x, y, z) = \ln(xz) + \ln(yz)$ (i) $f(x, y) = x \sin y$ (o) $f(x, y) = x^{\sin y}$
(e) $f(x, y) = (x + 2y)^5$ (j) $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$ (p) $f(x, y, z) = x^2 + y^z$
(k) $f(x, y) = \arctan \frac{1}{xy}$ (q) $f(x, y, z, t) = \frac{x - y}{z - t}$

10.2 Kõrgemat järku osatuletised

Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame **teist järku osatuletised**

$$f''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Teist järku osatuletisi

$$f''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

nimetatakse **segatuletiseks**.

Teoreem 10.1

Kui funktsioon $z = f(x, y)$ ning tema osatuletised on mingis punktis $M(x, y)$ ja selle ümbruses määratud ja pidevad, siis selles punktis teist järku segatuletised on võrdsed

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Ülesanne 10.3. Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (a) $f(x, y) = x^2 + y$ | (f) $f(x, y) = x^y$ |
| (b) $f(x, y) = x^3y - y^3x$ | (g) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$ |
| (c) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y}$ | (h) $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$ |
| (d) $f(x, y) = x \sin(x + y)$ | (i) $f(x, y, z) = xyz + \ln(x + y + z)$ |
| (e) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$ | (j) $f(x, y, z) = \sin(1 + xyz)$ |

Ülesanne 10.4. Leidke järgmiste funktsioonide segaosatuletised f_{xy} .

- | | |
|---|------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = x^x + y \sin x$ | (c) $f(x, y) = y \cos y + e^{x+y}$ |
| (b) $f(x, y) = x^{10} \cos x + y^2 \ln x$ | |

Ülesanne 10.5. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x, y) = x + x \ln(xy), \quad f_{xy} = ?$ | (b) $f(x, y, z) = e^{xy} + e^{xyz}, \quad f_{xyz} = ?$ |
|---|--|

10.3 Pinna puutujatasand ja normaal

Pinna $z = f(x, y)$ **puutujatasand** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub võrrandiga

$$z = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b). \quad (10.1)$$

Pinna $z = f(x, y)$ **normaal** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = a + t f'_x(a, b), \\ y = b + t f'_y(a, b), \\ z = f(a, b) - t. \end{cases} \quad (10.2)$$

Pinna $z = f(x, y)$ **normaal** punktis $A = (a, b, f(a, b))$ avaldub kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x - a}{f'_x(a, b)} = \frac{y - b}{f'_y(a, b)} = \frac{z - f(a, b)}{-1}. \quad (10.3)$$

Ülesanne 10.6. Leidke puutujatasand ja normaal järgmistele pindadele märgitud punktis.

- | | |
|--|---|
| (a) $z = x \cos y - y e^x$ punktis $(0, 0, 0)$ | (f) $z = x^2 - y^2$ punktis, kus $x = -2$ ja $y = 1$, |
| (b) $z = \ln(x^2 + y^2)$ punktis $(1, 0, 0)$ | (g) $z = \frac{x}{x^2 + y^2}$ punktis, kus $x = 1$ ja $y = 2$ |
| (c) $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ punktis $(0, 0, 1)$ | (h) $z = \sin(xy)$ punktis, kus $x = \pi/3$ ja $y = -1$ |
| (d) $z = \sqrt{y - x}$ punktis $(1, 2, 1)$ | (i) $z = \cos(x/y)$ punktis, kus $x = \pi$ ja $y = 4$ |
| (e) $z = 4x^2 + y^2$ punktis $(1, 1, 5)$ | |

Kontrolltöö nr 1 toimub loengu ajal

Kontrolltöö ülesannete teemad

1. Vektorruumid. Vektorite lineaarne sõltumatus

- 1.1. Vektorruum, vektorruumi alamruum.
- 1.2. Vektorsüsteemi lineaarne sõltuvus ja sõltumatus.
- 1.3. Vektorruumi baas ja vektori koordinaadid.

2. Arvread

- 2.1. Arvrea koondumine (hajumine).
- 2.2. Geomeetrilise rea koondumise tingimus.
- 2.3. Harmoonilise rea koondumise tingimus.
- 2.4. Positiivsed arvread, võrdluslaused, integraaltunnus.
- 2.5. D'Alembert'i, Cauchy ja Leibnizi koonduvustunnused.

3. Astmereal

- 3.1. Astmerea koonduvusraadius, koonduvuspiirkond ja absoluutse koonduvuse piirkond.
- 3.2. Funktsiooni arendamine Taylori ritta punktis c .

4. Kahe muutuja funktsiooni määramispiirkond, piirväärtus ja pidevus

- 4.1. Määramispiirkonna leidmine.
- 4.2. Näidata, et funktsiooni piirväärtust ei leidu.
- 4.3. Piirväärtuse leidmine.
- 4.4. Kahe muutuja funktsiooni pidevus.

Praktikum 11

Täisdiferentsiaal Ligikaudsed arvutused täisdiferentsiaali abil

11.1 Täisdiferentsiaal

Olgu

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

funktsiooni f muut punktide $P_0 = (x, y)$ ja $P = (x + \Delta x, y + \Delta y)$ vahel.

Definitsioon 11.1

Kahe muutuja funktsiooni f juurdekasvu peaosas argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahane-misel nimetatakse selle funktsiooni **täisdiferentsiaalsiks**. Funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal on kujul

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaal on kujul

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz.$$

Ülesanne 11.1. Leidke järgmiste funktsioonide täisdiferentsiaalid.

(a) $f(x, y) = x + 3y$

(e) $f(x, y) = e^{1+xy}$

(b) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy$

(f) $f(x, y) = -\cos xy$

(c) $f(x, y) = xy$

(g) $f(x, y) = y^x$

(d) $f(x, y) = \frac{x}{y}$

(h) $f(x, y, z) = \tan(x - 2y + 3z)$

Ülesanne 11.2. Arvutage funktsioonide muudud ja täisdiferentsiaalid etteantud väärtustel.

(a) $u = x^2 - 3xy + 2y^2$, kui $x = 6$, $y = 2$, $\Delta x = 0.3$, $\Delta y = 0.2$

(b) $u = x^2z - 2yz^2 + 3xyz$, kui $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$, $\Delta z = -0.2$

11.2 Funktsiooni muudu ligikaudne leidmine

Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ argumentide muudud $\Delta x, \Delta y$ on küllalt väikesed, siis

$$\Delta z \approx dz$$

ehk

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y.$$

Ülesanne 11.3. Leidke järgmiste funktsioonide ligikaudsed muudud argumendi märgitud muutuse korral.

- (a) $u = 4x^2 - xy$, punktist $(1, 2)$ punkti $(1.01, 2.02)$
- (b) $u = x^{2/3}y^{1/2}$, punktist $(8, 9)$ punkti $(7.97, 9.03)$
- (c) $u = \frac{x}{x - y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$
- (d) $u = 2xe^{-y}$, punktist $(-3, -2)$ punkti $(-3.02, -1.98)$
- (e) $u = xe^{xy} - y^2$, punktist $(-1, 0)$ punkti $(-0.97, 0.03)$
- (f) $u = \ln \sqrt{xy}$, punktist $(5, 10)$ punkti $(5.05, 9.95)$

Ülesanne 11.4. Ristküliku küljepikkusteks mõõdetakse 100 m ja 150 m.

Mõõtmisel võidi eksida ühe meetriga. Milline on võimalik viga selle ristküliku pindala arvutamisel? Milline on viga pindala arvutamisel, kui mõõtmise viga on 0.5 m?

Ülesanne 11.5. Kahe linna elanike arv (tuhandetes) on vastavalt x ja y , telefonikõnede hulk päevas nende vahel avaldub kujul $12xy$.

Hinnake ühes päevas tehtavate telefonikõnede arvu kasvu, kui elanike arv linnades kasvab vastavalt 40 tuhandelt ja 60 tuhandelt 1000 inimese võrra mõlemas linnas.

Ülesanne 11.6. Püstsilindri kõrgust suurendatakse 12 sentimeetrilt 12.2 sentimeetrini ja põhja raadiust vähendatakse 8 sentimeetrilt 7.7 sentimeetrimini.

Hinnake selle silindri ruumala ja kogupindala muute.

Ülesanne 11.7. (Maj) Elektroonikafirma, mis toodab päevas x DVD-mängijat ja y Blu-Ray-mängijat, kasum (eurodes) avaldub funktsioonina $P(x, y)$.

Kui praegu toodab firma päevas 200 DVD-mängijat ja 300 Blu-Ray-mängijat, siis hinnake kasumi kasvu kui päevas toota viis DVD-mängijat ja neli Blu-Ray-mängijat rohkem.

$$(a) \quad P(x, y) = 2x^2 - 3xy + 3y^2 \qquad (b) \quad P(x, y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2$$

Ülesanne 11.8. Risttahuka kujuline kinnine kast kaetakse värviga.

Hinnake kastil oleva värvi kogust, kui kasti küljepikkused on 1.2, 0.9 ja 0.6 meetrit ning värvikihi paksus on 1 mm.

Ülesanne 11.9. (F) Tuulekülm on temperatuur, mida inimene õues olles tunneb ja sõltub õhutemperatuurist t (ühik $^{\circ}\text{C}$) ning tuule kiirusest w (ühik km/h).

Tuulekülma arvutamiseks kasutatakse valemit $C(t, w) = 13.12 + 0.6215t - 11.37w^{0.16} + 0.3965tw^{0.16}$. Hinnake tajutava temperatuuri muutust, kui temperatuur langeb -10 kraadilt kaks kraadi ja tuule kiirus tõuseb 18 kilomeetrilt tunnis 21.6 kilomeetrini tunnis.

Ülesanne 11.10. (F) Vere kogus liitrites, mis pumbatakse läbi kopsude minutis arvutatakse valemist $C = \frac{x}{y-z}$, kus x on kopsudes omastatud hapniku kogus (milliliitrit minutis), y ja z on hapniku kontsentratsioon veres (ml hapniku liitri vere kohta) vastavalt vahetult pärast ja enne kopsude läbimist.

Tüüpilised mõõtetulemused on $x = 250$, $y = 160$ ja $z = 150$. Hinnake südame väljundi arvutamisel tehtavat viga, kui iga näitaja mõõtmisel võidi eksida viie ühikuga.

Ülesanne 11.11. (K) Ideaalse gaasi ühe mooli rõhk, ruumala ja temperatuur on seoses $PV = 8.31T$, kus P on rõhk kilopaskalites, V on ruumala liitrites ja T on temperatuur $^{\circ}\text{K}$.

Hinnake rõhu muutust, kui mahtu suurendatakse 12 liitrit 12.3 liitrile ja temperatuur väheneb 310 kraadilt 305 kraadini.

11.3 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx ja Δy on küllalt väikesed, siis

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x \Delta x + f'_y \Delta y.$$

Kui $u = f(x, y, z)$, siis

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \approx f(x, y, z) + f'_x(x, y, z)\Delta x + f'_y(x, y, z)\Delta y + f'_z(x, y, z)\Delta z.$$

Ülesanne 11.12. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $1.03^{4.05}$

(e) $\sqrt{5e^{0.02} + 2.03^2}$

(b) $\ln(0.09^3 + 0.99^3)$

(f) $\sqrt{125}\sqrt[4]{17}$

(c) $2.01^3 - 0.97^2$

(g) $(1 - \sqrt{10})(1 + \sqrt{24})$

(d) $1.04^{1.99} + \ln 1.02$

(h) $\sin \frac{6}{7}\pi \cos \frac{1}{5}\pi$

Ülesanne 11.13. (Maj) Cobb'i-Douglas'i tootmisfunktsioon on kujul $Q(K, L) = 4K^{3/4}L^{1/4}$, kus K on kapitalikulud ja L on tööjõukulud.

On teada, et $Q(10000, 625) = 20000$. Leidke ligikaudu $Q(10010, 623)$ väärtus.

Praktikum 12

Ekstreemumid. Optimiseerimine Ilmutamata funktsiooni tuletis

12.1 Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

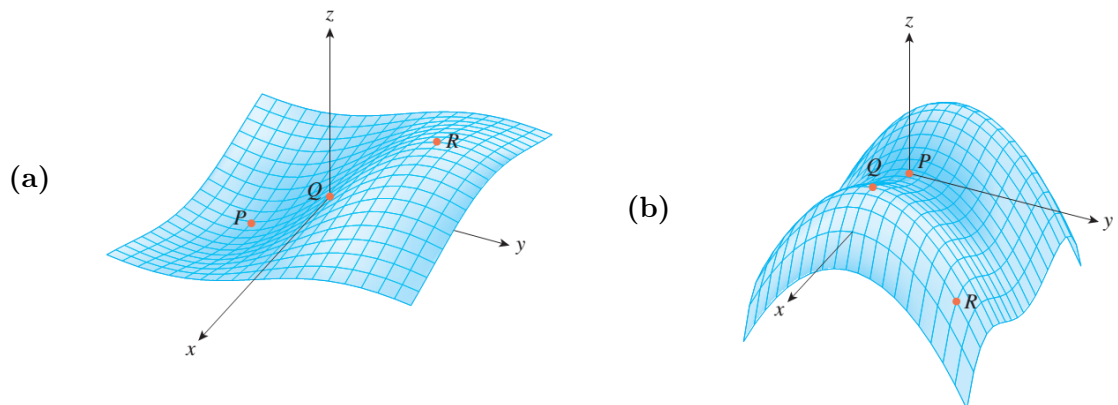
Lause 12.1

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ kaks korda pidevalt diferentseeruv oma statsionaarses punktis (a, b) . Tähistame

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

- (a) Kui $W > 0$ ja $f''_{xx}(a, b) > 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne miinimum.
- (b) Kui $W > 0$ ja $f''_{xx}(a, b) < 0$, siis punktis (a, b) on lokaalne maksimum.
- (c) Kui $W < 0$, siis punktis (a, b) ei ole lokaalset ekstreemumit.
- (d) Kui $W = 0$, siis ekstreemumi olemasolu jääb lahtiseks.

Ülesanne 12.1. Klassifitseerige joonistel märgitud punktid.



Ülesanne 12.2. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (a) $f(x, y) = 1 - (x + 1)^2 - y^2$ | (e) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ |
| (b) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$ | (f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ |
| (c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$ | (g) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$ |
| (d) $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ | (h) $f(x, y) = x^2 + y - 2 \ln(xy)$ |

12.2 Kahe muutuja funktsiooni suurim ja vähim väärtus antud piirkonnas

Ülesanne 12.3. Leidke toodud funktsioonide globaalsed ekstreemumid $\max f$ ja $\min f$.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - y, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(c) $f(x, y) = x - 2y - 1, (x, y) \in \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1 - x\}$

(d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2, (x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$

(e) $f(x, y) = (2x^3 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}, (x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Ülesanne 12.4. Allelid A, B ja O määravad neli veregruppi: A (AA või AO), B (BB või BO), O (OO) ja AB. Hardy–Weinbergi seaduse kohaselt on kahte alleeli kandvate inimeste osakaal populatsioonis

$$P \approx 2pq + 2pr + 2rq,$$

kus p, q ja r on vastavalt A, B ja O osakaalud populatsioonis. Kasutades fakti, et $p + q + r = 1$, näidake, et P väärtus on kõige rohkem $\frac{2}{3}$.

12.3 Optimiseerimine

Ülesanne 12.5. Jaotage arv 30 kolmeks positiivseks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

Ülesanne 12.6. Kõikidest risttahukatest, millel on ühesugune ruumala, leidke see, mille täispindala on minimaalne.

Ülesanne 12.7. (Maj) Autotootja müüb ühte mudelit Ameerikas ja Euroopas erineva hinnaga. Ameerikas müüdavate autode hind (tuhandetes dollarites) on $p = 20 - 0.2x$ (kus $0 \leq x \leq 100$) ning Euroopas küsitakse hinda $q = 16 - 0.1y$ (kus $0 \leq y \leq 160$).

Siin x ja y on päevas müüdavate autode arv vastavalt Ameerikas ja Euroopas. Autotootja kulu-funktsioon on $C = 20 + 4(x + y)$. Leidke autotootja tulufunktsioon (st käive miinus kulu). Mitu autot ja millise hinnaga tuleks kummalgi turul müüa, et teenida võimalikult suurt tulu?

Ülesanne 12.8. Laborikatsed näitasid, et x mg ravimi A ja y mg ravimi B koostoime avaldub funktsioonina $f(x, y) = xy - 2x^2 - y^2 + 100x + 60y$ (kus $0 \leq x \leq 55, 0 \leq y \leq 60$).

Leidke mõlema ravimi kogused, mis tagavad suurima toime.

Ülesanne 12.9. Psühholoogilises eksperimendis osaleja, kes harjutab uut oskust x tundi ja puhkab y tundi, katse tulemused avalduvad funktsioonina $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + 11x - 4y + 120$ (kus $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 4$).

Leidke harjutamiseks ja puhkamiseks kuluv aeg, mis tagab võimalikult kõrge katse tulemuse.

Ülesanne 12.10. Neli linna ühendavad ressursid soovides ehitada ühise telemasti.

Leidke selline punkt $A(x, y)$, kus masti kauguste ruutude summa linnadest oleks minimaalne, kui linnad asuvad punktides $(-5, 0)$, $(1, 7)$, $(9, 0)$ ja $(0, -8)$.

12.4 Ilmutamata funktsiooni tuletis

Valem 12.1

Kui pidev funktsioon $y = f(x)$ on antud ilmutamata kujul võrrandiga $F(x, y) = 0$ ja F, F'_x, F'_y on pidevad punktis (x, y) ja $F'_y(x, y) \neq 0$, siis funktsiooni $y = y(x)$ tuletis vaadeldavas punktis on

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \quad (12.1)$$

Ülesanne 12.11. Leidke järgmiste ilmutamata kujul antud funktsioonide $y = y(x)$ tuletised y' .

(a) $y + \sin y + e^x = 0$

(e) $1 + \ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x}$

(b) $x + y = e^{x-y}$

(f) $xe^y + ye^x - 2x^2y = 0$

(c) $y^2 + 2xy - 2 = 0$

(g) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a = \text{const})$

(d) $x^2 - 2xy + y^4 = 4$

(h) $x \cos xy + y \cos x = 2$

Ülesanne 12.12. Leidke järgmiste ilmutamata kujul antud funktsioonide $y = y(x)$ tuletised märgitud punktis P .

