2024

Kõrgem matemaatika II

MTMM.00.341

LOENGUKONSPEKT

vastutav õppejõud

ELLA PUMAN

ella.puman@ut.ee

Ümbertöötanud Peeter Oja

TARTU ÜLIKOOL | Matemaatika ja statistika instituut

SISUKORD

EESSÕNA

Käesolev kursus “Kõrgem matemaatika II” algab tutvumisest algebra tähtsamate mõistetega, milleks on vektorruumi mõiste, vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse mõiste, vektorruumi baasi ja vektori koordinaatide mõisted. Konspekti esimene peatükk põhineb Aivo Parringu veebikonspektil “Algebra ja geomeetria“.

Matemaatilisest analüüsist tutvume arvridade ja astmeridade mõistetega, nende koondumis-kriteeriumidega. Seejärel tegeleme mitme muutuja funktsioonidega, tutvume osatuletiste mõistetega ning rakendustega, täisdiferentsiaali mõistega, lõpuks kahekordsete ja kolmekordsete integraalide mõistetega ning nende rakendustega.

Viimases osas õpime lahendama erinevaid diferentsiaalvõrrandeid. Alustame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite ja lineaarsete diferentsiaalvõrrandite mõistete ja lahendusmeetodite meelde tuletamisest, edasi tutvume selliste esimest järku diferentsiaalvõrrandite liikidega nagu homogeenne, eksaktne ja Bernoulli diferentsiaalvõrrand ja nende võrrandite lahendusmeetoditega. Jätkame teist järku diferentsiaalvõrranditega, kõrgemat järku diferentsiaalvõrranditega, diferentsiaalvõrrandite süsteemidega ning lõpuks uurime kahe muutuja funktsiooni jaoks osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamist.

Käesoleva loengukonspekti lõpus on loetelu kirjandusest, kust õppematerjal pärineb ning kust on võimalik huvi korral oma teadmisi täiendada.

Kursuse “Kõrgem matemaatika II” läbinud üliõpilane on ettevalmistatud jätkukursusteks matemaatika, matemaatilise statistika, füüsika, keemia, materjaliteaduse ja informaatika alal, kus võidakse ka antud materjali osaliselt korrata. Kindlasti on kursuse eesmärgiks ka üliõpilaste matemaatilise mõtlemisoskuse arendamine, mis tuleb kasuks igal erialal.

Selle kursuse läbinud üliõpilane on omandanud järgmised oskused.

1. Oskab defineerida vektorruumi ja teab vektorite lineaarse sõltuvuse ja sõltumatuse mõisteid.
2. Oskab defineerida ja leida osatuletisi ja täisdiferentsiaali mitme muutuja funktsioonile.
3. Oskab leida funktsiooni ekstreemumeid, tunneb Lagrange’i meetodit.
4. Oskab defineerida ja leida kahe- ja kolmekordseid integraale.
5. Teab hariliku diferentsiaalvõrrandi mõistet, oskab defineerida ja lahendada eralduvate muutujatega, eksaktset, homogeenset, Bernoulli diferentsiaalvõrrandit, lineaarset esimest ja teist järku diferentsiaalvõrrandit.
6. Tunneb numbrilisi meetodeid esimest järku diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks.
7. Tunneb osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid, oskab lahendada neist lihtsamaid.

I PTK VEKTORRUUM, VEKTORITE SÜSTEEMI LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

SISSEJUHATUS

Selles peatükis tutvume algebra ühe olulise mõistega, milleks on vektorruum. Tegemist on teatava ehitusega mittetühja hulgaga. Vektorruumi mõiste on tegelikult üldisem, kus reaalarvude hulga osas on suvaline korpus. Meie kursuses on korpuse osas konkreetne korpus, milleks on reaalarvude korpus $\mathbb{R}$. Kuna meie kursuses korpuse mõistet ei vaadelda, siis reaalarvude korpust vaatleme kui reaalarvude hulka. Korpuse mõistet tutvustatakse loengukursuses „Algebra I“. Kirjutatu põhineb Aivo Parringu veebikonspektil “Algebra ja geomeetria” .

1.1. VEKTORRUUM ÜLE REAALARVUDE HULGA

Vaatleme mittetühja hulka V, mille elemente nimetame vektoriteks. Vektorid tähistame edaspidi rasvases kirjas, et eristada vektoreid skalaaridest.

Definitsioon 1.1.

Mittetühja hulka V nimetatakse **vektorruumiks üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$**, kui sellel hulgal on defineeritud lineaarsed tehted: hulga V elementide liitmine ja hulga V elementide korrutamine reaalarvuga nii, et on täidetud järgmised tingimused:

Hulk V on kinnine elementide **liitmise** suhtes: iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V.$$

1) Elementide liitmine on <u>assotsiatiivne</u>, s.t iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ korral kehtib

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}). \qquad \text{(VR1)}$$

2) Hulgas leidub **nullelement $\boldsymbol{\theta}$** $\in V$, nii et iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtivad seosed

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a}, \ \ \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR2)}$$

3) Iga elemendi $\boldsymbol{a} \in V$ korral leidub hulgas **vastandelement $-\boldsymbol{a}$** $\in V$, nii et kehtivad

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta}, \ \ -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}. \qquad \text{(VR3)}$$

4) Elementide liitmine on <u>kommutatiivne</u>, s.t iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR4)}$$

Hulk V on **kinnine reaalarvuga korrutamise** suhtes: iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$k\boldsymbol{a} \in V.$$

Kehtivad <u>distributiivsused</u>:

5) Iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral

$$k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}. \qquad \text{(VR5)}$$

6) Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$(k + l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR6)}$$

7) Reaalarvuga korrutamine on <u>assotsiatiivne</u>: iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a}). \qquad \text{(VR7)}$$

8) Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral

$$1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}. \qquad \text{(VR8)}$$

Edaspidi nimetame vektorruumi üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$ lühidalt vektorruumiks. Vektorruumi elemente nimetame vektoriteks, nullelementi nimetame nullvektoriks ja vastandelementi nimetame vastandvektoriks.

Vektorruumi definitsioonist saame teha järgmised järeldused.

Järeldus 1. Vektorruumis on ainult üks nullvektor.

Tõestus. Vektorruumi aksioom VR2 tagab, et vektorruumis on olemas nullvektor $\boldsymbol{\theta} \in V$. Oletame, et nullvektoreid on rohkem, kui üks. Olgu teiseks nullvektoriks $\boldsymbol{\theta_1} \in V$, siis VR2 kohaselt saame, et iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtivad seosed:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\theta_1} = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{\theta_1} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}.$$

Kuna vektor $\boldsymbol{a}$ on suvaline vektor vektorruumist, siis võime selleks vektoriks võtta ka nullvektorid: võtame teises seoses $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta_1}$ ja kolmandas seoses $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}$. Saame

$$\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta_1} = \boldsymbol{\theta_1}, \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta_1} = \boldsymbol{\theta}.$$

Kuna mõlema võrduse vasakud pooled on samad, järelikult peavad võrduma ka paremad pooled, mistõttu kaks nullvektorit on omavahel võrdsed. See näitab, et vektorruumis on ainult üks nullvektor. ■

Järeldus 2. Vektorruumis on igal vektoril ainult üks vastandvektor.

Tõestus. Vektorruumi aksioom VR3 tagab, et vektorruumis on olemas igal vektoril $\boldsymbol{a} \in V$ vastandvektor $-\boldsymbol{a} \in V$, nii et kehtivad $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta},\ -\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}$. Oletame, et vastandvektoreid on rohkem, kui üks: olgu vastandvektoriteks $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \in V$
VR3 kohaselt saame kirjutada, et iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ korral kehtib

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}).$$

Kasutame liitmise assotsiatiivsuse tingimust VR1 kõigile kolmele vektorile

$$(\boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_1} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a_2}),$$

seejärel VR2 tingimusest saame

$$\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{\theta}.$$

Saime, et $\boldsymbol{a_2} = \boldsymbol{a_1}$ ehk vastandvektorid on võrdsed. See näitab, et vektorruumis on ainult üks vastandvektor. ■

Definitsioon. Vektorite $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ **vaheks $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$** nimetatakse vektorit

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Vektorite lahutamisel kehtivad liitmisega analoogilised arvuga korrutamise distributiivsuse omadused.

Järeldus 3. Iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ korral kehtib

$$k(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{b}.$$

Järeldus 4. Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib

$$(k - l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} - l\boldsymbol{a}.$$

Järeldus 5. Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib:

$$0\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}.$$

Tõestus. Kirjutame $0 = k - k,\ \ k \in \mathbb{R}$. Siis järeldusest 4 ja VR3 saame

$$0\boldsymbol{a} = (k - k)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + (-k\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta}.$$

■

Järeldus 6. Iga $k \in \mathbb{R}$ korral kehtib:

$$k\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}.$$

Tõestus. Kirjutame $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} \in V$ (VR3). Siis järeldusest 3 ja VR3 saame

$$k\boldsymbol{\theta} = k(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}) = k\boldsymbol{a} - k\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + (-k\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta}.$$

■

Järeldus 7. Iga $\boldsymbol{a} \in V$ korral kehtib:

$$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}.$$

Olulisemad vektorruumid on geomeetrilised ja aritmeetilised. **Geomeetrilisteks vektorruumideks** on tasandi vabavektorite hulk $\mathbb{E}_2$ ja kolmemõõtmelise ruumi vabavektorite hulk $\mathbb{E}_3$. **Aritmeetilised vektorruumid** on hulgad $\mathbb{R}^n$, kus $n \in \mathbb{N}$, millel tehted on defineeritud komponenthaaval:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \coloneqq (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n),$$

$$k(a_1, \dots, a_n) \coloneqq (ka_1, \dots, ka_n),$$

kui $k, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Näide 1.1. Kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on arvude liitmise ja korrutamise suhtes vektorruum.

Näide 1.2. Kompleksarvude hulk $\mathbb{C}$ on vektorruum, kui liitmisena vaadelda kompleksarvude liitmist ning reaalarvu c ja kompleksarvu $a + bi$ korrutis defineeritakse kui

$$c(a + bi) \coloneqq ca + cbi.$$

Näide 1.3. Kõik $m \times n$ maatriksid $\mathrm{Mat}_{m,n}$ on maatriksite liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes vektorruumid ($m, n \in \mathbb{N}$). Vektorruum $\mathbb{R}^n$ on sisuliselt sama, mis $\mathrm{Mat}_{1,n}$.

1.2. VEKTORRUUMI ALAMRUUM. LINEAARKATE

Olgu U vektorruumi V mittetühi alamhulk.

Definitsioon 1.2.

Vektorruumi alamruumiks nimetatakse vektorruumi V mittetühja alamhulka U, kui U on vektorruumi V tehete (liitmise ja arvuga korrutamise) suhtes vektorruum üle reaalarvude hulga $\mathbb{R}$.

Liitmine ja arvuga korrutamine vektorruumis V on teheteks tema mittetühjal alamhulgal U, kui

1) iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ korral kehtib

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U. \tag{1.1}$$

2) iga $k \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a} \in U$ korral kehtib

$$k\boldsymbol{a} \in U. \tag{1.2}$$

Kuna alamruum $U \subset V$, siis saame mittetühja alamhulga U vektoreid liita ja arvuga korrutada.

Teoreem 1.1.

Vektorruumi V mittetühi alamhulk U on tema alamruum siis ja ainult siis, kui vektorruumi V tehted on alamhulga U teheteks.

Tingimused (1.1) ja (1.2) on samaväärsed järgmise tingimusega:

3) Iga $k, l \in \mathbb{R}$ ja iga $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ korral kehtib $k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{b} \in U$. (1.3)

Näide 1.4. Vektorruum on iseenda alamruum, sest $V \subset V$ ja $V \neq \emptyset$ ning alamhulk V on vektorruumi V tehete suhtes vektorruum.

Näide 1.5. Vektorruumi nullvektorist koosnev alamhulk $\{\boldsymbol{\theta}\}$ on tema alamruum, sest mistahes kahe arvu $k, l \in \mathbb{R}$ ja mistahes kahe vektori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\theta}$ korral vaadeldavast alamhulgast kehtib tingimus (1.3), sest

$$k\boldsymbol{\theta} + l\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}.$$

Neid kahte alamruumi nimetatakse **triviaalseteks alamruumideks.** Vektorruumi $\{\boldsymbol{\theta}\}$ nimetatakse **triviaalseks vektorruumiks.**

Näide 1.6. Kui vektor $\boldsymbol{a} \in V$, siis hulk $\{k\boldsymbol{a}, k \in \mathbb{R}\}$ on vektorruumi V alamruum.

Kuna nullvektor sisaldub igas vektorruumi V alamruumis, siis ei ole vektorruumi kõigi alamruumide ühisosa tühi.

Näide 1.7. Hulk $U = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}$ on alamruum vektorruumis $\mathbb{R}^3$.

Näide 1.8. Fikseeritud sirgetega paralleelsete vabavektorite hulk on alamruum tasandi vabavektorite vektorruumis $\mathbb{E}_2$.

Lause 1.1. Vektorruumi iga alamruum sisaldab nullvektorit.

Lause 1.2. Vektorruumi V iga alamruum on ise ka vektorruum tehete suhtes, mis on defineeritud samamoodi nagu vektorruumi V tehted.

Teoreem 1.2.
Vektorruumi V mistahes kahe alamruumi U_1 ja U_2 ühisosa $U_1 \cap U_2$ on samuti vektorruumi alamruum.
Olgu $a_1, a_2, \dots, a_m$ vektorruumi V elemendid ja $m \in \mathbb{N}$. Mistahes avaldist

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ \dots + k_m a_m,$$

kus $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{R}$, aga ka selle avaldise poolt määratud V elementi, nimetatakse vektorite $a_1, \dots, a_m$ **lineaarseks kombinatsiooniks**. Skalaare $k_1, \dots, k_m$ nimetatakse selle lineaarkombinatsiooni **kordajateks**.

Definitsioon 1.3.

Vektorruumi V alamhulka, mis koosneb vektorite $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}$ kõigist lineaar-kombinatsioonidest, nimetatakse vektorite $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}$ **lineaarkatteks** ehk **lineaarseks katteks** ja tähistatakse $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m})$ (või $\mathrm{span}(a_1, a_2, \dots, a_m)$). Seega

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m}) = \{k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \ \dots + k_m\boldsymbol{a_m},\ k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{R}\}.$$

Teoreem 1.3.
Vektorite $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_m} \in V$ lineaarkate on vähim alamruum, mis neid vektoreid sisaldab.

Näide 1.9. Vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorite $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$ ja $\boldsymbol{v} = (0,0,1)$ lineaarkate on alamruum

$$L(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \{(k, 0, l), k, l \in \mathbb{R}\}.$$

Lineaarkatte moodustamine annab ühe viisi alamruumi konstrueerimiseks.

1.3. VEKTORITE SÜSTEEMI LINEAARNE SÕLTUVUS JA SÕLTUMATUS

Võtame vektorruumist teatava arvu vektoreid, näiteks n vektorit ($n \in \mathbb{N}$). Ühte ja sama vektorit võib võtta mitu korda, tähtis on vektorite järjestus.

Vektorite süsteem on vektorite $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n} \in V$ komplekt $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$, kus on fikseeritud elementide järjekord.
Eeldame, et vektorite süsteem ei ole tühi. Kõige lühem vektorite süsteem koosneb ühest vektorist.

Definitsioon 1.4.

Vektorruumi V vektorite süsteemi $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2} \dots, \boldsymbol{a_n}$ nimetatakse **lineaarselt sõltumatuks**, kui mistahes $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ korral võrdusest

$$k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \dots + k_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{\theta} \tag{1.4}$$

järeldub, et

$$k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0. \tag{1.5}$$

Vektorite süsteemi nimetatakse **lineaarselt sõltuvaks**, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Lineaarkombinatsiooni nimetatakse triviaalseks, kui kõik tema kordajad on nullid. Kui vähemalt üks kordaja on nullist erinev, siis öeldakse, et see lineaarkombinatsioon on mittetriviaalne.

Teoreem 1.4.
Ühest vektorist $\boldsymbol{a}$ koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis, kui vektor $\boldsymbol{a}$ on nullvektor: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}$.

Järeldus. Ühest vektorist $\boldsymbol{a}$ koosnev vektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui vektor $\boldsymbol{a}$ ei ole nullvektor: $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{\theta}$. Kui süsteem koosneb ühest vektorist, mis ei ole nullvektor, siis see süsteem on lineaarselt sõltumatu, sest võrdus $k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\theta}$ kehtib vaid juhul, kui $k = 0$.

Kui üks vektoritest, näiteks $\boldsymbol{a_1}$ on nullvektor, siis süsteem $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ on lineaarselt sõltuv, sest (1.4) kehtib juhul, kui võtta

$$k_1 = 1, k_2 = \dots = k_n = 0.$$

Kui osa vektoritest $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_m}, m < n$ on lineaarselt sõltuvad, siis on ka kogu süsteem lineaarselt sõltuv, sest kehtib võrdus

$$k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \dots + k_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{\theta}.$$

Võrduse (1.4) saame, kui võtame

$$k_{m+1} = \dots = k_n = 0.$$

Teoreem 1.5.

Nullist erinevate vektorite süsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on **lineaarselt sõltuv siis ja ainult siis**, kui selles süsteemis leidub vähemalt **üks vektor, mis avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina**.

Tõestus. Tarvilikkus.
Olgu vektorite süsteem $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$, kus $n \geq 2$, lineaarselt sõltuv. Siis leiduvad $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$, mis ei ole kõik nullid, nii et kehtib $k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \dots + k_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{\theta}$. Olgu $k_n \neq 0$, siis leidub tal pöördelement $k_n^{-1} \in \mathbb{R}$. Saame avaldada

$$\boldsymbol{a_n} = -\frac{k_1}{k_n}\boldsymbol{a_1} - \frac{k_2}{k_n}\boldsymbol{a_2} - \dots - \frac{k_{n-1}}{k_n}\boldsymbol{a_{n-1}}.$$

See tähendab, et vektor $\boldsymbol{a_n}$ avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina.

Piisavus.
Oletame, et vektor $\boldsymbol{a_n}$ avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina

$$\boldsymbol{a_n} = k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \dots + k_{n-1}\boldsymbol{a_{n-1}}.$$

Kirjutame võrduse teisiti

$$k_1\boldsymbol{a_1} + k_2\boldsymbol{a_2} + \dots + k_{n-1}\boldsymbol{a_{n-1}} + (-1)\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{\theta}.$$

Siis on täidetud võrdus (1.4), kusjuures kordaja $k_n \neq 0$, mis tähendab, et vektorite süsteem $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ on lineaarselt sõltuv. ■

Järeldus.

Vektorite süsteem, milles on vähemalt kaks vektorit, on lineaarselt sõltumatu siis ja ainult siis, kui selles süsteemis ükski vektor ei avaldu ülejäänud vektorite lineaarkombinatsiooni kaudu.

Definitsioon 1.5.
Vektorite süsteemi $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ alamsüsteemiks nimetatakse vektorite süsteemi $\boldsymbol{a_{i_1}}, \dots, \boldsymbol{a_{i_k}}$, kui arvud $k, i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ on võetud selliselt, et $i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Teoreem 1.6.
Vektorite süsteem, millel on lineaarselt sõltuv alamsüsteem, on lineaarselt sõltuv.

Järeldused:
1. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi kõik alamsüsteemid on lineaarselt sõltumatud.
2. Vektorite süsteem, mis sisaldab nullelementi, on lineaarselt sõltuv.
3. Lineaarselt sõltumatu vektorite süsteem ei sisalda nullelementi.

Näide 1.10. Olgu V vektorruum. Kas kehtib järgmine väide: kui $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis ka $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a}$ on lineaarselt sõltumatud?

Oletame, et

$$k(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) + l(\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}) + m(\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\theta},$$

kus k, l, m on mingisugused reaalarvud. Kasutades vektorruumi aksioome, saame

$$(k + 2m)\boldsymbol{a} + (2k + l)\boldsymbol{b} + (2l + m)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\theta}.$$

Kuna vektorid $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ on lineaarselt sõltumatud, siis sellest võrdusest järeldub, et lineaarkombinatsiooni kõik kordajad on võrdsed nulliga:

$$k + 2m = 2k + l = 2l + m = 0.$$

Järelikult

$$4m - l = 0 = 2l + m,$$

saame

$$m = l = k = 0.$$

Oleme näidanud, et lineaarkombinatsioon

$$k(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) + l(\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}) + m(\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a})$$

on triviaalne, mis tähendab, et vektorid $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}$ ja $\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{a}$ on lineaarselt sõltumatud.

Näide 1.11. Näitame vektorite süsteemi $2x + 1, x - 2$ lineaarselt sõltumatust.

Oletame, et

$$k(2x + 1) + l(x - 2) = 0.$$

Võrdus peab kehtima kõigi argumendi x väärtuste korral. Seega iga $x_0 \in \mathbb{R}$ korral

$$k(2x_0 + 1) + l(x_0 - 2) = 0$$

ehk

$$(2k + l)x_0 + k - 2l = 0.$$

Võttes $x_0 = 0$, saame $k = 2l$. Võttes $x_0 = 2$, saame $5k = 0$. Seega $k = l = 0$ ja süsteem on lineaarselt sõltumatu.

Definitsioon 1.6.

Vektorruumi V vektorite süsteemi M nimetatakse **moodustajate süsteemiks** ehk tekitajate süsteemiks, kui vektorruumi V iga vektor avaldub süsteemi M kuuluvate vektorite lineaarkombinatsioonina.

Enamasti on vektorruumil palju moodustajate süsteeme, mõned neist suuremad, mõned väiksemad. Eriti kasulikud on moodustajate süsteemid, mille kaudu iga vektori saab avaldada täpselt ühel viisil.

Iga vektorruum on iseenda moodustajate süsteem, sest $V = 1V$. Et iga vektorruum sisaldab nullvektorit, siis moodustajate süsteemid võivad olla lineaarselt sõltuvad. Vastavalt definitsioonidele võime öelda, et süsteem $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}$ on vektorruumi $\boldsymbol{V}$ **moodustajate süsteem parajasti siis**, kui V on selle süsteemi lineaarne kate:

$$V = L(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}).$$

Lemma 1.1.

Olgu $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}$ vektorruumi V moodustajate süsteem. Kui selle süsteemi mingi vektor avaldub ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis selle vektori väljajätmisel süstemist $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_s}$ saame jällegi vektorruumi V moodustajate süsteemi.

Kuna süsteem $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ on lineaarse katte $L(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n})$ moodustajate süsteem, siis saame lemmast 1.1 teha järgmise järelduse.

Järeldus.

Kui vektor $\boldsymbol{a_i}$, kus $i \in 1, 2, \dots, n$, avaldub süsteemi $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}$ ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina, siis

$$L(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}) = L(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_{i-1}}, \boldsymbol{a_{i+1}}, \dots, \boldsymbol{a_n}).$$

Näiteks $L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ mistahes vektorite $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ korral.
Kui on teada, et $\boldsymbol{a_3} = \boldsymbol{a_1} + \boldsymbol{a_2}$, siis $L(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}) = L(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2})$.

1.4. VEKTORRUUMI BAAS. VEKTORI KOORDINAADID

Definitsioon 1.7.

Vektorruumi V **baasiks** $\mathbf{e} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ nimetatakse selle vektorruumi lineaarselt sõltumatut moodustajate süsteemi.

Teoreem 1.7.
Vektorruumi kõikides baasides on samapalju elemente.

Vektorruumi mõõtmeks ehk **dimensiooniks** nimetatakse elementide arvu vektorruumi baasis.

Ainult nullvektorist koosneva vektorruumi mõõtmeks loetakse arv 0. Selles vektorruumis ei ole baasi, sest ei ole lineaarselt sõltumatuid vektorite süsteeme.
Vektorruumi V mõõdet tähistatakse $\mathbf{dim}(\boldsymbol{V})$.
Vektorruumi V igas moodustajate süsteemis on vähemalt $\dim(V)$ vektorit.

Lause 1.3.

n-mõõtmelises vektorruumis on iga n lineaarselt sõltumatust vektorist koosnev süsteem baas.

Näide 1.12. Leiame vektorruumi $\mathbb{R}^2$ kolm erinevat baasi.

Kuna vektorruumi $\mathbb{R}^2$ mõõde on 2, siis selle vektorruumi mistahes baasi kuulub kaks vektorit, mis on lineaarselt sõltumatud. Vektorruumi üheks baasiks on vektorite süsteem $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$, kus

$$\boldsymbol{e_1} = (1{,}0), \boldsymbol{e_2} = (0{,}1).$$

Teiseks baasiks on vektorite süsteem $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$, kus $\boldsymbol{a_1} = (1{,}1), \boldsymbol{a_2} = (0{,}1)$.
Kolmandaks baasiks on vektorite süsteem $\{\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}\}$, kus $\boldsymbol{d_1} = (0{,}1), \boldsymbol{d_2} = (2{,}3)$.
Viimane vektorite süsteem on lineaarselt sõltumatu, kuna lineaarse kombinatsiooni

$$k\boldsymbol{d_1} + l\boldsymbol{d_2} = (0, k) + (2l, 3l) = (2l, k + 3l)$$

võrdumisest nullvektoriga saame avaldada kordajad k ja l

$$(2l, k + 3l) = (0{,}0),$$

siis $l = 0$ ja $k + 3l = 0$ ehk $k = 0$. Seega süsteem $\{\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}\}$ on lineaarselt sõltumatu ja vastavalt lausele 1.3 võime öelda, et süsteem on vektorruumi $\mathbb{R}^2$ baas.

Näide 1.13. Tõestame, et hulk $U = \{(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) \mid u_1, u_2, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum ning leidke selle alamruumi baas ja mõõde.

Näitame, et hulk U on vektorruumi $\mathbb{R}^n$ alamruum. Kuna kehtivad

$$(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) + (v_1, v_2, .., v_{n-1}, v_1) = (u_1 + v_1, \dots, u_{n-1} + v_{n-1}, u_1 + v_1) \in U,$$

$$k(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) = (ku_1, ku_2, .., ku_{n-1}, ku_1) \in U,$$

siis U on kinnine liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes. Seega U on alamruum. Alamruumi U vektorite süsteem

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e_1} = (1,0,0, \dots ,0,1),\\ \boldsymbol{e_2} = (0,1,0, \dots ,0,0),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \boldsymbol{e_{n-1}} = (0,0,0, \dots ,1,0).\end{gathered}$$

on lineaarselt sõltumatu, sest ükski vektor ei avaldu ülejäänute lineaarkombinatsioonina. Ta on ka moodustajate süsteem, sest alamruumi U iga vektor $(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) \in U$ avaldub kujul

$$(u_1, u_2, .., u_{n-1}, u_1) = u_1\boldsymbol{e_1} + u_2\boldsymbol{e_2} + \dots + u_{n-1}\boldsymbol{e_{n-1}}.$$

Järelikult $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_{n-1}}$ on alamruumi U baas. Kuna vektorruumi mõõde on tema baasivektorite arv, siis $\dim U = n - 1$.

Kui vektorruum V on n-mõõtmeline, siis vektorruumi baasiks on $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ ja baasi definitsiooni kohaselt avaldub vektor $\boldsymbol{a} \in V$ reaalarvude $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

Definitsioon 1.8.

Vektori $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ **koordinaatideks baasi** $\boldsymbol{e} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ **suhtes** nimetatakse skalaare $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ avaldises $\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}$.

Vektori koordinaadid igal baasil määratakse üheselt. Vektorite liitmisel, lahutamisel ja arvuga korrutamisel tuleb vektorite koordinaadid vastavalt liita, lahutada ja arvuga korrutada.

Näide 1.14. Leiame vektorruumi $\mathbb{R}^4$ vektori $\boldsymbol{a} = (2,3,3,-2)$ koordinaadid baasi $\boldsymbol{e_1} = (0,0,1,-1), \boldsymbol{e_2} = (0,1,1,1), \boldsymbol{e_3} = (1,-1,0,-1)$ ja $\boldsymbol{e_4} = (1,1,0,0)$ suhtes.

Vektori $\boldsymbol{a}$ koordinaadid (x_1, x_2, x_3, x_4) saame seosest

$$(2,3,3,-2) = x_1(0,0,1,-1) + x_2(0,1,1,1) + x_3(1,-1,0,-1) + x_4(1,1,0,0).$$

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}.$$

Süsteemi lahendamisel saame vektori koordinaadid

$$x_1 = \frac{8}{3}, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = -\frac{1}{3}, x_4 = \frac{7}{3}.$$

Olgu vektorruumi V kaks erinevat baasi $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ (vana baas) ja $\{\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \dots, \boldsymbol{e'_n}\}$ (uus baas) ning kuulugu vektor $\boldsymbol{a}$ vektorruumi V $(\boldsymbol{a} \in V)$. Avaldugu vektor $\boldsymbol{a}$ uue baasi kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{a} = x'_1\boldsymbol{e'_1} + x'_2\boldsymbol{e'_2} + \dots + x'_n\boldsymbol{e'_n}.$$

Uue baasi elemendid avaldugu vana baasi kaudu järgmiselt

$$\begin{cases} \boldsymbol{e'_1} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ \boldsymbol{e'_2} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{e'_n} = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Leiame vektori $\boldsymbol{a}$ koordinaadid eelneva seose abil vana baasi kaudu

$$\boldsymbol{a} = x_1'\boldsymbol{e}_1' + x_2'\boldsymbol{e}_2' + \ ... + x_n'\boldsymbol{e}_n' =$$
$$= x_1'(a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + x_2'(a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ ...$$
$$+ x_n'(a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + a_{nn}\boldsymbol{e}_n).$$

Võtame kokku liikmed vana baasi kaudu

$$\boldsymbol{a} = (x_1'a_{11}\boldsymbol{e}_1 + x_1'a_{21}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + x_1'a_{n1}\boldsymbol{e}_n) + (x_2'a_{12}\boldsymbol{e}_1 + x_2'a_{22}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + x_2'a_{n2}\boldsymbol{e}_n) + \ ...$$
$$+ (x_n'a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + x_n'a_{2n}\boldsymbol{e}_2 + \ ... + x_n'a_{nn}\boldsymbol{e}_n) = (x_1'a_{11} + x_2'a_{12} + \ ... + x_n'a_{1n})\boldsymbol{e}_1$$
$$+(x_1'a_{21} + x_2'a_{22} + \ ... + x_n'a_{2n})\boldsymbol{e}_2 + \ ... + (x_1'a_{n1} + x_2'a_{n2} + \ ... + x_n'a_{nn})\boldsymbol{e}_n.$$

Saime koordinaatide teisenemise valemid üleminekul ühest baasist teise

$$\begin{gathered} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ ... + a_{1n}x_n', \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ ... + a_{2n}x_n', \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ ... + a_{nn}x_n'. \end{gathered}$$

Antud seost on võimalik esitada maatrikskujul järgmiselt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Tähistame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit ***A*** nimetatakse **baasiteisenduse maatriksiks** üleminekul vanalt baasilt uuele baasile.
Baasiteisenduse maatriks on regulaarne, see tähendab, et $|A| \neq 0$.
Saame **üleminekuvalemid** kirjutada lühemal kujul

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

II PTK READ

2.1. ARVREAD, REA SUMMA

Definitsioon 2.1.

Arvreaks (lühemalt reaks) nimetatakse **lõpmatut summat**

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots . \qquad (2.1)$$

Rea liikmeteks nimetatakse arve $u_0, u_1, \ldots . u_n, \ldots$.

Rea (2.1) osasummad moodustame järgmiselt:

$$S_0 = u_0,$$

$$S_1 = u_0 + u_1,$$

$$\ldots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Rea osasummade jadaks nimetatakse jada (S_n), kus

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Definitsioon 2.2.

Rea summaks nimetatakse lõplikku piirväärtust (kui see eksisteerib)

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

ning sel juhul kirjutatakse

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Aritmeetilised read. Vaatleme rida, mille liikmed on aritmeetilise jada liikmed. Aritmeetilise jada $a_n = a_1 + d(n-1)$ esimese n liikme summa S_n avaldub

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (a_1 + (k-1)d) = a_1 + (a_1 + d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d).$$

Kirjutame rea liikmete summa vastupidises järjekorras

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \ldots + a_1.$$

Liites kokku mõlemad avaldised, saame

$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \ldots + (2a_1 + (n-1)d) =$$
$$= n(2a_1 + (n-1)d),$$

millest

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d).$$

Esimese n naturaalarvu summa saame, kui $a_1 = d = 1$, siis

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Geomeetrilised read.

Geomeetrilise jada üldliige on $a_n = a_1 q^{n-1}$ ja esimese n liikme summa S_n avaldub

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_1 q^k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Korrutame saadud summa arvuga q:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^n.$$

Lahutades kaks eelnevat avaldist, saame

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n = a_1(1 - q^n),$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n), \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Kui $a_1 = 1$, siis

$$\frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

Geomeetriliseks reaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{q^k = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots}.$$

Harmoonilised read.

Harmooniliseks reaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots},$$

kus $\boldsymbol{\alpha > 0}$.

Kui $\alpha = 1$, siis saame harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots .$$

Selle rea osasumma S_n on

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Näide 2.1. Leiame järgmise rea osasummade jada ja summa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\,(k+2)}.$$

Lahutame kõigepealt murru osamurdude summaks

$$\frac{2}{k\,(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}.$$

Määrame kordajad A ja B võrdusest

$$2 = A\,(k+2) + Bk.$$

Vabaliikmete võrdumine annab $2A = 2$ ehk $A = 1$, seejärel k kordajate võrdumine on $A + B = 0$, millest $B = -1$. Niisiis,

$$\frac{2}{k\,(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}.$$

Leiame osasumma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Koondame liikmed ja saame

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Rea summa saamiseks arvutame piirväärtuse

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}.$$

2.2. ARVRIDADE KOONDUVUS JA HAJUVUS

Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

koondub summaks S, kui eksisteerib **lõplik piirväärtus** $\lim_{n\to\infty} S_n$, ehk kui rea osasummade jada (S_n) koondub summaks S.

Rida (2.1) hajub, kui rea osasummade jada (S_n) ei koondu ehk kui piirväärtust **ei eksisteeri** või kui piirväärtus on lõpmatu.
Kui **rida koondub**, siis sümboliga

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

tähistatakse ka tema summat.

Lause 2.1.

Tarvilik tingimus rea koonduvuseks (arvrea hajumise tunnus).
Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ **koondub**, siis tema üldliige läheneb nullile:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0. \tag{2.2}$$

Tõestus.
Kui rida koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Samuti kehtib

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Kuna kehtib võrdus

$$u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n - u_0 - u_1 - \ldots - u_{n-1} = S_n - S_{n-1},$$

siis võttes mõlemast võrduse poolest piirväärtuse, saame

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

▪

Tarviliku tingimuse kehtimine ei ole piisav rea koondumise üle otsustamiseks. Kui **tingimus ei ole täidetud, s.t kui ei kehti**

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0,$$

siis võib kindlalt öelda, et rida hajub. Seetõttu nimetatakse tarvilikku tingimust ka **arvrea hajumise tunnuseks**.

Näide 2.2. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k.$$

Näeme kohe, et selles reas

$$u_k = (-1)^k,$$

s.t $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ ei kehti, mistõttu rida ei koondu. Võib veel leida

$$S_1 = -1, \qquad S_2 = S_1 + 1 = 0, \qquad S_3 = S_2 - 1 = -1, \ldots,$$

ehk osasummade jada $-1, 0, -1, 0, \ldots$ ei koondu.

Näide 2.3. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1.$$

Selles reas $u_k = 1$ ning $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$ ei ole täidetud ja sellepärast rida ei koondu. Osasummade jada tuleb

$$S_1 = 1, S_2 = S_1 + 1 = 2, \dots, S_n = S_{n-1} + 1 = n, \dots,$$

millel ei ole lõplikku piirväärtust.
Esitame rea (2.1) summana

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{2.3}$$

Rea (2.1) **jääkliikmeks** nimetatakse rida

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \boldsymbol{u_k}. \tag{2.4}$$

Rea summa *S* võime kirjutada

$$\boldsymbol{S = S_n + R_n},$$

kus R_n on rea (2.4) summa.
Koonduva rea (2.1) korral on rea jääkliige samuti koonduv rida ja tema summa R_n on lõpmata väike suurus piirprotsessis $n \to \infty$ ehk

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} R_n = 0}.$$

Tehted koonduvate ridadega.

1. Kui reas (2.1) **lisada või ära jätta** lõplik arv liikmeid, siis see **ei mõjuta rea koonduvust**. Koonduv rida jääb koonduvaks ning hajuv rida jääb hajuvaks.
2. Kui rida (2.1) koondub, siis koondub ka rida $\sum cu_k$, kus c on reaalarv, seejuures kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty} cu_k = c\sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

3. Kui **kaks rida** $\sum u_k$ ja $\sum v_k$ **koonduvad**, siis koonduvad ka read, mis on moodustatud nende ridade **summast** $\sum(u_k + v_k)$ ja **vahest** $\sum(u_k - v_k)$ ning kehtib võrdus

$$\sum_{k=0}^{\infty}(u_k \pm v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} v_k.$$

Näide 2.4. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+5}.$$

Kontrollime koonduvuse tarvilikku tingimust (2.2), selleks leiame piirväärtuse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 1.$$

Tarvilik tingimus koondumiseks ei ole täidetud, seega saame öelda, et antud rida hajub.

Lause 2.2.

Geomeetriline rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

koondub siis ja ainult siis, kui $|q| < 1$. Geomeetrilise rea summa avaldub sel juhul

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Tõestus. Kasutades võrdust

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) = 1 - q^{n+1},$$

saame

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

suvalise $n \in \mathbb{N}_0$ ja $q \neq 1$ korral. Kui $|q| < 1$, siis $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$, mistõttu

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q}.$$

Seega juhul $|q| < 1$ koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ summaks

$$S = \frac{1}{1-q}.$$

Kui $|q| \geq 1$, siis ei ole tarvilik tingimus koondumiseks täidetud, ehk ei kehti $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Sellest järeldub, et sel juhul geomeetriline rida hajub.

▪

Lause 2.3.

Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

hajub.

Harmoonilise rea üldliige on $u_k = 1/k$ ja koondumise tarvilik tingimus (2.2) on täidetud, sest

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Järeldus.

Tarvilik tingimus $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ ei ole piisav rea koondumiseks.

Lause 2.4.

Harmooniline rida

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots$$

koondub parajasti siis, kui $a > 1$.

Järelikult harmooniline rida **hajub**, kui $a \leq 1$.
Lausete 2.3 ja 2.4 tõestused esitame hiljem.

2.3. POSITIIVSED JA VAHELDUVATE MÄRKIDEGA ARVREAD

Definitsioon 2.3.

Positiivseks arvreaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}\,, \text{kus } \boldsymbol{u_k \geq 0} \text{ iga } k = 0,1,\dots \text{ korral.} \tag{2.5}$$

Lause 2.5.
Positiivne arvrida (2.5) **koondub** siis ja ainult siis, kui tema osasummade jada on tõkestatud, ehk kui leidub arv $M > 0$, nii et

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{u_k} \leq \boldsymbol{M} \text{ iga } n = 0,1,\dots \text{ korral.} \tag{2.6}$$

Positiivsete ridade korral võib väita, et on kaks teineteist välistavat võimalust:
1) kui

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k < \infty,$$

siis rida koondub;
2) kui

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

siis rida hajub.

Positiivsete arvridade võrdluslaused.

Lause 2.6.

Esimene võrdluslause. Olgu $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ sellised read, et

$$\boldsymbol{0 \leq u_k \leq v_k} \text{ iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

a. Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{v_k}$ **koondub**, siis koondub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.
b. Kui rida $\sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{u_k}$ **hajub**, siis hajub ka rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$.

Järeldus. Lause 2.6 väited a ja b kehtivad, kui leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$0 \leq u_k \leq v_k \text{ iga } k \geq n \text{ korral.}$$

Lause 2.7.

Teine võrdluslause. Eeldame, et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ on positiivsete liikmetega read ning eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = L \neq 0.$$

Sel juhul rida $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ koondub parajasti siis, kui koondub rida $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

Kui piirväärtus u_k ja v_k jagatisest on võrdne arvuga 1 ehk

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=1,$$

siis tähistame seda $u_k \sim v_k$.

Näide 2.5. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Kuna $2k-1=k+(k-1)\geq k$, siis

$$\frac{1}{2k-1}\leq\frac{1}{k}$$

ning

$$\frac{1}{(2k-1)^2}\leq\frac{1}{k^2}$$

iga $k\in\mathbb{N}$ puhul. Olgu

$$u_k=\frac{1}{(2k-1)^2}, v_k=\frac{1}{k^2}.$$

Harmooniline rida $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ koondub lause 2.4 põhjal ja võrdluslause 2.6 a kohaselt koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$, järelikult on tegemist koonduva reaga.

Näide 2.6. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{1+3^k}.$$

Rea üldliikme kohta kehtib hinnang

$$\frac{2^k}{1+3^k}<\frac{2^k}{3^k}=\left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Saime võrdluse geomeetrilise reaga, milles $q=2/3$. Kuna $q<1$, siis see geomeetriline rida koondub ja esimese võrdluslause (lause 2.6 a) põhjal võime järeldada, et ka uuritav rida koondub.

Näide 2.7. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}.$$

Kui $n\to\infty$, siis rea üldliikme kohta võib $n\geq 1$ korral kirjutada

$$\frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}}\sim\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{n}.$$

Kuna harmooniline rida hajub, kui $a=1$, siis teise võrdluslause (lause 2.7) põhjal hajub ka antud rida.