(a) $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad P = (1, 1)$

(c) $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad P = (1, 2)$

(b) $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad P = (-1, 1)$

(d) $xe^y + \sin(xy) + y - \ln 2 = 0, \quad P = (0, \ln 2)$

12.5 Taylори valem kahe muutuja funktsiooni jaoks *

Valem 12.2

Olgu antud funktsioon $z = f(x, y)$, mis on määratud mingis piirkonnas S . Eeldame, et punkti $M_0(a, b)$ ümbruses on funktsioonil z pidevad osatuletised kuni järguni $n + 1$. Funktsiooni f n -astme **Taylori valemiks** punktis $M_0 = (a, b)$ nimetatakse funktsiooni

$$P_n(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \quad (12.2)$$

$$\frac{1}{2!} (f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2) + \dots + R_n(x, y),$$

kus R_n on Taylori valemi jääkliige.

Ülesanne 12.13. Leidke järgmiste funktsioonide Taylori polünoomid punktis (a, b) .

(a) $f(x, y) = (x + y)^3, \quad n = 3, \quad (a, b) = (0, 0)$

(b) $f(x, y) = (x + y)^3, \quad n = 3, \quad (a, b) = (1, 1)$

(c) $f(x, y) = \cos x \cos y, \quad n = 2, \quad (a, b) = (0, 0)$

(d) $f(x, y) = xy + \frac{3}{x} + \frac{9}{y^2}, \quad n = 2, \quad (a, b) = (1, 3)$

Praktikum 13

Lagrange'i kordajate meetod Tuletis antud suunas

13.1 Lagrange'i kordajate meetod

Valem 13.1

Funktsiooni $f(x, y)$ tingliku (lokaalse või globaalse) ekstreemumi leidmiseks lisatingimusel $g(x, y) = 0$ Lagrange'i kordajate meetodil moodustame **Lagrange'i funktsiooni**

$$J(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

kus λ on tundmatu Lagrange'i kordaja. Tinglike statsionaarsete punktide leidmiseks lahendame süsteemi

$$J'_x = 0, J'_y = 0, J'_\lambda = g(x, y) = 0.$$

Ülesanne 13.1. Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0)$ jooneni $x^2 y = 16$.

Ülesanne 13.2. Leidke vähim kaugus nullpunktist $(0, 0, 0)$ tasandini $x + 2y + 2z = 3$.

Ülesanne 13.3. Leidke Lagrange'i meetodiga järgmiste funktsioonide tinglikud lokaalsed ekstreemumid antud lisatingimustel.

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x + y = 2$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$

(c) $f(x, y) = 6 - 4x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 1$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
 $(x, y, z > 0)$

(e) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6, \quad x - y = 0$

(g) $f(x, y, z) = xy + xz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad y + z = 2$

Ülesanne 13.4. (F) Sõjalaevalt lastakse rakett välja horisontaalse algkiirusega V_x ja vertikaalse algkiirusega V_y .

Raketi laskekaugus on $R(V_x, V_y) = \frac{2V_x V_y}{g}$, kus g on raskuskiirendus. Raketi kineetiline energia on fikseeritud: $\frac{m(V_x^2 + V_y^2)}{2} = E$. Leidke raketi maksimaalne laskekaugus.

13.2 Tuletis antud suunas, gradient

Definitsioon 13.1

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ tuletiseks punktis (x, y, z) vektori $\vec{s} = (x_1, y_1, z_1)$ suunas nimetatakse piirväärtust

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Valem 13.2

Kui $u = f(x, y, z)$ on diferentseeruv punktis (x, y, z) ja vektori $\vec{s}$ suunakoosinused on $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, siis kehtib valem

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = u'_x \cos \alpha + u'_y \cos \beta + u'_z \cos \gamma = u'_x \frac{x_1}{|\vec{s}|} + u'_y \frac{y_1}{|\vec{s}|} + u'_z \frac{z_1}{|\vec{s}|}.$$

Ülesanne 13.5. Leidke funktsiooni $f(x, y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$ muutumiskiirus punktis $(0, 1)$ ja suunas s , kui

(a) $s = (1, 2)$

(c) $s = (3, 0)$

(b) $s = (1, -2)$

(d) $s = (1, 1)$

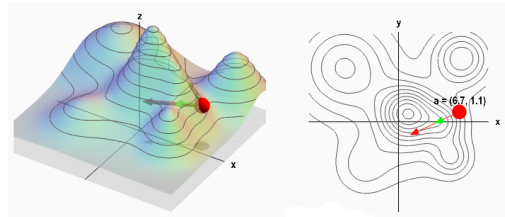
Valem 13.3

Igas punktis (x, y, z) , kus leiduvad funktsiooni $u = f(x, y, z)$ esimest järku osatuletised, saame vaa-
delda funktsiooni f **gradienti**

$$\nabla f(x, y, z) = \text{grad } u = (f'_x, f'_y, f'_z).$$

Omadus 13.1

- a) Gradient on igas punktis risti pinna niivoojoonega.
- b) Gradient näitab pinna kiireima tõusu suunda ning suurima tõusu arvvärtus on $|\text{grad } u|$.
- c) Gradiendi vastandvektor $-\text{grad } u$ näitab pinna kiireima languse suunda ning suurima languse arvvärtus on $|\text{grad } u|$.



Joonis : <http://mathinsight.org/>

Ülesanne 13.6. Leidke funktsiooni gradient antud punktis.

(a) $f(x, y) = 3x^4 - 2x + y^2 - 5, P(1, -2)$

(d) $f(x, y, z) = (x + 2y - z)e^{xyz}, P(1, -1, 0)$

(b) $f(x, y) = \cos(x + y), P(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

(e) $f(x, y, z) = xye^z, P(e, e, -1)$

(c) $f(x, y, z) = xy^2z^3, P(1, -1, -1)$

(f) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy + 3, P(1, -1)$

Ülesanne 13.7. Leidke funktsiooni suurim kasvukiirus antud punktis.

(a) $f(x, y) = x^2 - y^2, P(2, -1)$

(c) $f(x, y) = e^{xy}, P(2, 0)$

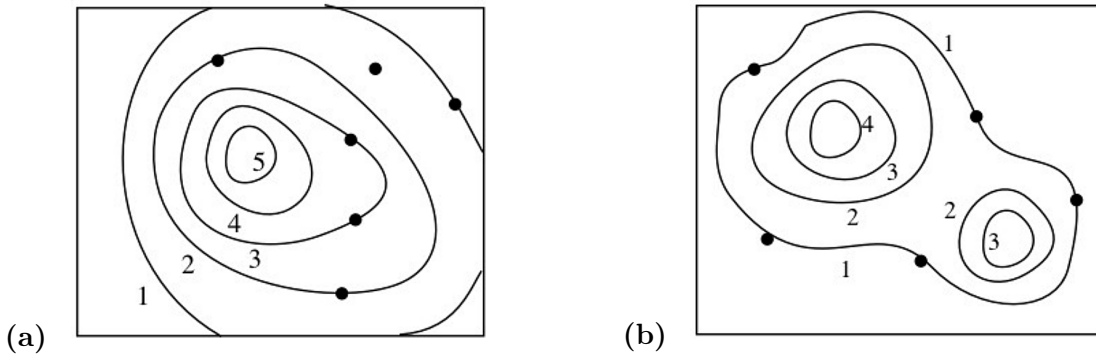
(b) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, P(1, 1)$

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2), P(1, -2)$

Ülesanne 13.8. (F) Temperatuur $T(x, y)$ (kraadi $^{\circ}\text{C}$) igas punktis xy -tasandil on $T(x, y) = x^2e^{-y}$. Millises suunas kasvab temperatuur punktis $(2, 1)$ kõige kiiremini?

Milline on suurim kasvukiirus selles punktis?

Ülesanne 13.9. Näidake gradiendi suunad kontuurkaardil märgitud punktides. Mil-
line on kiireima tõusuga trajektoor igast märgitud punktist?



13.3 Vähimruutude meetod *

Valem 13.4

Olgu meil antud komplekt andmeid $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, kus $n \in \mathbb{N}$. **Vähimruutude meetodiga** otsime sellist funktsiooni f , mis minimiseeriks funktsiooni

$$\Phi(f) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2.$$

Näiteks, kui soovime antud andmeid lähendada sirgega $f(x) = ax + b$, siis vähimruutude meetodiga tuleks minimiseerida funktsioon

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Ülesanne 13.10. Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$ (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$
(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$ (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$

Ülesanne 13.11. Leidke parabool $f(x) = ax^2 + bx + c$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(0, 1), (2, 3), (4, 2)$ (c) $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)$
(b) $(1, 1), (2, 2), (6, 0)$ (d) $(-4, -1), (-3, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2)$

Ülesanne 13.12. Leidke eksponentsiaalne funktsioon $f(x) = ae^{bx}$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud punkte.

- (a) $(1, 16), (3, 17), (5, 18), (7, 20), (10, 22)$ (b) $(2, 13), (4, 9), (6, 6), (8, 4), (10, 3)$

Ülesanne 13.13. Firma toote müüginumbrid (miljonites eurodes) esimese viie aasta jooksul on antud tabelina.

Aasta	1	2	3	4	5
Müük	0,9	1,5	1,9	2,4	3,0

- (a) Leidke sirge $f(x) = ax + b$, mis vähimruutude meetodiga lähendab kõige paremini antud andmeid;
(b) Ennustage leitud sirge abil firma kuuenda aasta müüginumbrid.

Praktikum 14

Kahekordse integraali arvutamine

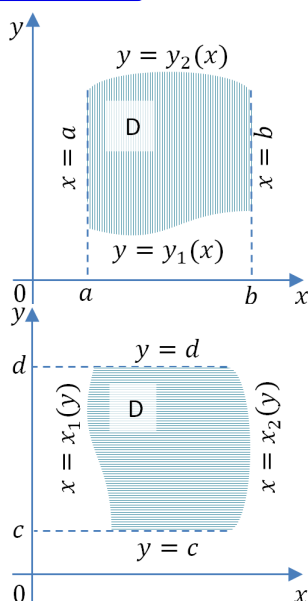
14.1 Kahekordse integraali arvutamine

Definitsioon 14.1

Funktsiooni $f(x, y)$ **kahekordseks integraaliks** üle piirkonna D nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \rightarrow 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna D osadeks jaotamise viisist ega punktide (x_i, y_i) valikust

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i. \quad (14.1)$$

Valem 14.1



Kui $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (14.2)$$

Kui $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, siis

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (14.3)$$

Ülesanne 14.1. Joonistage järgmised integreerimispiirkonnad D ning asetage integreerimisrajad kahekordses integraalis valemite (14.2) ja (14.3) järgi.

- | | |
|--|---|
| (a) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ | (d) D on ring $x^2 + y^2 \leq 1$ |
| (b) D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$ | (e) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = 1$ |
| (c) D on ristkülik tippudega $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$ | (f) D on on piiratud joontega $y = x^2$, $y = x^3$ |

Ülesanne 14.2. Muutke integreerimisjärjekord järgmistes integraalides.

(a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy$

(b) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & \int_0^1 dy \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx & + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\
 \text{(d)} \quad & \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy & \text{(g)} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy \\
 \text{(e)} \quad & \int_{-2}^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x, y) dy & \text{(h)} \quad \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy \\
 \text{(f)} \quad & \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + & \text{(i)} \quad \int_1^3 dx \int_{1+\sqrt{-x^2+4x-3}}^3 f(x, y) dy
 \end{aligned}$$

Ülesanne 14.3. Leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iint_D x \, dx \, dy$, kus D on kolmnurk tippudega $(0, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$
- (b) $\iint_D y \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $x = 1$ ja $y = x^2$
- (c) $\iint_D \sin(x + y) \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = -x$, $y = 0$ ja $x = \pi$
- (d) $\iint_D \cos(x - y) \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $y = x$ ja $x = \pi$
- (e) $\iint_D e^{x-y} \, dx \, dy$, kus D on ristkülik $D = [0, \ln 4] \times [0, \ln 2]$
- (f) $\iint_D \frac{\ln x}{xy} \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = 1$, $y = x$ ja $x = e$
- (g) $\iint_D \frac{1}{x} \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0$, $y = \ln x$ ja $x = e$
- (h) $\iint_D x \sin(1 + x^2) \cos(1 + y^2) \, dx \, dy$, kus D on ristkülik $D = [-1, 1] \times [-1, 0]$
- (i) $\iint_D (y - 2x^2) \, dx \, dy$, kus D on piiratud kinnise joonega $|x| + |y| = 1$
- (j) $\iint_D xy \, dx \, dy$, kus D on piiratud joontega $y = x$, $y = 2x$ ja $x + y = 2$

Ülesanne 14.4. Määratud integraali arvutamine kahekordse integraali abil.

Arvutage järgmine integraal, esitades integraalialuse funktsiooni määratud integraalina

$$\int_0^2 (\arctan \pi x - \arctan x) \, dx.$$

Praktikum 15

Muutujavahetus kahekordses integraalis Üleminek polaarkoordinaatidele

15.1 Muutujavahetus kahekordses integraalis

Valem 15.1

Kui $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ siis **muutujavahetuse valem** on

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv, \quad (15.1)$$

kus teisenduse jakobiaan $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$, kui $(u, v) \in \Delta$.

Kehtib $J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)}$, kus $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ ja $J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$.

Ülesanne 15.1. Leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iint_D (2x + y - 2)^2 dx dy$, kus $D = \{(x, y) : -1 \leq x - y \leq 1, -1 \leq 2x + y \leq 2\}$
- (b) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $x + y = 1$, $x + y = 2$, $3x + 4y = 5$ ja $3x + 4y = 6$
- (c) $\iint_D (y - x) dx dy$, kus D on rööpkülik, mis on piiratud sirgetega $y = x + 1$, $y = x - 3$, $y = -\frac{x}{3} + 2$ ja $y = -\frac{x}{3} + 4$
- (d) $\iint_D dx dy$, kus D on piirkond, mis asub esimeses veerandis ja on piiratud joontega $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$ ja $y = x$

15.2 Üleminek polaarkoordinaatidele

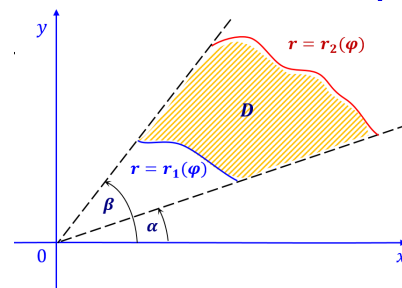
Valem 15.2

Üleminek polaarkoordinaatidele:

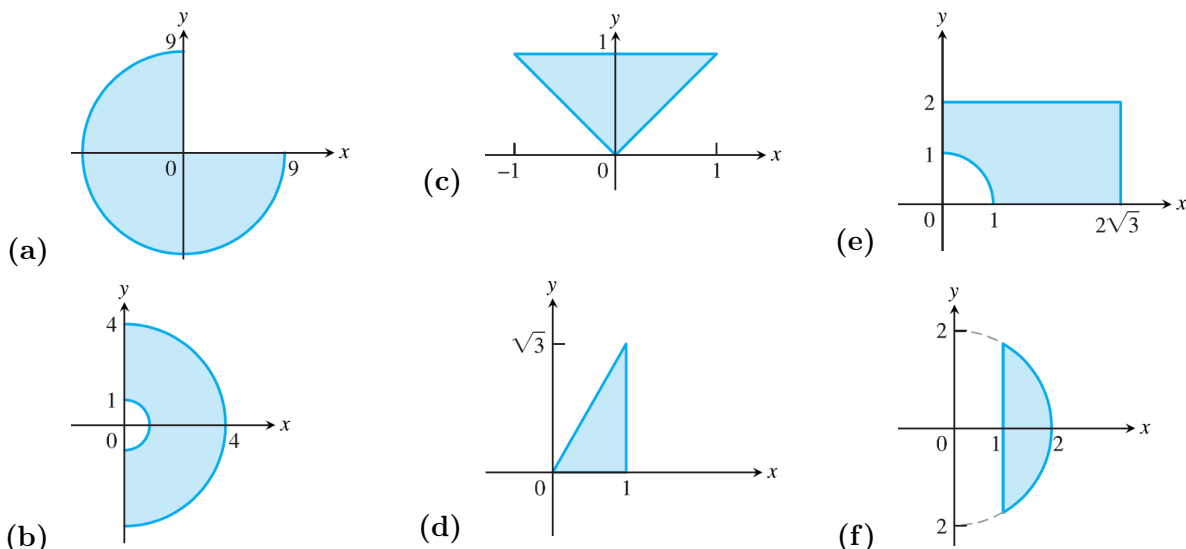
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \Delta = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)\},$$

kus teisenduse jakobiaan on $J(r, \varphi) = r$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \quad (15.2)$$



Ülesanne 15.2. Esitage järgmised piirkonnad polaarkoordinaatides.



Ülesanne 15.3. Leidke järgmised integraalid, minnes üle polaarkoordinaatidele.

- | | |
|--|---|
| (a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$; | (d) $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ |
| (b) $\iint_D dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -\sqrt{2}\}$ | (e) $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ |
| (c) $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ | (f) $\iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$ |

Ülesanne 15.4. Leidke järgmised integraalid.

- | | |
|---|--|
| (a) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ | $D = \{(x, y) : x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\}$ |
| (b) $\iint_D x dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$ | (e) $\iint_D y dx dy$, kus $D = \{(x, y) : 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$ |
| (c) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kus
$D = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$ | (f) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, $D: x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, y = -x (y \leq -x)$ |
| (d) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kus | (g) $\iint_D dx dy$, kus D on piiratud joontega $y = 0, y = \sqrt{2 - x^2}, x = y^2 (x \geq y^2)$ |

Praktikum 16

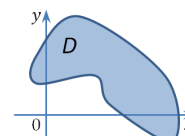
Kahekordse integraali rakendused

16.1 Kahekordse integraali geomeetrilised rakendused

16.1.1 Tasandilise kujundi pindala

Valem 16.1

Tasandilise kujundi D pindala: $S_D = \iint_D dx dy$



Ülesanne 16.1. Leidke xy -tasandil asetsevate kujundite pindalad, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega.

(a) $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$

(g) $r = a \cos \varphi$, $r = b \cos \varphi$, ($b > a > 0$)

(b) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = e$

(h) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (kardioid)

(c) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 4$

(i) $r = 2 \cos 4\varphi$ (kaheksaleheline roos)

(d) $xy = 4$, $x + y = 5$

(j) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

(e) $3x^2 = 25y$, $5y^2 = 9x$

(k) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli lemniskaat)

(f) $x^2 + y^2 = 16$

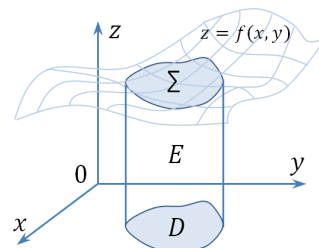
(l) $(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$

16.1.2 Keha ruumala

Valem 16.2

Kahekordne integraal funktsioonist $f(x, y) \geq 0$ üle piirkonna E on võrdne kõverjoonelise silindri ruumalaga, kui silinder on pealt piiratud pinnaga $z = f(x, y)$ ja alt pinnaga E :

$$V_E = \iint_D f(x, y) dx dy.$$



Ülesanne 16.2. Leidke järgmiste pindadega piiratud kehade E ruumalad V_E .

(a) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$.

$x + y = 1$ ning elliptiline paraboloid $z = 2x^2 + y^2 + 1$.

(b) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$ ja $y = 4$ ning pöördparaboloid $z = x^2 + y^2 + 1$.

(d) Tasandid $z = 0$ ja $x + z = 6$ ning silindrid $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$.

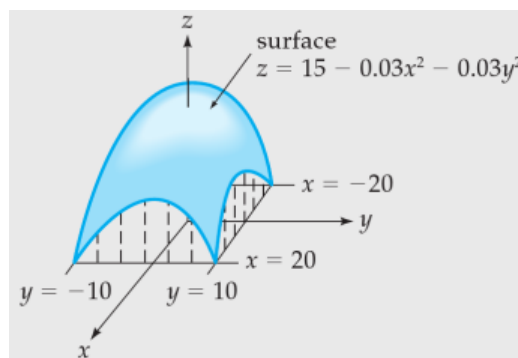
(c) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja

(e) Tasand $z = 0$, pöördparaboloid $z = x^2 + y^2$ ja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

- (f) Koordinaattasandid, silinder $x^2 + y^2 = 1$ ja pind $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, kus $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.
- (g) Tasandid $x = 1$, $y = 0$ ja $z = 0$ ning hüperboolne paraboloid $z = x^2 - y^2$.
- (h) Tasandid $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $2x + 3y = 12$ ning silinder $y^2 = 2z$.
- (i) Tasandid $z = 1$ ja $z = 12 - 3x - 4y$ ning elliptiline silinder $x^2 + 4y^2 = 4$.
- (j) Sfäär $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ja pöördparaboloid $2z = x^2 + y^2$.
- (k) Silindrid $x^2 + y^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 1$.
- (l) Pöördparaboloidid $z = 4 - x^2 - y^2$ ja $2z = 2 + x^2 + y^2$.
- (m) Silinder $x^2 + y^2 = 3$ ja kahekatteline hüperboloid $z^2 = x^2 + y^2 + 3$.
- (n) $z = \cos x \cos y$, $z = 0$, $|x + y| \leq \frac{\pi}{2}$ ja $|x - y| \leq \frac{\pi}{2}$.

Ülesanne 16.3. Külgliseintegra kuppeltelk on konstrueeritud joonisel näidatud funktsiooni järgi.

Et projekteerida ventilatsiooni- ja küttesüsteemi, on tarvis teada telgi ruumala. Leidke kuppeltelgi ruumala, kui tema põhjaks on joonisel märgitud ristkülik (kõik mõõtmised on antud jalgades, $1 \text{ ft} \approx 0,3 \text{ m}$).



16.2 Kahekordse integraali füüsikalised rakendused

16.2.1 Tasandilise kujundi mass

Valem 16.3

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\rho = \rho(x, y)$, kus $(x, y) \in D$. Tasandilise kujundi D mass avaldub kahekordse integraalina üle piirkonna D :

$$m_D = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy.$$

Ülesanne 16.4. Leidke ringi mass, kui ringi raadius on 10 cm.

Ringjoonel on pindtihedus $1,2 \text{ g/cm}^2$ ning see on võrdeline punkti kaugusega ringi keskpunktist.

Ülesanne 16.5. Leidke ruudukujulise plaadi mass, kui plaadi külje pikkus on $2a \text{ cm}$.

Plaadi materjali tihedus on igas punktis võrdeline punkti kauguse ruuduga diagonaalide lõikepunktist ning on ruudu tippudes 1 g/cm^2 .

Ülesanne 16.6. Funktsioon

$$f(x, y) = \frac{10000e^y}{1 + |x|} \frac{\text{bakter}}{\text{cm}^2}$$

kirjeldab mingi bakteri populatsiooni tihedust xy -tasandil, kus x ja y mõõdetakse sentimeetrites.

Leidke bakterite arv ristkülikul $[-5, 5] \times [-2, 0]$.

Ülesanne 16.7. (F) Elektrilaengu pindtihedus kettal raadiusega R meetrit on $\rho(r, \varphi) = kr(1 - \sin \varphi)$ C/m² (siin k on konstant).

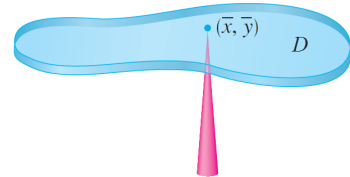
Integreerige pindtiheduse funktsiooni üle ketta, et leida elektrilaeng Q .

16.2.2 Tasandilise kujundi masskese

Valem 16.4

Kui tasandilise kujundi pindtihedus on $\rho(x, y)$, siis tasandilise kujundi masskeskme (x_c, y_c) koordinaadid saab arvutada valemitest

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_D} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \\ y_c = \frac{1}{m_D} \iint_D y \rho(x, y) dx dy \end{cases}$$



Ülesanne 16.8. Leidke bumerangi kujulise piirkonna masskese, kui see asub xy -tasandil paraboolide $y^2 = -4(x - 1)$ ja $y^2 = -2(x - 2)$ vahel.

Ülesanne 16.9. Leidke xy -tasandil asetsevate homogeensete kujundite masskeskme $C = (\bar{x}, \bar{y})$ koordinaadid, kui need kujundid on piiratud järgmiste joontega

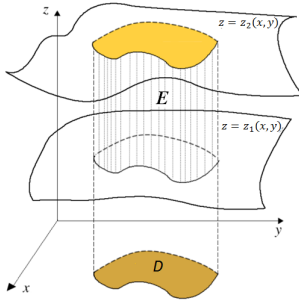
- | | |
|---|--|
| (a) Ringjoon $x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) ja sirgjoon $y = 0$. | (d) Kardoid $r = 2(1 + \cos \varphi)$ ja polaartelg $\varphi = 0$. |
| (b) Sinusoid $y = \sin x$ ja sirged $x = 0$ ja $x = \pi/4$ ja $y = 0$. | (e) x -telg ja tsükloid $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ kaar, kui $0 \leq t \leq 2\pi$. |
| (c) Jooned $y = x^2$ ja $x + y = 2$. | |

Ülesanne 16.10. Leidke ringi $x^2 + y^2 \leq 4$ masskeskme koordinaadid, kui pindtihedus ringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega punktist $(2, 0)$.

Ülesanne 16.11. Leidke poolringi $x^2 + y^2 \leq 1$ masskeskme koordinaadid, kui pindtihedus poolringi igas punktis on võrdeline tema kaugusega ruuduga punktist $(1, 0)$.

17.1 Kolmekordse integraali arvutamine

Valem 17.1

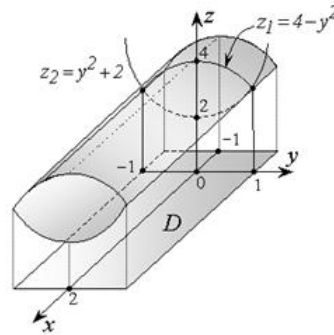


Kui $E = \{(x, y, z) : z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$, siis

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (17.1)$$

Ülesanne 17.1. Leidke integraal $\iiint_E xz dx dy dz$,

kus piirkond E on piiratud silindriliste pindadega $z_1 = 4 - y^2$, $z_2 = y^2 + 2$ ja tasanditega $x = -1$, $x = 2$.



Ülesanne 17.2. Leidke järgmised integraalid.

- $\iiint_E x^2 y z^2 dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$
- $\iiint_E y dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y\}$
- $\iiint_E (z + 4) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$
- $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, kus $E = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 5, 2 \leq z \leq 4\}$
- $\iiint_E x y^2 z^3 dx dy dz$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$
- $\iiint_E (2x + 3y - z) dx dy dz$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ ja $x + y = 2$

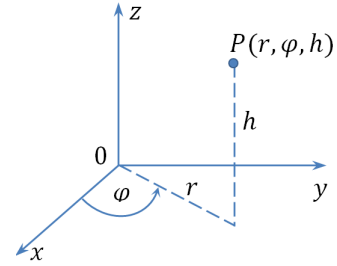
17.2 Üleminek silinderkoordinaatidele

Valem 17.2

Üleminek silinderkoordinaatidele. Tegemist on muutu-
javahetusega kujul

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \\ z = h \end{cases} \quad \text{teisenduse jakobiaan on } J(r, \varphi, h) = r$$

$$\iiint_E f(x, y, z) dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, h) r dr d\varphi dh \quad (17.2)$$



Ülesanne 17.3. Üleminekuga silinderkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = 2$;
- (b) $\iiint_E \frac{dx dy dz}{1 + (z - 1)^2}$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$;
- (c) $\iiint_E xz dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = 1$, $y = x$ ja $y = x\sqrt{3}$;
- (d) $\iiint_E y dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, tasandiga $z = 0$ ja paraboloidiga $z = x^2 + y^2$;
- (e) $\iiint_E z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$ ($y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0$, $z = c$ ja $y = 0$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$;

Praktikum 18

Sfäärilised koordinaadid. Kolmekordse integraali rakendused

18.1 Üleminek sfäärkoordinaatidele

Valem 18.1

Üleminek sfäärkoordinaatidele.

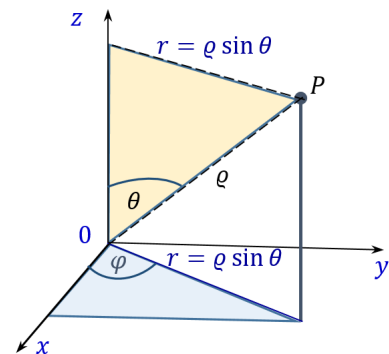
Tegemist on muutujavahetusega kujul

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \varrho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \varrho \cos \theta \end{cases}$$

Teisenduse jakobiaan on $J(r, \theta, \varphi) = \varrho^2 \sin \theta$.

$$\iiint_E f(x, y, z) dz =$$

$$\iiint_{\Delta} f(\varrho \cos \varphi \sin \theta, \varrho \sin \varphi \sin \theta, \varrho \cos \theta) \varrho^2 \sin \theta d\varrho d\varphi d\theta$$



Ülesanne 18.1. Üleminekuga sfäärkoordinaatidele leidke järgmised integraalid.

- (a) $\iiint_E z dx dy dz$, kus E on piiratud sfääri osaga $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($y \geq 0$, $z \geq 0$) ja tasanditega $y = 0$ ja $z = 0$;
- (b) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$;
- (c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$;
- (d) $\iiint_E \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$;
- (e) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0\}$;
- (f) $\iiint_E (x^2 + y^2) dx dy dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$.

18.2 Kolmekordse integraali rakendused

18.2.1 Keha ruumala leidmine

Valem 18.2

Keha E ruumala V_E avaldub valemiga

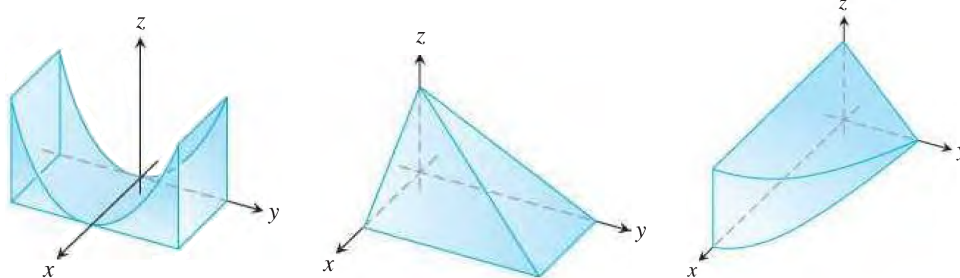
$$V_E = \iiint_E dx dy dz. \quad (18.1)$$

Ülesanne 18.2. Leidke keha ruumalad, kui nad on piiratud järgmiste pindadega.

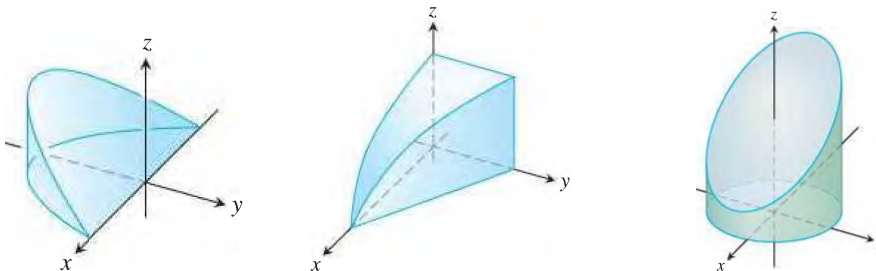
- (a) Silindrid $z = 9 - y^2$ ja $z = 1 + y^2$ ning tasandid $x = -1$ ja $x = 5$;
- (b) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$ ning silinder $x^2 + y^2 = 1$;
- (c) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = x^2 + 2y^2$ ning tasandid $x = 1$, $y = x$ ja $y = 2x$;
- (d) Silindrid $y = x^2$ ja $3y = 4 - x^2$ ning tasandid $z = 0$ ja $z = 9$;
- (e) Hüperboolne paraboloid $z = xy$ ning tasandid $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ ja $x + y = z$;
- (f) Paraboloidid $z = x^2 + y^2$ ja $z = 2x^2 + 2y^2$, silinder $y = x^2$ ning tasand $y = x$;
- (g) Pind $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, $a > 0$;

Ülesanne 18.3. Leidke keha ruumala, kui see on piiratud järgmiste pindadega.

- (a) $z = y^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 0$
- (b) $x + z = 1$, $y + 2z = 2$ ($x, y, z \geq 0$)
- (c) $y + z = 2$, $x = 4 - y^2$ ($x, y, z \geq 0$)



- (d) $x^2 + y^2 = 1$, $z = -y$, $z = 0$
- (e) $y = 1 - x$, $z = \cos(\pi x/2)$, $0 \leq x \leq 1$
- (f) $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $x + z = 3$



18.2.2 Keha mass ja massikeske

Valem 18.3

Olgu keha tihedus antud pideva funktsiooniga $\varrho = \varrho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in E$.

Keha E mass avaldub $m_E = \iiint_E \varrho(x, y, z) dx dy dz$.

Keha E massikeske $C = (x_c, y_c, z_c)$ asub punktis

$$\begin{cases} x_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E x \varrho(x, y, z) dx dy dz \\ y_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E y \varrho(x, y, z) dx dy dz \\ z_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E z \varrho(x, y, z) dx dy dz \end{cases}$$

Ülesanne 18.4. Leidke kuubi $E = [0, 10]^3$ mass, kui kuubi tihedus igas punktis on $\rho(x, y, z) = z$.

Ülesanne 18.5. Leidke risttahuka $E = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui tihedus igas tema punktis on $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Ülesanne 18.6. Leidke tasanditega $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$ ja $z = 0$ piiratud püramiidi mass, kui püramiidi tihedus igas punktis on võrdne punkti aplikaadiga.

Ülesanne 18.7. Leidke kera mass, kui kera raadius on a ja kera igas punktis tiheduse ruut $\rho^2 = a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$.

Ülesanne 18.8. Leidke silindri $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq c\}$ mass, kui tihedus igas tema punktis on võrdeline punkti kauguse ruuduga silindri teljest.

Ülesanne 18.9. Leidke kera kihi $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ mass, kui kihi tihedus igas punktis on pöördvõrdeline punkti kaugusega punktist $(0, 0, 0)$.

Ülesanne 18.10. On teada, et kerakujulise planeedi raadius on R ja tema mass on m .

Planeedi tihedus on sümmeetriline kera keskupunkti suhtes ning kahaneb lineaarselt planeedi pinna suunas. Millega võrdub tihedus keskpunktis, kui planeedi pinnal on see võetud võrdseks nulliga?

Ülesanne 18.11. Kerakujuline planeet raadiusega R omab atmosfääri tihedusega $\mu = \mu_0 e^{-ch}$, kus h on kõrgus planeedi pinna kohal, μ_0 on tihedus merepinnal ja c on positiivne konstant.

Leidke selle planeedi atmosfääri mass.

Ülesanne 18.12. Leidke homogeensete kehade masskeskme koordinaadid, kui kehad on piiratud järgmiste pindadega.

- | | |
|---|--|
| (a) $x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ | (c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x > 0, y > 0,$
$z > 0)$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ |
| (b) $z^2 = xy$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$ | |

Ülesanne 18.13. Leidke poolkera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ($z \geq 0$) masskeskme koordinaadid, kui tema tihedus igas punktis on arvuliselt võrdne punkti kaugusega kera keskpunktist.