2.3.1. POSITIIVSETE RIDADE KOONDUVUSTUNNUSED

Vaatame kolme põhilist koonduvustunnust positiivse arvrea

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k\,, u_k \geq 0, \tag{2.5}$$

jaoks.

D'Alembert'i koonduvustunnus. Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} \begin{cases} < 1, \text{siis rida } (2.5) \text{ koondub}, \\ > 1, \text{siis rida } (2.5) \text{ hajub}, \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus. Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} \begin{cases} < 1, \text{siis rida } (2.5) \text{ koondub}, \\ > 1, \text{siis rida } (2.5) \text{ hajub}, \\ = 1, \text{siis ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Cauchy tunnus on tugevam kui d'Alembert'i tunnus. Kui d'Alembert'i tunnus võimaldab otsustada rea koonduvust või hajuvust, siis võimaldab seda ka Cauchy tunnus, kuid mitte vastupidi. Rea koonduvuse uurimist alustatakse tavaliselt nõrgemate koonduvustunnuste rakendamisega, sest nad on lihtsamad. Tugevamaid tunnuseid kasutatakse siis, kui nõrgemad tunnused ei anna vastust.

Integraaltunnus. Olgu funktsioon f pidev ning monotoonselt kahanev piirkonnas $[0,\infty)$ ja olgu $u_k = f(k)$. Positiivsete liikmetega rida (2.5) koondub siis ja ainult siis, kui päratu integraal

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

koondub, kusjuures tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx.$$

Näide 2.8. Uurime järgmise rea koonduvust olenevalt parameetri $a > 0$ väärtustest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n.$$

Kasutades **Cauchy tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1+\frac{1}{n}} = a.$$

Rida koondub, kui $a < 1$, ja hajub, kui $a > 1$. Kui $a = 1$, siis koondumise tarvilikust tingimusest saame

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{-1} = e^{-1} \neq 0.$$

Seega rida hajub ka $a = 1$ korral.

Näide 2.9. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}.$$

Kasutades **d'Alembert'i tunnust**, saame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)!}{n(2(n+1)+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)!}{n(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n(2n+3)(2n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n(2n+3)2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+3)} = 0 < 1.$$

Seega rida koondub.

Näide 2.10. Näitame, et harmooniline rida

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

koondub, kui $a > 1$, ja hajub, kui $a \leq 1$.

Harmoonilise rea korral $a > 0$. Kui $a < 0$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = \lim_{n\to\infty} n^{|a|} = \infty,$$

kui aga $a = 0$, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

mis tähendab, et mõlemal juhul ei ole täidetud rea koondumise tarvilik tingimus – üldliikme nulli koondumine. Niisiis, juhul $a \leq 0$ rida hajub.

Juhul $a > 0$ kasutame **integraaltunnust**, võttes funktsiooniks $f(x) = \frac{1}{x^a}$.

Kui $0 < a < 1$, siis $1 - a > 0$ ja

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{-a+1}}{-a+1}\Bigg|_{x=1}^{x=b} = \frac{1}{1-a} \lim_{b\to\infty} (b^{1-a} - 1) = \infty.$$

Kui aga $a = 1$, siis

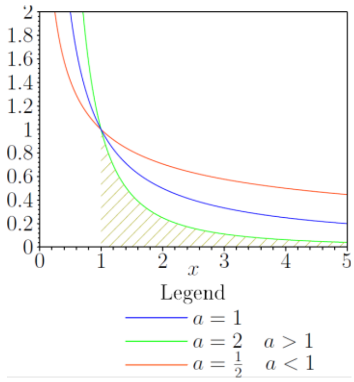
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x \Big|_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty.$$

Seega juhul $0 < a \leq 1$ harmooniline rida hajub.

Kui $a > 1$, siis $1 - a < 0$ ja

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-a}}{1-a}\Bigg|_{x=1}^{x=b} = \frac{1}{1-a} \lim_{b\to\infty} (b^{1-a} - 1) = \frac{1}{a-1},$$

mis tähendab, et harmooniline rida koondub juhul, kui $a > 1$.



2.3.2. VAHELDUVATE MÄRKIDEGA READ

Definitsioon 2.3. **Vahelduvate märkidega reaks** nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{, kus } a_k > 0. \tag{2.7}$$

Vahelduvate märkidega rea koonduvuse uurimiseks võib kasutada Leibnizi tunnust.

Leibnizi koonduvustunnus. Kui

$$\textbf{a)}\ \ a_0 \geq a_1 \geq \ \dots \geq a_n \geq \ \dots ,$$

(üldliikmete absoluutväärtuste jada on monotoonselt kahanev)

$$\textbf{b)}\ \ \lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

siis rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \text{, kus } a_k > 0$$

koondub ja tema jääkliikme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$$

jaoks kehtib hinnang:

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

Näide 2.11. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Rea üldliikme absoluutväärtus on

$$a_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

Kontrollime Leibnizi koonduvustunnuse tingimusi:

$$a_2 = \frac{1}{2 \ln 2} > a_3 = \frac{1}{3 \ln 3} > \ \dots > a_n = \frac{1}{n \ln n} > \ \dots ,$$

$$\lim a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Leibnizi tunnuse põhjal rida koondub ja tema jääkliikme jaoks kehtib hinnang

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln k} \right| \leq \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

2.4. ABSOLUUTSELT KOONDUVAD READ, NENDE KOONDUVUSTUNNUSED

Definitsioon 2.4.

Rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{2.1}$$

nimetatakse **absoluutselt koonduvaks**, kui rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k| \tag{2.8}$$

on koonduv.

Definitsioon 2.5.

Kui rida (2.1) koondub, aga ei koondu absoluutselt, siis sellist rida nimetatakse **tingimisi koonduvaks**.

Iga absoluutselt koonduv rida on koonduv. Kui koondub rida (2.8), siis sellest järeldub, et koondub ka rida (2.1). Rea absoluutse koondumise uurimiseks on kaks põhilist koonduvustunnust, mis tulenevad positiivsete ridade vastavatest tunnustest.

D'Alembert'i koonduvustunnus.
Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{koondub absoluutselt}, \\ > 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{hajub}, \\ = 1, \text{siis } \textbf{ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Cauchy koonduvustunnus.
Kui on olemas piirväärtus

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|u_k|} \begin{cases} < 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{koondub absoluutselt}, \\ > 1, \text{siis rida (2.1) } \textbf{hajub}, \\ = 1, \text{siis } \textbf{ei saa otsustada}. \end{cases}$$

Kui ei saa otsustada, siis see tähendab, et antud tunnus ei tööta uuritava rea jaoks ja on vaja kasutada mõnda teist tunnust, näiteks positiivsete arvridade võrdluslauseid.

Näide 2.12. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

Leibnizi tunnuse põhjal vahelduvate märkidega rida koondub (näide 2.11). Jääb üle uurida, kas rida koondub absoluutselt. Absoluutset koonduvust uurime **integraaltunnuse** abil, millest näeme, et rida hajub, sest vastava funktsiooni $f(x) = 1/(x \ln x)$ päratu integraal hajub:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty} (\ln \ln x)\Big|_2^b = \lim_{b\to\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty.$$

Kuna vaadeldav rida koondub, aga ei koondu absoluutselt, siis on tegemist tingimisi koonduva reaga.

Näide 2.13. Uurime järgmise rea koonduvust

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{5^n}.$$

Kasutame **d'Alembert'**i tunnust:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)2^{n+1}}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n2^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Järelikult rida koondub absoluutselt.

2.5. ASTMEREAD

Definitsioon 2.6.

Astmereaks nimetatakse rida

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots + a_n x^n + \ \dots\ . \tag{2.9}$$

Astmerea üldisem kuju on

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ \dots + a_n(x-c)^n + \ \dots, \tag{2.10}$$

kus $c \in \mathbb{R}$ on fikseeritud arv.
Astmerea kordajateks nimetatakse arve $a_0, a_1 \dots$,
rea üldliikmeks on $a_n x^n$ või $a_n(x-c)^n$.

Astmerea liikmeteks on funktsioonid $f_n(x) = a_n x^n$. Geomeetriline rida on astmerida kujul (2.9), kus $a_k = 1$ iga $k \in \mathbb{N}_0$ korral.
Astmerea üldisemalt kujult (2.10) saame muutujavahetusega $x - c = t$ üle minna reale (2.9) ja vastupidi.

Definitsioon 2.7. **Astmerea koonduvuspiirkonnaks** nimetatakse hulka

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \text{rida} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ \text{koondub} \right\}.$$

Definitsioon 2.8. **Astmerea absoluutse koonduvuse piirkonnaks** nimetatakse hulka

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \text{rida} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k||x|^k \ \text{koondub} \right\}.$$

On selge, et $A \subset C$.

Teoreem 2.1.
Iga astmerea (2.9) korral on olemas nn. **koonduvusraadius** $R \in [0, \infty]$ nii, et rida koondub absoluutselt, kui $|x| < R$, ja hajub, kui $|x| > R$ (eeldusel, et $R \neq \infty$). Kui $R = 0$, siis rida (2.9) koondub vaid punktis $x = 0$.
Tõestus.
1) Kui rida (2.9) koondub ainult $x = 0$ korral, siis määrame arvu $R = 0$.
2) Oletame, et rida (2.9) koondub mingi $x_0 \neq 0$ korral, s.t koondub rida

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ \dots \ + a_n x_0^n + \ \dots\ . \tag{2.11}$$

Siis rea üldliige koondub nulliks, olles seega liikmeti tõkestatud. Seepärast on olemas arv $M > 0$ nii, et $|a_n x_0^n| \leq M$ iga n korral. Näitame, et siis rida (2.9) koondub absoluutselt iga x korral, kus $|x| < |x_0|$. Kirjutame rea (2.9) kujul

$$a_0 + a_1 x_0 \frac{x}{x_0} + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ \dots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ \dots\ . \tag{2.12}$$

Moodustame selle rea liikmete absoluutväärtuste rea

$$|a_0| + |a_1 x_0| \left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 x_0^2| \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n\, x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots\ . \tag{2.13}$$

Rida (2.13) on liikmeti hinnatav ülalt reaga

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots\ . \tag{2.14}$$

mis on koonduv kui geomeetriline rida (täpsemalt, geomeetriline rida kordaja M täpsuseni), sest $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Seepärast koondub rida (2.13) ja rida (2.12) ehk rida (2.9) punktis x koondub absoluutselt.

3) Kui rida (2.9) hajub mingi x_0 korral, siis hajub ta iga x korral, kus $|x| > |x_0|$. See väide järeldub osast 2), sest kui (2.9) koonduks vaadeldavas punktis x, siis ta koonduks (absoluutselt) x_0 korral, mis oleks vastuolu.

4) Kui rida (2.9) koondub igas punktis $x \in \mathbb{R}$, siis määrame $R = \infty$.

5) Tõestuse lõpetamiseks tuleb siis, kui ei ole tegemist juhuga 1) või 4), võtta

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \text{rida koondub } x \text{ korral}\},$$

kus tähistus $\sup X$ on hulga ülemine raja ehk supreemum, mis on selle hulga vähim ülemine tõke. Tõestuse osade 2) ja 3) põhjal võib öelda, et siis $R \in (0, \infty)$, iga $x \in (-R, R)$ korral rida (2.9) koondub absoluutselt ja $x \notin [-R, R]$ korral rida (2.9) hajub. ■

Definitsioon 2.9.

Eeldusel $R > 0$ nimetatakse **vahemikku $(-R, R)$ rea (2.9) koonduvusvahemikuks**. Rea (2.10) korral on vastav koonduvusvahemik $(c - R, c + R)$.

Koonduvusvahemiku **otspunktides** (kui $R \neq \infty$) võib astmerida koonduda kas tingimisi või absoluutselt, kuid võib ka hajuda.

Koonduvusraadiuse leidmiseks kasutatakse järgmisi piirväärtusi eeldusel, et $a_k \neq 0$ alates mingist kohast (s.t on olemas $k_0 \in \mathbb{N}$ nii, et $a_k \neq 0$ iga $k \geq k_0$ korral) ja piirväärtused eksisteerivad:

$$\boldsymbol{R = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|}, \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{R = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}}. \tag{2.16}$$

Näide 2.14. Leiame koonduvusraadiuse, koonduvuspiirkonna ja absoluutse koonduvuse piirkonna reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R, kasutades valemit (2.15):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1.$$

Saime $R = 1$ ja seega koonduvusvahemik on $(-1{,}1)$. Selles vahemikus vaadeldav astmerida koondub absoluutselt. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}.$$

Saime harmoonilise rea, mis hajub
Kui $x = 1$, saame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

See on vahelduvate märkidega rida, mille koondumist saame uurida Leibnizi tunnuse abil. Üldliikmete absoluutväärtuste jada on kahanev (seega ka monotoonselt kahanev), sest iga $n \geq 0$ korral

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2}.$$

Kuna

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

saame öelda, et rida $x = 1$ korral koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Seega koonduvuspiirkond on $(-1, 1]$ ja absoluutse koonduvuse piirkond on $(-1{,}1)$.

Näide 2.15 Leiame koonduvusraadiuse ja koonduvusvahemiku reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Teeme muutujavahetuse $x^2 = t$, mille tulemusena saame rea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2n}.$$

Saadud rea koonduvusraadius on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

ja koonduvusvahemik $(-1{,}1)$. Algset rida silmas pidades võib x muutuda vahemikus $(-1{,}1)$, et t satuks vahemikku $(-1{,}1)$. Seepärast on algselt antud rea koonduvusvahemik $(-1{,}1)$ ja koonduvusraadius 1.

Näide 2.16. Leiame koonduvuspiirkonna ja absoluutse koonduvuse piirkonna reale

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Kõigepealt leiame koonduvusraadiuse R eeskirja (2.16) põhjal:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Seega koondub vaadeldav astmerida absoluutselt vahemikus $(-1,1)$. Vahemiku otspunktides tuleb koonduvust eraldi uurida. Kui $x = -1$, saame rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k},$$

mis koondub, kuid ei koondu absoluutselt. Kui $x = 1$, siis saame harmoonilise rea

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

mis on hajuv. Seega on rea koonduvuspiirkond $[-1, 1)$ ja absoluutse koonduvuse piirkond $(-1,1)$.
Eespool esitatud ja kasutatud väited sõnastab veelkord järgmine teoreem.

Teoreem 2.2.

Cauchy-Hadamard'i teoreem. Olgu astmerea

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

koonduvusraadius R. Siis astmerida koondub

(a) juhul $R = 0$ vaid punktis $x = 0$ ja siis

$$A = C = \{0\};$$

(b) juhul $0 < R < \infty$

(b1) **koondub absoluutselt vahemikus $(-R, R)$;**

(b2) hajub hulgas $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$

ja nende põhjal

$$(-R, R) \subset A \subset C \subset [-R, R];$$

(c) kui $R = \infty$, siis astmerida koondub absoluutselt igas punktis $x \in \mathbb{R}$, s.t.

$$A = C = \mathbb{R}.$$

Teoreem 2.3.
Astmerea summa

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

on pidev funktsioon igas lõigus $[a, b] \subset (-R, R)$, kus R on selle rea koonduvusraadius. Seda rida võib lõigus $[a, b]$ **liikmeti integreerida**, s.t

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right)$$

ning viimane rida koondub integraaliks $\int_a^b S(x)\, dx$.

Teoreemi väitest liikmeti integreerimise kohta saame erijuhul $[0, x] \subset (-R, R)$

$$\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Teoreem 2.4.

Eelmise teoreemi tähistusi silmas pidades võib rida **liikmeti diferentseerida** igas punktis $x \in (-R, R)$, s.t

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$$

ning viimane rida koondub tuletiseks $S'(x)$.

Abeli lemma.

Kui astmerida (2.9) koondub koonduvusvahemiku $(-R, R)$ parempoolses otspunktis R, siis selle astmerea summa $S(x)$ on vasakult pidev punktis R, s.t $S(R-0) = S(R)$ ehk

$$\lim_{\substack{x \to R \\ x < R}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k.$$

Kui astmerida (2.9) koondub punktis $-R$, siis selle astmerea summa $S(x)$ on paremalt pidev punktis $-R$, s.t $S(-R+0) = S(-R)$ ehk

$$\lim_{\substack{x \to -R \\ x \geq -R}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-R)^k.$$

2.6. TAYLORI JA MACLAURINI READ

Olgu funktsioon f määratud punkti $c \in \mathbb{R}$ mingis ümbruses. Öeldakse, et funktsioon f on **arendatav astmeritta punktis c**, kui on olemas astmerida, mis punkti c mingis ümbruses on võrdne funktsiooniga (koondub funktsiooniks f):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k.$$

Öeldakse, et rida on funktsiooni arendus astmeritta (astmereaks).

Definitsioon 2.10.

Funktsiooni f **Taylori reaks punktis c** nimetatakse astmerida

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n,$$

mille kordajad (**Taylori kordajad**) on

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \qquad n = 0,1,2,\dots .$$

Seega on **funktsiooni f Taylori rida punktis c**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots .$$

Definitsioon 2.11.
Maclaurini reaks nimetatakse Taylori rida, kus $c = 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ \dots .$$

2.6.1. TAYLORI VALEMI TULETAMINE

Oletame, et funktsioonil $y = f(x)$ on kõik tuletised kuni järguni $n + 1$ (kaasa arvatud) mingis punkti $x = a$ sisaldavas vahemikus. Leiame polünoomi P_n nii, et

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a), \dots ,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \qquad (2.17)$$

Polünoomi P_n otsime kujul

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ \dots + c_n(x-a)^n. \qquad (2.18)$$

Selle kordajad leiame tingimusest (2.17). Selleks leiame kõigepealt P_n tuletised:

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ \dots + nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) &= 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + \ \dots + n\,(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ P_n'''(x) &= 2\cdot 3c_3 + \ \dots + n\,(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ P_n^{(n)}(x) &= n\,(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1\cdot c_n. \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Asendades võrdustesse (2.18) ja (2.19) $x = a$, saame

$$P_n(a) = c_0,\ P_n'(a) = c_1,\ P_n''(a) = 2c_2,\ P_n'''(a) = 2\cdot 3c_3, \qquad (2.20)$$

$$\dots, \qquad P_n^{(n)}(a) = n\,(n-1)(n-2)(n-3)\dots 2\cdot 1\cdot c_n.$$

Võrdustest (2.17) ja (2.20) saame

$$c_0 = f(a), \qquad c_1 = f'(a), \qquad c_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f''(a),$$

$$c_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a), \dots , c_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n} f^{(n)}(a)$$

ehk

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a), \quad k = 0, 1, \dots , n,$$

kus

$$f^{(0)}(a) = f(a), \qquad 0! = 1, 1! = 1.$$

Asendades need väärtused c_k, $k = 0, 1, \ \dots, n$, esitusse (2.18), saame otsitava polünoomi

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (2.21)$$

Tähistame vahe $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$, siis

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Saime valemi, mida nimetatakse **Taylori valemiks**

$$\boldsymbol{f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)}$$

ja milles R_n nimetatakse jääkliikmeks.

Märgime, et iga n astme polünoomi, mis on antud esitusega

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_n\,x^n,$$

võib esitada arendisena $x - a$ astmete järgi nagu on toodud võrduses (2.21).

Näide 2.17. Esitame polünoomi $P_2(x) = -5 + 2x + x^2$ üksliikme $x - 3$ astmete järgi.

Selleks asendame

$$x = \big(3 + (x-3)\big),$$

mille abil

$$P_2(x) = -5 + 2\big(3 + (x-3)\big) + \big(3 + (x-3)\big)^2 = 10 + 8(x-3) + (x-3)^2.$$

Vaatleme juhtu, kus funktsioon f on lõpmatult diferentseeruv (tal on olemas kõik tuletised) mingis vahemikus $(c - R, c + R)$. Sel juhul võime vaadelda tema Taylori rida punktis c

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k \tag{2.22}$$

ja ka Taylori valemit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + R_n(x).$$

Osutub, et rida (2.22) koondub iga $x \in (c - R, c + R)$ korral funktsiooni väärtuseks $f(x)$ parajasti siis, kui iga $x \in (c - R, c + R)$ korral

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Taylori valemi jääkliige Lagrange'i kujul on

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \qquad a < \xi_x < x,$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(c + \theta_x(x-c)\big)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \qquad 0 < \theta_x < 1.$$

Maclaurini valemi jääkliige Lagrange'i kujul on

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \theta_x < 1.$$

2.6.2. TUNTUIMAD ASTMEREAD

Kui funktsioon *f* on arendatav astmereaks mingi vahemiku igas punktis, siis see astmerida on funktsiooni *f* Taylori rida. Paljude funktsioonide arendused astmereaks saame tuntud astmeridadest aritmeetiliste tehete, rea liikmeti integreerimise ja liikmeti diferentseerimise teel.
Järgnevas toome Maclaurini read mõnedest elementaarfunktsioonidest:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ \ldots . = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2} + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2} + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdot 2}{(n-1)!}ax^{n-1} + x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ \ldots + x^n + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \in (-1,1),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots + (-x)^n + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, x \in (-1,1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, x \in (-1,1],$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in [-1,1].$$

Näide 2.18. Leiame funktsiooni $f(x) = \arcsin x$ Maclaurini rea liikmed järguni $n = 3$.

Leiame funktsiooni tuletised kolmanda järguni ja vastavate tuletiste väärtused punktis $x = 0$, seejärel asendame leitud väärtused Maclaurini valemisse. Saame

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \qquad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2)^3} - x \cdot \frac{3x}{2\sqrt{(1-x^2)}}}{(1-x^2)^3}, \qquad f'''(0) = 1.$$

Saime Maclaurini rea liikmed järguni 3

$$\arcsin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ \dots = \ x + \frac{x^3}{3!} + \ \dots .$$

Näide 2.19. Leiame funktsiooni $f(x) = 1/(1-2x)$ Maclaurini rea, määrame rea koonduvusraadiuse R.

Arvutame

$$f(x) = \frac{1}{1-2x}, \qquad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2}, \qquad f'(0) = 2,$$

$$f''(x) = \frac{8}{(1-2x)^3}, \qquad f''(0) = 8,$$

$$f'''(x) = \frac{48}{(1-2x)^4}, \qquad f'''(0) = 48.$$

Saime Maclaurini rea

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots .$$

Sama rea saamiseks võime kasutada ka eespool toodud arendust astmeritta

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ \dots$$

Võttes suuruse x asemel $2x$, saame

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ \dots$$

Rea koonduvusraadius on

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

2.7. ORTOGONAALREAD*

Taylori rea summaks olev funktsioon

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

on esitatud polünoomide $(x-c)^k$ lineaarse kombinatsioonina, mis koondub vähemalt rea koonduvusvahemikus $(-R, R)$ funktsiooni S vastavaks väärtuseks. Loomulik on vaadelda funktsioonide arendusi teiste polünoomide jadade kaudu eesmärgiga saada mingis mõttes paremaid võimalusi rea kordajate leidmiseks. Enne üldiste põhimõtete esitamist vaatleme konkreetse näitena Legendre'i polünoomide kasutamist. Legendre'i polünoomid on teist järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi, s. o Legendre'i võrrandi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

lahendid. Selles võrrandis võib üldiselt l olla suvaline reaalarv, kuid Legendre'i polünoomid P_l, mille aste on l, on lahenditeks juhul kui l on mittenegatiivne täisarv.
Need on kuni astmeni 5

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Legendre'i polünoomid rahuldavad rekursiivset võrdust

$$(l+1)P_{l+1}(x) - (2l+1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0,$$

mis võimaldab leida suvalise astme polünoome, kasutades kahte eelnevat madalama astme polünoomi, sealhulgas võib leida ka näiteks juba esitatud P_2, P_3, P_4, P_5 eelnevate kaudu.
Legendre'i polünoomid $P_k, k = 0,1, \ldots,$ olles täpselt k astme polünoomid, on lineaarselt sõltumatud (siin mõeldakse täpsemalt seda, et iga lõplik osahulk neist on lineaarselt sõltumatu). Seepärast moodustavad polünoomid $P_0, \ldots, P_n$ baasi kõigi ülimalt n astme polünoomide hulgas (see on $n+1$ mõõtmeline vektorruum) ja näiteks astmefunktsioonid $1, x, \ldots, x^n$ on esitatavad nende lineaarsete kombinatsioonidena

$$x^0 = P_0, \quad x^1 = P_1, \qquad x^2 = \frac{1}{3}(2P_2 + P_0), \qquad x^3 = \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1),$$

$$x^4 = \frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0), \qquad x^5 = \frac{1}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1).$$

Kui mingi funktsioon f on esitatud näiteks Maclaurini reana

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{2.23}$$

siis saame selle esitada Legendre'i polünoomide kaudu

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0P_0 + a_1P_1 + \frac{a_2}{3}(2P_2 + P_0) + \frac{a_5}{5}(2P_3 + 3P_1) + \\ &+ \frac{a_4}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7P_0) + \frac{a_5}{63}(8P_5 + 28P_3 + 27P_1) + \ldots = \\ &= \left(a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \ldots\right)P_0 + \left(a_1 + \frac{3a_3}{5} + \frac{3a_5}{7} + \ldots\right)P_1 + \left(\frac{2a_2}{3} + \frac{4a_4}{7} + \ldots\right)P_2 + \\ &+ \left(\frac{2a_3}{5} + \frac{4a_5}{9} + \ldots\right)P_3 + \left(\frac{8a_4}{35} + \ldots\right)P_4 + \left(\frac{8a_5}{63} + \ldots\right)P_5 + \ldots . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Legendre'i polünoomidel on tähelepanuväärne omadus olla ortogonaalsed lõigus $[-1, 1]$, nimelt

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2m+1}, & m = n. \end{cases} \tag{2.25}$$

See võimaldab antud funktsiooni f korral leida arendises

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x) \tag{2.26}$$

kindla ja ülevaatliku eeskirja kohaselt kordajad c_k. Selleks moodustame võrduse (2.26) mõlemast poolest korrutise polünoomiga $P_n(x)$ ja integreerime lõigus $[-1,1]$. Eeldades, et järgnevad tehted reaga ja integraali võtmisega on lubatavad (see sõltub funktsioonist f), saame

$$\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x)\right)P_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{-1}^{1} P_k(x)P_n(x)\,dx = c_k\frac{2}{2n+1},$$

millest (asendame indeksi n indeksiga k nagu on esituses (2.26))

$$c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx. \tag{2.27}$$

Eespool nägime, kuidas Maclaurini rea (2.23) kordajate a_k kaudu avalduvad Legendre'i polünoomide abil tehtud arendises (2.26) kordajad c_k, need on võrduses (2.24). Neid avaldisi saab veel nii, et asendame võrduses (2.27) funktsiooni f arendisega (2.19). Siis

$$c_k=\frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)P_k(x)\,dx=\frac{2k+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{-1}^{1} P_k(x)\,x^n dx\right)a_n.$$

Asendades saadud avaldisse polünoomid $P_m(x)$, saame avaldada konstandid c_m konstantide a_k kaudu.

Näide 2.20. Leiame kordaja c_0.

Kasutades polünoomi $P_0=1$, arvutame

$$c_0=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{-1}^{1} x^k\,dx,$$

seejuures

$$\int_{-1}^{1} x^k\ dx = \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_{-1}^{1} = \begin{cases}\dfrac{2}{2k+1}, & k \text{ paaris,}\\ 0, & k \text{ paaritu,}\end{cases}$$

ja

$$c_0=a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\ \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2k+1}.$$

Saime sama P_0 kordaja, mis oli arendises (2.24) toodud.

Järgnevas käsitleme üldisemat raamistikku ortogonaalridade kohta.
Funktsiooni $w\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ võib vaadelda kaalufunktsioonina, kui on täidetud tingimused:

1) $w(x)\ge 0$ iga $x\in(a,b)$ korral;
2) eksisteerib $\int_a^b w(x)x^k\,dx\in\mathbb{R}$ iga $k=0,1\ldots$ korral, $\int_a^b w(x)\,dx\neq 0$.

Seejuures $-\infty\le a<b\le\infty$ ja w ei tarvitse olla isegi juhul $a,b\in\mathbb{R}$ ülalt tõkestatud, mis tähendab, et tingimuses 2) võivad olla vaatluse all päratud integraalid. Funktsioon $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ on **integreeruva ruuduga funktsioon**, kui eksisteerib

$$\int_a^b w(x)f^2(x)\,dx < \infty.$$

Ilma detailset teooriat esitamata märgime, et integreeruva ruuduga funktsioonid ei pea olema pidevad, nad võivad olla määramata mõnedel argumendi väärtustel ja integreerimisel ei ole oluline, kas vaatleme neid määratuna vahemikus (a, b) või lõigus $[a, b]$.
Integreeruva ruuduga funktsioonide jaoks saab defineerida skalaarkorrutise

$$(f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx,$$

viimane integraal eksisteerib (on lõplik), sest

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}\left(f^2(x) + g^2(x)\right).$$

Definitsioon 2.13.
Integreeruva ruuduga funktsioonide jada (g_k) nimetatakse **ortogonaalseks**, kui $n \neq k$ korral

$$\boldsymbol{(g_n, g_k) = \int_a^b w(x)g_n(x)g_k(x)\,dx = 0,}$$

ja **ortonormeerituks**, kui

$$\boldsymbol{(g_n, g_k) = \delta_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{kui } n \neq k, \\ 1, & \text{kui } n = k. \end{cases}}$$

Näitena märgime, nagu eespool nägime, et Legendre'i polünoomid moodustavad ortogonaalse jada intervallis $(-1,1)$ kaalufunktsiooniga $w(x) \equiv 1$.
Kui ortogonaalne süsteem ei ole ortonomeeritud, kuid $(g_k, g_k) \neq 0$ iga k korral, saab seda muuta ortonomeerituks iga funktsiooni normeerimise teel, defineerides

$$\bar{g}_k = \frac{g_k(x)}{\sqrt{(g_k, g_k)}}, \qquad k = 0,1, \dots .$$

Siis

$$(\bar{g}_n, \bar{g}_k) = \delta_{nk}.$$

Ortonormeeritud süsteemi (g_k), $k = 0,1, \dots$ nimetatakse **täielikuks integreeruva ruuduga funktsioonide ruumis**, kui iga integreeruva ruuduga funktsioon f on kuitahes täpselt lähendatav süsteemi (g_k) lineaarsete kombinatsioonidega, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral on olemas kordajad $c_0, \dots, c_n$ nii, et

$$\int_a^b w(x)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) - f(x)\right)^2 dx < \varepsilon.$$

Süsteem (g_k) on täielik parajasti siis, kui võrdustest $(g_k, f) = 0, k = 0,1, \dots$, järeldub, et $f = 0$. Täieliku süsteemi (g_k) korral on iga integreeruva ruuduga funktsioon f arendatav süsteemi (g_k) järgi ritta, s.t eksisteerivad kordajad $c_k, k = 0,1, \dots$, (nad on üheselt määratud funktsiooni f poolt) nii, et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k g_k(x), \tag{2.28}$$

seejuures

$$\int_a^b w(x)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x) - f(x)\right)^2 dx \to 0$$

protsessis $n \to \infty$. Öeldakse, et osasummade jada

$$\sum_{k=0}^{n} c_k g_k(x)\,, n = 0,1, \ldots,$$

koondub ruutkeskmiselt funktsiooniks f. Märgime, et ruutkeskmine koondumine ei taga koondumist argumendi iga väärtuse $x \in (a, b)$ korral. Ortonormeeritud süsteemi järgi arendises (2.28) leitakse kordajad c_k võrdustega

$$c_k = (f, g_k) = \int_a^b w(x) f(x) g_k(x)\, dx.$$

Funktsioone, mille abil rida moodustatakse, nimetatakse **koordinaatfunktsioonideks**. Nii olid Taylori reas koordinaatfunktsioonideks astmefunktsioonid $(x-c)^k$, Maclaurini reas x^k, veel kasutasime Legendre'i polünoome P_k, võib kasutada suvalisi ortogonaalseid või ortonormeeritud funktsioonide süsteeme.

2.8. FOURIER' READ

Fourier' read on funktsioonide reaksarendised, kus koordinaatfunktsioonideks on trigonomeetriline süsteem $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$. Neid kasutatakse eelkõige intervallis $(-\pi, \pi)$ määratud funktsioonide või reaalarvude hulgas $\mathbb{R}$ määratud funktsioonide puhul, mis on 2π perioodilised. Viimased on täielikult määratud, kui vaadelda argumenti muutuvana näiteks lõigus $[-\pi, \pi]$. Trigonomeetriline süsteem on ortogonaalne lõigus $[-\pi, \pi]$ kaalufunktsiooniga $w(x) \equiv 1$, mida väljendavad vahetult kontrollitavad võrdused

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx\, dx = 0, \qquad \text{kui } n \geq 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\, dx = 0, \text{kui } \; m \neq n.$$

Trigonomeetriline süsteem ei ole normeeritud, sest

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \qquad \text{kui } n \geq 1. \qquad (2.29)$$

Trigonomeetriline süsteem on täielik lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruva ruuduga funktsioonide hulgas, seepärast saab iga lõigus $[-\pi, \pi]$ integreeruva ruuduga funktsiooni f esitada Fourier' reana

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx\,)}, \qquad (2.30)$$

mis koondub vähemalt ruutkeskmiselt funktsiooniks f. Seejuures on rea kordajad arvutatavad eespool toodud üldisi valemeid ja võrduseid (2.29) silmas pidades

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.31}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Definitsioon 2.14.

Funktsiooni f trigonomeetriliseks Fourier' reaks lõigus $[-\pi, \pi]$ nimetatakse rida

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}, \tag{2.32}$$

kus kordajad a_k, b_k on määratud võrdustega

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,} \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \qquad k = 1, 2, \ldots .}$$

Rea (2.32) võib kirjutada ka kujul

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ \ldots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ \ldots ,$$

kus peetakse silmas, et vaadeldakse eraldi funktsioone $\cos kx$ sisaldava koonduva rea summat, millele on liidetud funktsioone $\sin kx$ sisaldava koonduva rea summa. Taolise järjestuse muutmine on võimalik ortogonaalsete koordinaatfunktsioonidega ridade korral.

Näide 2.21. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 0, & -\pi < x < 0, \end{cases}$$

mida käsitleme integreeruva ruuduga funktsioonina vahemikus $(-\pi, \pi)$ või lõigus $[-\pi, \pi]$, kuid mida võib vaadelda ka 2π perioodilisena määratuna tervel reaalteljel. Leiame selle kordajad Fourier' arenduses (2.32). Arvutades saame

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \ dx = 1,$$

$k \geq 1$ korral

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} 0, & k \text{ paaris,} \\ \dfrac{2}{k\pi}, & k \text{ paaritu.} \end{cases}$$

Sellega saame arendise

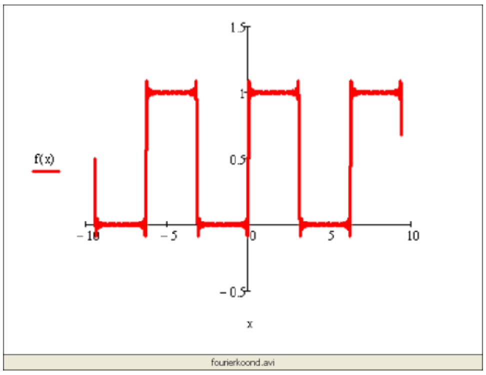
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \ \dots\right).$$

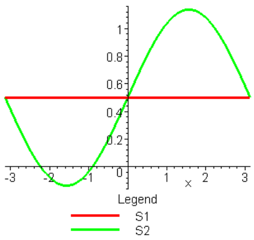
Esitame selle funktsiooni Fourier' rea osasummad, kus indeks k näitab, et võeti Fourier' arendises $k+1$ liidetavat:

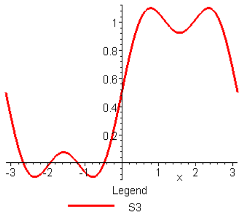
$$S_0 = S_1 = \frac{1}{2}, \qquad S_2 = S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x, \qquad S_4 = S_5 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3}\right),$$

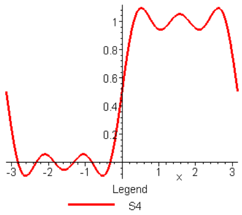
$$S_6 = S_7 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5}\right).$$

Funktsiooni ja osasummade graafikud on esitatud joonistel.









FOURIER' REA KOONDUVUS

Märkisime, et iga integreeruva ruuduga funktsiooni Fourier' rida koondub ruutkeskmiselt selleks funktsiooniks, mis ei taga küll koondumist iga argumendi väärtuse korral. Fourier' rea parema koondumise saab siis, kui nõuda funktsioonilt paremaid omadusi.

Definitsioon 2.15.
Funktsiooni nimetatakse **pidevalt diferentseeruvaks** lõigus $[a, b]$ (siis $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a < b$), kui funktsioon on diferentseeruv vahemikus (a, b) ja funktsioonil ning tema tuletisel on lõplikud ühepoolsed piirväärtused punktides a ja b (punktis a parempoolsed ja punktis b vasakpoolsed piirväärtused). Sel juhul ütleme lühidalt, et funktsioon on **sile** lõigus $[a, b]$.

Definitsioon 2.16.
Funktsiooni nimetatakse **tükiti siledaks** lõigus$[a, b]$, kui on olemas lõigu jaotus

$$a = c_0 < c_1 < \ \dots < c_n = b, \qquad n \in \mathbb{N},$$

nii, et igas osalõigus $[c_{i-1}, c_i], i = 1, \dots, n$ on funktsioon pidevalt diferentseeruv.
Tükiti siledal funktsioonil ja tema tuletisel võivad olla lõigu jaotuse sisepunktides $c_1, \dots, c_{n-1}$ erinevad vasak- ja parempoolsed piirväärtused, mistõttu ei saa rääkida funktsiooni ja tema tuletise väärtustest punktides $c_1, \dots, c_{n-1}$.
Lõigus sile funktsioon on tinglikult tükiti sile selles lõigus. Lõigus tükiti sile funktsioon on integreeruva ruuduga selles lõigus. Seepärast on tükiti siledal funktsioonil olemas Fourier' reaksarendus.
Sileda funktsiooni graafik on visuaalselt sile joon. Tükiti sileda funktsiooni graafik koosneb lõplikust arvust siledatest osadest.

Teoreem 2.5. **Dirichlet' teoreem.**

Kui funktsioon f on tükiti sile lõigus $[-\pi, \pi]$, siis selle **funktsiooni Fourier' rida koondub summaks $S = S(x)$**,

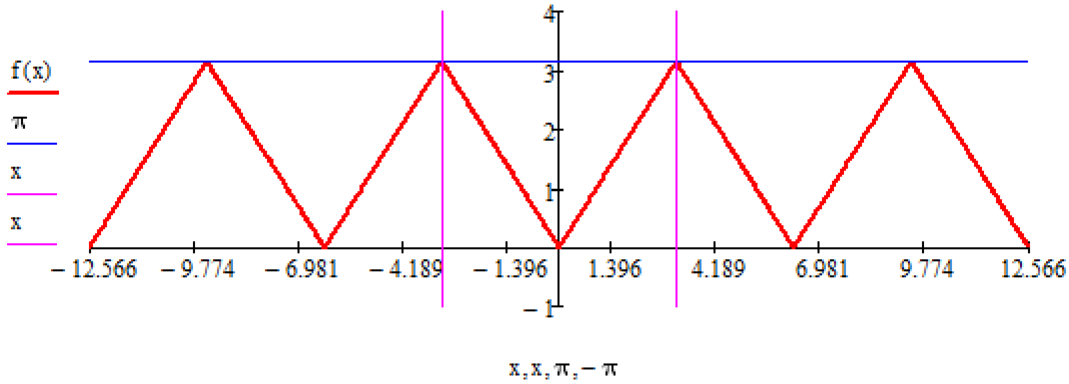
$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kusjuures
1) funktsiooni f pidevuspunktides $x \in [-\pi, \pi]$,
$$S(x) = f(x),$$
2) funktsiooni f katkevuspunktides võrdub rea summa funktsiooni f parempoolse ja vasakpoolse piirväärtuse aritmeetilise keskmisega ehk kui $c \in (-\pi, \pi)$ on funktsiooni f katkevuspunkt, siis
$$S(c) = \frac{1}{2}\big(f(c-0) + f(c+0)\big).$$

Fourier' ridu kasutatakse näiteks matemaatilises füüsikas ja mehaanikas. Teooria funktsioonide arendamisest Fourier' reaks on osa harmoonilisest analüüsist.