Kontrolltöö 2 ülesannete teemad

1. Osatuletised ja rakendused

- 1.1. Mitme muutuja funktsiooni esimest ja kõrgemat järku osatuletised
- 1.2. Pinna puutujatasand ja normaal
- 1.3. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali leidmine, funktsiooni muudu ja funktsiooni uue väärtuse ligikaudne leidmine täisdiferentsiaali abil
- 1.4. Kahe muutuja funktsiooni lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, optimiseerimine
- 1.5. Ilmutamata funktsiooni tuletis
- 1.6. Tuletis antud suunas, gradient, funktsiooni suurima kasvukiiruse ja suurima kahanemiskiiruse leidmine gradiendi abil

2. Kahekordsed integraalid

- 2.1. Kahekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek polaarkoordinaatidele
- 2.2. Tasandilise kujundi pindala ja keha ruumala leidmine kahekordse integraali abil
- 2.3. Tasandilise kujundi massi ja massikeskme leidmine kahekordse integraali abil

3. Kolmekordsed integraalid

- 3.1. Kolmekordse integraali leidmine ristkoordinaatides, üleminek silinderkoordinaatidele
- 3.2. Keha ruumala leidmine kolmekordse integraali abil

19.1 Esimest liiki joonintegraalid

Omadus 19.1

Esimest liiki joonintegraal ei sõltu integreerimistee AB läbimise suunast.

Valem 19.1

Esimest liiki joonintegraali arvutamine

$$\begin{aligned} AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \quad & \int_{AB} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx \\ AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \quad & \int_{AB} f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy \\ AB : r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta : \quad & \int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + (r'_{\varphi})^2} d\varphi \\ AB : x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta : \quad & \int_{AB} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \\ AB : x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \leq t \leq \beta : \quad & \int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt \end{aligned}$$

Ülesanne 19.1. Arvutage järgmised integraalid

- (a) $\int_{AB} \frac{ds}{x-y}$, $AB : y = x/2 - 2, A = (0, -2), B = (4, 0)$
- (b) $\int_{AB} \frac{2x+y}{y} ds$, $AB : 2x + y + 1 = 0, A = (1, -3), B = (0, -1)$
- (c) $\int_{AB} xy ds$, $AB : x = \cos t, y = \sin t, A = (1, 0), B = (0, 1)$
- (d) $\int_{AB} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, $AB : x^2 + y^2 = a^2 \ (x > 0), A = (a, 0), B = (0, a)$
- (e) $\int_L (x-y) ds$, $L : x^2 + y^2 = 2x$
- (f) $\int_L xy ds$, kui L on ristküliku $ABCD$ kontuur, kus $A = (0, 0), B = (4, 0), C = (4, 2), D = (0, 2)$
- (g) $\int_L \frac{3z^2 ds}{x^2 + y^2}$, kus L on krüvijoone esimene keerd: $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at \ (0 \leq t \leq 2\pi)$

19.1.1 Esimest liiki joonintegraali rakendused

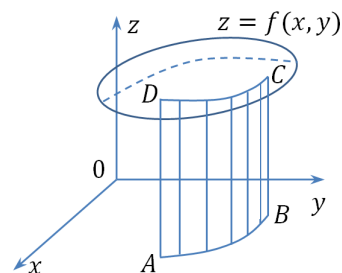
Valem 19.2

Joone kaare pikkus avaldub valemiga $\ell_{AB} = \int_{AB} ds$

Silinderpinna pindala avaldub valemiga

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x, y) ds,$$

kus $f(x, y) \geq 0$ on pidev xy -tasandil asetseval siledal joonel AB

**Ülesanne 19.2.** Leidke järgmiste joonte pikkused

(a) $r = e^\varphi, \varphi \in [0, 2\pi]$

(b) $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3, A = (0, 0, 0), B = (3, 3, 2)$

Ülesanne 19.3. Leidke vertikaalsete silindripindade pindala, kui pindade alumised servad asetsevad xy -tasandil ja ülemine serv on järgmiste pindade lõikejoon

(a) $y + x = 1 (x \geq 0), z = y$

(c) $x^2 + y^2 = 16, z = y$

(b) $x^2 + y^2 = 4, 2z = x^2 + 4$

Ülesanne 19.4. Leidke silindripinna $x^2 + y^2 = 2x$ selle osa pindala, mis asub kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ sees.

19.2 Teist liiki joonintegraalid*

Omadus 19.2

Teist liiki joonintegraal muudab märki integreerimistee läbimissuuna muutmisel :

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = - \int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Kinnise joone L läbimise **positiivne suund** on kellaosuti liikumisele vastupidine suund, kui vaadata z -telje positiivselt poolelt xy -tasandile)

Valem 19.3

Tasandilise joonintegraali arvutamine

$$AB : y = y(x), a \leq x \leq b : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx$$

$$AB : x = x(y), c \leq y \leq d : \int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy$$

$$AB : x = x(t), y = y(t) \alpha \leq t \leq \beta : \int_{AB} f(x, y) dx = \int_\alpha^\beta f(t) x'(t) dt$$

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_\alpha^\beta f(t) y'(t) dt$$

Ülesanne 19.5. Arvutage integraalid

- (a) $\int_{AB} xy dx$, $AB : y = \sin x$, $A = (0, 0)$, $B = (\pi, 0)$
- (b) $\int_{AB} y dx$, $AB : 2y + x = 4$, $A = (4, 0)$, $B = (0, 2)$
- (c) $\int_{AB} y dx$, $AB : x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$
- (d) $\int_L x dy$, L on kolmnurga ABC kontuur, kus $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (0, 2)$
- (e) $\int_L (x^2 + y^2) dx$, L on kontuur, mille moodustavad sirged $x = 1$, $x = 5$, $y = 1$, $y = 3$

19.2.1 Teist liiki joonintegraali rakendused

Valem 19.4

Kui tasandiline kujund D on piiratud kinnise joonega L , siis tema **pindala** avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x dy = \int_L (-y) dx = \frac{1}{2} \int_L (-y) dx + x dy.$$

Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punktini B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimet. **Jõu $\vec{F}$ töö** on arvutatav valemiga

$$W = m \int_{AB} P dx + Q dy + R dz.$$

Ülesanne 19.6. Leidke xy -tasandil olevate tasandiliste kujundite pindalad, kui nad on piiratud järgmiste joontega.

- (a) ellips $x = a \cos t$, $y = b \sin t$
- (b) $y = x^2$, $x = y^2$
- (c) astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
- (d) kardiod $r = a(1 + \cos \varphi)$

Ülesanne 19.7. Olgu xy -tasandil jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist O .

Leidke jõu töö W , mis on kulunud ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

Ülesanne 19.8. Jõud konstantse suurusega F on xy -tasandi igas punktis x -telje suunaline.

Leidke jõu töö W , mis kulub ühikmassiga punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punktist $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

Ülesanne 19.9. Jõud $\vec{F}$ on suunatud xy -tasandi igas punktis $M = (x, y)$ punkti $O = (0, 0)$ poole ja tema suurus on võrdne punkti M kaugusega punktist O .

Leidke jõu $\vec{F}$ töö W punkti massiga m nihutamisel punktist A punkti B .

Praktikum 20

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

20.1 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 20.1

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist diferentseeruvat funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Ülesanne 20.1. Näidake, et antud funktsioon on temale järgneva diferentsiaalvõrrandi lahendiks.

(a) $y = x, y' = y + 1 - x$

(d) $x = y \int_0^y \frac{\sin t}{t} dt, y \frac{dx}{dy} = x + y \sin y$

(b) $y = \frac{\sin x}{x}, xy' + y = \cos x$

(e) $x = ye^{y+1}, x(\ln x - \ln y)dy - ydx = 0$

(c) $y = e^{\arcsin 2x}, xy' = y \tan \ln y$

(f) $\begin{cases} x = \cos p, \\ y = \sin p, \end{cases} x + y \frac{dy}{dx} = 0$

Ülesanne 20.2. Leidke antud võrrandite i) ja ii) ühised lahendid.

(a) i) $y' = y + 1$, ii) $y' = e^x$

(b) i) $y' = y^2 + 2x - x^4$, ii) $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$

(c) i) $y' = x$, ii) $y' = y + x$

20.2 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 20.2

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0,$$

kus funktsioonid $f_1(x), f_2(x)$ on argumenti x funktsioonid ja $g_1(y), g_2(y)$ argumenti y funktsioonid.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamisel eraldatakse muutujad. Muutujate eraldamiseks jagatakse võrrandi mõlemad pooli avaldisega

$$g_1(y)f_2(x)$$

Saame eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Integreerides võrrandit liikmeti, saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi.

Erilahendi saamiseks asendame üldlahendisse algtingimuse $y(x_0) = y_0$ ja avaldame saadud võrdu-
sest konstandi C .

Ülesanne 20.3. Leidke antud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldla-
hend (erilahend).

(a) $y' = e^{2x-y}$

(d) $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$

(b) $2x\sqrt{1-y^2} + yy' = 0$

(e) $(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$

(c) $y' = \frac{y-1}{x+1}$

(f) $\sin x dy - y \cos x dx = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Ülesanne 20.4. (K) Leida raadiumi massi muutumise seadus sõltuvalt ajast, kui
ajamomendil $t = 0$ on raadiumi mass m_0 .

Olgu ajamomendil t raadiumi mass m , ajamomendil $t + \Delta t$ vastavalt $m + \Delta m$.

Ajavahemikus Δt lagunenud raadiumi mass on Δm . Suhe $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ on keskmine raadiumi lagunemis-
kiirus. Selle suhte piirväärtus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}$$

on raadiumi lagunemise kiirus ajamomendil t . Radioaktiivse aine lagunemise seadus ütleb, et
lagunemise kiirus on võrdeline (veel lagunemata) aine hulgaga m .

Lahendage raadiumi lagunemisele vastav diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kus $k > 0$ on võrdetegur. Miinusmärk näitab, et aja kasvades raadiumi mass kahaneb.

Ülesanne 20.5. (F) Leidke, palju jääb soola 1000 liitris mahutis olevasse soolvee
lahusesse 40 minuti pärast.

Olgu algselt soola soolalahuses 50 kilogrammi. Lahusele lisatakse konstantse kiirusega 10 liitrit
minutis soolvett, mis sisaldab 10 grammi soola liitri vee kohta.

Samal ajal voolab lahus ka mahutist välja kiirusega 10 liitrit minutis, lahus segatakse mahutis ja
lahuse hulk mahutis on püsivalt 1000 liitrit. Olgu otsitav soola kogus kilogrammides ajahetkel t
tähistatud $x(t)$, siis soola on ajahetkel t mahutis $\frac{x(t)}{1000}$ kilogrammi liitri kohta.

Lahendatav diferentsiaalvõrrand ja algtingimus on kujul

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{10} - \frac{10x}{1000}, x(0) = 50.$$

20.3 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 20.3

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.

Hariliku esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$p_0(x)y' + p_1(x)y = f(x),$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi kujul $y' + p(x)y = f(x)$ **üldlahend** avaldub valemiga

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right).$$

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod): lahend on kujul $y = y_h + y_*$

a) Lahendame vastava homogeense võrrandi

$$y' + p(x)y = 0,$$

võrrandi konkreetse lahendi leidmiseks asendame saadud üldlahendis

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}$$

integreerimiskonstandi C uue otsitava funktsiooniga $C(x)$

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

b) Leiame tuletise funktsioonist y_* , arvestades, et $C(x)$ sõltub argumentist x (korrutise tuletis)

c) Asendame esialgsesse võrrandisse y_* ja y'_* , leiame otsitava $C(x)$.

Ülesanne 20.6. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - y = x - 1$

(g) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(b) $xy' + y = 3x^2$

(h) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $x^2y' + xy = -1$

(i) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

(d) $x(\ln|x|)y' - y \ln|x| = x$

(j) $(xy + e^x)dx = xdy$

(e) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$

(k) $y' + y \cos x = \cos x, y(0) = 1$

(f) $y' - y \cot x = 2x \sin x$

(l) $x(\ln x)y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0$

Ülesanne 20.7. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktioonipool induktiivsusega L .

Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktioonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Praktikum 21

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid Murdlineaarset funktsiooni sisaldavad diferentsiaalvõrrandid

21.1 Homogeensed funktsioonid

Definitsioon 21.1

Olgu D mingi piirkond xy -tasandil, mis koos iga punktiga $(x, y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$. Piirkonnas D määratud funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse **k -astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x, y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

kus k on reaalarv.

Ülesanne 21.1. Leidke järgmiste funktsioonide jaoks homogeensuse aste k .

(a) $f(x, y) = \frac{x + y}{y - x}$

(c) $z = x^2 + y^2 - xy$

(b) $z = \sqrt{x^2 + y^2} \log \frac{x}{y}$

(d) $z = x^2 \sqrt{y} - y^{\frac{5}{2}}$

(e) $z = \frac{x + y}{x^2 - y^2}$

21.2 Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 21.2

Homogeenseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit $y' = f(x, y)$, kui f on 0-astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenne diferentsiaalvõrrand taandub eralduvate muutujatega võrrandiks muutujavahetusega

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = zx, \quad \text{kus } z = z(x), \quad \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}.$$

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks taandub võrrand kujul $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, kus $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ on sama astme homogeensed funktsioonid. Selleks tuleb võrrandit läbi jagada argumendi x sellise astmega x^a , kus a on võrdne võrrandis oleva argumendi y kõrgeima astmenäitajaga.

Ülesanne 21.2. Leidke antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Näidake, et võrrand on homogeenne.

(a) $y(x - y)dx = x^2 dy$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$

(b) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

(f) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$

(c) $xyy' = x^2 + y^2$

(d) $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$

Ülesanne 21.3. (F) Päikesekiirte koondamise ülesanne. Leidke, millise kujuga peegel peegeldab paralleelsed kiired ühte punkti.

Tegemist on pöördpinnaga, mille telg on paralleelsete kiirte sihiline. Valime koordinaatteljestiku nii, et kiired tuleksid x telje suunast ja ning peegelduksid koordinaatide algusesse. Leidke joon $y = y(t)$, mille pöörlemisel ümber x telje tekib kõnealune pöördpind, kui vastav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

21.3 Homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks taanduvad võrrandid

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y' = f\left(\frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}\right).$$

Kui $a_3 = b_3 = 0$, siis on tegemist homogeense võrrandiga.

Võrrand teisendub **homogeenseks** diferentsiaalvõrrandiks, kui determinant

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0.$$

Muutujavahetus on järgmine:

$$x = X + u, y = Y + v.$$

Muutujavahetuses sisalduvad arvud u ja v tuleb määrata nii, et uutele muutujatele X ja Y üles minnes on vabaliikmed saadavas murdlineaarses avaldises võrdsed nulliga. Selleks lahendame lineaarse võrrandisüsteemi u ja v suhtes:

$$\begin{aligned} a_1u + a_2v + a_3 &= 0, \\ b_1u + b_2v + b_3 &= 0. \end{aligned}$$

Kui $D = 0$, siis muutujavahetusega $z = a_1x + a_2y$ teisendub võrrand **eralduvate muutujatega** diferentsiaalvõrrandiks.

Ülesanne 21.4. Lahendage antud homogeenseteks diferentsiaalvõrranditeks teisenduvad võrrandid.

(a) $(x + y + 1)dx - (x - 1)dy = 0$

(c) $(x + 2y + 1)dx - (2x + 4y + 3)dy = 0$

(b) $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$

(d) $(x + 2y + 1)dx - (2x - 3)dy = 0$

Ülesanne 21.5. Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand

$$(3y - 7x + 7)dx - (3x - 7y - 3)dy = 0.$$

Ülesanne 21.6. Lahendage antud homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks teisenduv võrrand

$$(y' + 1) \ln\left(\frac{y + x}{x + 3}\right) = \frac{y + x}{x + 3}.$$

Praktikum 22

Bernoulli diferentsiaalvõrrandid Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid Numbrilised meetodid

22.1 Bernoulli diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.1

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^a,$$

kus p ja q on teadaolevad argumendi x funktsioonid ja a on mingi reaalarv.

Eeldame, et $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest vastasel juhul on tegemist lineaarse võrrandiga).

Bernoulli võrrand on teisendatav lineaarseks võrrandiks muutujavahetusega

$$z = y^{1-a}, \quad z' = (1-a)y^{-a}y'.$$

Enne muutujavahetust korrutame võrrandit teguriga y^{-a} .

Ülesanne 22.1. Leidke antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Näidake, et võrrand on Bernoulli võrrand.

(a) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

(b) $3y^2y' + y^3 = 1$

(c) $y' + 2y = y^2e^x$

(d) $(x+1)(y' + y^2) = -y$

(e) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

(f) $y' = (y + y^2)\cos x$

(g) $y' = y^4\cos^3 x + y\tan x$

(h) $xy^2dy = (x^2 + y^3)dx$

(i) $xydy = (y^2 + x)dx$

22.2 Eksaktsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 22.2

Diferentsiaalvõrrandit

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

nimetatakse **eksaktseks** ehk täisdiferentsiaalseks võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $u = u(x, y)$ nii, et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Võrrandi **eksaktsuseks piirkonnas** D on **tarvilik ja piisav**, et iga $(x, y) \in D$ korral kehtiks võrdus

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Funktsiooni u leidmiseks järgmise süsteemi abil:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N.$$

Ülesanne 22.2. Leidke antud eksaktse diferentsiaalvõrrandi üldlahend. Näidake, et võrrand on eksaktne.

(a) $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

(g) $xdx + ydy = \frac{-ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

(b) $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$

(h) $x(y^2 + 1)dx + (x^2y + 2y^3)dy = 0$

(c) $(y^3 - x)y' = y$

(i) $\frac{2x}{y^3}dx + \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}\right)dy = 0$

(d) $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy = 0$

(j) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(e) $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

(k) $e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy$

(f) $\frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$

(l) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}dy = 0$

22.3 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine ligikaudselt

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandit $y' = f(x, y)$ koos algtingimusega $y(x_0) = y_0$. Otsitavaks on siin funktsioon $y = y(x)$, mille puhul on vaja see leida lõigus $[x_0, b]$.

Euleri meetodi arvutuseeskiri:

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})h, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{kus } h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Runge-Kutta 4. järku meetodi arvutuseeskiri:

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}), \quad k_2 = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3).$$

Ülesanne 22.3. Leidke Euleri meetodi abil diferentsiaalvõrrandi lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel $x_i = x_0 + 0.1i$, kus $i = 1, 2, 3$.

(a) $y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$

(d) $y' = \frac{y - x}{y + x}, \quad y(0) = 1$

(b) $y' = 1 + x + y^2, \quad y(0) = 1$

(c) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$

(e) $y' = y^2 + \frac{y}{x}, \quad y(2) = 4$

Ülesanne 22.4. Leidke Runge-Kutta 4. järku meetodi abil diferentsiaalvõrrandi

$$y' = 1 + x^2 + y^2, \quad y(1) = 0$$

lahendi lähisväärtused argumenti väärtustel $x_i = x_0 + 0.1i$, kus $i = 1, 2, 3$.

Praktikum 23

Teist järku diferentsiaalvõrrandid

23.1 Teist järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine võrrandi järgu alandamise teel

1. Diferentsiaalvõrrand kujul $y'' = f(x)$.

Antud juhul saab võrrandi lahendada kaks korda järjest integreerides. Arvestame, et

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Siis

$$y' = \int f(x) dx + C_1.$$

Lahendi y saamiseks integreerime teist korda.

2. Diferentsiaalvõrrand kujul $F(x, y', y'') = 0$.

Võrrandi järku saab alandada muutujavahetusega

$$y' = u, \quad y'' = u'.$$

Asendades saadud diferentsiaalvõrrandi lahendi u võrrandisse $y' = u$, saame diferentsiaalvõrrandi, mille lahend on y .

Ülesanne 23.1. Lahendage diferentsiaalvõrrandid kaks korda järjest integreerides.

(a) $xy'' = 1$

(d) $y'' + (x+1)^{-3} = (x-1)^{-3}$

(b) $\cos^2(x)y'' = 1$

(e) $4y'' = 4e^x + 3x^{-5/2}$

(c) $xy'' = 1 + x^2$

(f) $y'' = \ln(x)$

Ülesanne 23.2. Lahendage diferentsiaalvõrrandid järgu alandamise teel.

(a) $(x-1)y'' = y'$

(f) $xy'' = (1+2x^2)y'$

(b) $x^2y'' + xy' = 1$

(g) $xy'' = y' + x^2$

(c) $(x^2+1)y'' = 2xy'$

(h) $y' = x \ln(x)y''$

(d) $xy'' = y'$

(i) $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

(e) $xy'' = -y'$

(j) $x^2y'' = (y')^2$

23.2 Konstantsete kordajatega lineaarsed homogeenised diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 23.1

Konstantsete kordajatega lineaarseks homogeenseks teist järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$y'' + ay' + by = 0, \quad (23.1)$$

kus a, b on konstandid.

Kui y_1 ja y_2 on **lineaarselt sõltumatud võrrandi (23.1) lahendid**, siis on

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

antud võrrandi (23.1) **üldlahendiks**.

Kaht funktsiooni y_1 ja y_2 nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks nende määramispiirkonnas X , kui $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, x \in X$, kehtib vaid $C_1 = C_2 = 0$ korral.

Diferentsiaalvõrrandi (23.1) lahendite leidmisel tuleb vaadelda kolme juhtu vastavalt **karakteristliku võrrandi**

$$k^2 + ak + b = 0 \quad (23.2)$$

lahenditele:

1) reaalsete ja omavahel erinevate k_1, k_2 korral on võrrandi (23.1) üldlahend

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) võrdsete karakteristliku võrrandi lahendite $k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}$ korral on võrrandi (23.1) üldlahend

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{a}{2} x};$$

3) imaginaarsete karakteristliku võrrandi lahendite $k_1 = -\frac{a}{2}, k_2 = \frac{1}{2}\sqrt{-(a^2 - 4b)}$ korral on võrrandi (23.1) üldlahend

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-(a^2 - 4b)}.$$

Ülesanne 23.3. Lahendage teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed homogeenised diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' = 2y$

(h) $2y'' + 3y' = 2y$

(b) $y'' = 2y'$

(i) $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0$

(c) $y'' = 4y' - 5y$

(j) $y'' + 9y = 0$

(d) $y'' + 4y = 0$

(k) $y'' + 7y' + 17y = 0$

(e) $y'' = 2y' - y$

(l) $y'' + 4y' - 5y = 0,$

(f) $y'' - 7y' = 0$

$y(-1) = 0, y'(-1) = 1$

(g) $3y'' = 5y', y(0) = 2, y'(0) = \frac{5}{3}$

(m) $y'' = 2(3y' - 5y), y(0) = 1, y'(0) = 4$

Praktikum 24

Teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 24.1

Konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (24.1)$$

kus a, b on konstandid ja vabaliige f on argumendi x funktsioon.

Võrrandi (24.1) **üldlahend** on esitatav kujul $y = y_h + y_*$, kus y_h on vastava **homogeense võrrandi** $y'' + ay' + by = 0$ **üldlahend** ja y_* on **mittehomogeense võrrandi** (24.1) üks konkreetne lahend.

Määramata kordajate meetod konkreetse lahendi y_* leidmiseks

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= f(x), & (1) \\ k^2 + ak + b &= 0 & (2) \end{aligned}$$

(1) vabaliikme $f(x)$ kuju	Võrrandi (2) lahendid	(1) lahendi y_* kuju
$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \dots + q_m$	Arv 0 ei ole (2) lahend Arv 0 on (2) lahend	$R_m(x) = r_0x^m + r_1x^{m-1} + \dots + r_m$ $xR_m(x)$
$e^{\alpha x}Q_m(x)$ (α on reaalarv)	Arv α ei ole (2) lahend Arv α on (2) lahend Arv α on 2-kordne (2) lahend	$e^{\alpha x}R_m(x)$ $xe^{\alpha x}R_m(x)$ $x^2e^{\alpha x}R_m(x)$
$e^{\alpha x}Q_m(x) \cos \beta x$ või $e^{\alpha x}Q_m(x) \sin \beta x$ (α ja β on reaalarvud)	Arvud $\alpha \pm i\beta$ ei ole (2) lahendid Arvud $\alpha \pm i\beta$ on (2) lahendid Arvud $\alpha \pm i\beta$ on 2-kordsed (2) lahendid	$e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + \tilde{R}_m(x) \sin \beta x]$, $\tilde{R}_m(x) = \tilde{r}_0x^m + \tilde{r}_1x^{m-1} + \dots + \tilde{r}_m$ $xe^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + \tilde{R}_m(x) \sin \beta x]$ $x^2e^{\alpha x} [R_m(x) \cos \beta x + \tilde{R}_m(x) \sin \beta x]$

Ülesanne 24.1. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid, kus $f(x) = Q_m(x)$.

(a) $y'' + y' = 3$

(e) $y'' + y' = 3x^2$

(b) $y'' + 4y' + 3y = x$

(f) $y'' + y' = 8x^3 + 24x^2 - 10x$

(c) $y'' - 7y' + 12y = x$

(g) $y'' - 3y' + 9x^2 + 6x - 13 = 0$

(d) $y'' + 4y = 2x + 3$

(h) $y'' - 4y' - 5y = x^3 + 1$

Ülesanne 24.2. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid, kus $f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)$.

(a) $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}$

(c) $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

(b) $y'' - y' - 2y = 4e^{2x}$

(d) $y'' - y = 4e^x$

Ülesanne 24.3. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid, kus $f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \cos \beta x$ või $f(x) = e^{\alpha x} Q_m(x) \sin \beta x$.

(a) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

(d) $y'' + 9y = \sin 3x$

(b) $y'' - 4y' - y = \sin x$

(e) $y'' + y = 4 \sin x$

(c) $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$

Ülesanne 24.4. Lahendage järgmised teist järku konstantsete kordajatega lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' - 2y' - 3y = 3 - 4e^x$

(d) $y'' - y' = e^x + x$

(b) $y'' + y = 4xe^x$

(e) $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$

(c) $y'' + y = x \sin x$

(f) $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$

Ülesanne 24.5. Leidke Cauchy ülesande

$$y'' - y' + \frac{y}{4} = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b$$

lahend y .

Praktikum 25

Teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

25.1 Lineaarsed homogeenised diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 25.1

Lineaarne homogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,$$

kus p_1, p_2 on antud funktsioonid.

Kui on teada teist järku lineaarse homogeenise diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

üks lahend $y_1 \neq 0$, siis saab antud diferentsiaalvõrrandi alandada esimest järku diferentsiaalvõrrandiks **Liouville-Ostrogradski valemi** abil:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-\int p_1(x)dx}, \quad y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx.$$

Ülesanne 25.1. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed homogeenised diferentsiaalvõrrandid, kasutades Liouville-Ostrogradski valemit.

(a) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(h) $y'' - \frac{2y}{\cos^2(x)} = 0, \quad y_1 = \tan(x)$

(b) $xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_1 = \frac{e^x}{x}$

(i) $(2x + 1)y'' + 4xy' - 4y = 0$

(c) $y'' - 2(1 + \tan^2(x))y = 0, \quad y_1 = \tan(x)$

(j) $x(x - 1)y'' - xy' + y = 0$

(d) $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0, \quad y_1 = e^x - 1$

(k) $x^2y'' \ln(x) - xy' + y = 0$

(e) $y'' + y' \tan(x) - y \cos^2(x) = 0, \quad y_1 = e^{\sin(x)}$

(l) $xy'' - (2x + 1)y' + 2y = 0$

(f) $y'' + y'(\tan(x) - 2 \cot(x)) + 2y \cot^2(x) = 0, \quad y_1 = \sin(x)$

(m) $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$

(g) $x^2y'' - 2xy' + (3x^2 + 2)y = 0, \quad y_1 = x \cos(2x)$

(n) $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$

(o) $xy'' - (x + 1)y' - 2(x - 1)y = 0$

25.2 Lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 25.2

Lineaarne teist järku mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x),$$

kus p_1, p_2 ja f on antud funktsioonid.

Kui on teada võrrandile vastava homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ üldlahend $y_h = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ ja mittehomogeense võrrandi üks konkreetne lahend y_* , siis mittehomogeense võrrandi üldlahend y avaldub kujul

$$y = y_h + y_* = y_* + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Konstantide varieerimise meetodiga otsime lahendit kujul

$$y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

kus otsitavad funktsioonid $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ leiame süsteemist

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Ülesanne 25.2. Lahendage järgmised teist järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}, y_1 = \cos(e^{-x})$

(e) $xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3e^{x^2}$

(b) $y'' - y' + e^{2x}y = xe^{2x} - 1, y_1 = \sin(e^x)$

(f) $y'' - 2y'\tan(x) = 1$

(c) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}, y_1 = \frac{\sin(x)}{x}$

(g) $(1-x)y'' + xy' - y = 2(x-1)^2e^{-x}, 0 < x < 1$

(d) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4, y_1 = \frac{1}{x}, x > 0$

(h) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 2x^3, x > 0$

Praktikum 26

Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

26.1 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamine

Definitsioon 26.1

Võrrandit

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kus F on antud $n + 2$ muutuja funktsioon, nimetatakse n -järku **harilikuks diferentsiaalvõrrandiks**.

Diferentsiaalvõrrandit kujul

$$y^{(n)} = f(x)$$

saab lahendada võrrandi mõlema poole korduva integreerimise teel. Integreerides võrrandi mõlemat poolt, saame

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$$

ja analoogiliselt $n - 1$ korda jätkates jõuame otsitava lahendini y .

Diferentsiaalvõrrandis

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,$$

saab järku alandada muutujavahetusega

$$y^{(k)} = z,$$

lugedes z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$.

Uue otsitava funktsiooni suhtes on saadud diferentsiaalvõrrand $n - k$ -järku kujul

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

Ülesanne 26.1. Lahendage järgnevad diferentsiaalvõrrandid.

(a) $y''' + \cos x = 0$

(e) $xy^{(5)} = y^{(4)}$

(b) $x^3 y''' = 2$

(f) $y''' = (y'')^2$

(c) $y^{(4)} = \cos x$

(g) $y''' = 2(y'' - 1) \cot x$

(d) $2y''' + (y'')^3 = 0$

(h) $xy''' = y'' - xy''$

26.3 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Definitsioon 26.2

Normaalkujuliseks süsteemiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus võrrandite vasakuteks poolteks on otsitavate funktsioonide esimest järku tuletised, paremad pooled aga tuletisi ei sisalda:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (26.3)$$

kus $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ on antud funktsioonid ja $y_k = y_k(x)$ on otsitavad funktsioonid, $k = 1, 2, \dots, n$. Arvu n nimetatakse süsteemi järguks.

Definitsioon 26.3

Normaalkujulise süsteemi (26.3) lahendiks vahemikus (a, b) nimetatakse kogumit diferentseeruvatest funktsioonidest $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, mis rahuldavad süsteemi (26.3) igit võrrandit iga $x \in (a, b)$ korral.

Ülesanne 26.3. Näidake, et antud funktsioonide süsteem on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendiks.

$$(a) \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{x^2}, \\ z = -x \ln x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 2xy^2, \\ z' = \frac{z}{x} - 1. \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y = x, \\ z = 2e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = e^{x-y}, \\ z' = 2e^y. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} y = x + e^{-x}, \\ z = e^x, \end{cases} \quad \begin{cases} y' = 1 - \frac{1}{z}, \\ z' = \frac{1}{y-x}. \end{cases}$$

Ülesanne 26.4. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

$$(a) \quad y' = z, \quad z' = -y$$

$$(b) \quad y' = z + 1, \quad z' = y + 1$$

$$(c) \quad y' = 1 - \frac{1}{z}, \quad z' = \frac{1}{y-x}$$

$$(d) \quad y' = z, \quad z' = \frac{z^2}{y}$$

$$(e) \quad y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad z' = y + x - \frac{z}{x}$$

$$(f) \quad y' = \frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{x}{y}$$

Praktikum 27

Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

27.1 Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesanne 27.1. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid.

(a) $y' = \frac{y^2}{z-x}, z' = y+1$

(b) $y' = 2xy, z' = (z-x)x^{-1}$

(c) $y' = 1+z^{-1}, z' = z^2$

(d) $y' = y+z, z' = -5z$

(e) $4y' - z' + 3y = \sin x, y' + z = \cos x$

(f) $\frac{dx}{dt} = y+z, \frac{dy}{dt} = x+z, \frac{dz}{dt} = x+y$

(g) $\frac{dx}{dt} = z-y, \frac{dy}{dt} = z, \frac{dz}{dt} = z-x$

(h) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x, \frac{dz}{dt} = x+y+z$

(i) $\frac{dx}{dt} = 2x-y+z, \frac{dy}{dt} = 2y-z, \frac{dz}{dt} = z$

(j) $\frac{dx}{dt} = -9y, \frac{dy}{dt} = x$

(k) $\frac{dx}{dt} = y+t, \frac{dy}{dt} = x-t$

(l) $\frac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0, \frac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0,$

$x(0) = 1, y(0) = 4$

(m) $\frac{dx}{dt} = x+5y, \frac{dy}{dt} = -x-3y,$

$x(0) = -2, y(0) = 1$

Ülesanne 27.2. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteemid integreeruvate kombinatsioonide leidmise teel.

(a) $y' = y^2 + z^2, z' = 2yz$

(b) $y' = \frac{z}{(z-y)^2}, z' = \frac{y}{(z-y)^2}$

(c) $y' = \frac{y}{z}, z' = \frac{z}{y}$

(d) $\frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y}, \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y}$

(e) $\frac{dx}{dt} = \sin x \cos y, \frac{dy}{dt} = \cos x \sin y$

(f) $e^t \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}, e^t \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x}$

(g) $\frac{dx}{dt} = \frac{y^2}{2x(x^2 - y^2 - 1)},$

$\frac{dy}{dt} = \frac{x^2 - 1}{2y(x^2 - y^2 - 1)}$

(h) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{x-t}$

27.2 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 27.1

Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**.

Kahe muutuja x ja y korral on esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist funktsiooni $u(x, y)$, mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi samasuseks.

Geomeetriliselt vastab võrrandile $u = u(x, y)$ pind ruumis, seda pinda nimetatakse integraalpinnaks.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Ülesanne 27.3. Näidake, et $u(x, t) = 3x^2 - 2x\alpha t + 3\alpha^2 t^2$ on lahendiks lainevõrrandile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ülesanne 27.4. Näidake, et $u(x, t) = a \sin(bx) \cos(\alpha bt)$

- (i) on lahendiks lainevõrrandile $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,
(ii) omab kuju $u(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt)$.

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks: otsitava erilahendi jaoks on vaja teada ruumilist kõverat, millest vastav integraalpind läbi läheb.

Algtingimused on kujul

$$u(x, y_0) = f(x), \quad u(x_0, y) = g(y).$$

Ülesanne 27.5. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandite Cauchy ülesanded.

(a) $x \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, u(x, 1) = x^2$

(c) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y, u(1, y) = y^2$

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = xy, u = 1, x^2 + y^2 = 1$

(d) $x \frac{\partial u}{\partial x} = 0, u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y$

Praktikum 28

Kordamine kontrolltöös nr. 3

28.1 Ülesanded kordamiseks

Ülesanne 28.1. Leidke homogeenne diferentsiaalvõrrandi

$$xy' = y - \frac{y^2}{x}$$

üldlahend. Näidake, et diferentsiaalvõrrand on homogeenne.

Ülesanne 28.2. Leidke eksaktse diferentsiaalvõrrandi

$$(y^3 - x)dy = y dx$$

üldlahend. Näidake, et võrrand on eksaktne.

Ülesanne 28.3. Leidke teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}.$$

Ülesanne 28.4. Leidke teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y'' + 3y' = 9x^2 - 81.$$

Ülesanne 28.5. Lahendage diferentsiaalvõrrand järgu alandamise teel

$$y^{(4)} = \sqrt{y'''}.$$

Ülesanne 28.6. Leidke järgmise kolmandat järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y''' - y' = 2 \sin x.$$

Ülesanne 28.7. Näidake, et funktsioonide süsteem

$$y = x + e^{-x}, \quad z = e^x$$

on lahendiks harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile

$$\begin{cases} y' = 1 - z^{-1}, \\ z' = (y - x)^{-1}. \end{cases}$$

Ülesanne 28.8. Leidke diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y' = 2x + z \\ z' = x^2 - 2e^x \end{cases}$$

üldlahend, kus otsitavateks funktsioonideks on $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Ülesanne 28.9. Lahendage diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = z - 15 \sin 4x, \\ z' = 3 - y, \end{cases}$$

kus otsitavateks funktsioonideks on $y = y(x)$ ja $z = z(x)$.