Näide 2.22. Leiame Fourier' rea 2π perioodilisele funktsioonile, mis on määratud järgmiselt:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{kui} -\pi \le x \le 0, \\ \ \ x, \text{kui} \ \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$$



Kõigepealt leiame Fourier' kordajad. Saame

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$k \geq 1$ korral

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} x\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos kx\,dx\right).$$

Leiame ositi integreerides, võttes $u = x,\ dv = \cos kx\,dx$ ja $v = \frac{1}{k}\sin kx$

$$\int x\cos kx\ dx = \frac{x}{k}\sin kx - \frac{1}{k}\int \sin kx\ dx = \frac{1}{k}x\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx.$$

Siis

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}x\sin kx - \frac{1}{k^2}\cos kx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}x\sin kx + \frac{1}{k^2}\cos kx\right)\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{\pi k^2}(1-\cos k\pi) + \frac{1}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) =$$

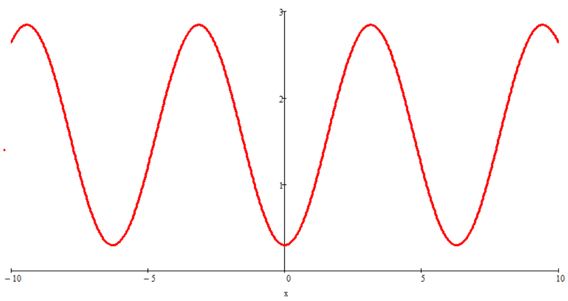
$$= \begin{cases} 0, & \text{kui } k \text{ on paaris,} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2}, & \text{kui } k \text{ on paaritu.} \end{cases}$$

Lisaks saame, et $b_k = 0$, sest f on lõigus $[-\pi, \pi]$ paaris, $\sin kx$ paaritu, seega integraalialune funktsioon b_k leidmisel on paaritu. Kokkuvõttes

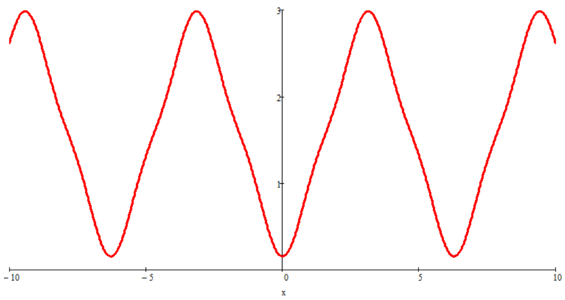
$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ \dots + \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + \ \dots\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

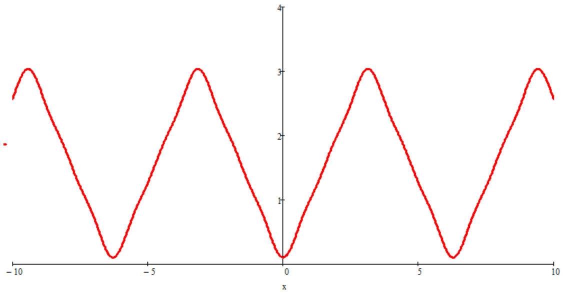
Funktsiooni f pidevuse tõttu koondub rida iga $x \in [-\pi, \pi]$ korral väärtuseks $f(x)$. Järgnevatel joonistel on esitatud rea osasummade graafikud mõnede n väärtuste korral.



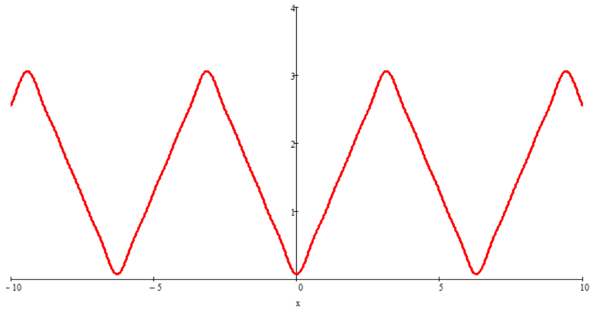
$n = 0$



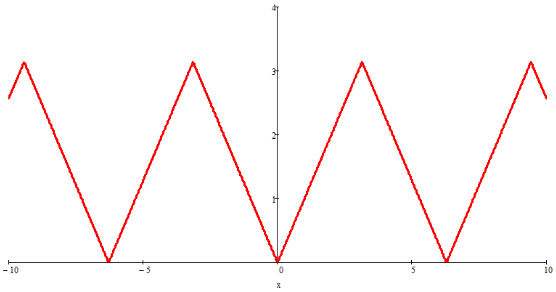
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 30$

FOURIER' RIDA $2l$ PERIOODILISE FUNKTSIOONI KORRAL

Kui f on $2l$ perioodiline funktsioon, kus üldiselt $l \neq \pi$, sellise funktsiooni arendamisel Fourier' reaks teeme muutujavahetuse

$$x = \frac{l}{\pi} t.$$

Sellega saame argumendi t funktsiooni, mis on 2π perioodiline funktsioon, mille võime arendada Fourier' reaks lõigus $-\pi \leq x \leq \pi$:

$$f\left(\frac{l}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) dt, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \cos kt \, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi} t\right) \sin kt \, dt.$$

Esialgsele muutujale x tagasi minnes asendame

$$t = \frac{\pi}{l} x, \qquad dt = \frac{\pi}{l} dx.$$

Fourier' rida $2l$ perioodilise funktsiooni jaoks saab kuju

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{\pi}{l} x + b_k \sin k \frac{\pi}{l} x\right),$$

kus

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx.$$

FOURIER' INTEGRAAL JA FOURIER' TEISENDUS*

Eeldame, et reaalsirgel $(-\infty,\infty)$ määratud funktsioon f on pidev ja absoluutselt integreeruv, seega

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

Arendame vahemikus $(-l,l)$ funktsiooni f Fourier' ritta

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{\pi}{l}x + b_k\sin k\frac{\pi}{l}x\right),$$

kusjuures me teame eelnevast, et funktsiooni pidevuse tõttu rida koondub iga $x \in (-l,l)$ korral vastavaks väärtuseks ja see põhjendab võrdusmärgi $f(x)$ ja rea vahel. Arendades Fourier' ritta kordajad

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy, \qquad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\cos k\frac{\pi}{l}y\,dy,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(y)\sin k\frac{\pi}{l}y\,dy,$$

saame võrduse

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(y)\left(\cos k\frac{\pi}{l}x\cos k\frac{\pi}{l}y + \sin k\frac{\pi}{l}x\sin k\frac{\pi}{l}y\right)dy.$$

Võtame selles piirväärtuse $l \to \infty$. On näha, et

$$\left|\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(y)\,dy\right| \le \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|\,dy \to 0.$$

Üksikasjalikku põhjendust esitamata märgime, et piirväärtuseks saame võrduse

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx\right)\cos xy + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\,dx\right)\sin xy\right)dy, \qquad (2.34)$$

mille paremat poolt nimetatakse **Fourier' integraaliks.**
Tähistades

$$\boldsymbol{u(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\, dx}, \qquad \boldsymbol{v(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\, dx},$$

võime võrduse (2.34) kirjutada veel

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{0}^{\infty} (u(y)\cos xy + v(y)\sin xy)\ dy}. \tag{2.35}$$

Fourier' integraali saab esitada ka eksponentkujul. Kasutades Euleri võrrandeid

Defineerime

$$w(y) = \frac{1}{2}\big(u(y) - iv(y)\big),$$

see on reaalmuutuja kompleksväärtustega funktsioon. Siis

$$w(y) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xy\, dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xy\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\cos xy - i\sin xy)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\, dx,$$

kus viimases võrduses kasutasime kompleksarvu eksponentkuju.
Saadud võrdust nimetatakse **Fourier' teisenduseks**, mis funktsioonile f seab vastavusse funktsiooni w. Loomulik on küsida, kas funktsiooni w järgi saab leida funktsiooni f ehk kas Fourier' teisendus on pööratav? Kasutame vastuse andmiseks Fourier' integraali võrdusena (2.35). Näeme, et

$$u(-y) = -u(y), \qquad v(-y) = -v(y), \tag{2.36}$$

mis tulenevad sellest, et koosinus on paarisfunktsioon ja siinus paaritu funktsioon. Kompleksarvu eksponentkujust saadakse Euleri valemid

$$\cos xy = \frac{1}{2}\left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right), \qquad \sin xy = \frac{1}{2i}\left(e^{ixy} - e^{-ixy}\right).$$

Asendades need võrdusesse (2.35), saame

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}u(y)\left(e^{ixy} + e^{-ixy}\right) + \frac{1}{2i}v(y)\left(e^{ixy} - e^{-ixy}\right)\right) dy =$$

$$= \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(u(y) + \frac{1}{i}v(y)\right) e^{ixy}\ dy + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(u(y) - \frac{1}{i}v(y)\right)\ e^{-ixy}\, dy.$$

Esimene integraal annab

$$\int_{0}^{\infty} w(y)e^{ixy}\, dy,$$

teises integraalis teeme muutujavahetuse $y = -z$ ja kasutame omadusi (2.36), siis

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2}\left(u(y) - \frac{1}{i}v(y)\right) e^{-ixy}\,dy = \int_0^{-\infty} \frac{1}{2}\left(u(-z) - \frac{1}{i}v(-z)\right) e^{ixz}\,dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\left(u(z) + \frac{1}{i}v(z)\right) e^{ixz}\,dz = \int_{-\infty}^{0} w(y)\,e^{ixy}\,dy.$$

Kokkuvõttes saame **Fourier' pöördteisenduse**

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(y)e^{ixy}\,dy.$$

Traditsiooniliselt kasutatakse funktsiooni $\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}w(y)$, siis Fourier' teisendus ja pöördteisendus on

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{ixy}\,dy.$$

Rõhutame, et kui funktsioon f on reaalväärtustega, võib tema Fourier' teisendus $\hat{f}$ olla kompleksväärtustega funktsioon.

Näide 2.23.

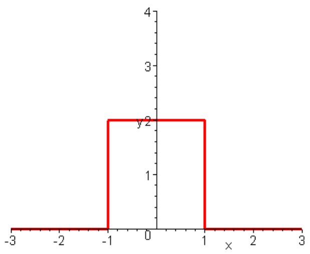
Toome mõned näited funktsioonidest ja nende Fourier' teisendustest. Teoorias eeldasime küll funktsiooni f pidevust, aga meie käsitlusest on selge, et tema Fourier' teisenduse tegemiseks piisab, kui f on absoluutselt integreeruv.

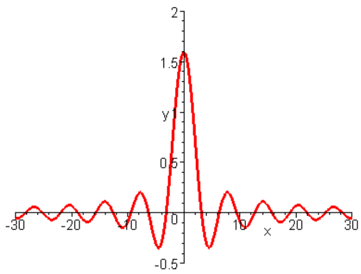
1) olgu

$$f(x) = \begin{cases} A, & -a < x < a, \\ 0, & \text{mujal,} \end{cases}$$

siis

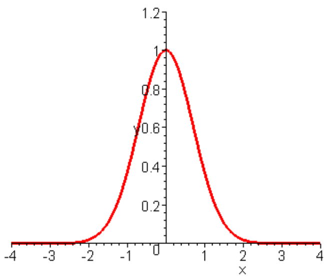
$$\hat{f}(y) = \frac{2Aa}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin ay}{ay}.$$

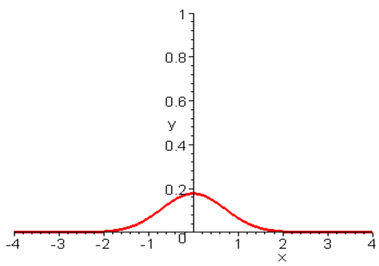




2) olgu $f(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$, siis

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}.$$

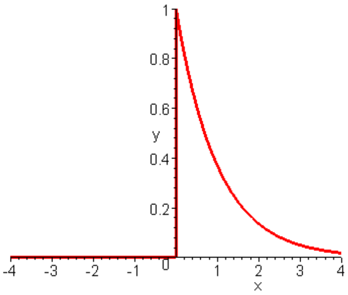


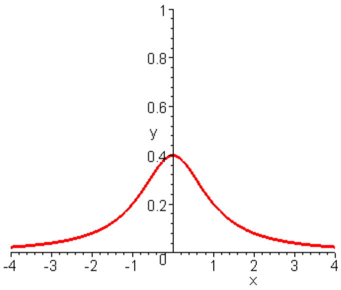


3) olgu $f(x) = e^{-ax},\ x > 0, a > 0,$ siis $\begin{cases} e^{-ax}, & \text{kui } x > 0, a > 0, \\ 0, & \text{kui } x \leq 0 \end{cases},$

siis

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a - iy}{a^2 + y^2}, \qquad \mathrm{Re}\left(\hat{f}(y)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}.$$





III PTK MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

3.1. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONI MÕISTE

- Kui x ja y on ristküliku külgede pikkused, siis pindala S avaldub valemiga $S = xy$. Igale x ja y väärtuste paarile vastab pindala üks väärtus, S on kahe muutuja funktsioon.
- Kui risttahuka servade pikkused on x, y, z, siis tema ruumala avaldub kujul $V = xyz$. Ruumala V on kolme muutuja funktsioon.
- Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = nRT$ saame avaldada gaasi ruumala

$$V(p, T, n) = \frac{nRT}{p}.$$

Ruumala V on 3 muutuja p, T ja n funktsioon ehk $V = f(p, T, n)$.
- Funktsionaalne sõltuvus R on nelja muutuja funktsioon, mis on antud järgmiselt

$$R(x, y, z, t) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Definitsioon 3.1.

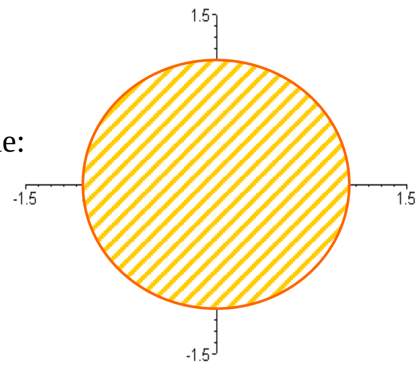
Kahe muutuja x ja y funktsioon on z, kui igale muutuvate suuruste x ja y paarile vastab üks ja ainult üks muutuva suuruse z väärtus $z = f(x, y)$.

Võtame argumendi väärtuste paari: $x = x_0, y = y_0$. Kui nendele vastav z väärtus on olemas, siis öeldakse, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud punktis (x_0, y_0).
Kolme või enama arvu muutujate funktsioonid defineeritakse analoogiliselt.

Definitsioon 3.2.

Kahe muutuja funktsiooni **määramispiirkonnaks** nimetatakse argumentide x ja y väärtuspaaride (x, y) hulka, mille puhul funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud.

Funktsiooni määramispiirkonda saab kujutada geomeetriliselt. Kui x ja y iga väärtuspaari kujutada xy tasapinna punktidena, siis funktsiooni määramispiirkonda kujutab teatud punktide hulk tasapinnal.



Näide 3.1. Leiame määramispiirkonna funktsioonile

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Et funktsioon oleks määratud, peab juuritav olema mittenegatiivne:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees või ringjoonel.

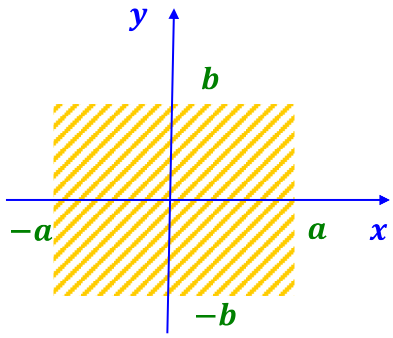
Näide 3.2. Leiame määramispiirkonna funktsioonile

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2) \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 < 1.$$

Määramispiirkonnaks on punktid ringjoone sees, ringjoon ei ole kaasa arvatud.

Näide 3.3. Leiame määramispiirkonna funktsioonile

$$f(x,y)=\ln(a^2-x^2)+\ln(b^2-y^2).$$



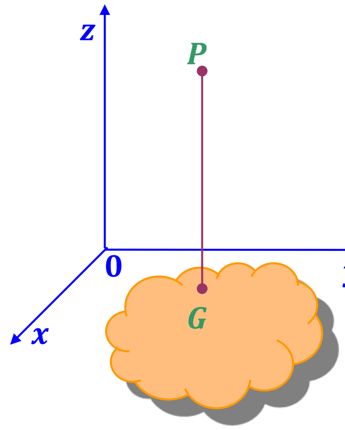
Et funktsioon oleks määratud, peavad naturaallogaritmi argumendid olema positiivsed, seega

$$a^2-x^2>0 \;\Rightarrow\; -a<x<a,$$

$$b^2-y^2>0 \;\Rightarrow\; -b<y<b,$$

kus a,b on konstandid.

Vaatleme funktsiooni $z=f(x,y)$, mis on määratud xy – tasapinna mingis piirkonnas G. Püstitame piirkonna G igas punktis (x,y) ristsirge ja asetame sellele lõigu, mis võrdub funktsiooni väärtusega $f(x,y)$.
Nii saame punkti P koordinaatidega (x,y,z), kus $z=f(x,y)$.



Definitsioon 3.3.
Kahe muutuja funktsiooni $f(x,y)$ **graafikuks** nimetatakse punktide P hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrrandit $z=f(x,y)$.

Järgnevalt defineerime m muutuja funktsiooni, tema määramispiirkonna ja graafiku.

Definitsioon 3.4.

Olgu hulk $\boldsymbol{D}\subset\mathbb{R}^m$. Kui igale punktile $P=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ hulgast D on eeskirja f abil vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv u, siis öeldakse, et **hulgal D on määratud m muutuja funktsioon** ja kirjutatakse

$$\boldsymbol{u=f(x_1,x_2,\dots,x_m),\quad \forall(x_1,x_2,\dots,x_m)\in D}$$

või

$$u=f(P),\quad \forall P\in D.$$

Hulka D nimetatakse funktsiooni **f määramispiirkonnaks**.
Funktsiooni f graafikuks nimetatakse hulka

$$Gr(f)=\{Q=(x_1,\dots,x_m,u): P=(x_1,x_2,\dots,x_m)\in D, u=f(P)\}.$$

Kaks m muutuja funktsiooni $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ ja $u=g(x_1,x_2,\dots,x_m)$ osutuvad samadeks funktsioonideks, kui neil mõlemal on üks ja sama määramispiirkond D ja samad vastavuse eeskirjad.

3.2. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS

Olgu antud xy tasapinna mingis piirkonnas D määratud funktsioon $z=f(x,y)$. Vaatleme mingit punkti $M_0(x_0,y_0)$ selles piirkonnas. Tähistame kahe punkti vahelist kaugust $d(A,B)$.

Definitsioon 3.5.

Punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruseks raadiusega r nimetatakse punktide hulka, mille iga punkti koordinaadid rahuldavad võrratust $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$, need punktid asetsevad ringi sees, mille raadius on r ja keskpunkt on $M_0(x_0, y_0)$.

Punkti $M_0(x_0, y_0)$ nimetame hulga D **sisepunktiks**, kui punktil M_0 leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas D.

Punkti $M_0(x_0, y_0)$ nimetame hulga D **rajapunktiks**, kui punkti M_0 iga ümbrus sisaldab nii hulga D punkte kui ka hulka D mittekuuluvaid punkte (vt joonis).

(a) (x_0, y_0) on hulga R sisepunkt (b) (x_0, y_0) on hulga R rajapunkt

Joonis 3.1. Sisepunkt ja rajapunkt hulgas R. (Thomas' Calculus [8])

Definitsioon 3.6.

Olgu $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$ ning olgu $M_0(x_0, y_0)$ hulga D kuhjumispunkt (igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Funktsiooni $f(x, y)$ **piirväärtuseks** punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile $M_0(x_0, y_0)$ nimetatakse arvu A, kui argumendi tõkestamatu lähenemine punktile (x_0, y_0) toob kaasa funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste tõkestamatu lähenemise arvule A.

Kui arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks punkti $M(x, y)$ lähenemisel punktile M_0, siis kirjutatakse

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$$

ehk $f(x, y) \to A$, kui $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Kui $A = 0$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x, y)$ on punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruses lõpmata väike suurus.

Kui $A = \infty$ või $A = -\infty$, siis öeldakse, et funktsioon $f(x, y)$ on punkti $M_0(x_0, y_0)$ ümbruses lõpmata suur suurus.

PIIRVÄÄRTUSE OMADUSED

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse korral kehtivad ühe muutuja funktsiooni piirväärtuste teooria põhilised teoreemid.

Teoreem 3.1.

Piirväärtuse ühesus. Vaadeldavas protsessis saab kahe muutuja funktsioonil olla ainult üks piirväärtus.

Teoreem 3.2.

Kui on olemas **lõplikud** piirväärtused

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \text{ ja } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = B,$$

siis ka nende funktsioonide summal, vahel, korrutisel ja jagatisel (lisatingimusel) eksisteerivad lõplikud piirväärtused, kusjuures

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big(f(x,y)+g(x,y)\big)=A+B,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\big(f(x,y)-g(x,y)\big)=A-B,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y)=AB,$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{A}{B}, B\neq 0.$$

Teoreem 3.3.
Olgu funktsioon $f(x,y)$ tõkestatud punkti $M_0=(x_0,y_0)$ mingis ümbruses, s.t leiduvad punkti M_0 ümbrus U ja arv $N\geq 0$ nii, et $|f(x,y)|\leq N$ iga $(x,y)\in U\cap D$ korral.
Olgu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=0$, siis

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y)=0.$$

Hääbuva funktsiooni ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv.

Lause 3.1. **Kahepoolse tõkke omadus**. Leidugu funktsioonide f,g ja h määramispiirkonna $D\subset\mathbb{R}^2$ kuhjumispunktil M_0 ümbrus U, mille korral

$$f(x,y)\leq g(x,y)\leq h(x,y) \text{ iga } (x,y)\in (U\cap D)\backslash\{M_0\} \text{ korral.}$$

Kui on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y)=C,$$

siis on olemas ka piirväärtus $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$, kusjuures

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)=C.$$

Definitsioon 3.7.
Kui funktsioonil $f(x,y)$ on olemas piirväärtus punkti $M_0=(x_0,y_0)$ ümbruses

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$$

ja piirväärtus

$$\lim_{y\to y_0} g(y)=A,$$

siis arvu A nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ **korduvaks piirväärtuseks** punktis M_0 ja kirjutatakse

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

Analoogiliselt

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=B.$$

Näide 3.4. Leiame järgmised piirväärtused.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(2x^2-y^2)=-2,\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{5-xy}{x^2+y^2}=5,$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{x\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} x \lim_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{xy} = a\cdot 1 = a,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{z^2\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2} = 1.$$

Kahe muutuja funktsiooni piirväärtuse mõistet saab üldistada ka m muutuja funktsioonide jaoks. Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$ ja funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning olgu punkt $M_0 = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in D$ hulga D kuhjumispunkt (see tähendab, et punkti M_0 igas ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev vaadeldavasse hulka kuuluv punkt).

Definitsioon 3.8.

Kui argumendi $M = (x_1, \dots, x_m)$ tõkestamata lähenemine punktile $M_0 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ toob kaasa funktsiooni f väärtuste $f(M)$ tõkestamata lähenemise arvule A, siis ütleme, et **funktsiooni f piirväärtus protsessis $M \to M_0$** on arv A ja kirjutame

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = A$$

või

$$\lim_{(x_1,\dots,x_m)\to(p_1,p_2,\dots,p_m)} f(x_1,\dots,x_m) = A.$$

PIIRVÄÄRTUSE LEIDMINE ÜLEMINEKUL POLAARKOORDINAATIDELE

Polaarkoordinaatidele üleminekul kasutame järgmist teisendust:

$$x = r\cos\varphi\,,\ \ y = r\sin\varphi.$$

Kui $(x,y) \to 0$, siis $r \to 0$ iga nurga φ korral ja saame

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Näide. Leiame polaarkoordinaatidele üle minnes piirväärtuse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\,(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 0.$$

PIIRVÄÄRTUSE EKSISTEERIMINE

Arv A on funktsiooni $f(x,y)$ piirväärtuseks punktis M_0 siis ja ainult siis, kui piirprotsessi iga lähenemisteed mööda punktile M_0 annab arvu A.

Kui on vaja näidata, et piirväärtust punktis M_0 ei eksisteeri, tuleb leida kaks erinevat lähenemisteed punktile M_0, mille korral piirväärtused on erinevad.

Näide. Näitame, et järgmist piirväärtust ei eksisteeri

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Läheneme punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-1)}{2x^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Läheneme punktile $(0,0)$ mööda sirget $y = 2x$, siis

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-(2x)^2}{x^2+(2x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x^2}{5x^2} = -\frac{3}{5}.$$

Märkus. Kui argumendid lähenevad punktile (x, y), kus nad ei ole võrdse väärtusega: $x \neq y$, siis tuleks piirväärtuse leidmisel läheneda punktile mööda sellist sirget, mis läbib antud punkti. Näiteks punkti $(-1,1)$ korral võib läheneda punktile mööda sirget $y = x + 2$ või $y = -x$.

PIDEVUS

Definitsioon 3.9.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse **pidevaks punktis (x_0, y_0)**, kui ta on selles punktis määratud ning funktsiooni väärtus punktis (x_0, y_0) võrdub tema piirväärtusega argumendi lähenemisel sellele punktile

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funktsiooni, mis on pidev mingi piirkonna igas punktis, nimetatakse pidevaks selles piirkonnas. Pidevuse tingimuse võib kirjutada ka kujul

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0.$$

Kui funktsioon $f(x, y)$ ei ole pidev punktis (x_0, y_0), siis öeldakse, et funktsioon $f(x, y)$ on katkev selles punktis. Sellel juhul nimetakse punkti (x_0, y_0) funktsiooni $f(x, y)$ katkevuspunktiks.

Teoreem 3.4.
Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Näide 3.5. Näitame, et funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on pidev oma määramispiirkonnas.

Funktsiooni f määramispiirkond on kogu xy-tasand. Igas piirkonnas, kus $x^2 + y^2 \neq 0$, on funktsioon f elementaarfunktsioon ja teoreemi 3.4 põhjal pidev. Kontrollida tuleb funktsiooni f pidevust ainult punktis $(0,0)$. Selleks kasutame pidevuse definitsiooni ja võtame piirväärtuse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0,$$

siis järelikult funktsioon f on pidev ka punktis $(0,0)$, sest piirväärtus argumendi lähenemisel arvule 0 on võrdne funktsiooni väärtusega selles punktis. Seega funktsioon f on pidev oma määramispiirkonnas. Kui piirväärtus ei võrdu funktsiooni väärtusega antud punktis, siis funktsioon on katkev selles punktis.

Definitsioon 3.10.

Funktsiooni $u = f(M)$ nimetatakse **pidevaks punktis M_0**, kui

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Kui funktsioon ei ole pidev punktis M_0, siis funktsiooni nimetatakse **katkevaks punktis M_0**.

3.3. OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x,y)$. Anname muutujale x juurdekasvu Δx, jättes y väärtuse muutmata. Siis funktsioon z saab juurdekasvu (osamuudu)

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Definitsioon 3.11.

Funktsiooni $z = f(x,y)$ esimest järku **osatuletiseks argumendi x järgi** nimetatakse piirväärtust

$$z'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Funktsiooni $z = f(x,y)$ esimest järku **osatuletiseks argumendi y järgi** nimetatakse piirväärtust

$$z'_y = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

Osatuletist argumendi x järgi tähistatakse

$$z'_x,\qquad \frac{\partial z}{\partial x},\qquad f'_x(x,y),\qquad z_x,\qquad f_x(x,y).$$

Osatuletist argumendi y järgi tähistatakse

$$z'_y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y},\qquad f'_y(x,y),\qquad z_y,\qquad f_y(x,y).$$

Osatuletise defineerimisel funktsiooni osamuut $\Delta_x z$ arvutatakse muutumatu y puhul ja funktsiooni osamuut $\Delta_y z$ muutumatu x puhul, võime definitsioonid formuleerida järgnevalt.
Funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{x}$ järgi võetakse tema **tuletis argumendi $\boldsymbol{x}$ järgi**, mis arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{y}$ on **konstantne**.
Analoogiliselt: funktsiooni $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ osatuletise leidmiseks $\boldsymbol{y}$ järgi võetakse tema **tuletis argumendi $\boldsymbol{y}$ järgi**, mis arvutatakse eeldusel, et $\boldsymbol{x}$ on **konstantne**.
Siit on näha, et osatuletiste leidmiseks sobivad ühe muutuja funktsiooni tuletise leidmise eeskirjad, tuleb meeles pidada, millise muutuja järgi osatuletist otsitakse. Tuletame veel meelde reeglid konstandi tuletise leidmiseks: konstandi tuletis on null aga kui konstant on funktsiooni kordajaks, mille järgi osatuletist leiame, siis jääb konstant tuletise ette kordajaks.

$$c' = 0, (cf(x))' = c(f(x))'.$$

Näide 3.6. Leiame funktsiooni $z = x^2 + 3y^2 + 2xy^2$ kõik osatuletised.

Argumendi x järgi osatuletise leidmisel loeme argumendi y konstandiks. Esimeses liidetavas on ainult argumendist x sõltuv funktsioon, seega

$$(x^2)'_x = 2x.$$

Teises liidetavas on ainult argumendist y sõltuv funktsioon, seega

$$(3y^2)'_x = 0.$$

Kolmas liidetav sõltub ka argumendist x, seega tuletise võtmisel jätame konstandi tuletise ette kordajaks, saame

$$(2xy^2)'_x = 2y^2(x)_x{}' = 2y^2.$$

Argumendi y järgi osatuletise leidmisel loeme argumendi x konstandiks. Esimeses liidetavas on ainult argumendist x sõltuv funktsioon, seega

$$(x^2)'_y = 0.$$

Teises liidetavas on ainult argumendist y sõltuv funktsioon, seega

$$(3y^2)'_y = 6y.$$

Kolmas liidetav sõltub mõlemast argumendist, seega tuletise võtmisel jätame konstand tuletise ette kordajaks, saame

$$(2xy^2)'_y = 2x(y^2)'_y = 2x2y = 4xy.$$

Saime funktsiooni z kõik osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y + 4xy.$$

Näide 3.7. Leiame funktsiooni $z = x^2 \sin y$ kõik osatuletised.

$$z'_x = 2x \sin y, \qquad z'_y = x^2 \cos y.$$

Sarnaselt kahe muutuja funktsiooni osatuletise mõistele defineerime m muutuja funktsiooni osatuletised.

Definitsioon 3.12.

Olgu hulk $D \subset \mathbb{R}^m$, funktsioon $f: D \to \mathbb{R}$ ning $P = (x_1, \dots, x_m)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Piirväärtust

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m)}{\Delta x_i}$$

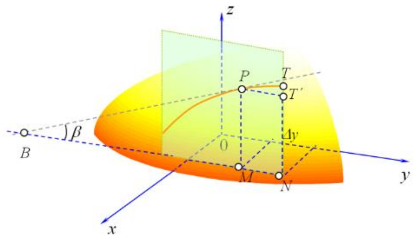
nimetatakse **funktsiooni f osatuletiseks muutuja x_i järgi** punktis P ja tähistatakse $f_x(x_1, \dots, x_m)$ või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m).$$

OSATULETISTE GEOMEETRILINE TÕLGENDUS

Osatuletis $\partial z/\partial y$ võrdub arvuliselt pinna $z = f(x, y)$ ja tasapinna $x = \text{const}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga (joonis).

Osatuletis $\partial z/\partial x$ võrdub arvuliselt pinna $z = f(x, y)$ ja tasapinna $y = \text{const}$ lõikejoone puutuja tõusunurga tangensiga.



Arvutades osatuletised esimest järku osatuletistest, saame **teist järku osatuletised**. Neid tähistatakse järgmiselt

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad f''_{xx}(x,y), \qquad z''_{xx}, \qquad z_{xx}, \qquad f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \qquad f''_{xy}(x,y), \qquad z''_{xy}, \qquad z_{xy}, \qquad f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \qquad f''_{yy}(x,y), \qquad z''_{yy}, \qquad z_{yy}, \qquad f_{yy}(x,y).$$

Näide 3.8. Leiame funktsiooni z kõik teist järku osatuletised, kui

$$z = x^4 - 5x^2y^2 + 6xy + 7.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2 + 6y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -10x^2y + 6x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 10y^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -20xy + 6,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10x^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -20xy + 6.$$

Definitsioon 3.13.
Teist järku **segatuletisteks** nimetatakse osatuletisi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Määratud ja pideva funktsiooni z korral on funktsiooni pidevad segatuletised võrdsed. Kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 3.5.
Kui funktsioon $z = f(x, y)$ ning tema osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

on punktis $M(x, y)$ ning selle mingis ümbruses määratud ja pidevad, siis selles punktis on teist järku segatuletised võrdsed

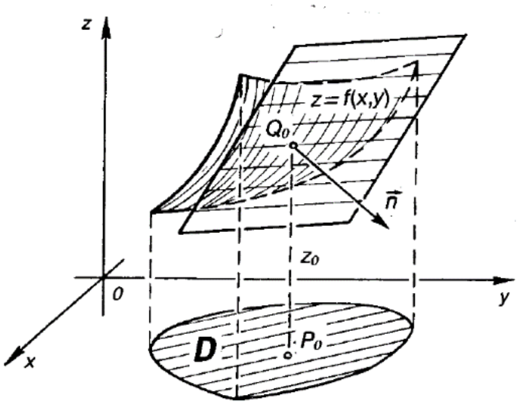
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Definitsioon 3.14.

Funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse **diferentseeruvaks** punktis $P(a, b)$, kui funktsioonil on selles punktis osatuletised määratud ja pidevad.

Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.

Definitsioon 3.15.
Pinna $z = f(x,y)$ **puutujatasandiks** punktis $Q_0(x_0, y_0)$ nimetatakse tasandit, millel asuvad kõik pinna punkti $Q_0(x_0, y_0)$ läbivate joonte puutujad.



Definitsioon 3.16.
Pinna **normaalsirgeks** (normaaliks) punktis $Q_0(x_0, y_0)$ nimetatakse punkti $Q_0(x_0, y_0)$ läbivat sirget, mis on risti puutujatasandiga punktis $Q_0(x_0, y_0)$.

Teoreem 3.6.
Olgu funktsioon $z = f(x,y)$ pidev punkti $P(a,b)$ mingis ümbruses. Kui funktsioon $f(x,y)$ on diferentseeruv punktis $P(a,b)$, siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis $A = (a, b, f(a,b))$. **Puutujatasandi** võrrand on

$$\boldsymbol{z - f(a,b) = f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}.$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni $f(x,y)$ graafikul eksisteerib punktis A puutujatasand, kusjuures see puutujatasand ei ole paralleelne z-teljega, siis funktsioon $f(x,y)$ on diferentseeruv punktis A.

Pinna $z = f(x,y)$ **normaalsirge** punktis $A = (a, b, f(a,b))$ on esitatav kahe võrrandiga:

1) parameetriline võrrand

$$\begin{cases} x = a + t f'_x(a,b) \\ y = b + t f'_y(a,b) \\ z = f(a,b) - t \end{cases}$$

2) kanooniline võrrand

$$\frac{x-a}{f'_x(a,b)} = \frac{y-b}{f'_y(a,b)} = \frac{z - f(a,b)}{-1}.$$

3.4. TÄISDIFERENTSIAAL

Eeldame, et kahe muutuja funktsioon $f(x,y)$ on pidev. Anname argumentidele x ja y juurdekasvud $\Delta x, \Delta y$. Siis funktsioon saab juurdekasvu

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y).$$

Eeldame lisaks, et funktsioonil on punktis (x, y) pidevad osatuletised. Avaldame Δz osatuletiste kaudu. Selleks liidame ja lahutame võrduse paremast poolest liikme $f(x, y + \Delta y)$

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Mõlemates nurksulgudes on ühe muutuja funktsioonid. Rakendame neile Lagrange'i keskväärtusteoreemi

$$[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}\Delta x, \quad \bar{x} \in [x, x + \Delta x],$$

$$[f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y, \quad \bar{y} \in [y, y + \Delta y],$$

Asendame

$$\Delta z = \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}\Delta y.$$

Eelduse kohaselt on osatuletised pidevad (pidevuse definitsioonist ja piirväärtuse omadusest saame)

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \varepsilon_1,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_2,$$

Järelikult

$$\boldsymbol{\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.}$$

Kaks viimast liidetavast on kõrgemat järku lõpmata väikesed suurused võrreldes kahe esimesega ja funktsiooni muudu Δz peaosa moodustavad kaks esimest liiget.
Argumendi diferentsiaaliks nimetatakse argumendi muutu

$$\boldsymbol{dx = \Delta x, dy = \Delta y.}$$

Definitsioon 3.17.

Kahe muutuja funktsiooni juurdekasvu peaosa argumentide juurdekasvude tõkestamatul kahanemisel nimetatakse selle funktsiooni **täisdiferentsiaaliks**. Tähistatakse

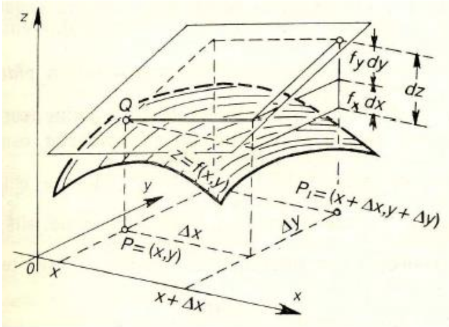
$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

$$dz = z'_x\, dx + z'_y dy.$$

Geomeetriliselt tähendab funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal funktsiooni graafiku puutujatasandi aplikaadi (z-koordinaadi) muutu üleminekul punktist $P(x, y)$ punkti $P_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.
Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali saab kasutada
funktsiooni juurdekasvu ligikaudseks arvutamiseks, sellisel juhul
loetakse

$\boldsymbol{\Delta z \approx dz}$ ehk $\boldsymbol{\Delta z \approx z'_x\, dx + z'_y dy}$.

Selline võrdsustamine on õigustatud, kui argumentide



juurdekasvud on väikesed. Samast valemist on võimalik leida ka funktsiooni uus väärtus $\boldsymbol{f(x+\Delta x, y+\Delta y)}$, selleks avaldame funktsiooni muudu avaldisest

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

funktsiooni uue väärtuse täisdiferentsiaali kaudu järgmiselt

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx z'_x\,dx + z'_y dy,$$

$$\boldsymbol{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + z'_x\,dx + z'_y dy.}$$

Näide 3.9. Leida funktsiooni $z = 3x^2 + \cos y$ täisdiferentsiaal.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y, \quad dz = 6x\,dx - \sin y\,dy.$$

Näide 3.10. Olgu silindri kõrgus 25 cm ja raadius 10 cm. Kui palju muutub silindri ruumala, kui kõrgust suurendada 2 mm ja põhja raadiust vähendada 1 mm võrra?

Silindri ruumala $V = \pi r^2 h$, $V(10{,}25) = \pi \cdot 100 \cdot 25 = 2500\pi$.

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$$

$$dV = \pi r^2\,dh + 2\pi r h\,dr.$$

$$r = 10, \qquad \Delta r = -0{,}1 \text{ (cm)}, \quad h = 25, \Delta h = 0{,}2 \text{ (cm)}.$$

$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h.$$

$$\Delta V \approx \pi r^2\,\Delta h + 2\pi r h \Delta r = \pi(100 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 0{,}1) = -30\pi.$$

Ruumala väheneb 30π võrra. Uue ruumala ligikaudne väärtus on

$$V_1 = V + \Delta V \approx 2500\pi - 30\pi = 2470\pi.$$

Uue ruumala täpse väärtuse leidmiseks kasutame seost $V = \pi r^2 h$, saame

$$V(10 - 0{,}1;\ 25 + 0{,}2) = \pi \cdot 9{,}9^2 \cdot 25{,}2 = 2469{,}85\pi.$$

Näide 3.11. Arvutame täisdiferentsiaali abil ligikaudselt avaldise $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4$ väärtuse.

Kasutame valemit

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + z'_x\,dx + z'_y dy.$$

Leiame kõigepealt funktsiooni kuju ja osatuletised argumentide järgi, seejärel argumentide arvulised väärtused ja juurdekasvud.

$$f(x,y) = x^3y^4, \qquad f'_x = 3x^2y^4, \quad f'_y = 4x^3y^3,$$

$$x = 3, \qquad \Delta x = -0{,}03, \qquad y = 3, \qquad \Delta y = 0{,}01,$$

$$f(3,3) = 2187, \qquad f'_x(3,3) = 2187, \qquad f'_y(3,3) = 2916.$$

Funktsiooni uue väärtuse ligikaudne suurus on

$$2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 \approx 2187 + 2187(-0{,}03) + 2916 \cdot 0{,}01 = 2150{,}55.$$

Täpne väärtus esitatuna tuhandikeni on $2{,}97^3 \cdot 3{,}01^4 = 2150{,}4796\ldots$

Täisdiferentsiaal m muutuja funktsiooni $u = f(x_1, \dots, x_m)$ jaoks punktis P_0 avaldub kujul

$$\boldsymbol{df(P_0) = f_{x_1}(P_0)dx_1 + f_{x_2}(P_0)dx_2 + \cdots + f_{x_m}(P_0)dx_m}.$$

3.5. KÕRGEMAT JÄRKU OSATULETISED

Olgu antud kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$. Teist järku osatuletiste saamiseks leiame osatuletised esimest järku osatuletistest argumentide x ja y järgi.

Teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Kasutatakse tähistust

$$f''_{xx}(x, y), f''_{yy}(x, y), f''_{yx}(x, y), f''_{xy}(x, y).$$

Teist järku osatuletisi võib omakorda diferentseerida argumentide x ja y järgi, saame kolmandat järku osatuletised

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}.$$

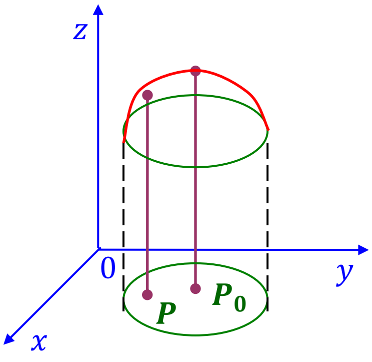
3.6. KAHE MUUTUJA FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID. OPTIMISEERIMINE

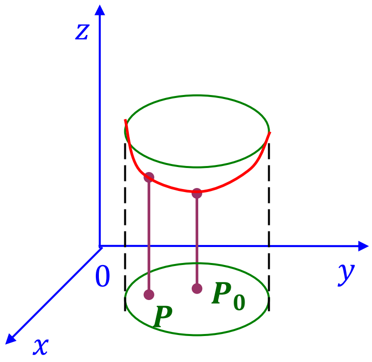
Kui ühe muutuja funktsioon f on punktis x_0 kaks korda diferentseeruv, siis funktsioonil f on argumendi väärtusel x_0 lokaalne maksimum, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$,. ja lokaalne miinimum, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$.
Punkti ümbruse mõistest järeldub, et punkt $P(x_0 + h, y_0 + k)$ kuulub punkti P_0 r–ümbrusesse siis ja ainult siis, kui $h^2 + k^2 < r^2$.
Tõepoolest, kui leiame punktide $P_0(x_0, y_0)$ ja $P(x_0 + h, y_0 + k)$ vahelise kauguse, saame

$$\sqrt{(x_0 + h - x_0)^2 + (y_0 + h - y_0)^2} < r, \qquad \sqrt{h^2 + k^2} < r.$$

Olgu funktsioon f määratud punkti P_0 mingis ümbruses.