Ülesanne 28.10. Näidake, et funktsioon $u(x, y) = x^2 + y^2$ on lahendiks osatuletistega diferentsiaalvõrrandile

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Ülesanne 28.11. Leidke osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$x \frac{\partial u}{\partial y} - uy = 0$$

selline lahend $u = u(x, y)$, mis rahuldab tingimust $u(x, 0) = x^3$.

Kontrolltöö 3 ülesannete teemad

1. Esimest järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

- 1.1. **Homogeensed** diferentsiaalvõrrandid. Näidake, et võrrand on homogeenne ja lahendage võrrand (Cauchy ülesanne)
- 1.2. **Eksaktsed** diferentsiaalvõrrandid. Näidake, et võrrand on eksaktne ja lahendage võrrand (Cauchy ülesanne)

2. Teist järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

- 2.1. Teist järku **lineaarsed konstantsete kordajatega mittehomogeensed** diferentsiaalvõrrandid

3. Kõrgemat järku harilikud diferentsiaalvõrrandid

- 3.1. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi lahendamine **järgu alandamise teel**
- 3.2 Kõrgemat järku **lineaarsed konstantsete kordajatega** mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid

4. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemid

- 4.1. Diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamine **ühele võrrandile taandamise teel**

5. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

- 5.1. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendi kontrollimine
- 5.2. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Praktikum 29

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitavaks funktsiooniks on kahe muutuja funktsioon $u = u(x, y)$, siis **lineaarne homogeenne osatuletistega diferentsiaalvõrrand** on kujul

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (29.1)$$

Võrrandi (29.1) lahendamiseks tuleb lahendada harilik diferentsiaalvõrrand kujul

$$\frac{dx}{p(x, y)} = \frac{dy}{q(x, y)}. \quad (29.2)$$

Osatuletistega võrrandi (29.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = \psi(x, y),$$

kus ψ on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi (29.2) lahend kujul $\psi(x, y) = C$.

Kui otsitavaks funktsiooniks on kahe muutuja funktsioon $u = u(x, y)$, siis **lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand** on võrrand kujul

$$p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y). \quad (29.3)$$

Võrrandi (29.3) kordajad ja vabaliige sõltuvad ainult sõltumatutest muutujatest x ja y .

Võrrandi (29.3) lahendamiseks tuleb lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y)} = \frac{dy}{q(x, y)} = \frac{du}{r(x, y)}. \quad (29.4)$$

Osatuletistega võrrandi (29.3) iga **lahend** avaldub kujul

$$u = f(\psi_1(x, y), \psi_2(x, y)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi (29.4) sõltumatud lahendid kujul $\psi_1(x, y) = C_1, \psi_2(x, y) = C_2$.

Ülesanne 29.1. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y)$.

(a) $y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$

(g) $y^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = ux$

(b) $y \frac{\partial u}{\partial x} = u$

(h) $y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$

(c) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$

(i) $xu \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} = x$

(d) $2x \frac{\partial u}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial y} - x^2 = 0$

(j) $e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x$

(e) $xy \frac{\partial u}{\partial x} - x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = yu$

(f) $y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$

(k) $\cos y \frac{\partial u}{\partial x} + \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \cos y$

Praktikum 30

Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid Eksami näidisülesanded

30.1 Lineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

Kui otsitav funktsioon on kolme muutuja funktsioon $u = u(x, y, z)$, siis lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$p(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} + k(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (30.1)$$

Võrrandi (30.1) lahendamiseks tuleb lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem kujul

$$\frac{dx}{p(x, y, z)} = \frac{dy}{q(x, y, z)} = \frac{dz}{k(x, y, z)}. \quad (30.2)$$

Osatuletistega võrrandi (30.1) iga lahend avaldub kujul

$$u = f(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)),$$

kus ψ_1, ψ_2 on diferentsiaalvõrrandite süsteemi (30.2) sõltumatud lahendid kujul $\psi_1(x, y, z) = C_1, \psi_2(x, y, z) = C_2$.

Ülesanne 30.1. Lahendage osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, otsitavateks funktsioonideks on $u = u(x, y, z)$.

- | | |
|---|--|
| (a) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ | (d) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} = xy$ |
| (b) $(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + (x - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ | (e) $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2u \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ |
| (c) $(x - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + 2z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ | (f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ |

Ülesanne 30.2. Leidke antud võrrandi selline integraalpind $u = u(x, y)$, mis läbib antud joont.

- | | |
|---|--|
| (a) $x \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, y = 1, u = 2x$ | (g) $yu \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xy, x = a, y^2 + u^2 = a^2, a = \text{const}$ |
| (b) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, x = 0, u = y$ | (h) $(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, x - y = 2, u + 2x = 1$ |
| (c) $2\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} = y \frac{\partial u}{\partial y}, x = 1, u = y^2$ | (i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{u}, u(2, y) = y$ |
| (d) $(1 + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0, x = 0, u = y^2$ | (j) $xy \frac{\partial u}{\partial x} + yu \frac{\partial u}{\partial y} + xy = 0, u = 0, xy = a^2, a = \text{const}$ |
| (e) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = u, y = x, u = x^3$ | |
| (f) $x \frac{\partial u}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial u}{\partial y} = u, x = 2, u = y - 4$ | |

30.2 Eksam aines Kõrgem matemaatika II

Eksam koosneb põhiliselt teooriast, ülesanded on viimaste praktikumide teemadel, mis ei sisaldunud kontrolltöös 3.

30.2.1 Eksami teooria osa

Kordamisküsimustes toodud teemad

1. Mõisted, valemid, teoreemid, laused, näited
2. Valemi tuletamine, teoreemi tõestus või pikem teooriaküsimus

30.2.2 Eksami ülesannete teemad

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

1. Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi erilahendi leidmine, kui otsitavaks on kahe muutuja funktsioon
2. Lineaarse mittehomogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmine, kui otsitavaks on kahe muutuja funktsioon
3. Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmine, kui otsitavaks on kolme muutuja funktsioon

30.3 Eksami näidisülesanded

Ülesanne 30.3. Leidke lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$(1 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} + yx \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

selline lahend $u = u(x, y)$, mis rahuldab tingimust $u(x, 0) = x^2$.

Kirjutage kõik võrrandite (süsteemide) nimetused, mida lahendate.

Ülesanne 30.4. Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^{-1} \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y^2} - 1 \quad (x, y > 0),$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y)$.

Kirjutage kõik võrrandite (süsteemide) nimetused, mida lahendate.

Ülesanne 30.5. Lahendage lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$(y - ze^z) \frac{\partial u}{\partial x} + ze^z \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on $u = u(x, y, z)$.

Kirjutage kõik võrrandite (süsteemide) nimetused, mida lahendate.

Praktikum 31

Vastused

Praktikum 1

Vastus 1.1. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) ei

Vastus 1.2. on

Vastus 1.3. (a) ei (b) ei (c) ei (d) jah (e) jah (f) jah (g) jah (h) ei (i) jah

Vastus 1.4. (a) jah (b) jah (c) ei (d) jah

Vastus 1.5. (a) on (b) ei ole (c) on (d) on

Vastus 1.6. (a) on (b) on (c) on (d) ei ole (e) on (f) ei ole (g) on

Praktikum 2

Vastus 2.1. jah

Vastus 2.2. $k^3 - 2k = 0$

Vastus 2.3. $(k - l)(k - m)(l - m) = 0$

Vastus 2.4. (a) $-5a_1 + 4a_2 + a_3 = 0$ (b) $-5f_1 + 4f_2 + f_3 = 0$ (c) $-5z_1 + 4z_2 + z_3 = 0$ (d) $f_1 + f_2 - f_3 = 0$

Vastus 2.6. (a) lineaarselt sõltumatu (b) $4(6x + 9) - 3(8x + 12) = 0$ (c) lineaarselt sõltumatu (d) $2(4 - x) - 32(2x + 3) + 11(6x + 8) = 0$ (e) lineaarselt sõltumatu (f) lineaarselt sõltumatu (g) lineaarselt sõltumatu (h) lineaarselt sõltumatu

Praktikum 3

Vastus 3.1. (a) $L(a_1, \dots, a_5) = \{(x + 2y + z, y + 2z, y + 3z, -x + 4z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ (b) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, 2x + y, x + 2y, y + 2x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ (c) $L(a_1, \dots, a_4) = \{(x + 2y, x, x + y, 2x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Vastus 3.2. $(\frac{13}{5}, -\frac{6}{5})$

Vastus 3.3. Olgu $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (0, 1, 1, 1)$, $a_3 = (0, 0, 1, 1)$, $a_4 = (3, 2, 1, 0)$ ja $a_5 = (1, 0, 0, 0)$. Siis (a) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ (b) $\{a_1, a_2, a_3\}$ (c) $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ (d) $\{a_1, a_2, a_5\}$

Vastus 3.4. A koordinaadid on $(3, 4, -2)$ ja B koordinaadid on $(2, 5, 0)$

Vastus 3.5. (a) on baas, koordinaadid on $(3, 7, 13)$ (b) on baas, koordinaadid on $(-4, -6, 13)$ (c) on baas, koordinaadid on $(1, 1, 1)$

Vastus 3.6. Suvalise vektori (x_1, x_2, x_3) koordinaadid uue baasi suhtes on $(-3x_1 - 8x_2 - 5x_3, 2x_1 + 5x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. Seega vektori $(6, 2, -7)$ koordinaadid uue baasi suhtes on $(1, 1, 1)$.

Vastus 3.7. (a) Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ ja $a = -139e_1 + 38e_2 + 24e_3$, $a = e'_1 + e'_2 + e'_3$

(b) Üleminekumaatriks on $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ja $a = 0e_1 + 2e_2$, $a = e'_1 + e'_2$

Praktikum 4

Vastus 4.1. (a) $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $S = 1$ (b) $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(3n+1)}$, $S = \frac{1}{3}$ (c) $S_n = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right)$, $S = \frac{11}{18}$ (d) $S_n = \frac{2n+2}{2n+3}$, $S = 1$ (e) $S_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$, $S = 1$ (f) $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $S \rightarrow \infty$

Vastus 4.2. (a) $S_1 = \ln 3$, $a_n = \ln \frac{n+2}{n+1}$ (b) $S_1 = 2$, $a_n = \frac{-2}{n^2+n}$ (c) $S_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{-1}{n^2+n}$ (d) $S_1 = 2$, $a_n = 1$

Vastus 4.3. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3} \neq 0$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-7n^6}{n^6+3} = -7 \neq 0$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{5}} = 1 \neq 0$ (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e \neq 0$

Vastus 4.4. (a) koondub, $S = \frac{15}{2}$ (b) hajub (c) hajub, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ (d) koondub, $S = \frac{8e^4}{e-2}$ (e) koondub, $S = \frac{9}{8}$ (f) koondub, $S = \frac{11}{24}$

Vastus 4.5. 10/3 ehk 3.33(3) m.

Vastus 4.6. $\frac{81}{11}$

Vastus 4.7. 5/3 ehk 1.66(6)

Praktikum 5

Vastus 5.1. (a) koondub kui geomeetriline rida, $S = 3$ (b) hajub kui harmooniline rida, $\alpha = 1$ (c) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{e}{e-1}$ (d) hajub, kui geomeetriline rida, $q = \frac{5}{4} > 1$ (e) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ (f) koondub, kui geomeetriline rida, $S = 2$ (g) hajub, kui harmooniline rida, $\alpha = -0.9 \leq 1$ (h) koondub, kui geomeetriline rida, $S = \frac{2}{3}$

Vastus 5.2. (a) koondub (b) hajub (c) hajub (d) koondub (e) hajub (f) koondub

Vastus 5.5. (a) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (b) koondub, kuna (reast suurem) geomeetriline rida teguriga $q = 1/4$ koondub (c) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (d) koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub (e) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (f) hajub, kuna (reast väiksem) harmooniline rida hajub (g) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (h) koondub, kuna (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{4}{3} > 1$ koondub (i) hajub, kuna ekvivalentne harmooniline rida hajub (j) koondub, kuna näiteks (reast suurem) harmooniline rida astmega $\alpha = 2 > 1$ koondub (k) koondub, kuna näiteks ekvivalentne harmooniline rida astmega $\alpha = 3 > 1$ koondub (l) koondub, kuna ekvivalentne geomeetriline rida teguriga $q = 2/5 < 1$ koondub

Praktikum 6

Vastus 6.1. (a) $D = 0 < 1$, koondub (b) $D = 2 > 1$, hajub (c) $D = \frac{1}{4} < 1$, koondub (d) $D = \frac{2}{5} < 1$, koondub (e) $D = 1$, tunnus ei tööta, hajub kui harmooniline rida astmega $\alpha = \frac{1}{2}$ (f) $D = \frac{2}{3} < 1$, koondub (g) $D = 1$, tunnus ei tööta, koondub, kuna ekvivalentne harmooniline rida astmega 2 koondub (h) $D = \frac{1}{e} < 1$, koondub (i) $D = 4 > 1$, hajub, (või siis näidata, et $u_n \rightarrow \infty$) (j) $D = 3 > 1$, hajub (k) $D = \frac{1}{25} < 1$, koondub (l) $D = 3 > 1$, hajub

Vastus 6.2. (a) $C = 0 < 1$, koondub (b) $C = \frac{3}{4} < 1$, koondub (c) $C = 2 > 1$, hajub (d) $C = \frac{3}{2} > 1$, hajub (e) $C = 1$, tunnus ei tööta, koondub kui harmooniline rida astmega $\alpha = 1.5$ (f) $C = \frac{e}{3} < 1$, koondub (g) $C = \frac{1}{2} < 1$, koondub (h) $C = 2 > 1$, hajub (i) $C = 0 < 1$, koondub (j) $C = 0 < 1$, koondub (k) $C = 0 < 1$, koondub (l) $C = \frac{1}{e} < 1$, koondub

Vastus 6.3. (a) koondub (b) koondub (c) koondub (kahanemist on lihtsam näidata läbi funktsiooni tuletise) (d) koondub (e) tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow \infty$ (f) tunnus ei tööta, rida hajub, kuna $u_n \rightarrow 1/2$

Vastus 6.4. (a) koondub absoluutselt (b) koondub tingimisi (c) koondub absoluutselt (d) koondub tingimisi (e) koondub absoluutselt (f) koondub tingimisi (g) koondub tingimisi (h) koondub tingimisi (siinus tuleks lahti kirjutada korrutiste summaks) (i) hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ (j) koondub absoluutselt (k) hajub, kuna $|u_n| \rightarrow 1$ (l) hajub, kui $a \in (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$; koondub tingimisi $a = -1$ korral; koondub absoluutselt $a \in (-1, 1)$ korral

Praktikum 7

Vastus 7.1. (a) $R = 1$, $A = (-1, 1)$ ja $C = (-1, 1]$ (b) $R = \frac{1}{5}$, $A = C = (\frac{4}{5}, \frac{6}{5})$ (c) $R = 1$, $A = C = (-1, 1)$ (d) $R = 8$, $A = C = (-4, 12)$ (e) $R = \frac{1}{4}$, $A = C = (-\frac{1}{2}, 0)$ (f) $R = 3$, $A = C = (-3, 3)$ (g) $R = \frac{1}{2}$, $A = C = (-3, -2)$ (h) $R = \infty$, $A = C = (-\infty, \infty)$ (i) $R = 0$, $A = C = \{0\}$ (j) $R = \infty$, $A = C = (-\infty, \infty)$, rida $\sum \frac{y^n}{n!}$ koondub iga $y \in \mathbb{R}$ korral, järelikult ka esialgne rida $((x+4)^2 = y)$ (k) $R = 0$, $A = C = \{3\}$ (l) $R = 3$, $A = C = (-3, 3)$

Vastus 7.2. (a) Kasutame geomeetrilist rida $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, kui $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad C = (-1, 1)$$

(b)

$$\frac{x}{1-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}, \quad C = (-1, 1)$$

(c) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln|x+1| + C$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad C = (-1, 1]$$

(d) Lähtume võrdusest $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$,

$$\arctan x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}, \quad C = [-1, 1]$$

Vastus 7.3. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n!} \right) x^n$ (f) $1 - x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{3^n (2n)!}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n x^n}{2^n n!}$

Vastus 7.4. (a) 0.00266636, reast $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(4n-1) \cdot (2n-1)! \cdot 5^{4n-1}}$ piisab võtta kaks esimest liiget (b) 0.09994446 (c) 0.100001 (d) 0.48491714 (e) 0.48722236 (f) 0.18533015

Praktikum 8

Vastus 8.1. $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)x), x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.2. $f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2} \cos((2n-1)x), x \in \mathbb{R}$

Vastus 8.3. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\pi x), x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

Vastus 8.4. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right), x \in \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$

Vastus 8.5. (a) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq 0\}$, $\partial D = \{(x, y) : y = 0\}$; (b) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$; (c) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$; (d) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y\}$; (e) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x > -y, x > 0, x \neq 1\}$; (f) $\mathcal{D} = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$; (g) $\mathcal{D} = \mathcal{R} \times [-1, 1]$; (h) $\mathcal{D} = [-1, 1]^2$; (i) $\mathcal{D} = \{(x, y) : -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$; (j) $\mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 > -y\}$; (k) $\mathcal{D} = \{(x, y) : y^2 > x \geq 0\}$; (l) $\mathcal{D} = (-1, \infty) \times ((-1, \infty) \setminus \{0\})$; (m) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 < 3\}$; (n) $\mathcal{D} = \{(x, y) : 2 < x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \neq 3\}$;

Vastus 8.6. (a) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$; (b) $E = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0\}$; (c) $E = \{(x, y, z) : xy > 0, z > 0\}$; (d) $E = \{(x, y, z) : x, yz \in [-1, 1]\}$; (e) $E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$; (f) E on kogu xyz -ruum, välja arvatud punktid, mille kõik koordinaadid on paaritud täisarvud.

Praktikum 9

Vastus 9.1. (a) 4; (b) 16; (c) 1; (d) 0; (e) 0; (f) 2; (g) $\frac{1}{8}$; (h) 0; (i) 0; (j) $-\infty$; (k) 1; (l) 0; (m) 1, võtta $u = xy$ ja arvestada, et $u \rightarrow 0$ korral $\tan u \sim u$; (n) $\frac{1}{2}$; (o) 1; (p) 1, arvestada, et $\lim u = \lim e^{\ln u} = e^{\lim \ln u}$.

Vastus 9.3. (a) Pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas; (b) pidev, kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Praktikum 10

Vastus 10.1. (a) $f_x = 2x - y, f_y = 4y - x$; (b) $f_x = \frac{3}{2\sqrt{3x-y}}, f_y = \frac{-1}{2\sqrt{3x-y}}$; (c) $f_x = 0, f_y = 2y$; (d) $f_x = 2/x, f_y = 1/y$; (e) $f_x = \frac{-1}{(x-y)^2}, f_y = \frac{1}{(x-y)^2}$;

Vastus 10.2. (a) $f_x = 2e^{2x+3y}, f_y = 3e^{2x+3y}$; (b) $f_x = 3x^2y + 2, f_y = x^3$; (c) $f_x = 3x^2yz^2, f_y = x^3z^2 + 7, f_z = 2x^3yz$; (d) $f_x = \frac{1}{x}, f_y = \frac{1}{y}, f_z = \frac{2}{z}$; (e) $f_x = 5(x+2y)^4, f_y = 10(x+2y)^4$; (f) $f_x = \frac{2}{y}, f_y = -\frac{2x}{y^2}$; (g) $f_x = \frac{xy^4}{\sqrt{1+x^2y^4}}, f_y = \frac{2x^2y^3}{\sqrt{1+x^2y^4}}$; (h) $f_x = -4\sin(4x-y), f_y = \sin(4x-y)$; (i) $f_x = \sin y, f_y = x \cos y$; (j) $f_x = \frac{1}{y \cos^2 \frac{x}{y}}, f_y = -\frac{x}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}$; (k) $f_x = -\frac{y}{1+x^2y^2}, f_y = -\frac{x}{1+x^2y^2}$; (l) $f_x = yx^{y-1}, f_y = x^y \ln x$; (m) $f_x = y(x+y)^{y-1}, f_y = f[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}]$; (n) $f_x = a^{xy}[y \ln a + \frac{xy^2}{a}], f_y = a^{xy}[x \ln a + \frac{yx^2}{a}]$, kus $a = 1 + xy$. Osatuletise f_y saame osatuletisest f_x vahetades x ja y kohtadega. (o) $f_x = \sin yx^{\sin y-1}, f_y = f \ln x \cos y$; (p) $f_x = 2x, f_y = zy^{z-1}, f_z = y^z \ln y$; (q) $f_x = \frac{1}{z-t}, f_y = \frac{-1}{z-t}, f_z = \frac{y-x}{(z-t)^2}, f_t = \frac{x-y}{(z-t)^2}$;

Vastus 10.3. (a) $f_{xx} = 2, f_{yy} = f_{xy} = 0$; (b) $f_{xx} = -f_{yy} = 6xy, f_{xy} = 3(x^2 - y^2)$; (c) $f_{xx} = 0, f_{yy} = \frac{2x}{y^3}, f_{xy} = 1 - \frac{1}{y^2}$; (d) $f_{xx} = 2 \cos(x+y) - x \sin(x+y), f_{yy} = -x \sin(x+y), f_{xy} = \cos(x+y) - x \sin(x+y)$; (e) $f_{xx} = -4y(x+y)^{-3}, f_{yy} = 4x(x+y)^{-3}, f_{xy} = 2(x-y)(x+y)^{-3}$; (f) $f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, f_{yy} = x^y \ln^2 x, f_{xy} = x^{y-1}(1+y \ln x) \quad (x > 0)$; (g) $f_{xx} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}, f_{yy} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}, f_{xy} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$; (h) $f_{xx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, f_{yy} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}, f_{xy} = 0 \quad (xy \neq 1)$; (i) $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -s, f_{xy} = z - s, f_{xz} = y - s, f_{yz} = x - s$, kus $s = (x+y+z)^{-2}$; (j) $f_{xx} = -y^2 z^2 \sin v, f_{yy} =$

$-x^2z^2 \sin v$, $f_{zz} = -x^2y^2 \sin v$, $f_{xy} = z \cos v - xyz^2 \sin v$, $f_{xz} = y \cos v - xy^2z \sin v$, $f_{yz} = x \cos v - x^2yz \sin v$, kus $v = 1 + xyz$.

Vastus 10.4. (a) $f_{xy} = f_{yx} = \cos x$; (b) $f_{xy} = f_{yx} = \frac{2y}{x}$; (c) $f_{xy} = e^{x+y}$.

Vastus 10.5. (a) $f_{xxy} = 0$; (b) $f_{xyz} = f_{zxy} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$;

Vastus 10.6. (a) puutuja on $z = x - y$; (b) puutuja on $z = 2(x - 1)$, normaal on $x = 1 + 2t$, $y = 0$, $z = -t$; (c) puutuja on $z = 1$, normaal $x = 0$, $y = 0$, $z = 1 - t$; (d) puutuja on $z = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{2}$, normaal on $-2(x-1) = 2(y-2) = -(z-1)$; (e) puutuja on $z = 5 + 8(x-1) + 2(y-1)$, normaal on $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-5}{-1}$; (f) puutuja on $z = -4x - 2y - 3$, normaal on $\frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$; (g) puutuja on $z = 2/5 + 3x/25 - 4y/25$, normaal on $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1/5}{-25}$; (i) puutuja on $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{x-\pi}{4} + \frac{\pi}{16}(y-4))$, normaal on $\frac{x-\pi}{-1/(4\sqrt{2})} = \frac{y-4}{pi/(16\sqrt{2})} = \frac{z-1/\sqrt{2}}{-1}$.

Praktikum 11

Vastus 11.1. (a) $df = dx + 3dy$; (b) $df = 4(x - y)dx - 4xdy$; (c) $df = ydx + xdy$; (d) $df = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; (e) $df = e^{1+xy}(ydx + xdy)$; (f) $df = \sin(xy)(ydx + xdy)$; (g) $df = y^x \ln y dx + xy^{x-1} dy$; (h) $df = \frac{dx - 2dy + 3dz}{\cos^2(x - 2y + 3z)}$;

Vastus 11.2. (a) $du(P) = -0.2$, $\Delta u = -0.21$; (b) $du(P) = 2.5$, $\Delta u = 2.504$.

Vastus 11.3. (a) 0.04; (b) -0.01 ; (c) -0.1 ; (d) 0.591; (e) 0.06; (f) 0.0025.

Vastus 11.4. 125 m^2 ; 250 m^2 .

Vastus 11.5. 1200.

Vastus 11.6. vähenevad vastavalt 44.8 cm^3 ja $13.6\pi \text{ cm}^2$.

Vastus 11.7. (a) 4300 eurot; (b) 8000 eurot.

Vastus 11.8. 4680 cm^3 .

Vastus 11.9. Umbes -3.28° C .

Vastus 11.10. 0.5 liitrit minutis.

Vastus 11.11. Rõhk langeb umbes 8.83 kPa .

Vastus 11.12. (a) 1.12; (b) -0.03 ; (c) 7.18; (d) 1.1; (e) 3.037; (f) $22\frac{249}{352}$; (h) $\frac{\sqrt{2}}{14}\pi$.

Praktikum 12

Vastus 12.1. (a) P on lokaalne miinimum, Q ei ole ekstreemumpunkt, R on lokaalne maksimum; (b) P on sadulpunkt, Q on lokaalne maksimum, R ei ole ekstreemumpunkt.

Vastus 12.2. (a) $\text{locmax} f = f(-1, 0) = 1$; (b) $\text{locmin} f = f(1, 0) = -2$, kriitilises punktis $(-1, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (c) kriitilises punktis $(0, 1)$ ekstreemumit ei ole; (d) $\text{locmax} f = f(0, 0) = 1$; (e) $\text{locmin} f = f(1, 0) = -1$ (f) $\text{locmin} f = f(1, 1) = -1$, kriitilises punktis $(0, 0)$ lokaalset ekstreemumit ei ole; (g) $\text{locmin} f = f(0, 0) = 2$; (h) $\text{locmin} f = f(1, 2) = 3 - \ln 4$, punkt $(-1, 2)$ (kus osatuletised on nullid) ei kuulu funktsiooni määramispiirkonda;

Vastus 12.3. (a) $\max f = f(0, -1) = 2$, $\min f = f(0, \frac{1}{2}) = -0.25$; (b) $\max f = f(-1, 0) = f(1, 0) = 3$, $\min f = f(0, 1) = f(0, -1) = 1$; (c) $\max f = f(1, 0) = 0$, $\min f = f(0, 1) = -3$; (d) $\max f = f(-1, 0) = f(1, 0) = f(0, -1) = f(0, 1) = 1$, $\min f = f(0, 0) = 0$; (e) $\max f = f(0, 1) = f(0, -1) = \frac{3}{e}$, $\min f = f(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0) \approx -0.82$.

Vastus 12.4. Rajaks on sirged $q = 0$, $r = 0$ ja $q + r = 1$.

Vastus 12.5. $10 + 10 + 10$.

Vastus 12.6. Kuup.

Vastus 12.7. $P = -0.2x^2 + 16x - 0.1y^2 + 12y - 20$, 40 autot Ameerikas hinnaga 12000 \$, 60 autot Euroopas hinnaga 10000 \$.

Vastus 12.9. 6 tundi harjutamist ja 1 tund puhkust.

Vastus 12.10. $A = (5/4, -1/4)$

Vastus 12.11. (a) $y' = -\frac{e^x}{1+\cos y}$; (b) $y' = \frac{e^{x-y}-1}{e^{x-y}+1}$; (c) $y' = -\frac{y}{y+x}$; (d) $y' = \frac{x-y}{x-2y^3}$; (e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$; (f) $y' = -\frac{e^y+ye^x-4xy}{xe^y+e^x-2x^2}$; (g) $y' = -\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}$; (h) $y' = \frac{\cos(xy)-xy\sin(xy)-y\sin x}{x^2\sin(xy)-\cos x}$.

Vastus 12.12. (a) $4/3$; (b) 2 ; (c) $-4/5$; (d) $-(2 - \ln 2)$.

Vastus 12.13. (c) $P_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; (d) $P_2(x, y) = 9 + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + \frac{1}{3}(y-3)^2$;

Praktikum 13

Vastus 13.1. Vähim kaugus on $2\sqrt{3}$

Vastus 13.2. Vähim kaugus on 1

Vastus 13.3. (a) $f_{\min} = 2$ punktis $(1, 1)$ ja $\lambda = -2$, (b) $f_{\max} = 1$ punktis $(2, 2)$ ja $\lambda = -1$; $f_{\min} = -1$ punktis $(-2, -2)$ ja $\lambda = 1$, (c) $f_{\min} = 1$ punktis $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ ja $\lambda = \frac{5}{2}$, $f_{\max} = 11$ punktis $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ja $\lambda = -\frac{5}{2}$, (d) $f_{\min} = 9$ punktis $(3, 3, 3)$ ja $\lambda = 9$, (e) $f_{\min} = -9$ punktis $(-1, 2, -2)$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$; $f_{\max} = 9$ punktis $(1, -2, 2)$ ja $\lambda = -\frac{1}{2}$, (f) $f_{\min} = 6$ punktis $(1, 1, 2)$ ja $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$,

Vastus 13.4. Maksimaalne laskekaugus on $\frac{2E}{mg}$

Vastus 13.5. Muutumiskiirused on (a) $2\sqrt{5}$, (b) $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$, (c) 2 ja (d) $3\sqrt{2}$.

Vastus 13.6. (a) $\nabla f(1, -2) = (10, -4)$, (b) $\nabla f(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, (c) $\nabla f(1, -1, -1) = (-1, 2, 3)$, (d) $\nabla f(1, -1, 0) = (1, 2, 0)$, (e) $\nabla f(e, e, -1) = (1, 1, e)$, (f) $\nabla f(1, -1) = (4, -4)$.

Vastus 13.7. (a) $|\nabla f(2, -1)| = 2\sqrt{5}$, (b) $|\nabla f(1, 1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $|\nabla f(2, 0)| = 2$, (d) $|\nabla f(1, -2)| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Vastus 13.8. Temperatuur kasvab kõige kiiremini suunas $(1, -1)$ ja suurim kasvukiirus on $\frac{4\sqrt{2}}{e}$ ($^{\circ}\text{C}$ kraadi pikkusühiku kohta).

Vastus 13.9. Kiireima tõusuga trajektoor igast punktist on sirge, mis on risti selle kontuurjoonega, millel see punkt asetseb.

Vastus 13.10. (a) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ (b) $f(x) = -0,2857x + 1,8571$ (c) $f(x) = 3$ (d) $f(x) = 0,5116x + 1,1163$

Vastus 13.11. (a) $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{7}{8}x + 1$ (b) $f(x) = -0,3x^2 + 1,9x - 0,6$ (c) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{4}{3}$ (d) $f(x) = 0,0844x^2 + 0,7727x + 1,026$

Vastus 13.12. (a) $f(x) = 18,7e^{-0,001x}$ (b) $f(x) = 7,1993e^{-0,008x}$

Vastus 13.13. (a) $f(x) = 0,51x + 0,41$ (b) Kuuenda aasta müüginumbrid on 3,47 miljonit eurot

Praktikum 14

Vastus 14.1. (a) $\int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{2y}^2 f(x, y) dx$ (b) $\int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$
(c) $\int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y) dx$ (d) $\int_{-1}^1 dx \int_{-a}^a f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-b}^b f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ ja $b = \sqrt{1-y^2}$ (e)
 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-c}^c f(x, y) dx$, kus $c = \sqrt{y}$ (f) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^{\frac{1}{3}}}^{\frac{1}{2}} f(x, y) dx$.

Vastus 14.2. (a) $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$ (b) $\int_0^1 dy \int_{ey}^e f(x, y) dx$ (c) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^a f(x, y) dy$, kus $a = \sqrt{1-x^2}$ (d) $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx +$
 $\int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx$ (e) $\int_{-1}^0 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{-a}^{1-y} f(x, y) dx$, kus $a = \sqrt{y+1}$ (f) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ (g)
 $\int_0^1 dy \int_{-a}^a f(x, y) dx$, kus $a = \arccos y$ (h) $\int_0^1 dy \int_b^{\pi-b} f(x, y) dx$, kus $b = \arcsin y$.

Vastus 14.3. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{10}$ (c) π (d) 2 (e) $\frac{3}{2}$, arvestada, et $e^{x-y} = e^x e^{-y}$ (f) $\frac{1}{3}$ (g) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{-2}{3}$ (j) $\frac{13}{81}$

Praktikum 15

Vastus 15.1. (a) 6; (b) 3, 5; (c) -6; (d) $\frac{3}{2} \ln 2$.

Vastus 15.2.

(a) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq 9, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$
(b) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq 4, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$
(c) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\sin \varphi}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$
(d) $D = \left\{ (r, \varphi) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$
(e) $D = \left\{ (r, \varphi) : 1 \leq r \leq \frac{2\sqrt{3}}{\cos \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \text{ ja } 1 \leq r \leq \frac{2}{\sin \varphi}, \text{ kui } \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$
(f) $D = \left\{ (r, \varphi) : \frac{1}{\cos \varphi} \leq r \leq 2, -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$

Vastus 15.3. (a) $\frac{4\pi}{3}$ (b) $3\pi + 2$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $\pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2)$ (f) $\frac{\pi^2}{16}$

Vastus 15.4. (a) $\frac{32}{9}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{32}{9}$ (d) 24π (e) 7

Praktikum 16

Vastus 16.1. (a) $\frac{3}{4}$ (b) 2 (c) $16 - \frac{6}{\ln 2}$ (d) $7, 5 - 8 \ln 2$ (e) 5 (f) $\pi 16$ (g) $\frac{\pi(b^2-a^2)}{4}$ (h) $\frac{3\pi a^2}{2}$ (i) 2π (j) 1, minna üle
polaarkoordinaatidele (k) 2, minna üle polaarkoordinaatidele (l) $\frac{5\pi}{8}$

Vastus 16.3. 8000 ft^3 ehk u. 216 m^3

Vastus 16.2. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{560}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$ (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $\frac{\pi(8-3\sqrt{3})}{6}$ (g) $\frac{1}{6}$ (h) 16 (i) 22π (j) $\frac{\pi(6\sqrt{3}-5)}{3}$ (k) $\frac{16}{3}$ (l) 3π (m)
 $4\pi(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$ (n) π

Vastus 16.4. 80π

Vastus 16.5. $4a^2/3$

Vastus 16.6. $4000(1 - e^{-2}) \ln 3, 5 \approx 4332,88$

Vastus 16.7. $Q = \frac{2k\pi R^3}{3}C$

Vastus 16.8. $(0, 6/5)$

Vastus 16.9. (a) $\left(0, \frac{4}{3\pi}\right)$ (b) $\left((1 - \frac{\pi}{4})(1 + \sqrt{2}), (\frac{\pi}{16} - \frac{1}{8})(2 + \sqrt{2})\right)$ (c) $(-1/2, 8/5)$ (d) $\left(\frac{5}{3}, \frac{32}{9\pi}\right)$ (e) $(4\pi, 2\pi/3)$

Vastus 16.10. $(-2/5, 0)$

Vastus 16.11. $\left(-\frac{64+15\pi}{80+40\pi}, 0\right)$

Praktikum 17

Vastus 17.1. 24

Vastus 17.2. (a) 6 (b) 4 (c) $\frac{40}{3}$ (d) $10 \ln \frac{4}{5}$?? $\frac{4\pi}{3}$ (e) $\frac{1}{364}$ (f) 11

Vastus 17.3. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi^2}{4}$ (c) $\frac{a^3}{12}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ (d) 0 (e) $\frac{8c^2}{9}$ (f) $\frac{4\pi(b^5 - a^5)}{15}$

Praktikum 18

Vastus 18.1. (a) $\frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{10}$

(d) $\frac{2\pi}{3}$, osa lahendusest: minnes üle sfäärkoordinaatidele, saame

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r dr \int_0^\pi \frac{d(r^2 - 4r \cos \theta + 4)}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} = \pi \int_0^1 r dr (\sqrt{(r+2)^2} - \sqrt{(r-2)^2}) =$$

$$\pi \int_0^1 r dr (r+2 - |r-2|). \text{ Et } r-2 < 0, \text{ siis edasi arvestame, et } |r-2| = -(r-2).$$

(e) $\frac{4\pi a^5}{15}$ (f) $\frac{8\pi(b^5 - c^5)}{15}$

Vastus 18.2. (a) 128 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{7}{12}$ (d) 16 (e) $\frac{7}{24}$ (f) $\frac{3}{35}$ (g) $\frac{\pi a^3}{3}$, sfäärkoordinaatides, arvestame kujundi sümmeetriat

Vastus 18.3. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{20}{3}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{4}{\pi^2}$ (k) 12π

Vastus 18.4. 5000

Vastus 18.5. $abc(a+b+c)/2$

Vastus 18.6. $a^4/24$

Vastus 18.7. $\pi 2a^4/4$

Vastus 18.8. $\pi k \pi a^4 c/2$, kus k on võrdetegur

Vastus 18.9. $6k\pi a^2$, kus k on võrdetegur

Vastus 18.12. (a) (1, 1, 1) (b) (3/5, 3/5, 9/32) (c) (3/8, 3/8, 3/8)

Vastus 18.13. (0, 0, 4/5)

Praktikum 19

Vastus 19.1. (a) $\sqrt{5} \ln 2$, (b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \ln 3$, (c) $1/2$, (d) $\pi a^2/2$, (e) 2π , (f) 24, (g) $8a\pi^3\sqrt{2}$.