Definitsioon 3.18.
Funktsioonil $z = f(x, y)$ on lokaalne maksimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$.





Definitsioon 3.19.

Funktsioonil $z = f(x,y)$ on lokaalne miinimum punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui leidub selle punkti küllalt väike ümbrus, mille kõikides punktides $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Kui funktsioonil on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis kehtivad tingimused:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Tõepoolest, kui kahe muutuja funktsioonil on punktis (x_0, y_0) ekstreemum, siis ka ühe muutuja funktsioonil $F(x, y_0)$ on punktis $x = x_0$ ekstreemum ja järelikult tema tuletis argumendi x järgi on võrdne nulliga. Samuti peab ekstreemumpunktis $x = x_0$ osatuletis argumendi y järgi olema võrdne nulliga. **Saadud tingimused ei ole piisavad tingimused ekstreemumi olemasoluks.**

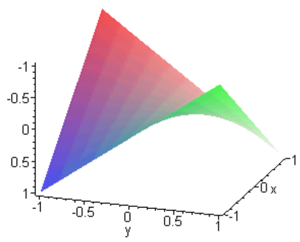
Definitsioon 3.20.

Statsionaarseks punktiks nimetatakse punkti, mille korral funktsiooni kõik osatuletised selles punktis on võrdsed nulliga.

Näide 3.12. Leiame funktsiooni $z = xy$ statsionaarsed punktid.

Antud funktsiooni korral on tarvilikud tingimused on täidetud, aga ekstreemumi ei ole:

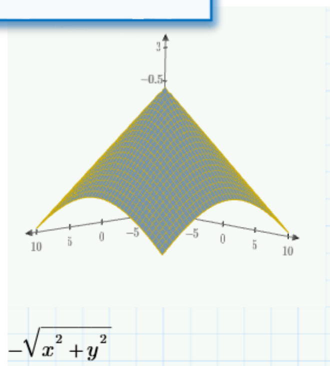
$$z_0(0,0)\colon\ z'_x(z_0) = 0, \quad z'_y(z_0) = 0.$$



Definitsioon 3.21.

Kriitilisteks punktideks nimetatakse määramispiirkonna punkte, mis on statsionaarsed punktid või kus osatuletist ei eksisteeri või on osatuletised lõpmatud.

Näiteks funktsioonil $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ on kriitiliseks punktiks $(0,0)$ (joonis).



Funktsiooni kriitiline punkt võib asetseda ka määramispiirkonna rajajoonel. **Funktsioonil võib lokaalne ekstreemum esineda vaid tema kriitilises punktis.**

Teoreem 3.7. Tarvilik ja piisav tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Kui funktsioonil $z = f(x,y)$ on olemas punkti (x_0, y_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis (x_0, y_0), kus

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0,$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0,$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$,
lokaalne miinimum, kui selles punktis $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$.

Kui $W(x,y) < 0$, siis funktsioonil $f(x,y)$ selles punktis lokaalset ekstreemumit ei ole. Kui $W(x,y) = 0$, siis tuleb funktsiooni käitumist uurida, kas Δz säilitab märki punkti (x_0, y_0) ümbruses.
Sadulpunktiks nimetatakse diferentseeruva funktsiooni $f(x,y)$ kriitilisele punktile (a,b) vastavat punkti $(a, b, f(a,b))$, mille igas ümbruses on punkte, kus $f(x,y) > f(a,b)$ ja punkte, kus $f(x,y) < f(a,b)$.

Näide 3.13. Leida funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ lokaalsed ekstreemumid.

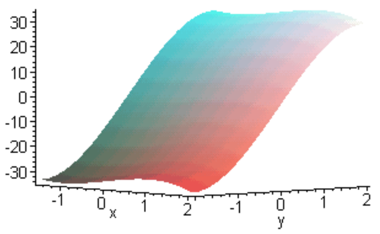
$$f'_x = 3 - 3x^2, \;\; 3x^2 = 3\,, \quad x = \pm 1,$$

$$f'_y = 24 - 6y^2, \;\; 6y^2 = 24, \;\; y = \pm 2.$$

Statsionaarsed punktid on: $(1{,}2)$, $(1,-2)$, $(-1{,}2)$, $(-1,-2)$. Leiame funktsiooni W avaldise ning selle väärtuse saadud neljas statsionaarses punktis, et kontrollida ekstreemumi olemasolu nendes punktides.

$f''_{xx} = -6x, \quad f''_{yy} = -12y, \quad f''_{xy} = 0.$

$W = (-6x)(-12y) - 0^2 = 72xy.$



Punktis $(1,-2)$ saame $W(1,-2) = 72 \cdot 1 \cdot (-2) < 0$ ja punktis $(-1{,}2)$ saame $W(-1{,}2) = 72 \cdot (-1) \cdot 2 < 0$, seega nendes punktides ekstreemumit ei ole. Punktis $(1{,}2)$ on lokaalne maksimumpunkt, kuna $W(1{,}2) = 72 \cdot 1 \cdot 2 > 0$ ning $f''_{xx} = -6x = -6 < 0$.
Funktsiooni väärtus lokaalses maksimumpunktis on

$$z(1{,}2) = 3 + 48 - 1 - 16 = 34,$$

Punktis $(-1,-2)$ on lokaalne miinimumpunkt, kuna $W(-1,-2) = 72 \cdot (-1) \cdot (-2) > 0$ ning $f''_{xx} = -6x = 6 > 0$.

Funktsiooni väärtus lokaalses miinimumpunktis on $z(-1,-2) = -3 - 48 + 1 + 16 = -34$.
Seega funktsiooni $z = 3x + 24y - x^3 - 2y^3$ lokaalsed ekstreemumid on

$$z_{\mathrm{locmin}}(-1,-2) = -34, \qquad z_{\mathrm{locmax}}(1, 2) = 34.$$

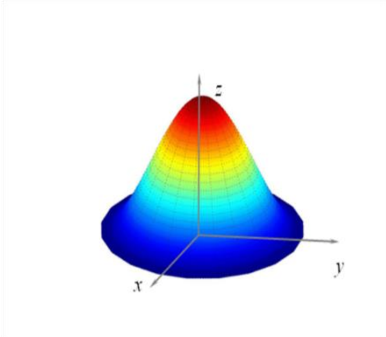
Näide 3.14. Leiame funktsiooni $z = \cos\,(y^2 + x^2)$ lokaalsed ekstreemumid.

Leiame esimest järku osatuletised

$$z'_x = -2x \sin\,(y^2 + x^2), \quad z'_y = -2y \sin\,(y^2 + x^2).$$

Leiame statsionaarsed punktid

$$\begin{cases} -2x \sin\,(y^2 + x^2) = 0, \\ -2y \sin\,(y^2 + x^2) = 0. \end{cases}$$



Ekstreemumpunktiks on punkt koordinaatidega $(0{,}0)$. Leiame teist järku osatuletised

$$z''_{xx} = -2\sin(y^2 + x^2) - 4x^2\cos(y^2 + x^2),$$

$$z''_{yy} = -2\,\sin\,(y^2 + x^2) - 4y^2\cos(y^2 + x^2),$$

$$z''_{xy} = -4xy\cos(y^2 + x^2).$$

Kontrollime ekstreemumi olemasoluks piisavust, selleks leiame funktsiooni W punktis (0,0).

$$W(x,y) = (-2\sin(y^2 + x^2) - 4x^2\cos(y^2 + x^2))(-2\sin(y^2 + x^2) - 4y^2\cos(y^2 + x^2)) - \left(-4xy\cos(y^2 + x^2)\right)^2.$$

Saame $W(0,0) = 0$, seega teoreemi 3.7 põhjal otsustada ei saa, tuleb funktsiooni täiendavalt uurida. Jooniselt on näha, et tegemist on maksimumpunktiga.

Kui **kolme muutuja funktsioonil** $\boldsymbol{u = f(x,y,z)}$ on olemas punkti (x_0, y_0, z_0) ümbruses esimest ja teist järku osatuletised, siis punktis $\boldsymbol{(x_0, y_0, z_0)}$, kus

$$\boldsymbol{f'_x(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad f'_y(x_0,y_0,z_0) = 0, \qquad f'_z(x_0,y_0,z_0) = 0}$$

on lokaalne ekstreemum juhul, kui selles punktis on täidetud tingimus

$$\boldsymbol{W(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - \left(f''_{xy}\right)^2 > 0,}$$

sealjuures on punktis (x_0, y_0, z_0)

lokaalne maksimum, kui selles punktis $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) < 0,\ A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} < 0,}$

lokaalne miinimum, kui $\boldsymbol{f''_{xx}(x_0,y_0,z_0) > 0,\ A = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} > 0.}$

Definitsioon 3.22.

Funktsiooni f suurimat väärtust piirkonnas D nimetatakse funktsiooni f **globaalseks maksimumiks**.
Funktsiooni f vähimat väärtust piirkonnas D nimetatakse funktsiooni f **globaalseks miinimumiks**.
Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse ühise nimetusega **globaalsed ekstreemumid**.

Globaalsete ekstreemumite leidmiseks võib kasutada järgmist eeskirja:

1) leiame funktsiooni f väärtused kriitilistes punktides (lokaalsed ekstreemumid),
2) leiame funktsiooni f väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides piirkonna rajapunktides,
3) neist leitud väärtustest suurim on funktsiooni f globaalne maksimum piirkonnas D ja vähim on funktsiooni f globaalne miinimum piirkonnas D.

Kui rajajooneks on kolmnurk, siis leiame funktsiooni väärtused kolmnurga otspunktides. Lisaks vaatame igat külge eraldi ühe muutuja funktsioonina, leiame iga külje statsionaarsed punktid ning funktsiooni väärtused nendes punktides. Kõigi leitud funktsiooni väärtuste (kaasa arvatud lokaalsete ekstreemumite oma) suurim ja vähim väärtus ongi globaalseteks ekstreemumiteks. Sarnaselt toimime siis, kui rajajoon on ringjoon. Leiame ringjoone võrrandi jaoks kaks ühemuutuja funktsiooni, kus asendame x^2 ja y^2 ringjoone võrrandist (näide 3.15).

Definitsioon 3.23.

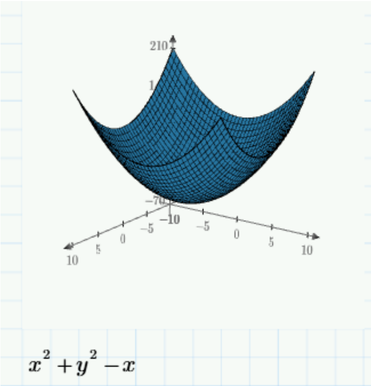
Kui funktsioon f on antud piirkonnas D, siis funktsioonil on punktis $P_0 \in D$ **globaalne maksimum**, kui piirkonna D igas punktis P kehtib võrratus

$$f(P) \leq f(P_0)$$

ja **globaalne miinimum**, kui piirkonna D igas punktis kehtib võrratus

$$f(P) \geq f(P_0).$$

Näide 3.15. Leiame funktsiooni $z(x, y) = x^2 + y^2 - x$ globaalsed ekstreemumid piirkonnas $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$.



Leiame funktsiooni f esimest ja teist järku osatuletised

$$z'_x = 2x - 1, \qquad z'_y = 2y, \qquad z''_{xx} = 2, \qquad z''_{yy} = 2, \qquad z''_{xy} = z''_{yx} = 0.$$

Võrdsustades kaks esimest võrrandit nulliga, saame statsionaarseks punktiks

$$x = \frac{1}{2}, y = 0.$$

Funktsiooni väärtus selles punktis on

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}.$$

Piirkonna D rajajooneks on ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguspunktis ja raadiusega 1. Rajajoonel kehtib võrrand $x^2 + y^2 = 1$ ehk $y^2 = 1 - x^2$. Asendame funktsiooni $z(x, y)$ võrrandis suuruse y^2 avaldisega rajajoonel, saame rajajoone jaoks seose $f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = 1 - x$, kus $x \in [-1, 1]$. Funktsioonil f statsionaarseid punkte ei ole. Leiame $h(\pm\sqrt{1 - y^2}, y) = 1 \mp \sqrt{1 - y^2}$, kus $y \in [-1, 1]$. Statsionaarseks punktiks funktsioonile h saame mõlemal juhul $y = 0$, siis $x = -1, x = 1$. Leiame rajajoonel olevad funktsiooni väärtused punktides $(-1, 0)$ ja $(1, 0)$. Suurim väärtus rajajoonel on $z(-1, 0) = 2$ ja vähim $z(1,0) = 0$. Lõpuks võrdleme saadud funktsiooni väärtuseid lokaalsete ekstreemumitega ja valime kõige suurema ning kõige väiksema väärtuse, mis on globaalseteks ekstreemumiteks. Seega funktsiooni globaalsed ekstreemumid on

$$z_{\min}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, z_{\max}(-1, 0) = 2.$$

Definitsioon 3.24.

Funktsiooni $\boldsymbol{f(x, y)}$ optimiseerimiseks nimetatakse funktsiooni maksimumi ja miinimumi (ekstreemumite) leidmist.

Paljudes optimiseerimisülesannetes on vaja rahuldada ka lisatingimused, mis kujutavad endast ühte või mitut muutujate vahelist seost. Lihtsamatel juhtudel saab kasutada muutujate elimineerimise võtet, kus üks või mitu lisatingimust võimaldavad avaldada ühe tundmatu teiste kaudu ja asendada võrranditesse.

3.6.1. TINGLIKUD EKSTREEMUMID. LAGRANGE'i MEETOD

Lagrange'i kordajate meetod on lisakitsendustega optimiseerimisülesande lahendusmeetod. Ülesande lahendamiseks tuleb moodustada Lagrange'i funktsioon (laiendatud funktsioon)

$$\boldsymbol{J = f + \lambda g},$$

kus f on funktsioon, $\boldsymbol{g}$ **lisatingimus** kujul $g = 0$ ja $\boldsymbol{\lambda}$ on tundmatu **Lagrange'i kordaja**, mille peame leidma. Lahendamiseks leiame osatuletised funktsioonist J kõigi tundmatute järgi, ning võrdsustame osatuletised nulliga. Saame järgmise süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0, i = 1,2, \dots, n, \\ g = 0. \end{cases}$$

Saadud võrrandisüsteemist leiame **tinglikud statsionaarsed punktid**.
Seejuures eeldame, et nende punktide ümbrustes, mis on saadud süsteemi lahenditeks, on funktsioonide f ja J esimest järku osatuletised pidevad.

Definitsioon 3.25.

Tinglikuks kriitiliseks punktiks nimetatakse punkti, kui see punkt on statsionaarne punkt või punkte, mis rahuldavad lisatingimust ja kus funktsioonide f ja J osatuletised ei ole pidevad.

Funktsioonil võib **tinglik lokaalne ekstreemum** esineda vaid tema tinglikus kriitilises punktis. Kui Lagrange'i funktsioonil J on tinglikus statsionaarses punktis vastava $\lambda = \lambda_0$ korral lokaalne või globaalne ekstreemum, siis funktsioonil f on selles punktis vastav tinglik lokaalne või globaalne ekstreemum.

Leiame lokaalne ekstreemumi kahe muutuja funktsioonile $f(x, y)$, mis rahuldab lisatingimust $g(x, y) = 0$. Siis Lagrange'i funktsioon on kujul $J = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ ja statsionaarsed punktid leiame süsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0, \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ ja lisakitsenduse $g(x, y, z) = 0$ jaoks on Lagrange'i funktsioon kujul $J = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$ ja statsionaarsete punktide leidmiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Kokku neljast võrrandist leiame ekstreemumpunkti kõik koordinaadid (x, y, z) ja Lagrange'i kordaja λ väärtuse.

Märkus. Kui võtame osatuletise ka Lagrange'i kordaja λ järgi, saame võrrandi $g(x,y,z) = 0$, seega võime lisatingimuse asendada osatuletisega:

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = 0.$$

Näide 3.16. Leiame lokaalsed tinglikud ekstreemumid funktsioonile $f = x^2 + y^2$ lisakitsendusel $x + y = 4$.

Moodustame funktsiooni $J = f + \lambda g$, mis sisaldab summat esialgsest funktsioonist ja Lagrange'i kordajaga korrutatud lisatingimusest

$$J = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 4).$$

Võtame osatuletised tundmatute järgi, saame

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + \lambda\,, \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + \lambda\,. \end{cases}$$

Võrdsustame saadud osatuletised nulliga, lisakitsendusega koos saame lahendamiseks süsteemi

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Süsteemi lahenditeks on $x = 2, y = 2, \lambda = -4$. Kuna $f''_{xx} = 2 > 0$, siis leitud punkt võib olla lokaalseks miinimumpunktiks. Kui uurime ekstreemumi piisavaid tingimusi, selgub, et

$$W = 2 \cdot 2 - 0 > 0,$$

seega tegemist on lokaalse ekstreemumiga. Leitud punktile $(2,2)$ vastav funktsiooni väärtus on 8. Seega funktsioonil on lokaalne tinglik miinimum $f_{\text{locmin}}\,(2,2) = 8$.

Üldjuhul olgu antud n muutuja funktsioon $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ja m lisatingimust kujul

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_k, \qquad k = 1,2, \dots, m\,,$$

kus $a_1, a_2, \dots, a_m$ on konstandid. Tuleb konstrueerida funktsioon

$$\boldsymbol{J} = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ \dots + \lambda_m g_m = \boldsymbol{f} + \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\lambda_k g_k}.$$

Osatuletised kõigi argumentide järgi avalduvad

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \ \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i},$$

kus $i = 1, 2, \dots, n$. Võrdsustades osatuletised nulliga ja lisades lisakitsendused, saame lahendamiseks järgmise süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2, \dots, n, \\ g_k = a_k, \quad k = 1,2, \dots, m. \end{cases}$$

Tundmatuid on kokku $m+n$: argumente x_i on n ja Lagrange'i kordajaid λ_i on m.

Näide 3.17. Vaatame ruutvorme n muutujaga

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_i x_j \,,$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1,$$

kus $C_{ij} = C_{ji}$ on konstandid. Juhul $n = 3$ saame

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} C_{ij} x_i x_j =$$

$$= C_{11}x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + 2C_{13}x_1x_3 + C_{22}x_2^2 + 2C_{23}x_2x_3 + C_{33}x_3^2,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Lagrange'i kordajate meetod

$$J = (C_{11} - \lambda)x_1^2 + 2C_{12}x_1x_2 + 2C_{13}x_1x_3 + (C_{22} - \lambda)x_2^2 + 2C_{23}x_2x_3 + (C_{33} - \lambda)x_3^2,$$

$$\begin{cases} (C_{11} - \lambda)x_1 + C_{12}x_2 + C_{13}x_3 = 0 \\ C_{21}x_1 + (C_{22} - \lambda)x_2 + C_{23}x_3 = 0 \\ C_{31}x_1 + C_{32}x_2 + (C_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Saime karakteristliku võrrandisüsteemi.

Näide 3.18. Leiame punktid ellipsil $17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100$, mis on kõige lähemal ja kõige kaugemal koordinaatide alguspunktist.

Ellipsi keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis. Peame leidma selliste punktide koordinaadid ellipsi lühema ja pikema pooltelje jaoks, mis annavad lühima ja pikima kauguse koordinaatide alguspunktist. Selleks leiame kauguse koordinaatide alguspunkti ja ellipsi suvalise punkti vahel. Tähistame suvalise ellipsi punkti tähega $P(x, y)$, siis kaugus avaldub

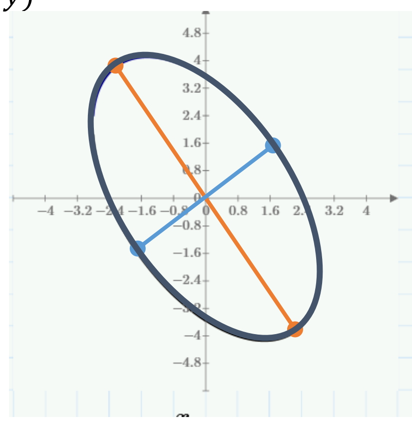
$$d(x, y) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Et ekstreemumi leidmine oleks lihtsam, võtame funktsiooniks $f(x, y)$ kauguse ruudu

$$(d(x, y))^2 = f(x, y) = x^2 + y^2,$$

lisakitsenduseks võtame ellipsi võrrandi, kuna otsitavad punktid peavad olema ellipsil

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100.$$



Seega funktsioon J saab kuju

$$J = x^2 + y^2 + \lambda(17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100).$$

Leiame osatuletised kõigi tundmatute järgi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial J}{\partial x} = 2x + 34\lambda x + 12\lambda y\,, \\ \dfrac{\partial J}{\partial y} = 2y + 12\lambda x + 16\lambda y\,, \\ \dfrac{\partial J}{\partial \lambda} = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100\,. \end{cases}$$

Saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x + \lambda(34x + 12y) = 0\,, \\ 2y + \lambda(12x + 16y) = 0\,, \\ 17x^2 + 12xy + 8y^2 = 100\,. \end{cases}$$

Esimesest kahest võrrandist avaldame Lagrange'i kordaja λ ja paneme mõlemad avaldised omavahel võrduma, saame

$$\frac{-2x}{34x + 12y} = \frac{-2y}{12x + 16y}, \qquad 12x^2 + 16xy = 34xy + 12y^2.$$

Lihtsustades saame

$$8x^2 - 12xy - 8y^2 = 0.$$

Liites saadud võrrandi juurde viimasele süsteemi võrrandile, saame

$$25x^2 = 100, \qquad x = \pm 2.$$

Edasi leiame argumendi y väärtused. Kui $x = 2$, siis

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

kust saame

$$(y - 1)(y + 4) = 0 \text{ ehk } y = 1, y = -4.$$

Kui $x = -2$, siis

$$y^2 - 3y - 4 = 0,$$

kust saame

$$(y + 1)(y - 4) = 0 \text{ ehk } y = -1, y = 4.$$

Kokkuvõttes oleme saanud neli statsionaarset punkti: $(2, 1), (-2, -1), (2, -4)$ ja $(-2, 4)$. Leiame kõik teist järku osatuletised

$$\begin{cases} J''_{xx} = 2 + 34\lambda, \\ J''_{yy} = 2 + 16\lambda, \\ J''_{xy} = 12\lambda. \end{cases}$$

Kuna $J''_{xx}(2,1) = J''_{xx}(-2,-1) = 1.2 > 0$, seega leitud punktid võivad olla lokaalsed tinglikud miinimumpunktid, $J''_{xx}(2,-4) = J''_{xx}(-2,4) = -1.2 < 0$, seega leitud punktid võivad olla lokaalsed tinglikud maksimumpunktid. Kuna $W(2,1) = W(-2,-1) = W(2,-4) = W(-2,4) = 0$, siis teoreemi 3.7 põhjal me ei saa otsustada, kas need punktid osutuvad lokaalseteks tinglikeks ekstreemumiteks. Tegemist on tinglike globaalsete maksimumide ja miinimumidega. Seega ellipsil olevad punktid $(2, 1)$ ja $(-2, -1)$ on kõige lähemal koordinaatide alguspunktile, kaugus koordinaatide alguspunktist on $d = \sqrt{2^2 + 1^2} =$

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$. Ellipsi punktid $(2,-4)$ ja $(-2,4)$ on kõige kaugemal koordinaatide alguspunktist, vastav kaugus on $d=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=\sqrt{20}$.

3.7. VÄHIMRUUTUDE MEETOD

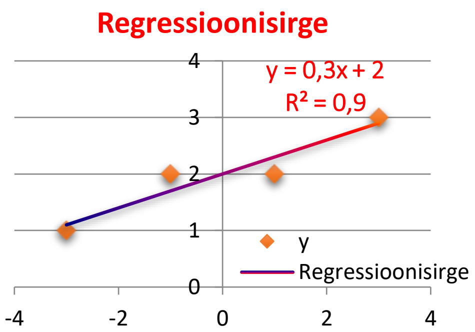
Kui ei ole antud funktsiooni analüütilist esitust, vaid on uurimistulemused tabeli kujul (näiteks katseandmed)

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

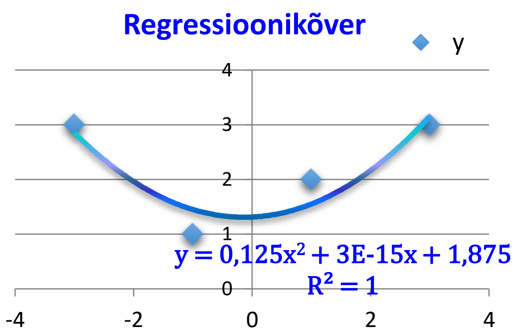
Tahame saada antud sõltuvuse ligikaudset esitust valemi kujul $\boldsymbol{y=f(x)}$. Selleks saame tuletada ligikaudse valemi. **Vähimruutude meetodi idee** seisneb selles, et **parimaks valemiks, mis esitab katseliselt saadud sõltuvust, peetakse seda, mille puhul katsel saadud väärtuste ja valemi järgi arvutatud väärtuste vahede ruutude summa on vähim**.

Kõigepealt tuleb ette anda funktsiooni $y=f(x)$ kuju, mis sisaldab teatava arvu parameetreid. Nende parameetrite leidmiseks kasutame vähimruutude meetodit. Milline funktsioon valida, selleks tuleks katseandmed kanda joonisele. Paarid $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$ esitavad punkte xy tasandil. Kui graafikul on näha, et punktid on grupeerunud järgmisel viisil:

- teatud **sirge** lähedale (joonis 3.1), siis võib eeldada, et x ja y vahel on lineaarne sõltuvus, mis on esitatav valemiga $\boldsymbol{y=ax+b}$, kus $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$ on otsitavad parameetrid;
- mingi **kõvera** ümbruses (joonis 3.2), siis on tegemist **ruutsõltuvusega** $\boldsymbol{y=ax^2+bx+c}$, kus otsitavad $\boldsymbol{a,b}$ ja $\boldsymbol{c}$ leiame vähimruutude meetodil;

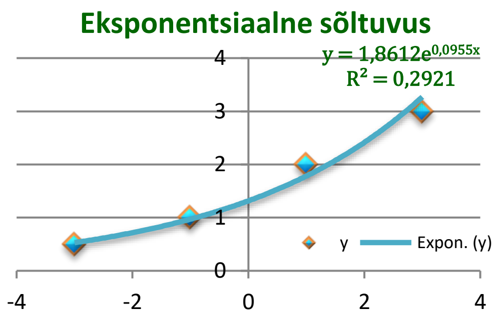


Joonis 3.1.



Joonis 3.2.

- **eksponentsiaalne** sõltuvus (joonis 3.3) $\boldsymbol{y=ab^x}$ kus otsitavad on $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$.



Joonis 3.3.

LINEAARNE REGRESSIOON

Olgu antud empiiriline valem kujul

$$y = ax + b.$$

Leiame kordajad a ja b tingimusest, et sirge tuleb tõmmata nii, et **empiiriliselt saadud punktide ordinaatide ja samadele abstsissidele vastavate sirgete punktide ordinaatide vahede ruutude summa on minimaalne**, ehk

$$u = (y_1 - (ax_1 + b))^2 + (y_2 - (ax_2 + b))^2 + \ldots + (y_n - (ax_n + b))^2 \to \min$$

Saadud summat võib vaadelda kui **kahe muutuja funktsiooni** a ja b suhtes ((x_k, y_k) on etteantud). Tuleb leida funktsiooni $u = u(a, b)$ miinimum. Tarvilik tingimus selleks on osatuletiste nulliga võrdumine:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0.$$

Leiame vastavad osatuletised a ja b järgi

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2(y_1 - (ax_1 + b))(-x_1) + 2(y_2 - (ax_2 + b))(-x_2) + \ldots + 2(y_n - (ax_n + b))(-x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2(y_1 - (ax_1 + b))(-1) + 2(y_2 - (ax_2 + b))(-1) + \ldots + 2(y_n - (ax_n + b))(-1).$$

Võrdsustades osatuletised nulliga, saame otsitavate a ja b leidmiseks lineaarvõrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2(y_1 - (ax_1 + b))(-x_1) + 2(y_2 - (ax_2 + b))(-x_2) + \ldots + 2(y_n - (ax_n + b))(-x_n) = 0, \\ 2(y_1 - (ax_1 + b))(-1) + 2(y_2 - (ax_2 + b))(-1) + \ldots + 2(y_n - (ax_n + b))(-1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (ax_1 + b - y_1)x_1 + (ax_2 + b - y_2)x_2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)x_n = 0, \\ (ax_1 + b - y_1) + (ax_2 + b - y_2) + \ldots + (ax_n + b - y_n) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + b(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \\ a(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + bn = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i\,. \end{cases}$$

Saadud süsteemi nimetatakse **normaalvõrrandite süsteemiks**. Leiame siit a ja b ning asetame sirge võrrandisse $y = ax + b$. Seda nimetatakse ka **lineaarseks regressiooniks**. Kontrollime, kas on tegemist miinimumiga ja kas ekstreemumi piisav tingimused on täidetud.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \ldots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0\,,$$

Kuna $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} > 0,$ on tegemist miinimumiga.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartzi-Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2, \qquad (y_i = 1).$$

REGRESSIOONIKÕVER

Olgu x ja y vaheline seos kirjeldatav ruutfunktsioonina

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}.$$

Leiame kordajad a, b ja c vähimruutude meetodi abil analoogselt lineaarse regressiooniga

$$u = (y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c))^2 + (y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c))^2 + \ldots + (y_n - (ax_n^2 + bx_n + c))^2,$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2, \qquad u = u(a, b, c),$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 2(y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c))(-x_1^2) + 2(y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c))(-x_2^2) + \ldots$$
$$+2(y_n - (ax_n^2 + bx_n + c))\left(-x_n^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = 2(y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c))(-x_1) + 2(y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c))(-x_2) + \cdots$$
$$+2(y_n - \left(ax_n^2 + bx_n + c\right))(-x_n),$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = 2(y_1 - (ax_1^2 + bx_1 + c))(-1) + 2(y_2 - (ax_2^2 + bx_2 + c))(-1) + \cdots$$
$$+2(y_n - \left(ax_n^2 + bx_n + c\right))(-1).$$

Kokkuvõttes saame süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))(-x_i^2), \\ \dfrac{\partial u}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))(-x_i), \\ \dfrac{\partial u}{\partial c} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))(-1). \end{cases}$$

Funktsiooni $\boldsymbol{u = u(a, b, c)}$ miinimumi tarvilikud tingimused on:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial c} = 0.$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(-y_i x_i^2 + a x_i^4 + b x_i^3 + c x_i^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} 2(-y_i x_i + a x_i^3 + b x_i^2 + c x_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} 2(-y_i + a x_i^2 + b x_i + c) \qquad = 0. \end{cases}$$

Süsteem kordajate leidmiseks:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i}\,, \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}\,, \\ \boldsymbol{a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n \quad = \sum_{i=1}^{n} y_i}\,. \end{cases}$$

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = 2x_1^4 + 2x_2^4 + \ldots + 2x_n^4 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^4 > 0,$$

Kuna $\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} > 0$, on tegemist miinimumiga.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b^2} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 2x_n^2 = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial c^2} = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial b} = 2(x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial a \partial c} = 2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial b \partial c} = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

EKSPONENTSIAALNE SÕLTUVUS

Otsime funktsiooni kujul

$$\boldsymbol{y = ab^x},$$

otsitavateks on parameetrid a ja b. Logaritmime ja kasutame logaritmi omadusi:

$$\log y = \log(ab^x),$$

$$\log y = \log a + x \log b.$$

Näeme, et $\log y$ sõltub argumendist x lineaarselt. Leiame parameetrid kujul $\log a$, $\log b$

$$u = (\log y_1 - (x_1 \log b + \log a))^2 +$$

$$+(\log y_2 - (x_2 \log b + \log a))^2 + \ldots + (\log y_n - (x_n \log b + \log a))^2,$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} (\log y_i - (x_i \log b + \log a))^2,$$

$$u = u(\log a, \log b).$$

Miinimumi tarvilikud tingimused

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial(\log b)} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log a)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial(\log b)} = \sum_{i=1}^{n} 2[\log y_i - (x_i \log b + \log a)] \cdot (-x_i),$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i \log b + n\log a & = \sum_{i=1}^{n} \log y_i\,, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \log b + \sum_{i=1}^{n} x_i \log a & = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \log a} & \boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} \log y_i}\,, \\ \boldsymbol{\log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^{n} x_i} & \boldsymbol{= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \log y_i}\,. \end{cases}$$

Saadud süsteemist saab leida $\boldsymbol{\log a}$ ja $\boldsymbol{\log b}$, nendest avaldada otsitavad $\boldsymbol{a}$ ja $\boldsymbol{b}$.

Piisavus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)^2} = 2n, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial(\log b)^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial(\log a)\partial(\log b)} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$W = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot 2n - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Schwartzi-Bunjakowski võrratus

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2, \qquad (y_i = 1).$$

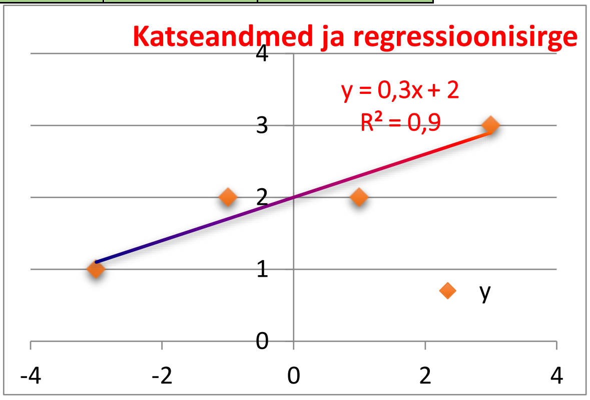
Näide 3.19. Katse tulemusel saadi järgmised x ja y väärtused:

x	-3	-1	1	3
y	1	2	2	3

Leiame sirge võrrandi, mis väljendaks sõltuvust $y = ax + b$. Saadud seose põhjal prognoosime $y(2)$. Arvutuste lihtsustamiseks on mõistlik paigutada lähteandmed koos tehetega tabelisse.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
	-3	1	9	-3
	-1	2	1	-2
	1	2	1	2
	3	3	9	9
Summa	**0**	**8**	**20**	**6**
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$



Saime süsteemi

$$\begin{cases} 20a + 0b = 6, \\ 0\,a + 4b = 8. \end{cases}$$

Lahenditeks on

$$\begin{cases} a = \dfrac{6}{20} = 0{,}3, \\ b = \dfrac{8}{4} = 2. \end{cases}$$

Seega regressioonisirge võrrand on $y = 0{,}3x + 2$. Argumendi väärtuse 2 korral prognoositav väärtus on

$$y(2) = 0{,}3 \cdot 2 + 2 = 2{,}6.$$

Arvutused on lihtsalt teostatavad näiteks Microsoft Exceli tabelarvutusprogrammi kasutades, pannes paika esimesed valemid ja kopeerides valemid kõikide argumendi väärtuste jaoks. Graafikule saab lisada regressioonisirge, kui valida **Scatter** tüüpi graafik (ainult punktid) ja graafikul parema hiireklahviga katseandmete peal valida avanevast rippmenüüst **Add Trendline**. Tabelarvutusprogrammis Microsoft Excel on olemas funktsioonid regressioonisirge kordajate a ja b arvutamiseks, need on vastavalt $slope(x, y)$ ja $intercept(x, y)$, kus

argumentide x ja y asemele tuleb märkida piirkond vastavate argumentide arvuliste väärtuste asukohaga.
Täpselt samal kujul on olemas funktsioonid ka näiteks inseneriprogrammis *Mathcad 15.0* või *Mathcad Prime 2.0*, mis lisaks MS Exceli võimalustele lubab teha integraal- ja diferentsiaalarvutust, sümbolarvutust, lahendada võrrandeid, võrrandisüsteeme ja diferentsiaalvõrrandeid, lisaks teha graafikuid pindadest ning koostada animatsioone.

3.8. LIITFUNKTSIOONI TULETIS. TÄISTULETIS

Olgu antud funktsioon $z = F(u, v)$, kus u ja v on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid: $u = \varphi(x, y)$, $v = \omega(x, y)$. Sellisel juhul on z argumentide x ja y liitfunktsioon. Funktsiooni z võib avaldada ka vahetult x ja y kaudu

$$z = F\big(\varphi(x, y), \omega(x, y)\big) \tag{3.24}$$

Näide 3.20. Näide liitfunktsiooni kohta: $z = u^3v^3 + u + 1, \;\; u = x^2 + y^2, \;\; v = e^{x+y} + 1$.

$$z = (x^2 + y^2)^3(e^{x+y} + 1)^3 + x^2 + y^2 + 1.$$

Liitfunktsiooni osatuletise valemi tuletamine.
Eeldame, et funktsioonide $z = F(u, v), u = \varphi(x, y), v = \omega(x, y)$ osatuletised argumentide järgi on pidevad. Püüame leida osatuletised mitte kasutades võrrandit (3.24). Anname argumendile x muudu Δx, jättes y väärtuse muutumatuks. Siis funktsioonid u ja v saavad muudu $\Delta_x u, \Delta_x v$ ja ka funktsioon $z = F(u, v)$ saab muudu Δz.

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v\,, \qquad |: \Delta x$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Leiame piirväärtuse, kui $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_1 = \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_2 = 0.$$

Järelikult

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Andes argumendile y muudu Δy ja jättes x muutumatuks, võib analoogiliselt leida

$$\boldsymbol{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}}.$$

Näide 3.21. Leiame osatuletised funktsioonile $z = \ln\,(u^2 + v), \quad u = e^{x+y^2}, \quad v = x^2 + y$.

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2ue^{x+y^2}}{u^2+v} + \frac{2x}{u^2+v} = \frac{2}{u^2+v}(u^2+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u2ye^{x+y^2}}{u^2+v} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}(4u^2y+1).$$

Näide 3.22. Leiame osatuletised funktsioonile

$$z = \sin(u^2+v^3), \quad u = e^{2x}, \quad v = \ln x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos(u^2+v^3) \cdot 2u, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \cos(u^2+v^3) \cdot 3v^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(u^2+v^3) \cdot 2u \cdot 2e^{2x} + \cos(u^2+v^3) \cdot 3v^2 \cdot \frac{1}{x} = \cos(u^2+v^3)\left(4u^2 + \frac{3v^2}{x}\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(u^2+v^3) \cdot 2u \cdot 0 + \cos(u^2+v^3) \cdot 3v^2 \cdot 0 = 0.$$

Saadud valemeid võib üldistada suurema arvu muutujate juhule. Olgu

$$w = F(z,u,v,s),$$

kus z, u, v ja s on sõltumatute muutujate x ja y funktsioonid

$$z = z(x,y), u = u(x,y), v = v(x,y), s = s(x,y)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y}.$$

Olgu antud funktsioon

$$z = F(x,y,u,v),$$

kus $y = y(x), u = u(x), v = v(x)$, siis z on tegelikult ühe muutuja x funktsioon ja leiame tema tuletise x järgi

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

Saame **liitfunktsiooni täistuletise** valemi

$$\boldsymbol{\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}}.$$

Erijuhul, kui funktsioon $u = f(x,y,z)$ muutub ajas, ehk $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, siis funktsiooni täistuletis avaldub kujul

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Näide 3.23. Leida osatuletised funktsioonile $z = x^2 + \sqrt{y}\,,\ \ y = \sin x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = \cos x,$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

3.8.1. LIITFUNKTSIOONI TÄISDIFERENTSIAAL

Vaatame funktsiooni $z = F(u, v)$, kus $u = \varphi(x, y)$, $v = \omega(x, y)$. Arvutame täisdiferentsiaali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Asendame siia vastavad osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$dz = \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy,$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right),$$

$$dz = \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv, \qquad \boldsymbol{dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.}$$

Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali avaldis on invariantne ehk ei olene sellest, kas u ja v on sõltumatud muutujad või funktsioonid.

Näide 3.24. Leiame liitfunktsiooni $z = u^2v^3$**,** täisdiferentsiaali, kui

$$u = x^2\sin y, \qquad v = x^3e^y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^3, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^2 3v^2, \quad dz = 2uv^3du + 3u^2v^2dv.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2\cos y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2e^y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x^3e^y.$$

$$du = 2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy, \qquad dv = 3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy.$$

$$dz = 2uv^3(2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy) + 3u^2v^2(3x^2e^y\,dx + x^3e^y\,dy),$$

$$dz = (4uv^3x\sin y + 9u^2v^2x^2e^y)dx + (2uv^3x^2\cos y + 3u^2v^2x^3e^y)dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

3.9. ILMUTAMATA FUNKTSIOONI TULETIS

Väljendagu suuruste x ja y vahelist sõltuvust võrrand $F(x,y)=0$.

Teoreem 3.8.