Vastus 19.2. (a) $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$, (b) 5.

Vastus 19.3. (a) $\sqrt{2}/2$, (b) 12π , (c) 32.

Vastus 19.4. 16

Vastus 19.5. (a) π , (b) -4 , (c) $-\pi/4$, (d) 3, (e) 32,

Vastus 19.6. (a) πab , (b) $1/3$, (c) $3\pi a^2/8$, (d) $3\pi a^2/2$.

Praktikum 20

Vastus 20.2. (a) $y = e^x - 1$ (b) $y = x^2$ (c) Ühiseid lahendeid ei ole.

Vastus 20.3. (a) $2e^y - e^{2x} = C$ (b) $x^2 - \sqrt{1-y^2} = C$, $y = \pm 1$ (c) $y = 1 + C(x+1)$, $x \neq -1$ (d) $y = \tan x + C$, $C = 0$
(e) $y^2 = 2 \ln |1 + e^x| + C$, $C = 1 - 2 \ln 2$ (f) $y = C \sin x$, $C = 1$

Vastus 20.4. $m(t) = m_0 e^{-kt}$

Vastus 20.5. ≈ 36.8 kg. Näpunäide: Soolakoguse muutumise kiirus on võrdne vahega sissevoolava lahuse ja väljavoolava lahuse soola koguste kiirustest. Soola lisamise kiirus on $10 \text{ g/l} \cdot 10 \text{ l/min} = 100 \text{ g/min}$, see on $1/10 \text{ kg/min}$. Kuna välja voolab lahust 10 l/min , siis soola voolab välja lahusest kiirusega $10x/1000 \text{ kg/min}$.

Vastus 20.6. (a) $y = Ce^x - x$ (b) $y = x^2 + C/x$ (c) $xy = C - \ln |x|$ (d) $y = Cx + x \ln |\ln |x||$ (e) $y = e^{-\sin x}(x + C)$
(f) $y = (x^2 + C) \sin x$ (g) $y = C \cos x + \sin x$ (h) $y = x(C + \sin x)$ (i) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$ (j) $y = e^x(C + \ln |x|)$, $x = 0$ (k)
 $y = 1$ (l) $y = \ln |x| - 1/\ln |x|$

Vastus 20.7. $I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{aR}{\omega^2 L^2 + R^2} \sin(\omega t) - \frac{a\omega L}{\omega^2 L^2 + R^2} \cos(\omega t)$

Praktikum 21

Vastus 21.2. (a) $e^{\frac{y}{x}} = Cx$, $x = 0$, $y = 0$ (b) $1/2 \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{y}{x} = C$ (c) $y^2 = 2x^2(\ln |x| + C)$ (d) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ (e)
 $y = x - \frac{x}{\ln |x| + C}$, $y = x$ (f) $y = C(x^2 + y^2)$

Vastus 21.3. $y^2 = C(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

Vastus 21.4. (a) $y + 2 = (x - 1)(\ln |x - 1| + C)$, $x \neq 1$, $x = 1$ (b) $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)$, $y = 1 - x$ (c) $8y - 4x + \ln |4x + 8y + 5| = C$, $y = -5/8 - 1/2x$ (d) $\ln(2x - 3) - \frac{4y+5}{2x-3} = C$

Vastus 21.5. $(y + x - 1)^5(y - x - 1)^2 = C$

Vastus 21.6. $\ln\left(\frac{y+x}{x+3}\right) = 1 + \frac{C}{x+y}$

Praktikum 22

Vastus 22.1. (a) $y^2 = Cx^2 - x$ (b) $y^3 = 1 + Ce^{-x}$ (c) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1$, $y = 0$ (d) $y(x+1)(\ln |x+1| + C) = 1$, $y = 0$
(e) $y = x^4(C + \ln |x|)^2$, $y = 0$ (f) $y(Ce^{-\sin x} - 1) = 1$, $y = 0$ (g) $y^{-3} = (C - 3x) \cos^3 x$, $y = 0$ (h) $y^3 = Cx^3 - 3x^2$, $x = 0$
(i) $y^2 = Cx^2 - 2x$, $x = 0$

Vastus 22.2. (a) $\frac{x^3}{3} + xy - y^2 = C$ (b) $2y^2 - xy + x^3 = C$ (c) $y^4 = 4xy + C$ (d) $\ln \frac{y}{x} - \frac{xy}{x-y} = C$ (e) $x^4 + 3x^2y^2 + y^3 = C$
(f) $\ln |x + y| + \frac{y}{x+y} = C$ (g) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + xy = C$ (h) $x^2(y^2 + 1) + y^4 = C$ (i) $\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C$?? $y^4 = 4xy + C$ (l)
 $\sqrt{x^2 - y^2} - x = C$ (j) $x + ye^{\frac{x}{y}} = C$ (k) $xe^{-y} - y^2 = C$

Vastus 22.3. (a) $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.2$, $y_3 = 1.3$ (b) $y_1 = 1.2$, $y_2 = 1.45$, $y_3 = 1.78$ (c) $y_1 = 0$, $y_2 = 0.001$, $y_3 = 0.005$ (d)
 $y_1 = 1.1$, $y_2 = 1.18$, $y_3 = 1.25$ (e) $y_1 = 5.8$, $y_2 = 9.44$, $y_3 = 18.78$

Praktikum 23

Vastus 23.1. (a) $y = C_1x + C_2 + x \ln |x|$ (b) $y = C_1x + C_2 - \ln |\cos x|$ (c) $y = C_1x + C_2 + \frac{x^3}{6} + x \ln |x|$ (d) $y = C_1x + C_2 + \frac{1}{x^2 - 1}$
 (e) $y = e^x + x^{-1/2} + C_1x + C_2$ (f) $y = C_1x + C_1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$

Vastus 23.2. (a) $y = C_1 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) + C_2$ (b) $y = C_1 \ln |x| + C_2 + \frac{\ln^2 |x|}{2}$ (c) $y = C_1 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2$ (d) $y = C_1x^2 + C_2$ (e)
 $y = C_1 \ln |x| + C_2$ (f) $y = C_1e^{x^2} + C_2$ (g) $y = C_1x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}$ (h) $y = C_1(x \ln |x| - x) + C_2$ (i) $y = e^{e^{C_1x - 2C_1 + 1}}(e^{C_1x} - 1) + C_2$
 (j) $y = -\frac{x}{C_1} - \frac{\ln |1 - C_1x|}{C_1^2} + C_2$

Vastus 23.3. (a) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$ (b) $y = C_1e^{2x} + C_2$ (c) $y = C_1e^{2x} \sin x + C_2e^{2x} \cos x$ (d) $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$
 (e) $y = C_1e^x + C_2e^{xx}$ (f) $y = C_1e^{7x} + C_2$ (g) $y = e^{\frac{5x}{3}} + 1$ (h) $y = C_1e^{x/2} + C_2e^{-2x}$ (i) $y = C_1e^{-x/4} + C_2e^{-x/4}x$
 (j) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)$ (k) $y = C_1e^{-\frac{7x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{19}x}{2}\right) + C_2e^{-\frac{7x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{19}x}{2}\right)$ (l) $y = \frac{1}{6}e^{-5(x+1)}(e^{6x+6} - 1)$ (m)
 $y = e^{3x}(\sin x + \cos x)$

Praktikum 24

Vastus 24.1. (a) $y = 3x + C_1 + C_2e^{-x}$ (b) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + ((3x - 4)/9)$ (c) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{3x} + x/12 + 7/144$
 (d) $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + x/2 + 3/4$ (e) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x$ (f) $y = C_1 + C_2e^{-x} + x(2x^3 - 5x + 10)$
 (g) $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^3 + 2x^2 - 3x$ (h) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{-x} - x^3/5 + 12/25x^2 - 126/125x + 499/625$

Vastus 24.2. (a) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 1/2e^{-5x}$ (b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + 4/3xe^{2x}$ (c) $y = e^{-x}(3/2x^2 + C_1 + C_2x)$ (d)
 $y = 2xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$

Vastus 24.3. (a) $y = C_1e^{6x} + C_2e^x + 5/74 \sin(x) + 7/74 \cos(x)$ (b) $y = C_1e^{(2+\sqrt{5})x} + C_2e^{(2-\sqrt{5})x} - 1/10 \sin(x) + 1/5 \cos(x)$
 (c) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - 1/5(6 \sin(2x) + 2 \cos(2x))$ (d) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) - 1/6x \cos(3x)$ (e) $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - 2x \cos(x)$

Vastus 24.4. (a) $y = e^x - 1 + C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$ (b) $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + (2x - 2)e^x$ (c) $y = (C_1 - x^2/4) \cos(x) + (C_2 + x/4) \sin(x)$
 (d) $y = C_1 + C_2e^x + xe^x - x(1 + x/2)$ (e) $y = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + e^{3x}(x^2/18 - x/27 + 5/81)$ (f)
 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 1/3(x - 4/3 + 1/5e^{2x})$

Praktikum 25

Vastus 25.1. (a) $y = \frac{C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)}{x}$ (b) $y = \frac{C_1 e^{-x} + C_2 e^x}{x}$ (c) $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (d) $y = C_1(e^x - 1) + C_2(e^x + 1)^{-1}$ (e) $y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}$ (f) $y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x$ (g) $y = C_1 x \cos(2x) + C_2 x \sin(2x)$ (h)
 $y = C_1 \tan x + C_2(1 + x \tan x)$ (i) $y = C_1 x + C_2 e^{-2x}$ (j) $y = C_1(1 + x \ln |x|) + C_2 x$ (k) $y = C_1 x + C_2(\ln |x| + 1)$ (l)
 $y = C_1(2x + 1) + C_2 e^{2x}$ (m) $y = C_1(x^2 + 1) + C_2(x + (x^2 + 1) \arctan x)$ (n) $y = C_1 x + C_2 \sqrt{x^2 + 1}$ (o) $y = C_1 e^{2x} + C_2(3x + 1)e^{-x}$

Vastus 25.2. (a) $y = C_1 \cos(e^{-x}) + C_2 \sin(e^{-x}) + e^{-x}$ (b) $y = C_1 \cos e^{-x} + C_2 \sin e^x + x$ (c) $y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$ (d)
 $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3 + x^4$ (e) $y = C_1 e^{x^2} + C_2 + (x^2 - 1)e^{x^2}$ (f) $y = C_1 + C_2 \tan x + \frac{1}{2}(1 + x \tan x)$ (g) $y = C_1 e^x + C_2 x - \frac{1}{2}(2x - 1)e^{-x}$
 (h) $y = C_1 x + C_2 x e^x - 2x^2$

Praktikum 26

- Vastus 26.1.** (a) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \sin x$
 (b) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ln|x|$
 (c) $y = \cos x + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$
 (d) $y = C_1 + C_2x \pm 4/3\sqrt{(c_1+x)^3}$
 (e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5x^5$
 (f) $y = C_1 + C_2x - C_3 \ln|C_3 + x| - x \ln|C_3 + x|$
 (g) $y = C_1 + C_2x + C_3(2x^2 + \cos 2x) + \frac{x^2}{2}$
 (h) $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x}(x+2)$

- Vastus 26.2.** (a) $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2 \sin \sqrt{3}x + C_3 \cos \sqrt{3}x)$
 (b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x$
 (c) $y = C_1e^xx^2 + C_2e^xx + C_3e^x$
 (d) $y = C_1 + C_2e^x + C_3x^3 + C_4x^2 + C_6x + \frac{x^4}{24} + e^x \frac{x^2}{2} - 4e^xx$
 (e) $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3x + x \ln x$
 (f) $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x + \cos x$

- Vastus 26.4.** (a) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$
 (b) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1, z = C_1e^x - C_2e^{-x} - 1$
 (c) $y = x + \frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}, z = C_2e^{C_1x}$
 (d) $y = C_2e^{C_1x}, z = C_1C_2e^{C_1x}$
 (e) $y = C_1 + \ln(x^2 + 1), z = \frac{C_1x}{2} + \frac{C_2}{x} + (\frac{1}{2x} + \frac{x}{2})\ln(x^2 + 1) + \frac{x^2}{3} - \frac{x}{2}$
 (f) $y = C_2e^{C_1x^2}, z = \frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}$

Praktikum 27

- Vastus 27.1.** (a) $y = C_2e^{C_1x}, z = x + C_2C_1^{-1}e^{C_1x}, y = 0, z = x + C$
 (b) $y = C_1e^{x^2}, z = x(C_2 - \ln|x|)$
 (c) $y = C_1x + C_2 - \frac{x^2}{2}, z(C_1 - x - 1) = 1$
 (d) $y = C_1e^x + C_2e^{-3x}, z = -6C_2e^{-5x}$
 (e) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}, z = C_1e^{-x} + 3C_2e^{-3x} + \cos(x)$
 (g) $x = (C_1 - C_2) \cos t + (C_1 + C_2) \sin t, y = C_1 \sin t - C_2 \cos t + C_3e^t, z = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3e^t$
 (j) $x = 3C_1 \cos(3t) - 3C_2 \sin(3t), y = C_2 \cos(3t) + C_1 \sin(3t)$
 (k) $x = C_1e^t - C_2e^{-t} + t - 1, y = C_1e^t + C_2e^{-t} - t + 1$
 (l) $x = -2e^{-t} + 3e^{-7t}, y = e^{-t} + 3e^{-7t}$
 (m) $x = (\sin t - 2 \cos t)e^{-t}, y = e^{-t} \cos t$

- Vastus 27.5.** (a) $u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}, C(x) = x^2e^{\frac{1}{x}}$
 (b) $u = y\frac{x^2}{2} + C(y), C(y) = 1 - y\frac{1-y^2}{2}$
 (c) $u = y \ln|x| + C(y), C(y) = y^2$
 (d) $u = C(y), C(y) = y$

Praktikum 28

Vastus 28.1. Diferentsiaalvõrrand on homogeenne, kuna kehtib

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} - \frac{t^2 y^2}{t^2 x^2} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} = t^0 f(x, y)$$

ehk funktsioon $f(x, y)$ on 0-astme homogeenne funktsioon. Võrrandi lahendid on $y = \frac{x}{\ln|x| + C}, y = 0$

Vastus 28.2. Diferentsiaalvõrrand on eksaktne, kuna osatuletised on võrdsed

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1.$$

Võrrandi üldlahend on kujul $u(x, y) = C$, seega $-yx + \frac{y^4}{4} = C$

Vastus 28.3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}$

Vastus 28.5. $y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4, y = C_5 x^2 + C_6 x + C_7$

Vastus 28.6. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + \cos x$

Vastus 28.9. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3 + 4 \cos 4x, z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \sin 4x$

Vastus 28.11. $u = x^3 e^{\frac{y^2}{2x}}$

Praktikum 29

Vastus 29.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

(a) $u = f(x^2 + y^2)$

(b) $u = e^{\frac{x}{y}} f(y)$

(c) $u = f(x^2 - y^2) + y - x$

(d) $x^2 - 4u = f\left(\frac{(x+y)^2}{x}\right)$

(e) $u = xf(x^2 + y^2)$

(f) $u = xy + f(x^2 - y^2)$

(g) $u = yf(x^2 - y^2)$

(h) $u = xy + f(x^2 + y^2)$

(i) $u^2 = 2x + f\left(\frac{y}{x}\right)$

(j) $u = f\left(e^{-x} - \frac{1}{y}\right) - \frac{x - \ln|y|}{e^{-x} - \frac{1}{y}}$

(k) $u = \sin y + f(\sin x - \sin y)$

Praktikum 30

Vastus 30.1. Selles ülesandes f ja v on suvalised pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

(a) $u = f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$

(b) $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$

(c) $v\left(u, (x - y)^{\frac{2}{z}-1}, \frac{(x+y+2z)^2}{z}\right) = 0$

(d) $v\left(\frac{x}{y}, xy - 2u, \frac{z+u-xy}{x}\right) = 0$

(e) $v\left(u, \frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right) = 0$

(f) $v\left(u, \frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\right) = 0$

Vastus 30.2. (a) $u = 2xy$

(b) $u = ye^x - e^{2x} + 1$

(c) $u = y^2 e^{2\sqrt{x}-2}$

(d) $u(x^2 + 1) = y^2$

(e) $u = x^2 y$

(f) $u = y - x^2$

(g) $2x^2 - y^2 - u^2 = a^2$

(h) $(x - y)(3x + y + 4u) = 4u$

(i) $4yx - x^3 y + x^2 u^2 = 4y^2$

(j) $xy + u^2 = a^2$