Kui pidev funktsioon $y=y(x)$ on antud **ilmutamata kujul** võrrandiga

$$\boldsymbol{F(x,y)=0}$$

ja $F(x,y)$, F'_x, F'_y on pidevad punktis (x,y) ning $F'_y(x,y)\neq 0$, siis funktsiooni $y=y(x)$ tuletis vaadeldavas punktis on

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Tõestus.
Anname sõltumatule muutujale x muudu Δx. Siis funktsioon y saab muudu Δy ehk argumendi väärtusele $x+\Delta x$ vastab funktsiooni väärtus $y+\Delta y$. Seetõttu

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0.$$

Järelikult ka

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0.$$

See on kahe muutuja funktsiooni täismuut

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y.$$

Kuna võrrandi vasak pool võrdub nulliga, järelikult on null ka parem pool

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y=0, \qquad |:\Delta x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\gamma_1+\gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta x}=0.$$

Avaldame sellest suhte $\Delta y/\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}.$$

Leiame piirväärtuse, kui argument $\Delta x\to 0$. Siis ka $\gamma_1\to 0, \gamma_2\to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \boldsymbol{y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

Me ei tea funktsiooni ilmutatud kuju $y=f(x)$, aga oskame leida y tuletist. ■

Näide 3.25. Leiame võrrandiga $x^2+y^2-1=0$ määratud funktsiooni $y=y(x)$ tuletise.

$$F(x,y)=x^2+y^2-1, \qquad \frac{\partial F}{\partial x}=2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y, \qquad y'_x=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}.$$

Teine võimalus tuletise arvutamiseks on arvestada, et funktsioon y sõltub argumendist x, tuletise leidmiseks kasutame liitfunktsiooni tuletise reeglit.

$$2x + 2y \cdot y' = 0, \qquad y' = -\frac{x}{y}.$$

Näide 3.26. Leiame võrrandiga $e^y - e^x + xy = 0$ määratud funktsiooni $y = y(x)$ tuletise.

$$F(x, y) = e^y - e^x + xy,$$

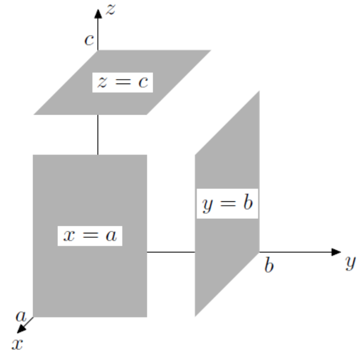
$$\frac{\partial F}{\partial x} = -e^x + y, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = e^y + x, \qquad y'_x = -\frac{-e^x + y}{e^y + x} = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

Teine lahendus, arvestades liitfunktsiooni tuletist:

$$e^y \cdot y' - e^x + y + xy' = 0, \qquad y' \cdot (e^y + x) = e^x - y, \qquad y' = \frac{e^x - y}{e^y + x}.$$

3.10. NIVOOJOONED, NIVOOPINNAD. TULETIS ANTUD SUUNAS

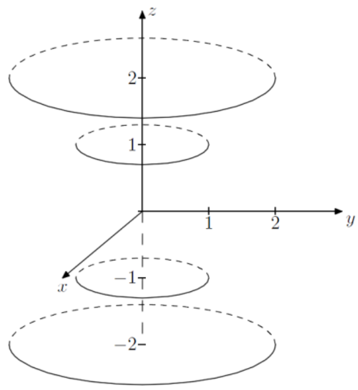
Kahe muutuja funktsiooni graafiku joonestamisel on abiks selle lõiked tasanditega, mis on risti ühega kolmest koordinaatteljest (paralleelne ühega koordinaattasanditest). Koordinaattasandite võrrandid on järgmised: yz-tasandi võrrand on $x = 0$, xz-tasandi võrrand on $y = 0$, xy-tasandi võrrand $z = 0$.

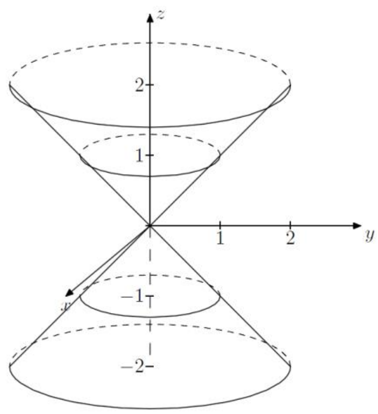


Tasand $x = a$ on x-teljega risti, yz-tasandiga paralleelne.
Tasand $y = b$ on y-teljega risti, xz-tasandiga paralleelne.
Tasand $z = c$ on z-teljega risti, xy-tasandiga paralleelne.

Definitsioon 3.25.
Pinna $\boldsymbol{z = f(x, y)}$ **nivoojoonteks**
(tasandilõigeteks tasanditega $z = C$ erinevate C väärtuste korral) nimetatakse jooni $\boldsymbol{z = f(x, y) = C}$.

Näide 3.26. Joonestame pinna $z^2 = x^2 + y^2$ nivoojooned, mis tekivad pinna lõikamisel tasanditega $z = 0$, $z = 1$, $z = -1$ ja $z = 2$, $z = -2$ ning lõiget tasandiga $x = 0$.





Olgu ruumi mingis piirkonnas D defineeritud funktsioon $u = u(x, y, z)$. Sel juhul öeldakse, et piirkonnas D on antud skalaarne väli. Kui $u = u(x, y, z)$ tähendab näiteks temperatuuri punktis $M(x, y, z)$, siis öeldakse, et on antud temperatuuriväli.
Kui piirkond D on täidetud vedeliku või gaasiga ja $u = u(x, y, z)$ tähendab rõhku punktis $M(x, y, z)$, siis on tegemist rõhuväljaga.
Vaatleme piirkonna D punkte, kus funktsioonil $u = u(x, y, z)$ on konstantne väärtus C

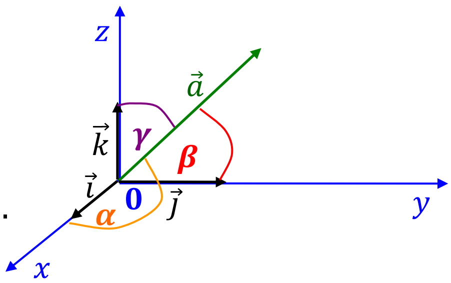
$$u = u(x, y, z) = C.$$

Need punktid moodustavad mingisuguse pinna. Kui võtame konstandile C teise väärtuse, saame teise pinna. Neid pindu nimetatakse nivoopindadeks.

Definitsioon 3.26.
Vektori **suunakoosinusteks** nimetatakse nende nurkade koosinusi, mis vektor moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega. Tähistame $\boldsymbol{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma}$.

$\vec{\imath} = (1,0,0),\ \ |\vec{\imath}| = 1,\quad \vec{\jmath} = (0,1,0),\ \ |\vec{\jmath}| = 1,\quad \vec{k} = (0,0,1),\ \ |\vec{k}| = 1.$

Kui leiame skalaarkorrutise vektorist $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ja ühikvektorist $\vec{\imath} = (1,0,0)$, saame



$\langle\vec{a}, \vec{\imath}\rangle = x_1 \cdot 1 + y_1 \cdot 0 + z_1 \cdot 0 = x_1.$

Skalaarkorrutis on avaldatav ka järgmiselt:

$$\langle\vec{a}, \vec{\imath}\rangle = |\vec{a}||\vec{\imath}|\ \cos\alpha, \qquad \boldsymbol{\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}}.$$

Analoogiliselt saame leida suunakoosinused

$$\boldsymbol{\cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}}, \qquad \boldsymbol{\cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}}.$$

Tõstame kõik suunakoosinused ruutu ja liidame kokku

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{y_1^2}{|\vec{a}|^2} + \frac{z_1^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}{|\vec{a}|^2}.$$

Et

$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle\vec{a}, \vec{a}\rangle} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

siis

$$\boldsymbol{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Olgu vektor $\vec{e}$ vektoriga $\vec{a}$ kollineaarne ühikvektor, siis $|\vec{e}| = 1$.
Seega

$$\vec{e} = \left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

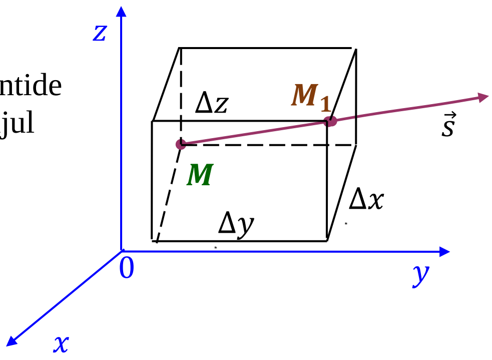
Kokkuvõttes vektori $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ pikkus on $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ning suunakoosinused avalduvad

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$

TULETIS ANTUD SUUNAS

Vaatleme piirkonnas D funktsiooni $u = u(x, y, z)$ ja punkti $M(x, y, z)$. Rakendame punktis M vektori $\vec{s}$, mille suunakoosinused on $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Võtame vektoril $\vec{s}$ punkti $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, mille kaugus vektori alguspunktist on Δs. Seega

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2},\ \overrightarrow{MM_1} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$



Eeldame, et funktsioon u ja tema osatuletised kõikide argumentide järgi on piirkonnas D pidevad. Funktsiooni täismuut esitub kujul

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z,$$

kus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \to 0$, kui $\Delta s \to 0$.

Jagame võrduse kõik liikmed suurusega Δs

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \qquad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \qquad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma.$$

Järelikult

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma.$$

Definitsioon 3.27.
Funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x, y, z)}$ **tuletiseks punktis** $\boldsymbol{(x, y, z)}$ **vektori** $\vec{\boldsymbol{s}}$ **suunas** nimetatakse suhte $\Delta u/\Delta s$ piirväärtust, kui $\Delta s \to 0$ ja tähistatakse $\partial u/\partial s$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}.$$

Leiame piirväärtuse

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.}$$

Teades osatuletisi, saame leida tuletise suunas $\vec{s}$.

Näide 3.27. Leiame funktsiooni u tuletise suunas $\vec{s}$, kui on teada suunavektori nurgad koordinaattelgedega

$$\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Kuna koosinused antud nurkadest on

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

siis funktsiooni u tuletis suunas s avaldub

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Näide 3.28. Olgu antud funktsioon $u = x^2 + y^2 + z^2$. Leida tuletis $\partial u/\partial s$ punktis $M(1,1,1)$ vektori $\vec{s} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$ suunas. Vektor $\vec{s} = (2,1,3)$. Leiame suunakoosinused, siis osatuletised ja asendame valemisse:

$$|\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = 2, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 2.$$

Funktsiooni u tuletis suunas $\vec{s}$ punktis M avaldub

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = 2\frac{2}{\sqrt{14}} + 2\frac{1}{\sqrt{14}} + 2\frac{3}{\sqrt{14}} = \frac{12}{\sqrt{14}}.$$

3.11. GRADIENT

Vaatleme funktsiooni $u = u(x, y, z)$ määramispiirkonna D igas punktis vektorit, mille projektsioonideks koordinaattelgedel on selle funktsiooni osatuletiste $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z$ väärtused selles punktis.

Definitsioon 3.28.

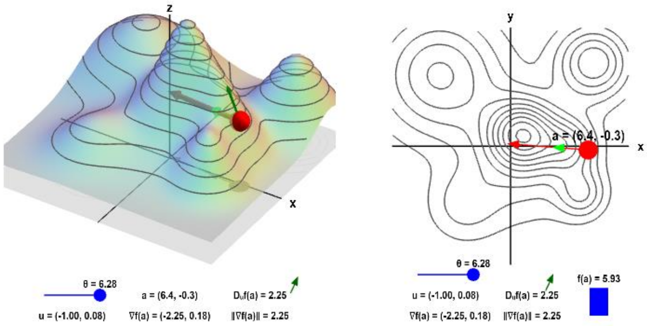
Gradiendiks nimetatakse vektorit

$$\overrightarrow{\mathbf{grad\ u}} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Gradienti tähistatakse ka ∇u. Ütleme, et piirkonnas D on määratud gradiendi vektorväli.

Omadused.

1. Gradient on igas punktis risti pinna nivoojoontega.
2. Gradient on vektor, mis näitab pinna kiireima tõusu suunda, gradiendi vastandvektor näitab kiireima languse suunda.
3. Gradiendiks oleva vektori pikkus näitab suurimat tõusu.



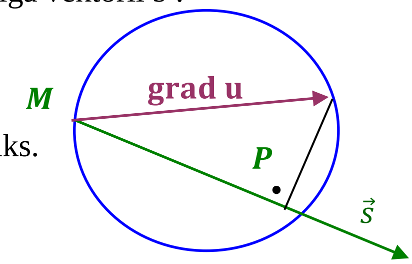
Allikas: http://mathinsight.org/applet/gradient_directional_derivative_mountain

Teoreem 3.9.
Kui on antud skalaarne väli $u = u(x, y, z)$ ja selle skalaarse välja gradientväli

$$\overrightarrow{\text{grad u}} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k},$$

siis tuletis $\partial u/\partial s$ vektori $\vec{s}$ suunas võrdub vektori $\overrightarrow{\text{grad u}}$ projektsiooniga vektoril $\vec{s}$.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \vec{s_0}\,\textbf{grad}\,u, \qquad pr_{\vec{s}}\,\textbf{grad}\,u = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}}.$$



Piltlikult saame esitada nii: vaatame sfääri, millele $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$ on diameetriks.
Rakendame vektori $\vec{s}$ punktis M

$$MP = \left|\overrightarrow{\textbf{grad u}}\right|\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad MP = \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}.$$

Omadused.
Tuletis antud punktis vektori $\vec{s}$ suunas on maksimaalne siis, kui vektor $\vec{s}$ on gradiendi-suunaline, tuletise maksimaalne väärtus on $\left|\overrightarrow{\textbf{grad u}}\right|$.
Tuletis nivoopinna puutuja sihilise vektori suunas võrdub nulliga.

3.12. KÕRGEMAT JÄRKU TÄISDIFERENTSIAAL

Olgu antud funktsioon $z = f(x, y)$. Mitme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali nimetatakse ka esimeseks täisdiferentsiaaliks. Olgu funktsioonid f'_x, f'_y diferentseeruvad punktis $M(x, y)$. Järelikult f''_{xy}, f''_{yx} on pidevad ja $f''_{xy} = f''_{yx}$. Esimest järku täisdiferentsiaalil on kuju

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy,$$

kus dx ja dy vaatame kui konstantseid kordajaid. Suurus dz on kahe muutuja funktsioon. Leiame tema täisdiferentsiaali

$$d(dz) = d\left(f'_x dx + f'_y dy\right) = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_x dx + \left(f'_x dx + f'_y dy\right)'_y dy =$$

$$= \left(f''_{xx}dx + f''_{yx}dy\right)dx + \left(f''_{xy}dx + f''_{yy}dy\right)dy = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2.$$

Saime valemi **teist järku täisdiferentsiaali** jaoks

$$\boldsymbol{d(dz) = f''_{xx}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}dy^2}.$$

Kolmandat järku täisdiferentsiaali valem

$$\boldsymbol{d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3}.$$

3.13. TAYLORI VALEM MITME MUUTUJA FUNKTSIOONIDE JAOKS

Taylori valem ühe muutuja funktsiooni jaoks on kujul

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x).$$

Olgu antud funktsioon

$$z = f(x, y),$$

mis on määratud mingis piirkonnas S. Eeldame, et punkti $M_0(a, b)$ ümbruses on funktsioonil z pidevad osatuletised kuni järguni $n+1$. Toome sisse abifunktsiooni

$$\varphi(t) = f(x, y),$$

kus

$$x = a + t\Delta x, \;\; y = b + t\Delta y, \;\; 0 \le t \le 1.$$

Kui

$$t = 0, \text{ siis } \;\; M_0(a, b).$$

Kui $t = 1$, siis saame punkti $M(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Asendame ühe muutuja funktsiooni Taylori valemisse funktsiooni $\varphi(t)$ jaoks $c = 0$ korral:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + R_n. \tag{3.25}$$

Leiame tuletised

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(a + t\Delta x, b + t\Delta y),$$

$$\varphi'(t) = f'_x x'_t + f'_y y'_t = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y = df(x, y),$$

$$\varphi''(t) = \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_x x'_t + \left(f'_x x'_t + f'_y y'_t\right)'_y y'_t =$$

$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yx}\Delta y\Delta x + f''_{yy}(\Delta y)^2 =$$

$$= f''_{xx}(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}\Delta x\Delta y + f''_{yy}(\Delta y)^2 = d^2f(x, y).$$

Analoogiliselt

$$\varphi'''(t) = d^3f(x, y), \dots, \varphi^{(n)}(t) = d^nf(x, y),$$

$$\varphi(0) = f(a, b), \quad \varphi'(0) = df(a, b),$$

$$\varphi''(0) = d^2f(a, b), \dots, \varphi^{(n)}(0) = d^nf(a, b).$$

Asendame võrrandisse (3.25) $t = 1$ korral

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{df(a, b)}{1!} + \frac{d^2f(a, b)}{2!} + \dots + \frac{d^nf(a, b)}{n!} + R_n.$$

Seega

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)\Delta x + f'_y(a, b)\Delta y + \frac{1}{2}f''_{xx}(a, b)(\Delta x)^2 + f''_{xy}(a, b)\Delta x\Delta y$$
$$+ \frac{1}{2}f''_{yy}(a, b)(\Delta y)^2 + \dots .$$

Definitsioon 3.29.

Funktsiooni f Taylori valemiks punktis $M_0(a, b)$ nimetatakse funktsiooni

$$f(x, y) = f(a, b) + f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2}f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 +$$

$$f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2}f''_{yy}(a, b)(y - b)^2 + \dots + R_n(x, y),$$

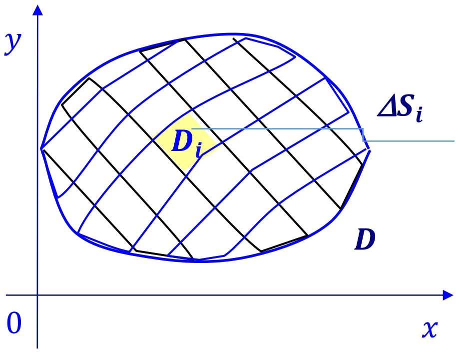
kus funktsioon $R_n$on Taylori valemi jääkliige.

IV PTK. KORDSED INTEGRAALID

4.1. KAHEKORDSED INTEGRAALID

Olgu funktsioon $f(x,y)$ määratud kinnises tõkestatud piirkonnas D. Olgu piirkond D jaotatud n osapiirkonnaks D_i pindaladega ΔS_i ning olgu igas osapiirkonnas D_i valitud punkt (x_i, y_i). Moodustame summa

$$\boldsymbol{I_n} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i, y_i)\Delta S_i}.$$



Definitsioon 4.1.
Summat $\boldsymbol{I_n}$ nimetatakse funktsiooni $f(x,y)$ integraalsummaks piirkonnas D.

Kui piirkonna igas punktis $f(x,y) \geq 0$, siis integraalsumma kujutab selliste kõversilindrite ruumalade summat, mille põhjapindala on ΔS_i ja kõrgus on funktsiooni väärtus punktis (x_i, y_i) ehk $f(x_i, y_i)$. Osapiirkondadeks jaotamine toimub suvalisel viisil, see tähendab, et igal osapiirkonnal on erinev diameeter d_i. Osapiirkonna diameeter on selle piirkonna suurim punktide vaheline kaugus. Tähistame suurima osapiirkondade diameetri tähega

$$\lambda = \max_{i=1,\dots,n} d_i.$$

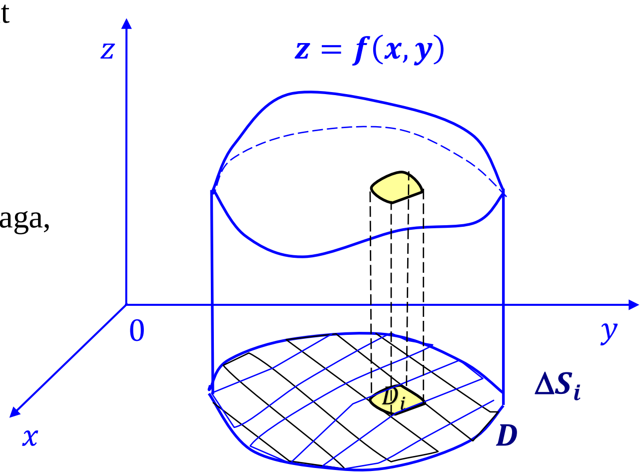
Definitsioon 4.2.

Funktsiooni $f(x,y)$ **kahekordseks integraaliks** üle piirkonna D nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \to 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna D osadeks jaotamise viisist ega punktide (x_i, y_i) valikust

$$\iint_D f(x,y)\, dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \Delta S_i.$$

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus, siis funktsiooni nimetatakse **integreeruvaks** piirkonnas D. Kui funktsioon $f(x,y)$ on pidev kinnises piirkonnas, siis piirväärtus eksisteerib. Piirkonda D nimetatakse integreerimispiirkonnaks.

Kõversilinder on ruumiline kujund, mis on piiratud alt piirkonnaga D, ülalt pinnaga $z = f(x,y)$ ja külgedelt püstsilindrilise pinnaga.



Kahekordse integraali geomeetriline tõlgendus.
Kahekordne integraal funktsioonist $f(x,y) \geq 0$ üle piirkonna D on võrdne kõverjoonelise silindri ruumalaga, kui silinder on pealt piiratud pinnaga $z = f(x,y)$ ja alt pinnaga D

$$V = \iint_D f(x,y)\, dxdy.$$

Integreerimispiirkonna *D* pindala avaldub valemiga

$$S = \iint_D dxdy.$$

4.2. KAHEKORDSE INTEGRAALI OMADUSED JA ARVUTAMINE

Kahekordse integraali omadused on analoogilised määratud integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ on integreeruvad piirkonnas D, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe.

$$\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))dS = \iint_D f(x,y)\,dS \pm \iint_D g(x,y)\,dS.$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt kirjutame

$$\iint_D \big(f(x,y) \pm g(x,y)\big)\,dS = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i,y_i) \pm g(x_i,y_i)\big)\Delta S_i =$$

Kõigepealt kasutame summa omadust, mille põhjal moodustame summad mõlemast liikmest ja hiljem piirväärtuse omaduse põhjal kirjutame piirväärtuse summast piirväärtuste summana lahti.

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta S_i\right) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(x_i,y_i)\Delta S_i =$$

Selle tulemusena saime kahekordse integraali definitsiooni põhjal kahe integraali summa (vahe)

$$= \iint_D f(x,y)\,dS \pm \iint_D g(x,y)\,dS.$$

▪

2. Konstantse **kordaja võib tuua integraali märgi ette**

$$\iint_D cf(x,y)\,dS = c\iint_D f(x,y)\,dS.$$

Tõestus on sarnane eelmisega.

3. **Aditiivsus**. Integreerimispiirkonda D võib jaotada osadeks D_1 ja D_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $D = D_1 \cup D_2$

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

Tõestus. Definitsiooni kohaselt ei tohi piirväärtus sõltuda osapiirkondadeks jaotamise viisist, seega võime valida üheks jaotuseks piirkondade D_1 ja D_2 ühise rajajoone. Jaotades piirkonda D edasi suvalisel viisil, tekivad piirkondade D_1 ja D_2 suvalised jaotused osapiirkondadeks. Jaotame integraalsumma kaheks liidetavaks. Esimesse liidetavasse võtame need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_1 osapiirkondi, ja teise liidetavasse need korrutised, mis sisaldavad piirkonna D_2 osapiirkondi, tähistame need vastavalt

$$\sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i\,, \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Kui λ on piirkonna D kõigi osapiirkondade suurim diameeter, siis sellest, et $\lambda \to 0$ järeldub, et ka piirkondade D_1 ja D_2 osapiirkondade suurimad diameetrid lähenevad nullile. Järelikult, kui võtame võrduse

$$\sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

mõlemalt poolt piirväärtuse suurima diameetri lähenemisel nullile, saame omaduse väite

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{D} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_1} f(x_i, y_i)\Delta S_i + \lim_{\lambda\to 0}\sum_{D_2} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \iint_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint_{D_2} f(x,y)\,dS.$$

4. **Monotoonsus.** Kui funktsioonid $f(x,y)$ ja $g(x,y)$ on integreeruvad piirkonnas D ja kehtib $f(x,y) \le g(x,y)$ iga $(x,y) \in D$ korral, siis

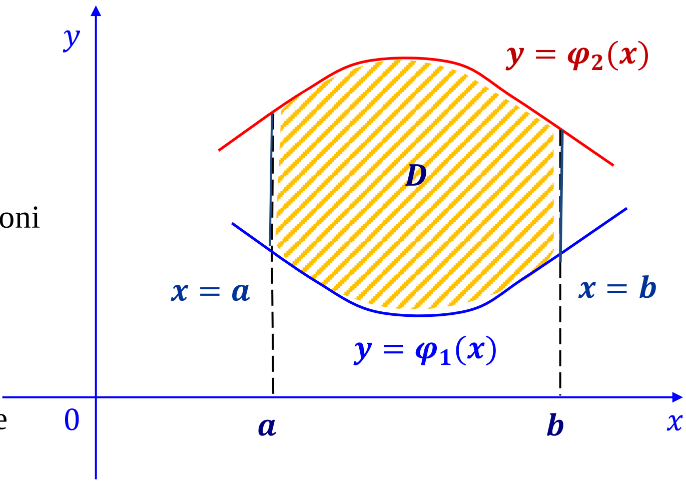
$$\iint_D f(x,y)\,dS \le \iint_D g(x,y)\,dS.$$

Kahekordse integraali **arvutamine** lihtsamatel juhtudel taandub kahe määratud integraali arvutamisele.
Kui integreerimispiirkond on antud võrratustega

$$\boldsymbol{D = \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},}$$

siis

$$\boldsymbol{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.}$$



Kõigepealt leiame sisemise integraali algfunktsiooni

$$F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

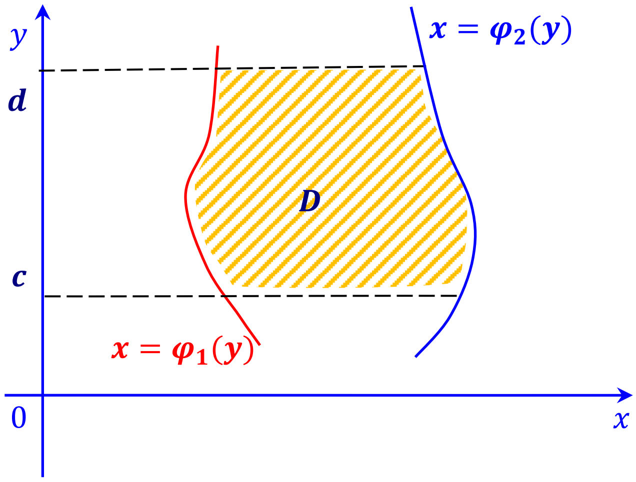
kus integreerimisel argumendi y järgi käsitletakse argumenti x konstandina.

Edasi leiame saadud algfunktsioonist integraali argumendi x järgi

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b F(x)dx.$$

Kui $\boldsymbol{D = \{c \le y \le d,\ \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}}$, siis

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$



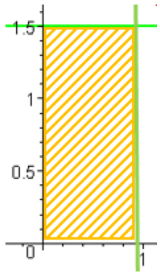
Kui integreerimispiirkond D on keerulisema kujuga, kui ülaltoodud lihtsamatel juhtudel, siis jagatakse piirkond lihtsamateks osadeks

$$D = \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Integraal on sel juhul summa integraalidest üle osapiirkondade

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,dxdy.$$

Näide 4.1. Arvutame



$$\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy,$$

kus D on piiratud sirgetega $x = 0, x = 1, y = 0, y = 3/2$.

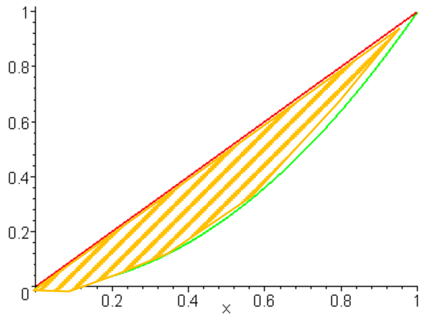
$$\iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{3}{2}} (4 - x^2 - y^2)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\left(4y - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{3}{2}} \right] dx = \int_0^1 \left[\left(4 \cdot \frac{3}{2} - x^2 \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(6 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8} \right) \right] dx =$$

$$= \left(\frac{39}{8}x - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{35}{8}.$$

Näide 4.2. Leiame xy-tasandil asetseva kujundi pindala, kui kujund on piiratud joontega $y = x$ ja $y = x^2$.



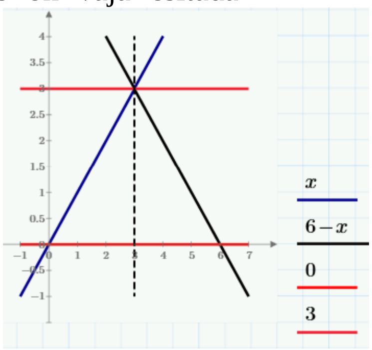
$$S = \iint\limits_D dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} dy \right] dx = \int_0^1 y \,\Big|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 [x - x^2]\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Näide 4.3. Vahetame integreerimisjärjekorra integraalis

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx.$$

Integreerimispiirkond on määratud järgmiselt: $D = \{(x,y): 0 \le y \le 3, y \le x \le 6-y\}$. Kanname joonisele vastavad sirged. Integreerimisjärjekorra muutmiseks on vaja esitada argument x piirkonnas $[a,b]$ ja argument y funktsioonina argumendist x. Jooniselt näeme, et argument x muutub lõigus $[0,6]$ aga argumendi y jaoks saame $0 \le y \le \varphi(x)$, kusjuures



$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 3, \\ 6-x, & 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

Seega peame integreerimispiirkonna jagama kaheks osaks sirgega $x = 3$

$$\int_0^3 dy \int_y^{6-y} f(x,y)\,dx = \int_0^3 dx \int_0^x f(x,y)\,dy + \int_3^6 dx \int_0^{6-x} f(x,y)\,dy.$$

4.3. MUUTUJAVAHETUS KAHEKORDSES INTEGRAALIS

Kui funktsioonid $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$ koos oma esimest järku osatuletistega on mingis uv-tasandi lõplikus kinnises piirkonnas Δ **pidevad** ja määravad **üksühese vastavuse** piirkonna Δ ja xy-tasandi piirkonna D punktide vahel ning kui jakobiaan

$$\boldsymbol{J(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne \mathbf{0}, \text{kui } (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \Delta,$$

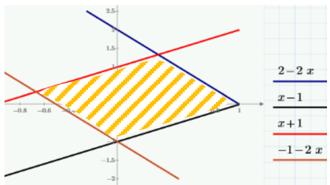
siis muutujavahetuse valem on

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J(u,v)|\,dudv.$$

$$J(u,v) \cdot J(x,y) = 1, \quad J(u,v) = \frac{1}{J(x,y)}.$$

Näide 4.4. Leiame kahekordse integraali funktsioonist

$$f(x,y) = (2x + y - 2)^2,$$



kui integreerimispiirkond on antud valemiga

$$D = \{(x,y): -1 \le x - y \le 1, -1 \le 2x + y \le 2\}.$$

Arvutuste lihtsustamiseks teeme järgmise muutujavahetuse

$$u = x - y, v = 2x + y, \quad (u, v) \in \Delta.$$

Integreerimispiirkond Δ on ristkülik

$$\Delta = \{(u, v): -1 \le u \le 1, -1 \le v \le 2\}.$$

Jakobiaan on kujul

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Järelikult

$$J(u, v) = \frac{1}{J(x, y)} = \frac{1}{3}.$$

Integreeritav funktsioon uutes muutujates on

$$(2x + y - 2)^2 = (v - 2)^2.$$

Oleme saanud kahekordse integraali

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{2} (v - 2)^2 \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} \frac{(v - 2)^3}{3} \Bigg|_{-1}^{2} du = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} 9 \, du = \frac{1}{3} (9u) \Big|_{-1}^{1} = 6.$$

4.4. KAHEKORDNE INTEGRAAL POLAARKOORDINAATIDES

Polaarkoordinaatide kasutamine on õigustatud siis, kui integreerimispiirkonnaks on ring või selle osa, samuti on teatud joonte (ellips, lemniskaat, kardioid, astroid jne) esitus polaarkoordinaatides lihtsam kui ristkoordinaatides. Üleminekul polaarkoordinaatidele kasutame seoseid

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad (r, \varphi) \in \Delta.$$

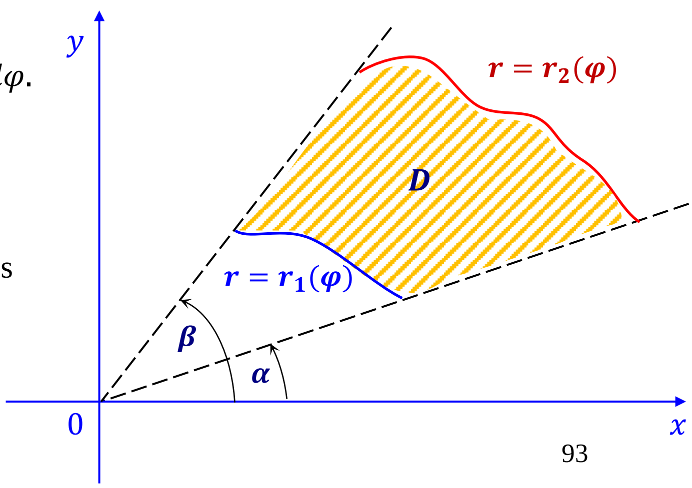
kus $r \ge 0$ on polaarraadius ja φ polaarnurk.
Muutujavahetusele vastav jakobiaan on kujul

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

$$J(r, \varphi) = r,$$

siis muutujavahetuse valem on

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, r \, dr d\varphi.$$

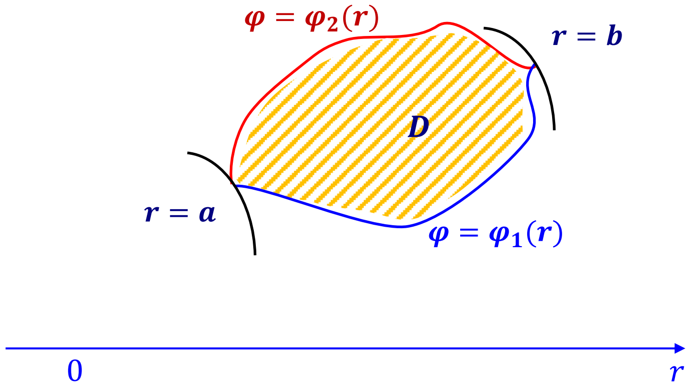


Kui piirkond Δ on antud võrratustega

$\Delta = \{(\varphi, r): \alpha \le \varphi \le \beta, r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)\}$, siis

$$\iint\limits_{\Delta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr \right) d\varphi.$$

Kui piirkond Δ on antud võrratustega $\Delta = \{(\varphi, r): a \le r \le b, \varphi_1(r) \le \varphi \le \varphi_2(r)\}$, siis



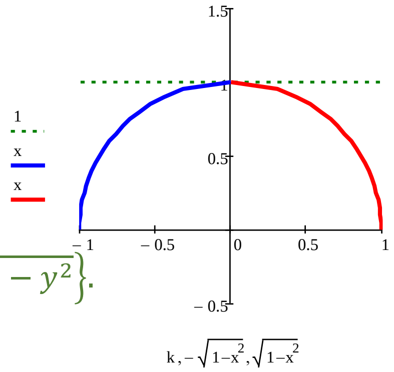
$$\iint\limits_{\Delta} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr d\varphi = \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, d\varphi \right) dr.$$

Näide 4.5. Arvutame kahekordse integraali

$$\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega

$$D = \left\{(x, y): 0 \le y \le 1, -\sqrt{1 - y^2} \le x \le \sqrt{1 - y^2}\right\}.$$



Integreerimispiirkonnaks on pool ringi. Polaarkoordinaatides

$$x = r\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\varphi$$

ja

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

Uueks integreerimispiirkonnaks on $\Delta = \{(\varphi, r): 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi\}$.

$$\iint\limits_{D} \sqrt[3]{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{r^2}\, r\, dr \right) d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \left(\int\limits_0^1 r^{\frac{5}{3}} dr \right) d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\frac{r^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} \right)_0^1 d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \frac{3}{8} d\varphi = \frac{3}{8}\varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

Näide 4.6. Arvutame kahekordse integraali

$$\iint_D (x^2 + 2xy\,)dy\,dx$$

üleminekuga polaarkoordinaatidele, kui integreerimispiirkond D on antud võrratustega

$$D = \left\{(x, y)\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\right\}.$$

Integreerimispiirkonnaks on veerand ringi. Polaarkoordinaatides

$$x^2 + 2xy = r^2\cos^2\varphi + 2r^2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Uueks integreerimispiirkonnaks on

$$\Delta = \{(\varphi, r)\colon 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le \pi/2\}.$$

Polaarkoordinaatides saame integraali arvutada järgmiselt

$$\iint_{\mathrm{D}} (x^2 + 2xy\,)dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi)\,r\,d\varphi\right) dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\,\cos\varphi)\,d\varphi\right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi) + \sin 2\varphi\right) d\varphi\right) dr$$

$$=$$

$$= \int_0^1 r^3\left(\frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{1}{2}\int_0^1 r^3\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi - \cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 r^3\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) dr = \frac{r^4}{4}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi + 4}{16}.$$

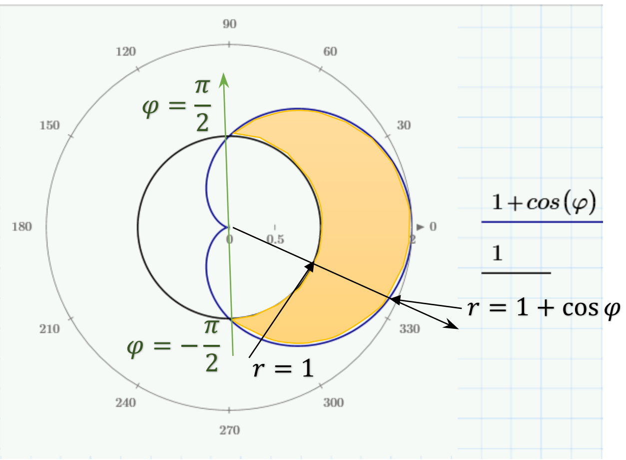
Vaatame nüüd polaarkoordinaatidele üleminekut natuke keerukama integreerimispiirkonna jaoks. Kui integreerimispiirkond asub väljaspool ringi raadiusega

$$r = 1$$

ja seespool kardiodi

$$r = 1 + \cos\varphi$$

(joonis), siis integreerimispiirkonna sisemine polaarraadius on ringjoon raadiusega 1. Välimine raadius on aga antud seosega $1 + \cos\varphi$, kokkuvõttes raadius muutub piirkonnas



$$1 \le r \le 1 + \cos\varphi.$$

Polaarnurga jaoks vaatame piirkonna alumist punkti, kus nurk on võrdne $-\pi/2$ ja ülemist punkti, kus nurk on võrdne $\pi/2$. Seega muutub polaarnurk piirkonnas

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Integreerimisrajad kahekordses integraalis on

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{1}^{1+\cos\varphi} f(r,\varphi) r\, dr.$$

Kui funktsioon $f(r,\varphi) = 1$, siis kahekordne integraal annab integreerimispiirkonna pindala.

4.5. KAHEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

Tasandilise kujundi mass.

Olgu aine mass Δm piirkonna D osapiirkonnas ΔS. See tähendab, et piirkond D on kaetud mingi ainega nii, et piirkonna iga osapiirkonna pindala ΔS jaoks tuleb teatud hulk Δm seda ainet. Suhet $\Delta m/\Delta S$ nimetatakse aine keskmiseks pindtiheduseks (mass pindalaühiku kohta). Osapiirkonna suuruse vähendamisel punktiks piirväärtuse kaudu, saame defineerida aine pindtiheduse.

Aine pindtihedus punktis $P(x,y)$ on piirväärtus keskmisest pindtihedusest

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \varrho(x,y).$$

Olgu tasandilise kujundi pindtihedus antud pideva funktsiooniga $\varrho(x,y)$, kus $(x,y) \in D$. **Tasandilise kujundi *D* mass** avaldub siis kahekordse integraalina üle piirkonna D:

$$\boldsymbol{m_D = \iint_D \varrho(x,y)\, dxdy.}$$

Näide 4.7. Leiame ümmarguse plaadi massi, kui plaadi raadius on 4 ja aine pindtihedus plaadi igas punktis on võrdne selle punkti kaugusega plaadi keskpunktist.

Pindtihedus kauguse kaudu ja integreerimispiirkond avalduvad järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 4^2\}.$$

Kuna tegemist on ringjoonega, siis läheme üle polaarkoordinaatidele. Polaarraadiust tähistame tähega r, et pindtihedusega mitte segi ajada. Integreerimispiirkond polaarkoordinaatides

$$D = \{(r,\varphi): 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

pindtihedus avaldub polaarkoordinaatides järgmiselt

$$\varrho(x,y) = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = r, \qquad J(r,\varphi) = r.$$

Seega plaadi mass on

$$m = \iint_D \varrho(x,y)\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2\, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^3}{3}\Big|_0^4 = \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} d\varphi = \frac{64}{3}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{128}{3}\pi.$$

Tasandilise kujundi inertsimoment. Masspunkti M inertsimoment punkti 0 suhtes $I_0 = mr^2$, kus m on mass ja r punktide 0 ja M vaheline kaugus.

Inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes homogeense piirkonna jaoks, kus pindtihedus on kõikjal 1, avaldub järgmiste valemitega:

$$I_x = \iint_D y^2\,dxdy, \qquad I_y = \iint_D x^2\,dxdy;$$

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Mittehomogeense materjali korral tuleb korrutada vastav avaldis pindtihedusega

$$I_x = \iint_D \varrho(x,y)y^2\,dxdy, \qquad I_y = \iint_D \varrho(x,y)x^2\,dxdy,$$

$$I_0 = \iint_D \varrho(x,y)(x^2 + y^2)\,dxdy.$$

Näide 4.8. Leiame joontega $y^2 = 1 - x, x = 0, y = 0$ piiratud tasandilise kujundi inertsimomendi y telje suhtes, kui pindtihedus igas punktis võrdub selle punkti ordinaadiga y.

$$I_y = \iint_D yx^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} yx^2 dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}.$$

Tasandilise kujundi masskese. Kui tasandilise kujundi D pindtihedus on $\varrho(x,y)$, siis tasandilise kujundi masskeskme (x_c, y_c) koordinaadid saab arvutada valemitest

$$\begin{cases} x_c = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D x\,\varrho(x,y)\,dxdy, \\ y_c = \dfrac{1}{m_D} \displaystyle\iint_D y\,\varrho(x,y)\,dxdy. \end{cases}$$

Avaldisi

$$M_y = \iint_D x\,\varrho(x,y)\,dxdy, \qquad M_x = \iint_D y\,\varrho(x,y)\,dxdy$$

nimetatakse tasandilise kujundi **staatilisteks momentideks** vastavalt y ja x telje suhtes.

4.6. KOLMEKORDSED INTEGRAALID

Olgu ruumis antud mingi piirkond V, mis on piiratud kinnise pinnaga S. Oletame, et selles piirkonnas V ja pinnal S on defineeritud mingi pidev funktsioon $f(x,y,z)$. Olgu piirkond V jaotatud n osapiirkonnaks V_i ruumaladega ΔV_i. Valime igas osapiirkonnas mingi punkti P_i ja tähistame $f(P_i)$ funktsiooni f väärtust selles punktis. Moodustame integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i.$$

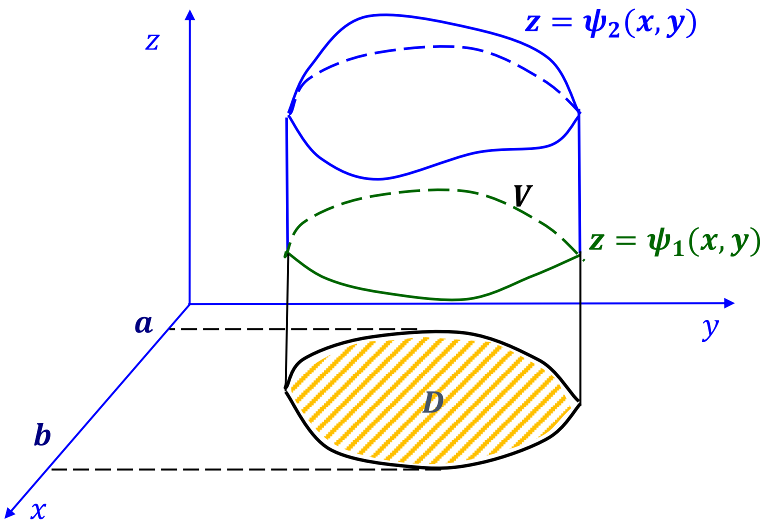
Suurendame osapiirkondade arvu nii, et nende suurim läbimõõt läheneks nullile. Tähistame suurima osapiirkondade läbimõõdu

$$\lambda = \max(d_i).$$

Definitsioon 4.3.

Funktsiooni $f(x,y,z)$ **kolmekordseks integraaliks** üle piirkonna V nimetatakse tema integraalsumma piirväärtust, kui suurim osapiirkondade diameeter $\lambda \to 0$, kui see piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu piirkonna V osadeks jaotamise viisist ega punktide P_i valikust

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(P)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta V_i.$$



Kui integreerimispiirkond V on alt piiratud pinnaga

$$z = \psi_1(x,y)$$

ja ülalt pinnaga

$$z = \psi_2(x,y),$$

kusjuures nendel pindadel on z-teljega paralleelsete sirgetega <u>ainult üks ühine punkt</u>, ja kui piirkonna V projektsioon xy-tasandil rahuldab kahekordse integraali integreerimispiirkonna kõiki tingimusi, kusjuures

$$a \le x \le b, \qquad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x),$$

siis on kolmekordne integraal avaldatav kujul

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

Kolmekordse integraali arvutamiseks vaadeldakse algul muutujaid x ja y konstantidena ja avaldatakse määratud integraal integreerimismuutuja z järgi, siis arvutatakse kahekordne integraal.

$$\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = F(x,y); \qquad \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\,dy \right) dx.$$

Kui kahekordse integraali korral on võimalik kasutada kahte erinevat integreerimisjärjekorda, siis kolmekordse integraali korral on erinevaid integreerimisjärjekordi 6.

Näide 4.9. Leiame kolmekordse integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{x}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz \right) dy \right) dx.$$

Arvutamist alustame kõige sisemisest integraalist, saadud tulemuse viime keskmise integraali alla ja lõpuks keskmise integraali väärtuse integreerime esimese integraali sees argumendi x järgi.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)dz = y\sin(z+x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} = y(1-\sin x).$$

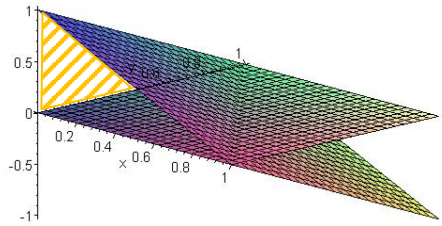
$$\int_0^{\sqrt{x}} y\cdot(1-\sin x)\,dy = (1-\sin x)\int_0^{\sqrt{x}} y\,dy = (1-\sin x)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{x}{2}(1-\sin x).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}(1-\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - x\sin x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx}_{\text{ositi}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} - x\cos x \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx \right) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{x^2}{2} - (-x\cos x + \sin x) \right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right).$$

Näide 4.10. Leiame integraali

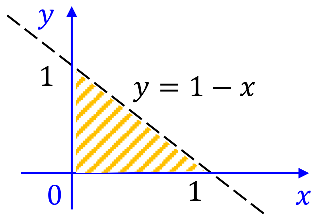
$$\iiint\limits_V \frac{3x}{1-x-y}\,dx\,dy\,dz,$$



kui piirkond V on piiratud tasanditega

$$x=0, y=0, z=0, x+y+z=1,\ \ x,y,z\geq 0.$$

Leiame vajalikud rajad antud tasandite võrranditest.



$$z=0, \qquad z=1-x-y.$$

$$\int\limits_0^{1-x-y} \frac{3x}{1-x-y}dz = \frac{3x}{1-x-y}\cdot z\Big|_0^{1-x-y} = 3x,$$

$$\int\limits_0^{1-x} 3x\,dy = 3xy\Big|_0^{1-x} = 3x(1-x) = 3(x-x^2), \qquad \int\limits_0^1 3(x-x^2)\ dx = \left(\frac{3x^2}{2}-x^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Kolmekordse integraali omadused on analoogilised kahekordse integraali omadustega.

1. Kui funktsioonid $f(x,y,z)$ ja $g(x,y,z)$ on integreeruvad piirkonnas V, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe.

$$\iiint\limits_V \big(f(x,y,z)\pm g(x,y,z)\big)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)\,dV.$$

2. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\iiint\limits_V cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_V f(x,y,z)\ dV.$$

3. **Integreerimispiirkonda** V võib **jaotada osadeks** V_1 ja V_2, millel pole ühiseid sisepunkte: $V=V_1\cup V_2$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)\,dV.$$

4.7. MUUTUJAVAHETUS KOLMEKORDSES INTEGRAALIS

Vaatame teisendust

$$\begin{cases} x=x(u,v,w), \\ y=y(u,v,w), \quad (u,v,w)\in\Delta, \\ z=z(u,v,w), \end{cases}$$

mis teisendab uvw-ruumis asetseva kinnise piirkonna Δ xyz-ruumis asetsevaks piirkonnaks V. Kui teisendus on üksühene ja kui funktsioonidel x, y ja z on olemas esimest järku osatuletised piirkonnas Δ ning kui teisenduse jakobiaan

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0, \text{kui } (u,v,w)\in\Delta,$$

siis **muutujavahetuse valem** on kujul

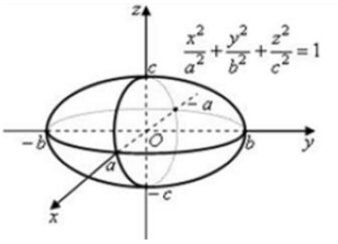
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|\,du\,dv\,dw.$$

Kuna jakobiaani ja pöördteisenduse jakobiaani korrutis on 1, saame leida teisenduse jakobiaani pöördteisenduse jakobiaani kaudu

$$J(x,y,z)=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}=\frac{1}{J(u,v,w)},$$

$$J(u,v,w)=\frac{1}{J(x,y,z)}.$$

Näide 4.11. Leiame ellipsoidi ruumala.



Ellipsoidi valem on

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ruumala arvutamiseks teeme järgmise muutujate vahetuse

$$x=au,\qquad u=\frac{x}{a},\qquad u\in[-1,1],$$

$$y=bv,\qquad v=\frac{y}{b},\quad v\in[-1,1],$$

$$z=cw,\qquad w=\frac{z}{c},\quad w\in[-1,1].$$

Muutujavahetuse jakobiaan on

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc.$$

Ellipsoidi võrrand uutes muutujates on

$$u^2+v^2+w^2=1$$

ja ruumala arvutamise valem

$$\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}abc\,dw=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}abc(w)|_{-1}^{1}dv=\int_{-1}^{1}du\int_{-1}^{1}2abc\,dv=$$

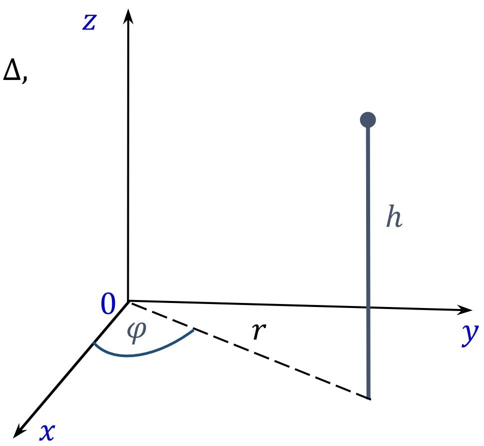
$$=\int_{-1}^{1}2abc(v)|_{-1}^{1}du=4abc(u)|_{-1}^{1}=8abc.$$

Tüüpilised asendused praktikas on üleminek silinderkoordinaatidele, elliptilistele silinderkoordinaatidele, sfäärkoordinaatidele, ellipsoidkoordinaatidele ja üldistele ellipsoid-koordinaatidele. Tutvume neist kahe tähtsamaga.

SILINDRILISED KOORDINAADID

Silindrilistele koordinaatidele üleminek on põhjendatud, kui integreerimispiirkonnaks on silinder või silindri osa. Lisaks polaarkoordinaatidele on antud kõrgus h. Tegemist on muutujavahetusega kujul

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,, \\ y = r\sin\varphi\,, \quad (r,\varphi,h) \in \Delta, \\ z = h, \end{cases}$$



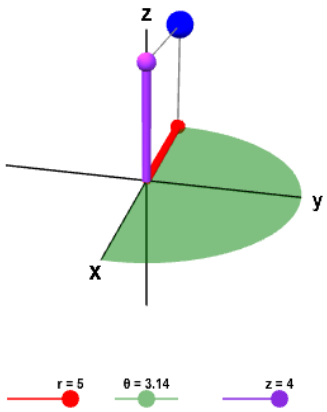
kus $r \geq 0$.

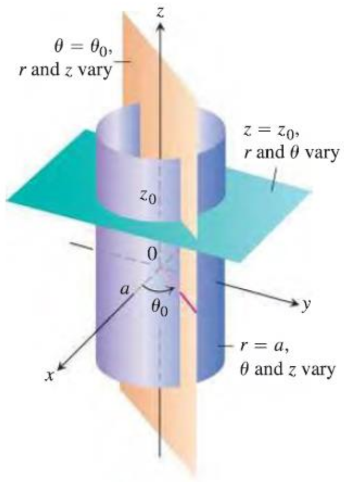
Teisenduse jakobiaan on

$$J(r,\varphi,h) = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi & x'_h \\ y'_r & y'_\varphi & y'_h \\ z'_r & z'_\varphi & z'_h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi\,, h)\, r\, dr\, d\varphi\, dh.$$



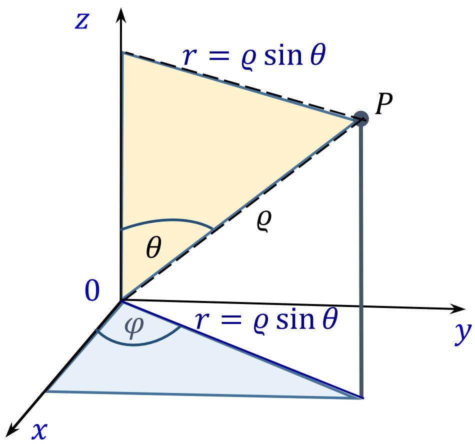


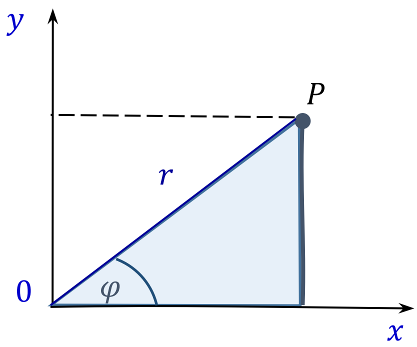
Allikad: http://mathinsight.org/applet/cylindrical_coordinates   Thomas' Calculus

SFÄÄRILISED KOORDINAADID

Sfäärilisi koordinaate kasutatakse siis, kui integreerimispiirkond on sfäär või selle osa. Uuteks muutujateks võtame nurga z-telje suhtes, mille tähistame kreeka tähega θ ning punkti kauguse koordinaatide alguspunktist tähistame ϱ. Muutujavahetus on järgmisel kujul

$$\begin{cases} x = \varrho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \varrho\sin\varphi\sin\theta\,, \\ z = \varrho\cos\theta. \end{cases}$$





Muutujavahetuse jakobiaan

$$J(\varrho,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} x'_\varrho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\varrho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\varrho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \varrho\cos\varphi\cos\theta & -\varrho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \varrho\sin\varphi\cos\theta & \varrho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\theta & -\varrho\sin\theta & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=\varrho^2\sin^2\varphi\sin^3\theta+\varrho^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta+\varrho^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos^2\theta+\varrho^2\cos^2\varphi\sin^3\theta=$$

$$=\varrho^2\sin\theta(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\cos^2\theta+\cos^2\varphi\sin^2\theta)=$$

$$=\varrho^2\sin\theta\big(\sin^2\varphi\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\varphi\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\big)=\varrho^2\sin\theta.$$

Saime

$$J(\varrho,\theta,\varphi)=\varrho^2\sin\theta.$$

Vastav muutujavahetuse valem üleminekul sfäärkoordinaatidele on

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_\Delta f(\varrho\cos\varphi\sin\theta\,,\varrho\sin\varphi\sin\theta\,,\varrho\cos\theta)\;\varrho^2\sin\theta\;d\varrho\;d\varphi\;d\theta.$$

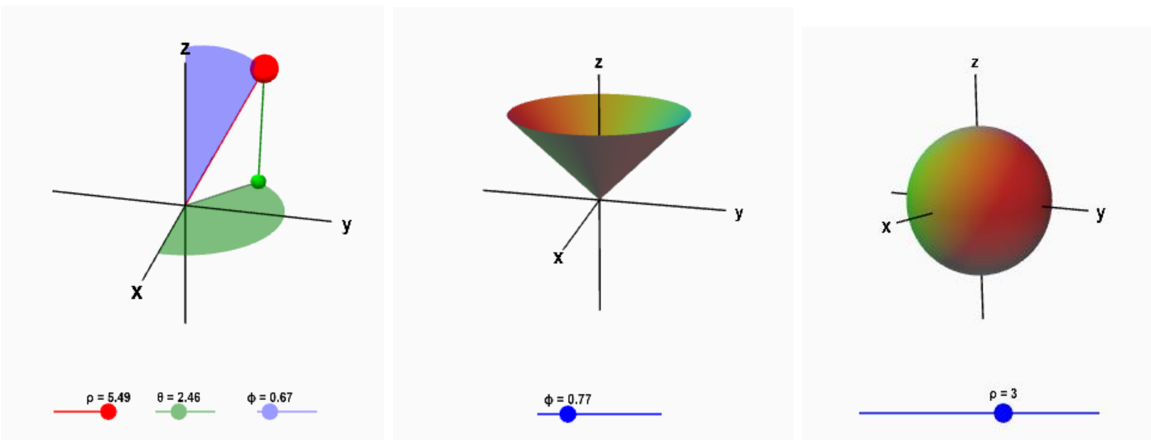
$$x^2+y^2+z^2=\varrho^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta)=$$

$$=\varrho^2(\sin^2\theta(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)+\cos^2\theta)=\varrho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\varrho^2.$$

Seega

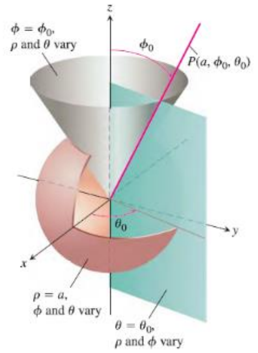
$$x^2+y^2+z^2=\varrho^2.$$

Uus nurk θ muutub vahemikus $0\le\theta\le\pi$ (keskmine joonis).



Allikas: http://mathinsight.org/spherical_coordinates (tähistused: $\phi=\theta,\theta=\varphi$)

Kui kõik eelnevad joonised kokku võtta, saab kõik sfäärilised koordinaadid kujutada ühel joonisel.



Allikas: Thomas' Calculus
(tähistused: $\phi = \theta, \theta = \varphi$)

Näide 4.12. Leiame integraali sfääriliste koordinaatide kaudu

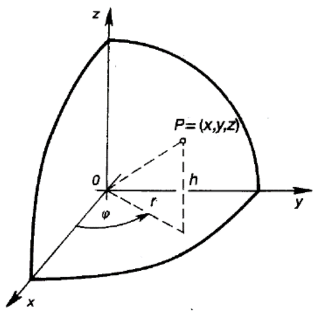
$$\iiint_V xz\, dxdydz\,, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Integreeritav funktsioon sfäärilistes koordinaatides on

$$xz = \varrho^2 \cos\varphi \sin\theta \cos\theta\,, \qquad J(\varrho, \varphi, \theta) = \varrho^2 \sin\theta.$$

Kuna

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2,$$



siis integreerimispiirkonna võrrandiks saame $\varrho^2 = 1$.

Integreerimispiirkond sfäärilistes koordinaatides on seega

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varrho \leq 1.$$

Arvutame kolmekordse integraali uues piirkonnas

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \varrho^4 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \int_0^1 \varrho^4 \left(\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varrho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \left(\frac{\varrho^5}{15}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{15}.$$

4.8. KOLMEKORDSE INTEGRAALI RAKENDUSED

1. **Keha mass**.

Kui eeldada, et piirkonnas E on $f(x,y,z) \geq 0$, siis võime seda funktsiooni tõlgendada aine tihedusena ϱ punktis $(x,y,z) \in E$. Siis ühe punkti P_i fikseerimine osapiirkonnas E_i ruumalaga ΔV_i tähendab seda, et kogu osapiirkonnas on aine tihedus loetud konstantseks ehk võrdseks aine tihedusega selles väljavalitud punktis. Sellisel juhul korrutis $f(P_i)\Delta V_i$ on tihedus korda osapiirkonna ruumala ehk ligikaudu osapiirkonna mass. Ligikaudu sellepärast, et osapiirkonnas muutuv tihedus on loetud konstantseks. Integraalsumma tähendab sellisel juhul ligikaudu kogu piirkonna E massi. Piirprotsess $\lambda \to 0$ tähendab seda, et kõikide osapiirkondade diameetrid kahanevad. Järelikult hakkab aine tihedus ühes suvaliselt väljavalitud punktis üha täpsemalt iseloomustama tihedust kogu osapiirkonnas. Tõlgendades integreeritavat funktsiooni $f(x,y,z)$ aine tihedusena, tähendab kolmekordne integraal piirkonna E massi. Olgu jäiga keha E ruumala V ja aine tihedus kehas muutuv ehk $\varrho = \varrho(x,y,z)$, kus $(x,y,z) \in E$. Lõpmata väikse ruumala dV korral loeme tiheduse konstantseks ja mass $dm = \varrho(x,y,z)dV$ ja järelikult

$$m_E = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i = \iiint_E \varrho(x,y,z)\,dxdydz.$$

2. **Piirkonna E ruumala**.

Kui piirkond E on täidetud ainega, mille tihedus igas punktis $\varrho(x,y,z) = 1$, siis piirkonna E mass ja ruumala on arvuliselt võrdsed, seega piirkonna E ruumala on arvutatav järgmise kolmekordse integraali abil

$$V_E = \iiint_E dx\,dydz.$$

3. **Masskeskme koordinaadid ja inertsimoment**.

Materiaalse keha E masskeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad järgmiselt

$$x_c = \frac{1}{m_E}\iiint_E x\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz, \quad y_c = \frac{1}{m_E}\iiint_E y\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$z_c = \frac{1}{m_E}\iiint_E z\,\varrho(x,y,z)\,dxdydz,$$

kus m_E on keha mass.

Näide 4.13. Leiame masskeskme kehale, mis on homogeensest materjalist, seega tihedus $\varrho =$ const. Keha on alt piiratud ringjoonega

$$x^2 + y^2 \le 4$$

ja ülevalt piirab keha paraboloid

$$z = 4 - x^2 - y^2.$$

Leiame rajad. Kuna

$$0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,$$

siis

$$-2 \le x \le 2$$

ja

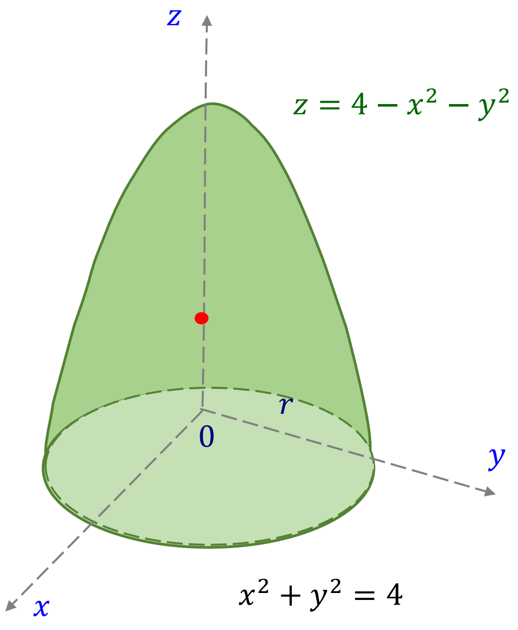
$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}.$$

Et tegemist on sümmeetrilise kujundiga x telje suhtes, on masskeskme koordinaadid

$$x_c = y_c = 0.$$

$$m_E = \varrho \iiint_E dxdydz = \varrho \iint_D dxdy \int_0^{4-x^2-y^2} dz =$$

$$= \varrho \iint_D (4 - x^2 - y^2)dxdy \underset{*}{=}$$



Edasi on mõistlik üle minna polaarkoordinaatidele, sest integreerimispiirkond on ring. Ringjoone puhul

$$0 \le \varphi \le 2\pi \text{ ja } 0 \le r \le 2.$$

Siis

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2$$

ja

$$J(r, \varphi) = r.$$

$$\underset{*}{=} \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - r^2)\, r dr = \varrho \int_0^{2\pi} \left(\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)_0^2 d\varphi = \varrho \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{16}{4} \right) d\varphi =$$

$$= \varrho \int_0^{2\pi} 4\, d\varphi = 4\varrho (\varphi)|_0^{2\pi} = 8\varrho\pi\,.$$

Nüüd arvutame masskeskme koordinaadi z_c üleminekuga polaarkoordinaatidele.

$$z_c = \frac{1}{m_E} \iiint_E z\varrho\, dxdydz = \frac{1}{8\varrho\pi}\, \varrho \iint_D dxdy \int_0^{4-x^2-y^2} zdz = \frac{1}{16\pi} \iint_D (4 - x^2 - y^2)^2 dxdy =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (4 - \varrho^2)^2\, \varrho d\varrho = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 16\varrho - 8\varrho^3 + \varrho^5\, d\varrho =$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{16\varrho^2}{2} - \frac{8\varrho^4}{4} + \frac{\varrho^6}{6} \right)_0^2 d\varphi = \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \left(32 - 32 + \frac{64}{6} \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \frac{32}{3}\, d\varphi = \frac{1}{16\pi} \frac{64}{3} \pi = \frac{4}{3}.$$

Saime keha masskeskme koordinaadid

$$C = \left(0, 0, \frac{4}{3} \right).$$

Materiaalse piirkonna inertsimoment koordinaattelgede ja koordinaatide alguspunkti suhtes avaldub

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2)\, \varrho(x, y, z)\, dxdydz, \qquad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2)\, \varrho(x, y, z)\, dxdydz;$$

$$I_z = \iiint_E (x^2 + y^2)\, \varrho(x, y, z)\, dxdydz, \qquad I_0 = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2)\, \varrho(x, y, z)\, dxdydz.$$

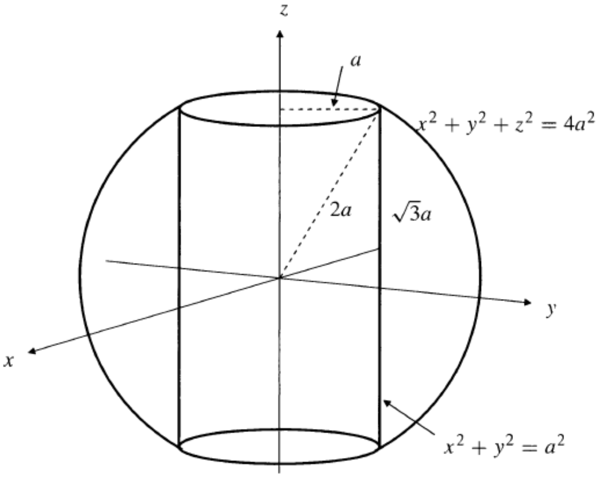
Näide 4.14. Avaldame materiaalse piirkonna R inertsimomendi z-telje suhtes, kui piirkonda täitev aine on tihedusega δ ja piirkond R asub sfääri

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$$

sees ning väljaspool silindrit

$$x^2 + y^2 = a^2$$

(joonis).



Inertsimoment z-telje suhtes piirkonnas R on

$$I=\iiint_R (x^2+y^2)\delta\, dV.$$

Teeme muutujavahetuse, minnes üle silindrilistele koordinaatidele. Sfääri ja silindri võrrandid silindrilistes koordinaatides on

$$h^2=4a^2-r^2, r^2=a^2.$$

Integreerimipiirkonnaks saame

$$R=\left\{(r,\varphi,h): a\le r\le 2a, \quad 0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le h\le\sqrt{4a^2-r^2}\right\},$$

seetõttu saame inertsimomenti avaldise kujul

$$I=\iiint_R (x^2+y^2)\delta\, dxdydz=2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_a^{2a} dr\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r^2 r\, dh.$$

Integreerime kõigepealt muutuja h järgi, saame

$$I=2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_a^{2a}\left((r^3h)\Big|_0^{\sqrt{4a^2-r^2}}\right)dr=2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_a^{2a}\left(r^3\sqrt{4a^2-r^2}\right)dr=$$

Muutuja r järgi integreerimiseks teeme muutujavahetuse

$$u=4a^2-r^2,\ \ r^2=4a^2-u, du=-2rdr, -\frac{du}{2}=rdr.$$

Uued rajad on

$$r=a, u=3a^2, \qquad r=2a, u=0.$$

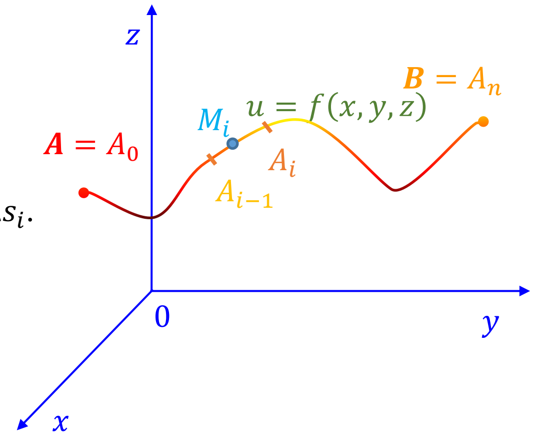
$$=2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi\int_{3a^2}^{0}-\frac{1}{2}(4a^2-u)\sqrt{u}du=2\delta\int_0^{2\pi}\left(-2\,a^2\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}u^{\frac{5}{2}}\Big|_{3a^2}^{0}\right)d\varphi=$$

$$=2\delta\int_0^{2\pi}\left(a^2\frac{4}{3}(3a^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}(3a^2)^{\frac{5}{2}}\right)d\varphi=2\delta a^5\sqrt{3}\int_0^{2\pi}\frac{11}{5}d\varphi=\frac{22}{5}\sqrt{3}\delta a^5 2\pi=\frac{44}{5}\sqrt{3}\delta a^5\pi.$$

4.9. ESIMEST LIIKI JOONINTEGRAAL

Olgu antud funktsioon $u=f(x,y,z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i=1,\dots,n$, $A_0=A, A_n=B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Funktsiooni **integraalsummaks** piki joont AB nimetatakse summat

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$



Olgu suurim elementaarkaarte pikkustest $\lambda = \max \Delta s_i$.

Leiame piirväärtuse maksimaalse elementaarkaare lähenemisel nullile.

Definitsioon 4.4.
Kui piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda **esimest liiki joonintegraaliks** üle kaare AB funktsioonist u

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$

Kui on tegemist pideva funktsiooniga $f(x, y, z)$, siis piirväärtus eksisteerib. Integreerimisteed AB märgitakse ka ühe tähega L. Joon AB võib olla ka kinnine, siis $A = B$.

Esimest liiki joonintegraali omadused.

1. Joonintegraal **ei sõltu integreerimissuunast**:

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{BA} f(x, y, z)\, ds.$$

2. Kui funktsioonid $f(x, y, z)$ ja $g(x, y, z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende **summa ja vahe**

$$\int_{AB} \big(f(x, y, z) \pm g(x, y, z)\big)\, ds = \int_{AB} f(x, y, z)\, ds \pm \int_{AB} g(x, y, z)\, ds.$$

3. **Konstantse kordaja** võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} c\, f(x, y, z)\, ds = c \int_{AB} f(x, y, z)\, ds.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB ja funktsioon $f(x, y, z)$ on integreeruv joonel AB, siis

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{AC} f(x, y, z)\, ds + \int_{CB} f(x, y, z)\, ds.$$

Joonintegraali arvutamine.

Kui joon on esitatud **parameetriliste võrranditega**, siis kaare pikkuse diferentsiaal avaldub

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Joonintegraali saame kirjutada määratud integraalina üle parameetri t.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \quad A = (x, y, z)|_{t=\alpha}, \quad B = (x, y, z)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

b) **Tasandiline kõver**. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x, y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0, \quad A = (x, y)|_{t=\alpha}, \quad B = (x, y)|_{t=\beta}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Näide 4.15. Leiame joonintegraali järgmistel tingimustel:

$$\int_{AB} x^2 y\, ds, \quad AB: x^2 + y^2 = 4, y \ge 0.$$

Tegemist on ringjoone ülemise osaga, raadiusega 2, mille parameetrilised võrrandid on:

$$x(t) = 2\cos t\,, \qquad y(t) = 2\sin t\,, \qquad t \in [0, \pi]$$

Leiame tuletised

$$x'(t) = -2\sin t, \qquad y'(t) = 2\cos t,$$

ning asendame valemisse, saame

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t), y(t)\big)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^{\pi} 4\cos^2 t \cdot 2\sin t\sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}dt =$$

$$= \int_0^{\pi} 8\cos^2 t \sin t\sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)}dt = \int_0^{\pi} 16\cos^2 t \sin t dt =$$

$$= \int_1^{-1} -16\, u^2 dt = -16\frac{u^3}{3}\Big|_1^{-1} = \frac{32}{3}.$$

c) **Tasandiline kõver**. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_a^b f\big(x, y(x)\big)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Näide 4.16. Leiame joonintegraali

$$\int_{AB} xy^2\, ds, \quad AB: y = 2x, A = (0,0), B = (2,4), \quad y(x) = 2x, \qquad y'(x) = 2, x \in [0,2].$$

$$\int_{AB} f(x, y)\, ds = \int_0^2 x(2x)^2\sqrt{1 + 2^2}dx = 4\sqrt{5}\int_0^2 x^3 dx = 4\sqrt{5}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 16\sqrt{5}.$$

d) **Tasandiline kõver**. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \qquad c \le y \le d, \qquad \int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_c^d f(x(y),y)\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy.$$

e) **Tasandiline kõver polaarkoordinaatides.** Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi\,, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

JOONINTEGRAALI RAKENDUSED

1. Kõvera mass ja masskeskme koordinaadid. On antud ruumiline kõver AB, millel aine tihedus on jaotunud funktsiooni $p = p(x,y,z)$ järgi. Siis materiaalse kaare mass avaldub

$$m = \int_{AB} p(x,y,z)\,ds.$$

Masskeskme $C = (x_c, y_c, z_c)$ koordinaadid avalduvad massi kaudu järgmiselt:

$$x_c = \frac{1}{m}\int_{AB} x\,p(x,y,z)\,ds,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\int_{AB} y\,p(x,y,z)\,ds,$$

$$z_c = \frac{1}{m}\int_{AB} z\,p(x,y,z)\,ds.$$

2. Muutuva jõu töö. Kui punkt P liigub piki ruumilist joont punktist A punkti B. Punktile P rakendatud jõud, mis punkti P liikumisel muutub nii suuruse kui sihi poolest

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{\imath} + Q(x,y,z)\vec{\jmath} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Töö, mida teeb jõud punkti P liikumisel piki joont, avaldub järgmiselt

$$W = \int_{AB} (P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz).$$

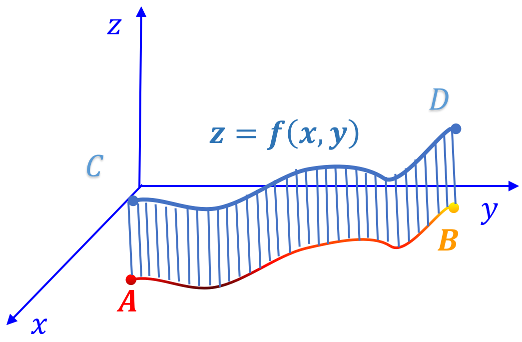
3. Joone kaare pikkus. Kui ruumis on antud sile joon AB, siis tema pikkus avaldub valemiga

$$l_{AB} = \int_{AB} ds.$$

4. Silinderpinna pindala. Olgu funktsioon $f(x,y) \ge 0$ pidev xy-tasandil asetseval siledal joonel AB. Vaatame vertikaalset silinderpinda $ABCD$, mille alumine serv on joon AB ja ülemine serv on funktsiooni f graafik $z = f(x,y)$. Pinna $ABCD$ pindala S_{ABCD} avaldub valemiga

$$S_{ABCD} = \int_{AB} f(x,y)ds.$$

Saadud valem annab esimest liiki joonintegraali geomeetrilise tähenduse.



4.10. TEIST LIIKI JOONINTEGRAAL*

Olgu antud funktsioon $u = f(x,y,z)$, mis on määratud kaarel AB. Jaotame kaare AB n elementaarkaareks $A_{i-1}A_i$, $i = 1,\dots,n$; $A_0 = A, A_n = B$. Olgu Δs_i kaare $A_{k-1}A_k$ pikkus. Valime igal kaaretükil vabalt punkti $M_i(x_i,y_i,z_i)$. Tähistame osakaare $A_{i-1}A_i$ projektsioonid koordinaattelgedele:

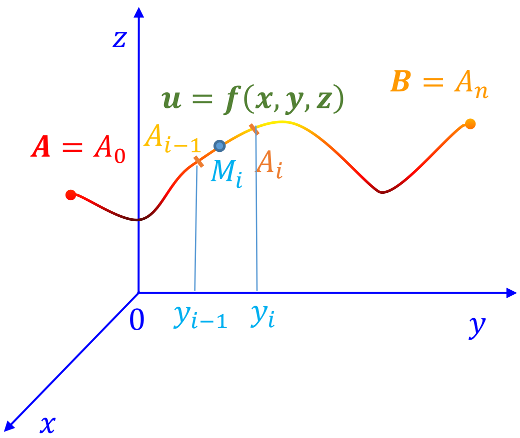
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1} \text{ ja } \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

Moodustame integraalsummad

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i.$$



Definitsioon 4.5.

Kui integraalsumma piirväärtus eksisteerib ja ei sõltu joone AB osadeks jaotamise viisist ja punktide M_i valikust, siis nimetatakse seda piirväärtust **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB **projektsioonide järgi x teljele**

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i.$$

Samal viisil saab defineerida **teist liiki joonintegraalid projektsioonide järgi y ja z teljele**:

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dy = \lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta y_i,$$

$$\int_{AB} \boldsymbol{f(x,y,z)\,dz} = \lim_{\max \Delta z_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(x_i,y_i,z_i)\Delta z_i}.$$

Definitsioon 4.6.
Olgu joonel AB defineeritud kolm funktsiooni: $p = P(x,y,z), q = Q(x,y,z)$ ja $r = R(x,y,z)$, siis **funktsiooni f teist liiki joonintegraaliks** üle kaare AB nimetatakse integraali

$$\int_{AB} \boldsymbol{P(x,y,z)\,dx} + \int_{AB} \boldsymbol{Q(x,y,z)\,dy} + \int_{AB} \boldsymbol{R(x,y,z)\,dz} =$$

$$= \int_{AB} \boldsymbol{P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz}.$$

Teist liiki joonintegraali omadused:

1. Teist liiki joonintegraal sõltub integreerimissuunast:

$$\int_{AB} P\,dx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

2. Kui funktsioonid $P_1(x,y,z)$ ja $P_2(x,y,z)$ on integreeruvad joonel AB, siis on integreeruv ka nende summa ja vahe

$$\int_{AB} \big(P_1(x,y,z) \pm P_2(x,y,z)\big)\,dx = \int_{AB} P_1(x,y,z)\,dx \pm \int_{AB} P_2(x,y,z)\,dx.$$

3. Konstantse kordaja võib tuua integraali märgi ette

$$\int_{AB} cP(x,y,z)\,dx = c\int_{AB} P(x,y,z)\,dx.$$

4. Kui AB koosneb kaartest AC ja CB, siis teist liiki joonintegraal avaldub

$$\int_{AB} P\,dx + Qdy + Rdz = \int_{AC} P\,dx + Qdy + Rdz + \int_{CB} P\,dx + Qdy + Rdz.$$

Teist liiki joonintegraali arvutamine.

a) Olgu ruumiline kõver AB esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

$$A = (x,y,z)|_{t=\alpha}, \;\; B = (x,y,z)|_{t=\beta}, \;\; \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y,z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \big\{P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\big\}dt.$$

b) Tasandiline kõver. Kui joon AB asub xy tasandil, siis funktsioon $f(x,y)$ on avaldatav parameetrilise võrranditega

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = 0,$$

$$A = (x,y)|_{t=\alpha}, \;\; B = (x,y)|_{t=\beta}\,, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\,dt.$$

c) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \qquad a \le x \le b, \qquad \int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{a}^{b} f\big(x,y(x)\big)dx.$$

d) Tasandiline kõver. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \qquad c \le y \le d, \quad \int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{c}^{d} f\big(x(y),y\big)dy.$$

e) Tasandiline kõver polaarkoordinaatides. Kui tasandiline kõver AB esitatud võrrandiga

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi,$$

$$\int_{AB} f(x,y)\,dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi\,, r\sin\varphi)(r'\cos\varphi + r\sin\varphi)d\varphi.$$

Kui kinnine joon AB asub xy-tasandil, on tegu integraaliga

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy,$$

siis loetakse integreerimistee **positiivseks suunaks** sellist suunda, et z-telje poolt vaadatuna jääb joone poolt piiratud ala vasakule (joon läbitakse vastupäeva, kellaosuti liikumise vastassuunas).

Teist liiki joonintegraali rakendused.

1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine. Olgu xy-tasandil asetseva kujundi D rajajoon L tükiti sile. Siis kujundi D pindala S_D avaldub valemitega

$$S_D = \int_L x\,dy,$$

$$S_D = -\int_L y\,dx,$$

$$S_D = \frac{1}{2}\left(\int_L x\,dy - y\,dx\right).$$

2. Muutuva jõu töö arvutamine. Liikugu materiaalne punkt massiga m mööda joont AB punktist A punkti B jõu $\vec{F} = (P, Q, R)$ toimel, kus $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ on pidevad funktsioonid joonel AB. Siis jõu $\vec{F}$ töö W on arvutatav valemiga

$$W = m\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Greeni valem. Eksisteerigu pidevatel kahe muutuja funktsioonidel $p = P(x, y)$ ja $q = Q(x, y)$ pidevad osatuletised

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$$

tõkestatud kinnises piirkonnas D, mille rajajoon Γ on tükiti sile. Siis

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\Gamma Pdx + Qdy.$$

4.11. PINDINTEGRAAL*

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ pidev sileda pinna $z = z(x, y)$ mingi tüki D punktides. Jaotame pinnatüki n osapiirkonnaks D_i diameetriga d_i ja pindalaga ΔS_i ning valime igas osapiirkonnas punkti (x_i, y_i, z_i).
Tähistame suurima diameetri osapiirkondadel

$$\lambda = \max d_i.$$

Definitsioon 4.7.
Pindintegraal pindala järgi üle pinnatüki D defineeritakse järgmiselt

$$\iint_D F(x, y, z)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Pindintegraali saab teisendada kahekordseks integraaliks, asendades $z = z(x, y)$ ning võttes pinna diferentsiaaliks

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Integreerimispinnaks tuleb pinna D projektsioon xy tasapinnale D_{xy}. Saame

$$\iint_D F(x, y, z)\, dS = \iint_{D_{xy}} F\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dxdy.$$

Pindintegraal projektsiooni järgi on defineeritud läbi osapiirkonna D_i projektsiooni xy tasapinnale, mille pindala on ΔS_i

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i.$$

Pindintegraali projektsiooni järgi saab teisendada kahekordseks integraaliks üle pinna D projektsiooni D_{xy}

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \iint_{D_{xy}} F\big(x, y, z(x, y)\big)\, dxdy.$$

Analoogiliselt defineeritakse pindintegraalid projektsiooni järgi xz ja yz tasanditele.

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \iint_{D_{xz}} F(x, y(x, z), z)\, dxdz,$$

$$\iint_D F(x, y, z)\, dxdy = \iint_{D_{yz}} F(x(y, z), y, z)\, dydz.$$

V PTK HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.1. SISSEJUHATUS

Tehniliste ülesannete matemaatiline analüüs koosneb kolmest etapist:
ülesande tingimuste esitamine matemaatika keeles,
matemaatilise ülesande lahendamine,
saadud tulemuste tõlgendamine.

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ kirjeldab mingi nähtuse kvantitatiivset külge. Sageli ei ole nähtuse vaatlemisel võimalik kindlaks teha x ja y vahelist sõltuvust, kuid saame määrata muutujate $x, y, y', y'', \dots$ vahelise seose, ehk saame koostada diferentsiaalvõrrandi. Saadud seosest muutujate x, y ja tuletiste vahel on vaja tuletada otsene seos x ja y vahel ehk sõltuvus $y = f(x)$ ehk tuleb **integreerida diferentsiaalvõrrand**.

Näide 5.1. Mingilt kõrguselt visatakse alla keha, mille mass on m. Leida seaduspärasus, mille järgi muutub keha langemiskiirus $v = f(t)$, kui kehale mõjub peale raskusjõu veel õhutakistus, mis on võrdeline kiirusega (võrdetegur on k).
Newtoni II seaduse põhjal

$$F = m\frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt} = a,$$

a on liikuva keha kiirendus (kiiruse tuletis aja järgi), F on kehale liikumise suunas mõjuv jõud. See jõud koosneb kahest komponendist: raskusjõust mg ja õhutakistusest $-kv$, mis on keha liikumisele vastassuunaline, seega

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv, \tag{5.1}$$

kus $v = f(t)$ on otsitav funktsioon. Saime seose otsitava funktsiooni ja tema tuletise vahel ehk diferentsiaalvõrrandi funktsiooni v suhtes. See funktsioon väljendab mõningat tüüpi langevarjude langemise seadust. Lahendada diferentsiaalvõrrand, tähendab leida selline funktsioon $v = f(t)$, mis samaselt rahuldab diferentsiaalvõrrandit. Selliseid funktsioone on lõpmata palju. Osutub, et antud diferentsiaalvõrrandit rahuldab funktsioon

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}, \tag{5.2}$$

kus C on mistahes arv (integreerimiskonstant). Kontrollime lahendi õigsust, leides funktsioonist (5.2) tuletise ja asendades selle funktsiooni ja tema tuletise võrrandisse (5.1):

$$\frac{dv}{dt} = Ce^{-\frac{k}{m}t}\left(-\frac{k}{m}\right),$$

$$v.p. \quad m\frac{dv}{dt} = mCe^{-\frac{k}{m}t}\left(-\frac{k}{m}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t},$$

$$p.p. \;\; mg - kv = mg - k\left(Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right) = -Cke^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parem pool ja vasak pool on võrdsed iga t korral, järelikult funktsioon (5.2) rahuldab võrrandit (5.1).

Milline neist funktsioonidest annab otsitava seose v ja t vahel?
Selle leidmiseks kasutame lisatingimust: keha allaviskamisel anti talle algkiirus v_0. Siis funktsioon v kujul (5.2) peab rahuldama algtingimust. Liikumise alghetkel aeg $t = 0$ ja kiirus

$$v(0) = v_0.$$

Kasutame seda võrduses (5.2) ja avaldame C

$$v_0 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} + \frac{mg}{k} = C + \frac{mg}{k} \qquad \Rightarrow \qquad C = v_0 - \frac{mg}{k}.$$

Seega konstant C on leitud ja sõltuvus v ja t vahel avaldub kujul

$$\boldsymbol{v = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}}.$$

5.2. DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE, CAUCHY ÜLESANNE

Definitsioon 5.1.

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon, võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Vastavalt sõltumatute muutujate arvule liigitatakse diferentsiaalvõrrandid harilikeks ja osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks.

Definitsioon 5.2.

Harilikeks diferentsiaalvõrranditeks nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Näited harilike diferentsiaalvõrrandite kohta:

$$y' = 2x - 1, \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{8}{x^3}y = 0,$$

kus otsitavaks on funktsioon $y = f(x)$.
Harilikud diferentsiaalvõrrandid on ka võrrandid kujul

$$\frac{dv}{dt} + 3v = 7, \qquad \frac{dx}{dt} - x = 4,$$

kus otsitavaks funktsiooniks on vastavalt $v = v(t)$ ja $x = x(t)$.

Definitsioon 5.3.

Osatuletistega diferentsiaalvõrranditeks nimetatakse diferentsiaalvõrrandeid, kus otsitavaks on mitme muutuja funktsioon ja võrrand sisaldab osatuletisi.

Definitsioon 5.4.

Diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse otsitava funktsiooni võrrandis esinevate tuletiste kõrgeimat järku.

Esimest järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$F(x, y, y') = 0,$$

***n*-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkujuks** on

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

kus funktsioon F on vastava arvu muutujate mitme muutuja funktsioon.

Definitsioon 5.5.

Diferentsiaalvõrrandi lahendiks nimetatakse sellist diferentseeruvat funktsiooni, mille asetamine võrrandisse muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon 5.6.

Diferentsiaalvõrrandi lahendit nimetatakse veel **integraalkõveraks**, sest lahendi leidmine seisneb tavaliselt mingi integraali leidmises ning näiteks lahendi $y = y(x)$ graafik on joon ehk kõver xy-tasandil.

Näide 5.2. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0.$$

Näitame, et funktsioon

$$y = 2x + x^2$$

on antud diferentsiaalvõrrandi lahend. Selleks võtame lahendist esimese ja teise tuletise

$$y' = 2 + 2x, \qquad y'' = 2$$

ning asendame saadud tuletised koos lahendiga esialgsesse võrrandisse:

$$2 - \frac{2}{x}(2 + 2x) + \frac{2}{x^2}(2x + x^2) = 2 - \frac{4}{x} - 4 + \frac{4}{x} + 2 = 0.$$

Kuna võrrandi vasak pool võrdub nüüd nulliga, millega võrdub ka parem pool, oleme näidanud, et tõesti on tegemist võrrandi lahendiga.

Näide 5.3. Olgu antud diferentsiaalvõrrand

$$y' = 2x - 1.$$

Võrrandi lahendiks on

$$y = x^2 - x,$$

aga ka funktsioonid $y = x^2 - x + C$, kus C on suvaline konstant.

Üldkujulise n-järku hariliku diferentsiaalvõrrandi erijuhuks on normaalkujuline võrrand

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \tag{5.3}$$

Esimest järku normaalkujuline võrrand on

$$y' = f(x, y).$$

Vaatleme olukorda, kus f on määratud piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (esimest järku võrrandi korral $D \subset \mathbb{R}^2$). Piirkonna all mõeldakse lahtist sidusat hulka. Hulga lahtisus tähendab, et iga selle hulga punkti korral on selles hulgas ka punkti mingi ümbrus. Hulga sidusus tähendab, et hulga igat kahte punkti saab ühendada sellesse hulka kuuluva pideva joonega.

Definitsioon 5.7.

Normaalkujulise võrrandi (5.3) **üldlahendiks** (mõnikord ka **üldintegraaliks**) piirkonnas D nimetatakse võrrandi (5.3) lahendite n parameetrist sõltuvat peret

$$\boldsymbol{y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)},$$

mis iga punkti $(x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in D$ korral annab parameetrite $C_1, \ldots, C_n$ sobiva valiku korral lahendi, mis rahuldab tingimusi

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Esimest järku normaalkujulise võrrandi korral tähendab üldlahend ühest parameetrist C sõltuvat lahendite peret $y = y(x, C)$, mis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral võimaldab parameetri C nii valida, et vastav lahend rahuldab tingimust $y(x_0) = y_0$ ehk lahend kui integraalkõver läbib punkti (x_0, y_0).

Näide 5.4. Vaatleme võrrandit

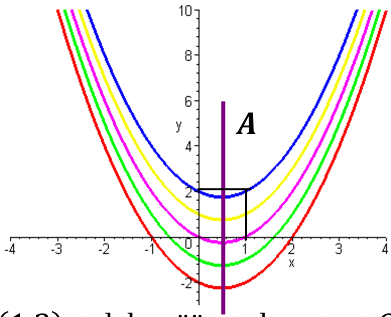
$$y' = 2x - 1.$$

Selle üldlahendiks on $y = x^2 - x + C$. Nende paraboolide haripunktid asuvad sirgel $x = 1/2$. Üldlahend esitab paraboolide parve. Näiteks kui

$C = 1$ ja $x = \dfrac{1}{2}$, siis $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$,

$C = 0$ ja $x = \dfrac{1}{2}$, siis $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 0 = -\dfrac{1}{4}$,

$C = -1$ ja $x = \dfrac{1}{2}$, siis $y = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{5}{4}$.



Et leida selle parve hulgast niisugune, mis läbib näiteks punkti $(1,2)$, tuleb määrata konstant C:

$$2 = 1 - 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Järelikult punkti $(1,2)$ läbib integraalkõver $y = x^2 - x + 2$.
Vaadeldav kõverate pere $y = x^2 - x + C$ on võrrandi $y' = 2x - 1$ üldlahendiks igas piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$, sest iga punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ korral tingimus $y(x_0) = y_0$ ehk $x_0^2 - x_0 + C = y_0$ võimaldab (üheselt) määrata parameetri C.

Märgime, et üldlahend kui lahendite pere ei pea sisaldama vaadeldava võrrandi kõiki lahendeid.

Näide 5.4. Vaatleme võrrandit

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

Selle üldlahendiks piirkonnas $D = \mathbb{R}^2$ on funktsioonide pere

$$y = (x - C)^3, C \in \mathbb{R}.$$

Vahetult on kontrollitav, et iga pere liige rahuldab diferentsiaalvõrrandit. Kui $C = 0$, siis $y = x^3, x \in \mathbb{R}$, on tuntud kõver ja $C \neq 0$ korral on tegemist selle kõvera horisontaalsuunalise nihkega. Seepärast on arusaadav, et vaadeldavad kõverad katavad terve tasandi $\mathbb{R}^2$. Veidi formaalsemalt, iga $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ korral määrab tingimus $(x_0 - C)^3 = y_0$ parameetri C (seejuures üheselt). Oleme näidanud, et tegemist on üldlahendiga. Kuid selles peres ei sisaldu vaadeldava võrrandi lahend $y = 0$.

Definitsioon 5.8.

Diferentsiaalvõrrandi erilahendiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandi lahendit, mis on saadud üldlahendist parameetritele arvuliste väärtuse andmisel.

Definitsioon 5.9.

Cauchy ülesandeks ehk **algtingimusega ülesandeks** nimetatakse ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

lahend y, mis rahuldab **algtingimusi**

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Algtingimusi nimetatakse ka Cauchy tingimusteks. Esimest järku harilikku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesanne on ülesanne, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ selline lahend, mis argumendi väärtusel $x = x_0$ omandab väärtuse $y = y_0$ ehk rahuldab algtingimust

$$y(x_0) = y_0.$$

Järnevalt sõnastame esimest järku Cauchy ülesande jaoks lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemi.

Teoreem 5.1.

Cauchy teoreem. Olgu f ja $\partial f / \partial y$ pidevad muutujate x, y piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$. Siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on Cauchy ülesandel

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

parajasti üks lahend $y = y(x)$.

Toodud teoreemi sõnastuses tähendab lahendi ühesus seda, et vaadeldava Cauchy ülesande kaks lahendit ühtivad vahemikus $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ küllalt väikese $\delta > 0$ korral. Teoreemi tõestuse võib leida on diferentsiaalvõrrandite õpikust [8] lk. 50-58.

5.2.1. CAUCHY ÜLESANDE LAHENDAMINE ASTMERIDADE ABIL

Kui funktsioon f on analüütiline muutujate x, y piirkonnas D, siis iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on funktsioon arendatav astmeritta

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j,$$

mis koondub punkti (x_0, y_0) mingis ümbruses. Sellele funktsioonile vastava diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ lahend on samuti arendatav astmeritta iga x_0 korral lahendi määramispiirkonnast:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k,$$

mis koondub punkti x_0 mingis ümbruses. Rea kordajad c_k avalduvad kujul

$$c_k = \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots .$$

Näide 5.4. Olgu antud Cauchy ülesanne

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$

Lahendame ülesande astmeridade abil. Võrrandi diferentseerimisel saame, arvestades, et y on argumendi x funktsioon,

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y'' = 2x + 2yy', \qquad y''' = \ 2 + 2(y')^2 + 2yy'',$$

$$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' = 6y'y'' + 2yy''',$$

$$y^{V} = 6(y'')^2 + 6y'y''' + 2y'y''' + 2yy^{IV} = 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV},$$

$$y^{VI} = 12y''y''' + 8y''y''' + 8y'y^{IV} + 2y'y^{IV} + 2yy^{V} = 20y''y''' + 10y'y^{IV} + 2yy^{V},$$

$$y^{VII} = 20(y''')^2 + 30y''y^{IV} + 12y'y^{V} + 2yy^{VI}.$$

Siit arvutame

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV}(0) = 0, \qquad y^{V}(0) = 0, \quad y^{VI}(0) = 0, \quad y^{VII}(0) = 80.$$

Seega ülesande

$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0$$

lähislahendiks võib võtta funktsiooni

$$y = \frac{2}{3!}x^3 + \frac{80}{7!}x^7 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$$

5.3. ESIMEST JÄRKU HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.3.1. ERALDATUD JA ERALDUVATE MUUTUJATEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.10.

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

milles dx kordaja $f(x)$ sõltub ainult muutujast x ja dy kordaja $g(y)$ sõltub ainult muutujast y.

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendiks on funktsioon $y = y(x)$, mis rahuldab võrrandit igal argumendi x väärtusel, kuid lahendiks saab olla ka funktsioon $x = x(y)$, mis rahuldab võrrandit igal argumendi y väärtusel. Selliselt käsitletakse lahendi mõistet, sest võrrandis on muutujate x ja y roll sama, nad mõlemad võivad olla lahendi argumentideks.
Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahendi mõiste on mõneti sarnane eespool käsitletud normaalkujulise võrrandi üldlahendi mõistega. Siin vaadeldakse piirkonda $D \subset \mathbb{R}^2$, üldlahend on selline ühest parameetrist C sõltuv lahendite pere, millest iga $(x_0, y_0) \in D$ korral saab parameetri C fikseerimisega diferentsiaalvõrrandi lahendi $y = y(x)$, mis rahuldab tingimust $y(x_0) = y_0$, või lahendi $x = x(y)$, mis rahuldab tingimust $x(y_0) = x_0$. Üldlahendi saab üldreeglina esitada kujul $\Phi(x, y, C) = 0$.
Eraldatud muutujatega võrrandi üldlahendiks on

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

milles parameetri C valikuvõimalused määratakse funktsioonidega f ja g ning piirkonnaga $D \subset \mathbb{R}^2$, kus üldlahendit vaadeldakse.

Näide 5.5. Vaatleme eraldatud muutujatega võrrandit

$$xdx + ydy = 0.$$

Integreerimisel saame lahendid

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C$$

ehk

$$x^2 + y^2 = C,$$

mis on üldlahend piirkonnas $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, kusjuures $C > 0$ võib olla suvaline. Toodud lahendid on ringjooned, mille keskpunktid asuvad punktis $(0,0)$ ja need on vähemalt lokaalselt esitatavad kui funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$. Märgime, et ei saa lubada parameetri väärtuseid $C < 0$, samuti $C = 0$, sest viimasel juhul saadav punkt $(0,0)$ ei ole diferentseeruva funktsiooni graafik ega ole seega diferentsiaalvõrrandi lahend.

Definitsioon 5.11.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit kujul

$$\boldsymbol{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0}, \tag{5.4}$$

kus funktsioonid $f_1(x), f_2(x)$ on argumendi x funktsioonid ja $g_1(y), g_2(y)$ argumendi y funktsioonid.

Diferentsiaalide dx ja dy kordajateks on selliste funktsioonide korrutised, millest üks tegur sõltub ainult argumendist x ja teine tegur ainult argumendist y.
Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamisel eraldatakse muutujad. Muutujate eraldamiseks jagatakse võrrandi (5.4) mõlemaid pooli avaldisega:

$$\boldsymbol{g_1(y)f_2(x)}.$$

Võrrand saab siis kuju

$$\boldsymbol{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0}, \tag{5.5}$$

mis on juba eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrand. Integreerides võrrandit liikmeti, saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi (5.4) üldlahendi

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$$

Muutujate eraldamine toodud viisil on võimalik sellistel x ja y väärtustel, kus $g_1(y) \neq 0$ ja $f_2(x) \neq 0$. Kui $g_1(y_0) = 0$, siis funktsioon $y = y_0$ on võrrandi (5.4) lahend, sest siis $dy = 0$, kusjuures funktsioon $y = y_0$ rahuldab võrrandit iga $x \in \mathbb{R}$ korral, samuti on $f_2(x_0)$ korral funktsioon $x = x_0$ võrrandi (5.4) lahend, sest siis $dx = 0$ ja funktsioon $x = x_0$ rahuldab võrrandit (5.4) iga $y \in \mathbb{R}$ korral. Võib öelda, et sirged $y = y_0$ ja $x = x_0$ on võrrandi (5.4) integraalkõverad. Juhime tähelepanu sellele, et saadud eraldatud muutujatega võrrandi (5.5) edasine lahendamine saab toimuda sellisel punktide (x, y) hulgal, kus $f_2(x) \neq 0$ ja $g_1(y) \neq 0$. Järgnevate näidete juures me ei käsitle võrrandi lahendamise kõiki detaile, näiteks ei esita üldlahendis vaadeldavat piirkonda või lahendite määramispiirkonda. Põhitähelepanu pöörame muutujate eraldamise ja integreerimise tehnilisele küljele.

Näide 5.6. Leiame eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend (lahendada diferentsiaalvõrrand)

$$e^y y' = 2x + 1.$$

Kõigepealt asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega, siis korrutame läbi diferentsiaaliga dx . Üldlahendi saamiseks peame võrrandit integreerima. Lahenduskäik on järgmine: asendame tuletise diferentsiaalide jagatisega, korrutame suurusega dx ja integreerime

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 2x + 1,$$

$$e^y dy = (2x + 1)dx.$$

$$\int e^y dy = \int (2x + 1)dx,$$

$$e^y = x^2 + x + C.$$

Selleks, et avaldada üldlahendis muutuja y, võtame võrduse mõlemast poolest naturaallogaritmi, ning kuna $\ln e^y = y$, saame võrrandi üldlahendiks

$$y = \ln(x^2 + x + C).$$

Kontrollime vastuse õigsust, leides üldlahendist tuletise ja asendades esialgsesse võrrandisse:

$$y' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + C},$$

$$e^y y' = e^{\ln(x^2+x+C)} \frac{2x + 1}{x^2 + x + C} = (x^2 + x + C)\frac{2x + 1}{x^2 + x + C} = 2x + 1.$$

Näide 5.7. Leida järgmise eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$\frac{x}{1 + y^2}dx + 2y(2 + x^2)dy = 0.$$

Võrrandi lahendamiseks eraldame kõigepealt muutujad. Antud võrrandis on diferentsiaali dx kordajaks muutujat y sisaldav funktsioon $1/(1 + y^2)$ ja diferentsiaali dy kordajaks on muutujat x sisaldav funktsioon $2 + x^2$. Muutujate eraldamiseks peame võrrandit läbi jagama mõlema funktsiooniga.

$$\frac{x}{1+y^2}dx + 2y(2+x^2)dy = 0,$$

$$\frac{x}{2+x^2}dx + 2y(1+y^2)dy = 0.$$

Nüüd on tegemist eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiga, mille lahendamiseks integreerime võrrandi mõlemat poolt

$$\int \frac{x}{2+x^2}dx + \int 2y(1+y^2)dy = C,$$

Esimese integraali leiame järgmise muutujavahetusega:

$$u = 2 + x^2, \quad du = 2x\,dx, \quad \frac{du}{2} = x\,dx,$$

$$\int \frac{du}{2u} + 2\int ydy + 2\int y^3 dy = C,$$

$$\frac{1}{2}\ln(2+x^2) + y^2 + \frac{2}{4}y^4 = C.$$

Selles lahendite peres võib C olla suvaline ($C \in \mathbb{R}$), seepärast võib saadud võrduse mõlemaid pooli korrutada arvuga 2 ja saadakse samaväärne lahendite pere

$$\ln(2+x^2) + 2y^2(1+y^2) = C,$$

kus C võib olla suvaline reaalarv.

Näide 5.8. Lahendada eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand

$$yy' = xe^{x+y}$$

algtingimusel

$$y(0) = -1.$$

Muutujate eraldamiseks kirjutame kõigepealt e^{x+y} korrutisena

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Edasi esitame otsitava funktsiooni tuletise diferentsiaalide jagatisena ja korrutame diferentsiaaliga dx:

$$y\frac{dy}{dx} = xe^x e^y, \quad y\,dy = xe^x e^y\,dx.$$

Muutujate eraldamisel näeme, et võrrandi paremal poolel on dx kordajaks muutuja y funktsioon e^y ja sellega jagamisel saame

$$\frac{y}{e^y}dy = xe^x\,dx,$$

$$ye^{-y}\,dy = xe^x\,dx.$$

Võrrandi lahendiks tuleb

$$\int ye^{-y}\,dy - \int xe^x\,dx = C.$$

Mõlema integraali leiame ositi:

$$\int ye^{-y}\,dy = -e^{-y}y + \int e^{-y}\,dy = -e^{-y}y - e^{-y},$$

$$\int xe^{x}\,dx = xe^{x} - \int e^{x}\,dx = xe^{x} - e^{x},$$

mis annab diferentsiaalvõrrandi lahendid

$$-e^{-y}(\,y+1) - e^{x}(x-1) = C.$$

Algtingimust rahuldava lahendi saamiseks määrame C väärtuse:

$$y(0) = -1 \;\Rightarrow\; -e^{-(-1)}(-1+1) - e^{0}(0-1) = C \qquad \Rightarrow \qquad C = 1.$$

Algtingimust rahuldav lahend on

$$-e^{-y}(\,y+1) - e^{x}(x-1) = 1.$$

Näide 5.9. Leiame järgmise diferentsiaalvõrrandi

$$y' = y^2 + 1$$

lahendi algtingimusel

$$y(0) = 1.$$

Lahenduskäik on järgmine:

$$y' = y^2 + 1, \qquad \frac{dy}{dx} = y^2 + 1,$$

$$dy = (y^2+1)dx,$$

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y^2+1} - \int dx = C,$$

$$\arctan y - x = C,$$

$$\arctan y = x + C,$$

$$y = \tan\,(x + C).$$

Algtingimust rahuldava lahendi saamiseks avaldame konstandi C. Tingimus $y(0) = 1$ on $\tan C = 1$, millest võtame $C = \frac{\pi}{4}$.
Ülesande lahendiks on

$$y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

5.3.1.1. ERALDUVATE MUUTUJATEGA VÕRRANDID KEEMIAS*

Keemilise reaktsiooni võib kirja panna üldise võrrandiga kujul

$$\boldsymbol{aA} + \boldsymbol{bB} + \ \ldots = \boldsymbol{pP} + \boldsymbol{qQ} + \ \ldots,$$

kus tähtedega $A, B, \ldots$ on tähistatud keemilise reaktsiooni lähteained (reagendid) ja paremal pool võrdusmärki tähistavad $P, Q, \ldots$ keemilise reaktsiooni käigus tekkivaid produkte. Väiksed tähed $a, b, \ldots$ ja $p, q, \ldots$ tähistavad vastava keemilise aine molekulide arvu. Seega tähendab võrrand, et lähteainet A võetakse a molekuli ning lähteainet B võetakse b molekuli, keemilise reaktsiooni tulemusena tekib p molekuli ainet P ning q molekuli ainet Q. Vaatame näiteks keemilist reaktsiooni

$$2H_2 + O_2 = 2H_2O.$$

Siin reageerib 2 molekuli vesinikku ja üks molekul hapnikku ning reaktsiooni tulemuseks on kaks molekuli vett.
Termodünaamikas ja kineetikas kirjutatakse üldine keemiline reaktsioon kujul

$$\mathbf{0 = \sum_B \nu_B B,}$$

kus võetakse summa üle kõigi ainete. Nii lähteainete kui ka saaduste jaoks on molekulide arvud määratud kordajatega ν_B, kusjuures lähteainel ja saadusel on erinev märk. Seega saame eespool toodud võrrandi kirjutada kujul

$$0 = -aA - bB + pP + qQ + \ldots = \nu_A A + \nu_B B + \nu_P P + \nu_Q Q + \ldots \tag{5.6}$$

Keemilise reaktsiooni võrrandi vesiniku ja hapniku jaoks võime kirjutada kujul

$$0 = -2H_2 - O_2 + 2H_2O.$$

Keemilise reaktsiooni kiirus.

Olgu aine A korral n_{A0} ainehulk ajahetkel $t = 0$ ning ajahetkel t reaktsioonis olemasolev aine A hulk n_A. Avaldist

$$\xi = \frac{n_A - n_{A0}}{\nu_A}.$$

nimetatakse **reaktsioonimääraks** ja see on ainehulga muutus ühe molekuli kohta. Selle võrduse võib veel kirjutada

$$n_A = n_{A0} + \nu_A \xi.$$

Reaktsioonimäära muutumise kiirus on

$$r = \frac{d\xi}{dt}.$$

Vaadeldes mingit konkreetset reaktsiooni, on n_{A0} ja ν_A on ajast sõltumatud, seepärast

$$\frac{dn_A}{dt} = \nu_A \frac{d\xi}{dt},$$

samuti

$$r = \frac{1}{\nu_A}\frac{dn_A}{dt}.$$

Füüsikalises keemias kasutatakse ainehulga asemel reaktsiooni kiiruse avaldamisel aine kontsentratsiooni, mida tähistatakse nurksulgudega: aine A kontsentratsioon ruumala V jaoks on esitatav

$$[A] = \frac{n_A}{V}.$$

Vastavalt sellele nimetatakse reaktsiooni kiiruseks v aine kontsentratsiooni jaoks funktsiooni

$$v = \frac{r}{V},$$

seega aine A reaktsiooni kiirus kontsentratsiooni jaoks on

$$v = \frac{1}{\nu_A}\frac{d[A]}{dt}.$$

Reaktsioonivõrrandit (5.6) silmas pidades võime kirjutada reaktsiooni kiiruse

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt} = \ \dots .$$

Keemilise reaktsiooni kiiruse vesiniku ja hapniku näite jaoks saame kirjutada kujul

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{d[O_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[H_2O]}{dt}.$$

Keemilise reaktsiooni toimumise mehhanism on üldiselt keeruline, meie vaatleme ainult lihtsamaid reaktsioone, mille kiirus sõltub ainult lähteainetest reaktsioonivõrrandis, sellise reaktsiooni kiirus on avaldatav järgmiselt:

$$v = k[A]^{\alpha}[B]^{\beta} \dots,$$

kus k on reaktsiooni kiiruskonstant ja arvud $\alpha, \beta, \dots$ määravad reaktsiooni järgu. Konstant α annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine A molekulide arvule reaktsioonivõrrandis, konstant β annab reaktsiooni järgu vastavalt läheaine B molekulide arvule reaktsioonivõrrandis jne. Summa $\alpha + \beta + \ \dots$ annab kogu reaktsiooni järgu.
Kui reageerib üks molekul lähteainet A, siis on tegemist esimest järku reaktsiooniga, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A, siis on tegemist teist järku reaktsiooniga. Kui reaktsioonis osaleb kaks lähteainet A ja B, mida mõlemat on üks molekul, siis reaktsiooni järgu annab nende ainete molekulide summa ehk tegemist on teist järku reaktsiooniga.

Esimest järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib üks molekul lähteainet A, avaldub

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A].$$

Traditsiooniliste muutujate kasutamiseks tähistame aine A kontsentratsiooni $[A]$ ajahetkel t muutujaga x, siis

$$\frac{dx}{dt} = -kx.$$

Muutujate eraldamine annab siin võrrandi kujul

$$\frac{dx}{x} = -kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\ln|x| = -kt + C,$$

järelikult

$$x = Ce^{-k \cdot t}.$$

Olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon võrdne x_0 ehk

$$x(0) = x_0.$$

Siis

$$x_0 = Ce^{-k \cdot 0} = C.$$

Siit saame, et

$$C = x_0.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel kahaneva eksponentfunktsiooni kaudu

$$x = x_0 e^{-kt} \text{ ehk } [A] = [A]_0 e^{-kt}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni kiirus, kui reageerib kaks molekuli lähteainet A, avaldub

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

ehk

$$\frac{dx}{dt} = -2kx^2,$$

milles muutujate eraldamine viib võrrandini

$$-\frac{dx}{x^2} = 2kdt.$$

Integreerides saame

$$\frac{1}{x} = 2kt + C.$$

Olgu alghetkel $t = 0$ aine kontsentratsioon x_0. Siis

$$\frac{1}{x_0} = 0 + C.$$

Siit saame, et $C = 1/x_0$ ja

$$\frac{1}{x} = 2kt + \frac{1}{x_0}.$$

Seega saab aine A kontsentratsiooni arvutada igal ajahetkel järgmiselt:

$$x = \frac{x_0}{1 + 2ktx_0} \text{ ehk } [A] = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}.$$

Teist järku keemilise reaktsiooni, mille kuju on $A + B =$ saadused, jaoks avaldub reaktsiooni kiirus

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B].$$

Olgu algtingimused lähteainete esialgsete kontsentratsioonide jaoks

$$[A]_0 = a \text{ ja } [B]_0 = b.$$

Seega on ajahetkel t ainete kontsentratsioonid vastavalt (mõlemat ainet reageerib sama arv molekule)

$$[A] = a - x, [B] = b - x$$

ja vastav reaktsiooni kiirus

$$-\frac{d(a - x)}{dt} = \frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

Vaatame kõigepealt juhtu, kus $a = b$. Siis

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2,$$

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = kdt.$$

Nüüd on tegu eraldatud muutujatega võrrandiga. Integreerides saame:

$$\frac{1}{a-x} = kt + C.$$

Leiame C väärtuse algtingimusest. Ajahetkel $t = 0$ on aine A kontsentratsiooni $a - x$ suurus $[A]_0 = a$, sest $x(0) = 0$, ja seepärast

$$\frac{1}{a} = 0 + C.$$

Seega

$$\frac{1}{a-x} = kt + \frac{1}{a}.$$

Sellest saame arvutada aine A kontsentratsiooni igal ajahetkel

$$a - x = \frac{a}{1 + akt} \text{ ehk } [A] = \frac{[A]_0}{1 + kt[A]_0}.$$

Vaatame nüüd juhtu, kus $a \neq b$. Siis

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt.$$

Integreerimiseks lahutame murru osamurdude summaks

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = \frac{A(b-x) + B(a-x)}{(a-x)(b-x)},$$

millest leiame

$$A = \frac{1}{b-a}, B = \frac{1}{a-b}.$$

Sellega teiseneb võrrand kujule

$$\frac{dx}{(a-x)(b-a)} + \frac{dx}{(a-b)(b-x)} = kdt.$$

Integreerides saame

$$-\frac{1}{b-a}\ln(a-x) - \frac{1}{a-b}\ln(b-x) = kt + C,$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right) = kt + C.$$

Algtingimusest $x(0) = 0$ saame

$$C = \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ülesande lahendiks on (ilmutamata kujul)

$$\frac{1}{b-a}\left(\ln\frac{b-x}{a-x}\right) = kt + \frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ehk

$$\frac{1}{b-a}\ln\left(\frac{a(b-x)}{b(a-x)}\right) = kt,$$

mille saab esitada veel kujul

$$\frac{1}{[B]_0-[A]_0}\ln\left(\frac{[A]_0[B]}{[B]_0[A]}\right) = kt.$$

5.3.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

5.3.2.1. HOMOGEENSED FUNKTSIOONID

Olgu D mingi piirkond xy- tasandil, mis koos iga punktiga $(x,y) \in D$ sisaldab ka kiire $(tx, ty), t > 0$.

Definitsioon 5.12.
Piirkonnas D määratud funktsiooni $f = f(x,y)$ nimetatakse **k-astme homogeenseks funktsiooniks**, kui iga $(x,y) \in D$ ja iga $t > 0$ korral kehtib võrdus

$$\boldsymbol{f(tx, ty) = t^k f(x,y)},$$

kus k on reaalarv.
Üldisemal juhul, n-muutuja funktsiooni f nimetatakse k-astme homogeenseks funktsiooniks, kui kehtib võrdus

$$\boldsymbol{f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)}$$

kõikide $x_1, \dots, x_n$ väärtuste ja iga $t > 0$ korral. Ka siin eeldatakse, et f on määratud piirkonnas D, kus iga $(x_1, \dots, x_n) \in D$ korral $(tx_1, \dots, tx_n) \in D$, kui $t > 0$.

Näide 5.10. Leiame järgmiste homogeensete funktsioonide jaoks aste k.

a) $f(x,y) = ax + by$,

$$f(tx, ty) = atx + bty = t(ax + by) = tf(x,y).$$

Antud funktsioon on esimese astme homogeenne funktsioon ehk $k = 1$.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$$f(tx, ty, tz) = (tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2 = t^2(x^2 + y^2 + z^2) = t^2 f(x,y,z).$$

Tegemist on teise astme homogeense funktsiooniga ehk $k = 2$.

c) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^4 - y^4}$,

$$f(tx, ty) = \frac{tx + ty}{(tx)^4 - (ty)^4} = \frac{t(x+y)}{t^4(x^4 - y^4)} = t^{-3} f(x,y).$$

Tegemist on (-3). astme homogeense funktsiooniga, $k = -3$.

Teoreem 5.3. **Euleri teoreem**. Kui funktsioon $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on k-astme homogeenne funktsioon, siis

$$\boldsymbol{x_1 f'_{x_1} + \dots + x_n f'_{x_n} = k f(x_1, \dots, x_n)}.$$

Tõestus. Esitame **Euleri teoreemi tõestuse üldjuhul**. Lähtume võrdusest

$$f(tx_1, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n).$$

Diferentseerime selle võrduse mõlemat poolt muutuja t järgi, kasutades vasakul liitfunktsiooni diferentseerimist. Saame vasakul

$$\frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n) = \frac{df}{dx_1}(tx_1, \dots, tx_n)x_1 + \dots + \frac{df}{dx_n}(tx_1, \dots, tx_n)x_n,$$

paremal pool

$$\frac{d}{dt} t^k f(x_1, \dots, x_n) = kt^{k-1} f(x_1, \dots, x_n).$$

Võttes nüüd $t = 1$, saamegi Euleri teoreemis toodud väite. ■

Näide 5.11. Näitame Euleri teoreemi väite kehtivust järgmise homogeense funktsiooni jaoks

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Siin $k = 2$,

$$f'_x = 2x, \quad f'_y = 2y, \quad f'_z = 2z,$$

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2f(x, y, z).$$

Näide 5.12. Näitame Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x, y) = \frac{x}{y}.$$

Siin

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y},$$

mis tähendab, et funktsioon on 0. järku ehk $k = 0$. Leiame

$$f'_x = \frac{1}{y}, \quad f'_y = -\frac{x}{y^2},$$

$$xf'_x + yf'_y = \frac{x}{y} - y\frac{x}{y^2} = 0 = 0 \cdot f(x, y).$$

Näide 5.13. Näitame Euleri teoreemi väite kehtivust, kui

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^4 - y^4}, \qquad k = -3.$$

Leiame

$$f'_x = \frac{x^4 - y^4 - 4x^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2}, \quad f'_y = \frac{x^4 - y^4 - 4y^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2},$$

$$xf'_x + yf'_y = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} - y\frac{x^4 - y^4 - 4y^3(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} =$$

$$= \frac{x^5 - xy^4 - 4x^4(x + y) - yx^4 + y^5 + 4y^4(x + y)}{(x^4 - y^4)^2} = \frac{-3(x + y)(x^4 - y^4)}{(x^4 - y^4)^2}$$

$$= -3f(x, y).$$

5.3.2.2. HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.13.

Homogeenseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit

$$y' = f(x, y),$$

kui f on 0-astme homogeenne funktsioon:

$$f(tx, ty) = f(x, y), t > 0.$$

Homogeenses võrrandis võime kirjutada $x \neq 0$ korral

$$f(x, y) = f\left(x, x\frac{y}{x}\right) = x^0 f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

mis tähendab, et $f(x, y)$ on tegelikult mingi funktsioon suhtes y/x. Seega on homogeenne diferentsiaalvõrrand esitatav kujul

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5.7}$$

kus f on ühe muutuja funktsiooni üldtähis ja ei tähenda algses definitsioonis esinenud kahe muutuja funktsiooni.

HOMOGEENSE ÜLDKUJULISE DIFERENTSIAAL-VÕRRANDI LAHENDAMINE

Homogeenne diferentsiaalvõrrand **taandub eralduvate muutujatega võrrandiks**, kui teha järgmine muutujavahetus

$$\boldsymbol{z = \frac{y}{x}} \quad \text{ehk} \quad \boldsymbol{y = zx},$$

kus $\boldsymbol{z = z(x)}$ vaatleme argumendi x funktsioonina. Leiame avaldise $y = zx$ tuletise argumendi x järgi

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}}.$$

Asendades saadud avaldise võrrandisse (5.7), saame võrrandi uue muutuja z suhtes

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Saadud diferentsiaalvõrrand on muutujate x ja z suhtes eralduvate muutujatega võrrand. Muutujate eraldamisel ja lahendamisel saame

$$xdz = (f(z) - z)dx,$$

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + C}.$$

Kui teostame integreerimise ja asendame otsitava z tagasi suhtega y/x, jõuame esialgse diferentsiaalvõrrandi lahenditeni ilmutamata kujul. Esitatud lahenduskäik ei sobi, kui

$$\boldsymbol{f(z) - z = 0} \text{ ehk } \boldsymbol{f(z) = z}.$$

Siis esialgne võrrand $y' = f(y/x)$ on kujul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{5.8}$$

Muutujate eraldamine viib võrrandini

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

selle integreerimisel saame

$$\ln|y| = \ln|x| + C,$$

kus C võib olla suvaline reaalarv. Võime ka kirjutada lahendite pere kujul

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C,$$

kus siin $C > 0$ võib olla suvaline. Viimase võrduse esitame

$$\ln|y| = \ln|xC|$$

või

$$y = Cx,$$

kus $C \neq 0$. Võrrandi (5.8) lahendiks on ka $y = 0$, seepärast saame võrrandi (5.8) lahendid

$$\boldsymbol{y = Cx},$$

kus C on suvaline reaalarv.
Juhime tähelepanu sellele, et juba muutujavahetusel $z = y/x$ jäetakse vaatluse alt välja argumendi väärtus $x = 0$. Olenevalt esialgse ülesande esitusest võib olla võimalik lahendites lisada ka argumendi väärtus $x = 0$. Esialgne ülesanne võib olla aga ka selline, kus $x = 0$ ei ole lubatud.

Näide 5.14. Lahendame homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Lahendamiseks kordame kõiki samme, mida tegime lahendamisel üldkujul. Kõigepealt teeme muutujavahetuse ja arvutame tuletise:

$$\frac{y}{x} = z, \qquad y = zx, \qquad \frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Asendame algsesse võrrandisse:

$$z + x\frac{dz}{dx} = z - z^2$$

ehk

$$x\frac{dz}{dx} = -z^2.$$

Oleme saanud eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi. Eraldame muutujad ja integreerime

$$\frac{dz}{z^2} + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int \frac{dz}{z^2} + \int \frac{dx}{x} = C,$$

$$-\frac{1}{z} + \ln|x| = \ln C,$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln C, \qquad C > 0.$$

Muutujavahetust arvestades saame lahenditeks

$$\frac{x}{y} = \ln|xC|$$

ehk

$$y = \frac{x}{\ln|xC|},$$

kus $C > 0$. Siin $x \neq 0$, sest $x = 0$ ei ole lubatud algvõrrandis.

Homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks taandub võrrand kujul

$$\boldsymbol{P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0},$$

kus $\boldsymbol{P(x, y)}$ ja $\boldsymbol{Q(x, y)}$ on sama astme homogeensed funktsioonid. Selleks tuleb võrrandit läbi jagada argumendi x sellise astmega x^α, kus α on võrdne võrrandis oleva argumendi y kõrgeima astmenäitajaga.

Näide 5.15. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

lahend, mis rahuldab algtingimust

$$y(1) = 2.$$

Toimime eespool toodud viisil. Jagame võrrandi avaldisega x^2, selle tulemusena

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right)dx - 2\frac{y}{x}dy = 0.$$

Teeme muutujavahetuse $y/x = z$ ehk $y = zx$. Siis $dy = x\,dz + z\,dx$, mille asendamisel võrrand teiseneb kujule

$$(z^2 - 1)\,dx - 2z\,(x\,dz + z\,dx) = 0$$

ehk

$$(z^2 + 1)dx + 2zx\,dz = 0.$$

Muutujate eraldamine annab

$$\frac{dx}{x} + \frac{2z}{z^2 + 1}dz = 0$$

ehk

$$\frac{dx}{x} + \frac{d(z^2 + 1)}{z^2 + 1} = 0.$$

Selle integreerimisel saame

$$\ln|x| + \ln|z^2 + 1| = C, C \in \mathbb{R},$$

ehk

$$x(z^2+1)=C, C\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$$

(märgime, et $C=0$ ei saa siin lisada, sest arutelu on läbi viidud eeldusel $x\neq 0$). Esialgsete muutujate suhtes on meil lahendid

$$x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)=C,$$

ehk

$$y^2=Cx-x^2.$$

Algtingimus $y(1)=2$ annab võrduse $4=C-1$ ehk

$$C=5.$$

Niisis on ülesande lahendiks

$$y^2=5x-x^2.$$

5.3.3. DIFERENTSIAALVÕRRAND, MIS SISALDAB MURDLINEAARSET AVALDIST

Diferentsiaalvõrrand, mis sisaldab murdlineaarset avaldist, on kujul

$$y'=f\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right).$$

Kui $a_3=b_3=0$, siis on tegemist homogeense diferentsiaalvõrrandiga. Murdlineaarset avaldist sisaldava võrrandi saab taandada homogeenseks võrrandiks (või eralduvate muutujatega võrrandiks) muutujavahetusega, mis oleneb determinandist D, mille moodustame x ja y kordajatest murru lugejas ja nimetajas

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \qquad \text{m. v.} \quad x=X+u \quad y=Y+v,$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0, \qquad \text{m. v.} \quad z=a_1x+a_2y.$$

Kui $D\neq 0$, siis muutujavahetuses sisalduvad arvud $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ tuleb määrata nii, et uutele muutujatele $\boldsymbol{X}$ ja $\boldsymbol{Y}$ üle minnes on **vabaliikmed** saadavas murdlineaarses avaldises **võrdsed nulliga**. Selleks lahendame lineaarse võrrandisüsteemi u ja v suhtes:

$$\begin{cases} a_1u+a_2v+a_3=0, \\ b_1u+b_2v+b_3=0. \end{cases}$$

Funktsiooni f argument peale muutujavahetust on siis kujul

$$\frac{a_1X+a_2Y}{b_1X+b_2Y}.$$

Kui $D=0$, siis kasutame muutujavahetust $z=a_1x+a_2y$. Peale muutujavahetust saame eralduvate muutujatega võrrandi.

Näide 5.16. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y + 1}{-2x + y + 2}$$

lahendi, mis rahuldab tingimust $y(0) = -2$.

Praegusel juhul

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

seepärast teeme muutujavahetuse

$$z = 2x - y,$$

siis

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx}$$

ja võrrand teiseneb kujule

$$2 - \frac{dz}{dx} = \frac{z + 1}{-z + 2},$$

ehk

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z + 1}{-z + 2} = \frac{-3z + 3}{2 - z},$$

mis on eralduvate muutujatega võrrand. Muutujate eraldamine annab

$$\frac{2 - z}{3(1 - z)} dz = dx.$$

Teisendame dz kordaja kujule

$$\frac{1 - z + 1}{3(1 - z)} dz = \frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - z)}$$

ja võrrand ise on

$$\frac{1}{3} dz + \frac{1}{3(1 - z)} dz = dx.$$

Sellest leiame integreerimisel

$$\frac{1}{3} z - \frac{1}{3} \ln|1 - z| = x + C, C \in \mathbb{R},$$

ehk

$$z - \ln|1 - z| = 3x + C, C \in \mathbb{R}.$$

Esialgsete muutujate suhtes saame diferentsiaalvõrrandi lahendid

$$2x - y - \ln|1 - 2x + y| = 3x + C.$$

Tingimust $y(0) = -2$ rahuldava lahendi korral

$$2 - \ln|1 - 2| = C,$$

ehk

$$C = 2.$$

Ülesane lahend ilmutamata kujul on niisiis

$$x + y + \ln|1 - 2x + y| + 2 = 0.$$

Näide 5.17. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y' = \frac{x-y}{x+y-3} + 1.$$

Viime võrrandi paremal pool oleva murru ühisele nimetajale

$$y' = \frac{x-y+x+y-3}{x+y-3} = \frac{2x-3}{x+y-3}.$$

Antud juhul

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

seepärast teeme muutujavahetuse

$$x = X + u, \quad y = Y + v.$$

Seejuures

$$dx = dX, \ \ dy = dY.$$

Arvude u ja v leidmiseks saame süsteemi

$$\begin{cases} 2u - 3 = 0, \\ u + v - 3 = 0, \end{cases}$$

mille lahendiks on

$$u = \frac{3}{2}, \quad v = \frac{3}{2}.$$

Muutujavahetusega saame homogeense võrrandi

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X}{X+Y}$$

ehk

$$2XdX = (X+Y)dY.$$

Standardne muutujavahetus on

$$\frac{Y}{X} = z \text{ ehk } Y = Xz,$$

siis

$$dY = zdX + Xdz.$$

Võrrand on sellega kujul

$$2X\,dX = (X + Xz)(z\,dX + X\,dz)$$

ehk

$$X(2 - z - z^2)dX = X^2(1+z)dz.$$

Muutujate eraldamisega viime võrrandi kujule

$$\frac{1+z}{z^2+z-2}dz = -\frac{dX}{X},$$

Arvestades, et $z^2 + z - 2 = (z+2)(z-1)$, lahutame dz kordaja osamurdude summaks

$$\frac{1+z}{z^2+z-2} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1},$$

millest

$$1 + z = A(z-1) + B(z+2).$$

Võrreldes z astmete kordajaid, saame süsteemi

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2B - A = 1, \end{cases}$$

millest

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{2}{3}.$$

Niisiis tuleb integreerida võrrandit

$$\frac{1}{3}\int \frac{dz}{z+2} + \frac{2}{3}\int \frac{dz}{z-1} = -\int \frac{dX}{X},$$

millest

$$\frac{1}{3}\ln|z+2| + \frac{2}{3}\ln|z-1| = -\ln|X| + C,$$

ehk

$$\ln|z+2| + 2\ln|z-1| + 3\ln|X| = C, C \in \mathbb{R}.$$

Selle võib kirjutada

$$\ln|(z+2)(z-1)^2X^3| = C, C \in \mathbb{R}$$

ehk

$$(z+2)(z-1)^2X^3 = C, C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Arvestades siin muutujavahetust $z = Y/X$, saame

$$\left(\frac{Y}{X} + 2\right)\left(\frac{Y}{X} - 1\right)^2 X^3 = C\,,$$

ehk

$$(Y + 2X)(Y - X)^2 = C,$$

Esialgsetele muutujatele üleminek, kus

$$X = x - \frac{3}{2}, \quad Y = y - \frac{3}{2},$$

annab

$$\left(y + 2x - \frac{9}{2}\right)(y - x)^2 = C,$$

kus $C \in \mathbb{R}$, sest $C = 0$ korral sisaldub lahendite hulgas $y = x$, mis on esialgse võrrandi lahend.

5.3.4. LINEAARSED ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.14.

Lineaarseks esimest järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis on lineaarne otsitava funktsiooni y ja selle tuletise y' suhtes.
Hariliku esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldkujuks on

$$\boldsymbol{p_0(x)y' + p_1(x)y = f(x)},$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Lineaarses diferentsiaalvõrrandis on nii otsitav funktsioon kui ka otsitava funktsiooni tuletis esimeses astmes.
Funktsioone p_0 ja p_1 nimetatakse võrrandi **kordajateks**, funktsiooni $\boldsymbol{f}$ aga **vabaliikmeks**.

Teoreem 5.2.

Olgu võrrandi $p_0(x)y' + p_1(x)y = f(x)$ kordajad p_0, p_1 ja vabaliige f **pidevad** funktsioonid vahemikus (a, b), kusjuures $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral.
Olgu $x_0 \in (a, b)$ ja $y_0 \in (-\infty, \infty)$ mingid etteantud arvud.
Siis on **võrrandil**

$$\boldsymbol{p_0(x)y' + p_1(x)y = f(x)}$$

olemas **parajasti üks lahend**

$$\boldsymbol{y = y(x)},$$

mis on määratud vahemikus (a, b) ja mis rahuldab tingimust

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0}.$$

Kui kordaja $p_0(x)$ erineb nullist, saab võrrandi sellega läbi jagada, tulemuseks on **lineaarne esimest järku diferentsiaalvõrrand kujul**

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)}, \tag{5.9}$$

kus p ja f on funktsioonid, mis sõltuvad muutujast x.
Kui $\boldsymbol{f(x) \equiv 0}$, siis nimetatakse võrrandit (5.9) **lineaarseks homogeenseks diferentsiaal-võrrandiks**. Siin omab sõna "homogeenne" teistsugust tähendust, kui eelmises punktis (võrrelda võib homogeensete ja mittehomogeensete lineaarvõrrandisüsteemidega). Võrrandi (5.9) lahendamiseks vaatame kolme erinevat meetodit.

1. **Integreeruvusteguriga korrutamise meetod**.

Vaatame funktsiooni

$$\mu = e^{P(x)},$$

kus funktsioon $P(x)$ on funktsiooni $p(x)$ mingi algfunktsioon: $P'(x) = p(x)$.
Funktsiooni $\mu = e^{P(x)}$ nimetatakse võrrandi (5.9) **integreeruvusteguriks**.
Korrutame võrrandit (5.9) funktsiooniga $e^{P(x)}$, tulemusena

$$y'e^{P(x)} + p(x)ye^{P(x)} = f(x)e^{P(x)}.$$

Võrrandi vasak pool on korrutise $ye^{P(x)}$ tuletis, seega saame kirjutada võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{P(x)}\right) = f(x)e^{P(x)}.$$

Integreerides saame

$$ye^{P(x)} = \int f(x)e^{P(x)}\,dx + C.$$

Otsitava funktsiooni y avaldamiseks korrutame võrrandi mõlemat poolt teguriga $e^{-P(x)}$, siis saame

$$y = e^{-P(x)}\left(\int f(x)e^{P(x)}\,dx + C\right)$$

ehk

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right).$$

Märgime, et määramata integraalid tähistavad siin ja ka edaspidi integraalialuste funktsioonide ühte konkreetset väljavalitud algfunktsiooni. Oleme saanud valemi lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks. Näeme, et samal kujul lahendid saame ka kasutades muutujavahetusega või konstantide varieerimise meetodiga lahendust.

2. **Muutujavahetusega lahendus**.

Otsitav funktsioon on kahe esialgu tundmatu funktsiooni u ja v korrutis:

$$\boldsymbol{y = uv}, \quad u = u(x), v = v(x).$$

Meie eesmärgiks on leida need kaks funktsiooni. Selleks leiame kõigepealt

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}}. \tag{5.10}$$

Asendame tuletise (5.10) võrrandisse (5.9) ja toome muutuja v sulgude ette:

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + p(x)uv = f(x),$$

$$v\left(\frac{du}{dx} + p(x)u\right) + u\frac{dv}{dx} = f(x).$$

Nõuame, et sulgudes olev avaldis võrduks nulliga, sellega saame kahest võrrandist koosneva süsteemi:

$$\frac{du}{dx} + p(x)u = 0, \tag{5.11}$$

$$u\frac{dv}{dx} = f(x). \tag{5.12}$$

Võrrand (5.11) on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand $u = u(x)$ suhtes. Eraldame muutujad ja integreerime, tulemusena

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx, \qquad \ln|u| = -\int p(x)dx,$$

$$\boldsymbol{u = e^{-\int p(x)dx}}. \tag{5.13}$$

Ka siin tähistab $\int p(x)dx$ funktsiooni p ühte konkreetset algfunktsiooni, sest meile piisab ühest funktsioonist u. Asendades saadud u avaldise võrrandisse (5.12), saame

$$e^{-\int p(x)dx}\frac{dv}{dx} = f(x), \qquad \frac{dv}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

$$\boldsymbol{v = \int f(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C}.$$

Me otsisime lahendit kujul $\boldsymbol{y = uv}$, seega lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{y' + p(x)y = f(x)}$$

lahendid on

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right).}$$

Võrrandi praktilisel lahendamisel võib korrata iga kord seda mõttekäiku, samuti on võimalik võrrandi lahendamisel asendada lahendivalemisse konkreetsed funktsioonid p ja f ning leida lahend valemi järgi.

3. **Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod).**

Konstandi varieerimise meetodil taandub lahendus samuti kahe eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamisele. Kõigepealt lahendame vastava homogeense võrrandi

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0. \tag{5.14}$$

See on eralduvate muutujatega võrrand, mille lahendi tähistame hiljem y_h. Lahenduskäik on järgmine. Eraldame võrrandis (5.14) muutujad, mille tulemusena

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Integreerimisel

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C, C \in \mathbb{R},$$

$$|y| = e^C e^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R},$$

ehk

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Võrrandi (5.14) lahendiks on ka $y = 0$, seepärast on selle võrrandi lahendid

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}, \qquad C \in \mathbb{R}. \tag{5.15}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (5.9) lahendit otsime kujul

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{5.16}$$

kus kujus (5.15) **konstandi C loeme otsitavaks argumendi x funktsiooniks**. Leiame tuletise funktsioonist y. Arvestame, et $C(x)$ on funktsioon, mis sõltub argumendist x, seetõttu kasutame korrutise tuletise valemit, millega saame

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\big(-p(x)\big).$$

Asendame y ja dy/dx mittehomogeensesse diferentsiaalvõrrandisse (5.9), saame

$$C'(x)\, e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}\big(-p(x)\big) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Integreerimisel saame

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}\, dx + C.$$

Asendades saadud $C(x)$ avaldise lahendisse (5.16), saame

$$y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C\right) e^{-\int p(x)dx},$$

mis ühtib eespool saadud lahendivalemiga.

Näide 5.18. Lahendame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y' + y = x.$$

1) Lahendame kõigepealt võrrandi **integreeruvusteguriga korrutades.**
Kuna antud võrrandis $p(x) = 1$ ja $f(x) = x$, siis integreeruvustegur $e^{P(x)}$ on

$$e^{P(x)} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x,$$

Korrutades võrrandi vasakut ja paremat poolt funktsiooniga e^x, saame

$$e^x y' + e^x y = e^x x.$$

Kuna $e^x y' + e^x y = (e^x y)'$, saame võrrandi kujul

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = xe^x,$$

mille integreerimisel (paremas pooles võib teha ositi)

$$e^x y = e^x(x-1) + C$$

ehk

$$y = x - 1 + Ce^{-x}.$$

2) **Konstandi varieerimise meetodil** jaguneb lahendus kaheks osaks:
2.1) **vastav** lineaarne **homogeenne** võrrand on $y' + y = 0$, mille lahendamisel saame

$$\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} + dx = 0,$$

$$\ln|y| + x = \ln C,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x,$$

$$\frac{y}{C} = e^{-x}, \quad y_h = \boldsymbol{C}e^{-x}.$$

2.2) **esialgse võrrandi lahendit** otsime kujul

$$y = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})e^{-x},$$

$$y' = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{x})e^{-x} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})e^{-x},$$

tuletise võtmisel kasutasime korrutise tuletise valemit. Asendades y ja y' esialgsesse võrrandisse $y' + y = x$, saame

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = x,$$

$$C'(x)e^{-x} = x,$$

$$C'(x) = xe^x,$$

$$C(x) = \int xe^x \, dx.$$

Integreerides saame otsitava

$$C(x) = e^x(x-1) + C_1.$$

Lahenditeks on funktsioonid

$$y = (e^x(x-1) + C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}.$$

3) Lahendamiseks võib ka kohe funktsioonid asendada **lahendivalemisse**. Seega

$$y = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right)e^{-\int p(x)dx} = \left(\int xe^{\int dx}\,dx + C\right)e^{-\int dx} =$$

$$= \left(\int xe^x\,dx + C\right)e^{-x} = (e^x(x-1)+C)e^{-x} = x - 1 + Ce^{-x}.$$

Näide 5.19. Lahendame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}\,.$$

Lahendame võrrandi muutujavahetusega

$$y = uv, \qquad \frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}.$$

Asendame need võrrandisse

$$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}uv = x\sqrt{x^2+1},$$

$$v\left(\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}u\right) + u\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1},$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}u = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2x}{x^2+1}dx,$$

$$\ln|u| = \ln|x^2+1|,$$

$$u = x^2+1,$$

$$(x^2+1)\frac{dv}{dx} = x\sqrt{x^2+1},$$

$$dv = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}dx,$$

$$dv = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx,$$

$$v = \sqrt{x^2+1} + C.$$

Lahendiks on u ja v korrutis, seega $y = uv = (x^2+1)\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)$.

Märkus. Mõned diferentsiaalvõrrandid kujul

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

mis on mittelineaarsed ühe muutuja suhtes, võivad osutuda lineaarseks teise muutuja suhtes. Näiteks võib sõltumatuks muutujaks olla y, siis on otsitavaks funktsioon $x = x(y)$.

Näide 5.20. Lahendame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$dx - (x\cos y + 2\sin 2y)dy = 0.$$

See on vaadeldav lineaarse võrrandina kujul

$$\frac{dx}{dy} - (\cos y)x = \sin 2y.$$

Asendame siin funktsioonid lahendivalemisse. Selles ülesandes

$$p(y) = -\cos y\,, f(y) = \sin 2y,$$

seega

$$x = \left(\int f(y)e^{\int p(y)dy}\,dy + C\right)e^{-\int p(y)dy}$$

$$= \left(\int \sin 2y\, e^{\int -\cos y\, dy}\,dy + C\right)e^{-\int -\cos y dy} =$$

$$= \left(\int \sin 2y\, e^{-\sin y}\,dy + C\right)e^{\sin y}.$$

Leiame integraali

$$\int \sin 2y\, e^{-\sin y}\,dy.$$

Selleks teeme muutujavahetuse

$$t = \sin y,$$

siis

$$dt = \cos\ y\,dy.$$

Kuna $\sin 2y = 2\sin y \cos y$, saame peale muutujavahetust ja ositi integreerimist

$$\int \sin 2y\, e^{-\sin y}\,dy = 2\int te^{-t}\,dt = 2(-te^{-t}) + 2\int e^{-t}\,dt = -2te^{-t} - 2e^{-t} =$$

$$= -2\sin\ y\, e^{-\sin y} - 2e^{-\sin y},$$

Märgime, et me leiame siin ühe algfunktsiooni, seepärast ei esine liidetavana integreerimiskonstanti. Asendades saadud tulemuse lahendivalemisse, saame võrrandi lahenditeks

$$x = \left(-2\sin y\, e^{-\sin y} - 2e^{-\sin y} + C\right)e^{\sin y} = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y).$$

5.3.4.1. LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID KEEMIAS*

Enamus keemilisi reaktsioone toimuvad mitmes elementaarses järgus ja nende kiirust iseloomustab esimest järku diferentsiaalvõrrand. Esimest järku protsess on kirjeldatav skeemiga

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{k_1} \boldsymbol{B} \xrightarrow{k_2} \boldsymbol{C}$$

Aine A koosneb alghetkel $(t = 0)$ a molekulist ehk

$$[A]_0 = a$$

ja tema kontsentratsioon ajahetkel t on $a - x$ ehk

$$[A] = a - x.$$

Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on

$$[B]_0 = 0$$

ja ajahetkel t on molekulide arv y ehk

$$[B] = y.$$

Aine C tekib ainest B keemilise reaktsiooni käigus ja tema molekulide arv alghetkel on

$$[C]_0 = 0$$

ja ajahetkel t on

$$[C] = x - y.$$

Sellist protsessi saab modelleerida kahe esimest järku diferentsiaalvõrrandiga, millest esimene on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand ja teine on lineaarne.
Eespool nägime, et aine A kahanemist iseloomustab võrrand

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A]\,,$$

kus parameeter $k_1 > 0$ iseloomustab aine A kahanemise kiirust. Aine B koguse muutumist kirjeldab võrrand

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1[A] - k_2[B],$$

kus $-k_2[B]$ (seejuures $k_2 > 0$) esineb seepärast, et toimub aine B kahanemine, kuid $k_1[A]$ näitab, et aine A kahanemis käigus lisandub reaktsioonis ainet B. Need võrrandid moodustavad süsteemi, mille kirjutame vaadeldavaid tähiseid kasutades

$$\begin{cases} \dfrac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2 y. \end{cases}$$

Esimene võrrand ei sisalda otsitavat funktsiooni y, olles seega vaadeldav iseseisvalt. Selle oleme eespool juba sisuliselt lahendanud, koos algtingimuse arvestamisega saame

$$a - x = ae^{-k_1 t}.$$

Asendame selle süsteemi teises võrrandis, mille tulemusena tekib otsitava y suhtes lineaarne võrrand

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = k_1 a e^{-k_1 t}. \tag{5.17}$$

Lahendame võrrandi (5.17) näiteks konstandi varieerimise meetodil. Vastava homogeense võrrandi (see on ühtlasi süsteemi esimene võrrand teiste parameetritega)

$$\frac{dy}{dt} + k_2 y = 0$$

lahenditeks on

$$y = Ce^{-k_2 t}.$$

Otsime võrrandi (5.17) lahendit kujul

$$y = C(t)e^{-k_2 t}.$$

Standardsed arvutused annavad

$$\frac{dy}{dt} = C'(t)e^{-k_2 t} - k_2 C(t)e^{-k_2 t},$$

$$C'(t)e^{-k_2 t} - k_2 C(t)e^{-k_2 t} + k_2 C(t)e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$C'(t)e^{-k_2 t} = k_1 a e^{-k_1 t},$$

$$C'(t) = k_1 a e^{(k_2-k_1)t}.$$

Eeldame siin, et $k_1 \neq k_2$. Siis leiame

$$C(t) = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} e^{(k_2-k_1)t} + C,$$

ja

$$y = \left(\frac{k_1 a}{k_2 - k_1} e^{(k_2-k_1)t} + C \right) e^{-k_2 t}.$$

Algtingimus $y(0) = 0$ annab

$$C = -\frac{k_1 a}{k_2 - k_1},$$

mistõttu

$$y = \frac{k_1 a}{k_2 - k_1} \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right).$$

Kui $k_1 = k_2$, siis saame lahenduse käigus võrrandi

$$C'(t) = k_1 a,$$

millest

$$C(t) = k_1 a t + C$$

ning seepärast on võrrandi (5.17) lahenditeks

$$y = (k_1 a t + C) e^{-k_1 t}.$$

Algtingimus $y(0) = 0$ määrab, et $C = 0$ ning

$$y = k_1 a t e^{-k_1 t}.$$

Kokkuvõttes saime ainete A, B ja C kontsentratsioonid ajahetkel t

$$\begin{cases} [A] = [A]_0 e^{-k_1 t}, \\ [B] = \begin{cases} \dfrac{[A]_0 k_1}{k_2 - k_1} \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right), & \text{kui} \quad k_1 \neq k_2, \\ [A]_0 k_1 t e^{-k_1 t}, & \text{kui} \quad k_1 = k_2, \end{cases} \\ [C] = [A]_0 - [A] - [B]. \end{cases}$$

5.3.5. BERNOULLI DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.15.

Bernoulli diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\frac{dy}{dx} + p(x) y = q(x) y^a, \tag{5.18}$$

kus p ja q on teadaolevad argumendi x funktsioonid ja a on mingi **reaalarv**. Eeldame, et $a \neq 0$ ja $a \neq 1$ (sest vastasel juhul on tegemist lineaarse võrrandiga).

Bernoulli võrrand on **teisendatav lineaarseks võrrandiks muutujavahetusega**

$$z = y^{1-a}.$$

Enne muutujavahetust **korrutame võrrandit** (5.18) **teguriga** $\boldsymbol{y^{-a}}$

$$\frac{dy}{dx}y^{-a} + p(x)y^{1-a} = q(x)$$

ja seejärel teeme muutujavahetuse

$$z = y^{1-a}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-a)y^{-a}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx}y^{-a} = \frac{1}{1-a}\frac{dz}{dx}.$$

Asendus teisendatud võrrandis annab

$$\frac{1}{1-a}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x),$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-a)p(x)z = (1-a)q(x).$$

Saime uue otsitava z suhtes lineaarse võrrandi. Näeme, et kui $a > 0$, siis on võrrandi (5.18) lahendiks ka $y = 0$, mida ei tarvitse saada muutujavahetusega lahendades.

Näide 5.21. Lahendame Bernoulli diferentsiaalvõrrandi

$$y' - 2xy = 2x^3y^2.$$

Võrrandis $a = 2$. Jagame võrrandi avaldisega y^2 ja teeme muutujavahetuse:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{2x}{y} = 2x^3,$$

$$z = y^{1-2} = \frac{1}{y}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx},$$

$$-z' - 2xz = 2x^3,$$

$$z' + 2xz = -2x^3.$$

Saime lineaarse diferentsiaalvõrrandi, mille lahendid avalduvad

$$z = \left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $p(x) = 2x$ ja $f(x) = -2x^3$. Integraali arvutamisel saame

$$z = \left(\int (-2x^3)e^{x^2}dx + C\right)e^{-x^2} = \left(-x^2e^{x^2} + e^{x^2} + C\right)e^{-x^2} = 1 - x^2 + Ce^{-x^2},$$

$$y = \frac{1}{1 - x^2 + Ce^{-x^2}}.$$

Lisaks sellele rahuldab algset võrrandit konstantne funktsioon $y = 0$, mida ei ole võimalik saada konstandi C mitte ühegi konkreetse väärtuse valimisel.

Näide 5.22. Lahendame Bernoulli diferentsiaalvõrrandi

$$x^2(x-1)y' - y^2 - x(x-2)y = 0.$$

Jagame võrrandi avaldisega $x^2(x-1)y^2$ ja teeme muutujavahetuse

$$\frac{y'}{y^2}-\frac{x(x-2)}{yx^2(x-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)},$$

$$a=2,\qquad z=y^{1-2}=\frac{1}{y},\qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

$$z'-\frac{x-2}{x(x-1)}z=\frac{1}{x^2(x-1)}.$$

Kasutame jälle üldist lahendivalemit

$$z=\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $p(x)=-\frac{x-2}{x(x-1)}$ ja $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)}$. Seega

$$z=\left(\int\frac{1}{x^2(x-1)}e^{\int-\frac{x-2}{x(x-1)}dx}dx+C\right)e^{-\int-\frac{x-2}{x(x-1)}dx}.$$

Leiame eraldi eksponendi astmes oleva integraali. Osamurdudeks lahutamisel

$$-\frac{x-2}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$$

saame

$$-(x-2)=A(x-1)+Bx,$$

millest $A=-2$ ja $B=1$. Nüüd

$$\int-\frac{x-2}{x(x-1)}dx=\int\frac{-2}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-2\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\frac{|x-1|}{x^2}$$

ning

$$e^{\ln\frac{|x-1|}{x^2}}=\frac{|x-1|}{x^2}.$$

Seejärel saame

$$z=\left(\int\frac{1}{x^2(x-1)}\frac{|x-1|}{x^2}dx+C\right)\frac{x^2}{|x-1|}=\left(\pm\frac{1}{3x^3}+C\right)\frac{x^2}{|x-1|}$$

ning

$$y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x^2\left(-\dfrac{1}{3x^3}+C\right)}, & \text{kui } x\geq 1,\\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2\left(\dfrac{1}{3x^3}+C\right)}, & \text{kui } x<1, x\neq 0.\end{cases}$$

Võrrandi lahendiks on ka $y=0$.

Näide 5.23. Lahendada võrrand $3x^2dx-(x^3+y+1)dy=0$.

Viime võrrandi kujule

$$3x^2\frac{dx}{dy}-x^3-y-1=0.$$

Jagame võrrandi avaldisega $3x^2$

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{3}x = \frac{y+1}{3}x^{-2}.$$

Tegemist on Bernoulli võrrandiga, kus $x = x(y)$ on otsitav funktsioon ja $a = -2$. Lineaarse võrrandi saamiseks teeme muutujavahetuse

$$z = x^{1-(-2)} = x^3.$$

Sellest

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dy} = 3x^2\frac{dx}{dy}$$

ehk

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2}\frac{dz}{dy},$$

mille asendame teisendatud võrrandis. Saadav lineaarne võrrand on

$$z' - z = y + 1,$$

kus $z' = \frac{dz}{dy}$ ja $z = z(y)$. Lineaarse võrrandi lahenditeks saame

$$z = Ce^y - y - 2.$$

Asendame muutuja z avaldisega x^3, millega saame ülesande lahenditeks

$$x = (Ce^y - y - 2)^{\frac{1}{3}}.$$

5.3.6. EKSAKTSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.16.

Diferentsiaalvõrrandit $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ nimetatakse **eksaktseks** ehk **täisdiferentsiaalseks** võrrandiks, kui leidub kahe muutuja funktsioon $\boldsymbol{u = u(x,y)}$ nii, et võrrandi vasak pool on võrdne selle funktsiooni täisdiferentsiaaliga:

$$\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.} \tag{5.19}$$

Eksaktsuse tingimus.

Kui funktsioonid M ja N ning nende osatuletised $\partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad muutujate x, y mingis piirkonnas D, siis **võrrandi eksaktsuseks piirkonnas D on tarvilik ja piisav**, et iga $(x,y) \in D$ korral **kehtiks võrdus**

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}.$$

Eksaktse võrrandi võib kirjutada ka kujul

$$du(x,y) = 0,$$

võrrandi **lahenditeks ilmutamata** kujul on

$$\boldsymbol{u(x,y) = C}.$$

Saadud võrdus määrab eksaktse võrrandi lahendid muutujate x, y piirkonnas, milles $M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0$, seejuures konstant C saab omada ainult niisuguseid väärtusi, mis kuuluvad funktsiooni u väärtuste piirkonda. Funktsiooni u leidmiseks on mitmeid meetodeid. Vaatleme lähemalt neist kahte.

1) Lähtume võrdusest (5.19) ja leiame funktsiooni u järgmise võrrandisüsteemi abil:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y). \end{cases}$$

Kõigepealt integreerime esimese võrduse mõlemaid pooli muutuja x järgi, kusjuures loeme muutuja y konstantseks

$$\boldsymbol{u(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y),} \tag{5.20}$$

kus $C(y)$ on suvaline diferentseeruv funktsioon muutujast y. Valime $C(y)$ nii, et oleks täidetud

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)}.$$

Selleks diferentseerime võrduse (5.20) mõlemal poolel olevat avaldist muutuja y järgi ja võrdsustame tulemuse funktsiooniga $N(x,y)$. Saadavast võrrandist leiame $\boldsymbol{C(y)}$, mille asendame võrdusse (5.20).

2) Lähtume valemist

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy$$

või valemist

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy.$$

Arvud x_0 ja y_0 võib valida vabalt, kuid nii, et punkt (x_0, y_0) kuuluks muutujate x, y piirkonda, milles funktsioonid M, N, $\partial M/\partial y$ ja $\partial N/\partial x$ on pidevad.

Näide 5.24. Lahendada võrrand $\underbrace{(x^3 + xy^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^2y + y^3)}_{N}\,dy = 0.$

Antud võrrand on eksaktne, sest

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) = 2xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3) = 2xy.$$

Järelikult on olemas funktsioon $u = u(x,y)$ nii, et

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = du(x,y).$$

Üheaegselt peavad kehtima võrdused

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^3 + xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2y + y^3.$$

Loeme esimeses võrduses y parameetriks ja integreerime seda muutuja x järgi

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y) = \int (x^3 + xy^2)dx + C(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y).$$

Seejärel

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + C(y)\right) = x^2y + C'(y),\ \ x^2y + C'(y) = x^2y + y^3,$$

$$C'(y) = y^3,\ \ C(y) = \frac{y^4}{4}.$$

Sellega oleme leidnud

$$u(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4}.$$

Võrrandi lahendid on $u(x,y) = C$ ehk

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = C, C > 0.$$

Näide 5.25. Lahendada võrrand $\underbrace{(x+2y)}_{N}dy + \underbrace{(y+3x^2)}_{M}dx = 0.$

Kontrollime eksaktsuse tingimust:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y + 3x^2) = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y) = 1.$$

Otsime funktsiooni $u = u(x,y)$ kujul

$$u(x,y) = \int (x + 2y)dy + C(x) = yx + y^2 + C(x).$$

Siis

$$\frac{\partial}{\partial x}\big(yx + y^2 + C(x)\big) = y + C'(x) = y + 3x^2,$$

millest

$$C(x) = x^3$$

ja

$$u(x,y) = yx + y^2 + x^3.$$

Võrrandi lahenditeks on

$$yx + y^2 + x^3 = C.$$

5.4. NUMBRILISED MEETODID

Diferentsiaalvõrrandi lahendamisel on alati mõistlik kaaluda täpse analüütilise lahendi leidmise võimalust. Selle väärtusi saab kasutada mistahes argumendi väärtuste korral. Praktilistes ülesannetes ei ole see enamikel juhtudel teostatav. Analüütilise lahendi väärtuste leidmine võib olla komplitseeritud, näiteks kui see ei ole elementaarfunktsioon. Tüüpiline on olukord, kus algandmetes olevatest funktsioonidest saab kasutada lõplikku hulka väärtusi. Sellisel juhul kasutatakse lahendi leidmiseks ligikaudseid meetodeid.

5.4.1. EULERI MEETOD

Vaatleme esimest järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

koos algtingimusega $y(x_0) = y_0$. Otsitavaks on siin funktsioon $y = y(x)$, mille puhul on vaja see leida lõigus $[x_0, b]$ (siin eeldame konkreetsuse mõttes, et $x_0 < b$, kui aga lahendit otsitakse lõigus $[b, x_0]$, kus $b < x_0$, on lihtne teha esituses vastavad muudatused).
Võtame lõigu $[x_0, b]$ jaotuse

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots < x_n = b.$$

Tähistame

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ i = 1, \dots, n,$$

need on jaotusega tekkivate osalõikude pikkused. Euleri meetodis leitakse kõigepealt

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

(me eeldame, et kõik funktsiooni f kasutatavad väärtused on leitavad), sellega on leitud punkt (x_1, y_1). Oletame, et oleme jõudnud punktini (x_{i-1}, y_{i-1}). Siis leitakse

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})\Delta x_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

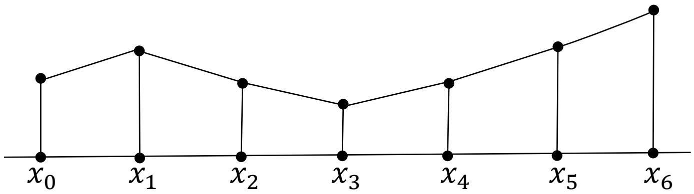
Selliselt leitakse punktid $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, millega võib Euleri meetodi arvutuseeskirja kirjutada

$$y_i = y_{i-1} + f(x_{i-1}, y_{i-1})(x_i - x_{i-1}), \qquad i = 1, \dots, n.$$

On võimalik tõestada, et küllalt loomulikel eeldustel algülesande kohta, mis tagavad lahendi $y = y(x)$ olemasolu ja ühesuse, toimub protsessis $\max_{1 \le i \le n}(x_i - x_{i-1}) \to 0$ koondumine

$$\max_{1 \le i \le n} |y_i - y(x_i)\,| \to 0,$$

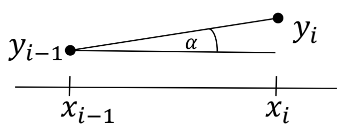
s. t (kuigivõrd vabalt väljendudes) osalõikude pikkuste vähenemisel toimub arvude y_i lähenemine lahendi täpsetele väärtustele $y(x_i)$.
Euleri meetodil leitud punktid võib naaberpunktide kaupa ühendada sirglõikudega (sirglõiguga ühendame (x_{i-1}, y_{i-1}) ja (x_i, y_i) iga i korral). Selliselt saadakse Euleri murdjoon, mis annab ligikaudse ettekujutuse lahendist.



Märgime, et Euleri meetodi arvutusvalemi võib kirjutada ka kujul

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = f(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

mida võib tõlgendada nii, et joonisel toodud kolmnurgas



on tõus tan α võrdne arvuga $f(x_{i-1}, y_{i-1})$.
Lisame, et Euleri meetodit kasutatakse tihti olukorras, kus osalõikude pikkused Δx_i on kõik omavahel võrdsed, s.t

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b - x_0}{n}, i = 1, \dots, n.$$

Näide 5.26. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$y' = y + x$$

ligikaudse lahendi kohal $x = 1$, mis rahuldab algtingimust $y(0) = 1$.

Jaotame lõigu [0,1] kümneks võrdseks osaks. Siis

$$x_i = ih, \qquad i = 0, \dots, 10, \qquad h = \frac{1 - 0}{10} = 0.1.$$

Siin

$$f(x, y) = x + y.$$

x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = x_i + y_i$	$f(x_i, y_i)h = (x_i + y_i)h$	$y_{i+1} = y_i + (x_i + y_i)h$
0	**1**	**1**	**0.1**	**1.1**
0.1	**1.1**	**1.2**	**0.12**	**1.22**
0.2	**1.22**	**1.42**	**0.142**	**1.362**
0.3	**1.362**	**1.662**	**0.1662**	**1.5282**
0.4	**1.5282**	**1.9282**	**0.1928**	**1.721**
0.5	**1.721**	**2.221**	**0.2221**	**1.9431**
0.6	**1.9431**	**2.5431**	**0.2543**	**2.1974**
0.7	**2.1974**	**2.8974**	**0.2897**	**2.4871**
0.8	**2.4871**	**3.2871**	**0.3287**	**2.8158**
0.9	**2.8158**	**3.7158**	**0.37158**	**3.1874**
1.0	3.1874 **Ligikaudne lahend** $y(1) \approx 3{,}1874$			

Ülesande täpne lahend on $y = 2e^x - x - 1$, mille võib leida mingit lineaarse võrrandi lahendamise meetodit kasutades, kuid lahendi õigsust näitab ka vahetu kontroll diferentsiaalvõrrandis ja algtingimuses:

$$y' = 2e^x - 1,$$

$$y = 2e^x - x - 1,$$

$$y + x = y',$$

$$y(0) = 2 - 1 = 1.$$

Arvutame nüüd lahendi väärtuse kohal $x = 1$:

$$y(1) = -1 - 1 + 2e^1 = 2e - 2 = 3{,}43656.$$

Ligikaudne lahend on täpsem, kui suurendame osalõikude arvu.

5.4.2. RUNGE-KUTTA MEETODID

Euleri meetod kasutas punktist (x_{i-1}, y_{i-1}) punkti (x_i, y_i) üleminekul ühte funktsiooni f väärtust. Suurema täpsusjärgu saavutamiseks on võimalik sellisel üleminekul kasutada suuremat arvu funktsiooni f väärtusi sobiva eeskirja kohaselt. See ongi Runge-Kutta meetodite põhiidee. Meetodi algse kuju töötas välja saksa matemaatik Carl Runge aastal 1895 ning seda üldistas Martin Wilhelm Kutta aastal 1901. Seejuures on ka eespool vaadeldud Euleri meetod üks Runge-Kutta meetoditest. Praktikas kõige laialdasemalt kasutatavaks on 4. järku klassikaline Runge-Kutta meetod ja seda peetaksegi tihti silmas, kui räägitakse lihtsalt Runge-Kutta meetodist. Selle arvutuseeskirja me annamegi.
Vaatleme ikka algtingimusega ülesannet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 ,$$

kus otsitakse selle (ligikaudset) lahendit lõigul $[x_0, b]$. Lõigu jaotus olgu

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots < x_n = b$$

osalõikude pikkustega

$$h_i = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \ i = 1, \ldots, n.$$

Üleminek punktist (x_{i-1}, y_{i-1}) punkti (x_i, y_i) toimub järgmiselt:

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

$$k_2 = f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, y_{i-1} + \frac{h_i}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}, y_{i-1} + \frac{h_i}{2} k_2\right),$$

$$k_4 = f(x_{i-1} + h_i, y_{i-1} + h_i k_3),$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h_i}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

Saab näidata, et piisavalt heade eelduste korral (need puudutavad just funktsiooni f diferentseeruvusomadusi) leiab aset koonduvus

$$\max_{1 \le i \le n} |y_i - y(x_i)| \le \text{const}\, h^4,$$

kui $h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i \to 0$. Võrdluseks märgime, et siinse koonduvusjärgu h^4 asemel on Euleri meetodis ainult h. Märgime jällegi, et enamasti kasutatakse vaadeldud Runge-Kutta meetodit ühtlasel võrgul, s.t juhul kui

$$h_i = \frac{b - x_0}{n}, i = 1, \ldots, n.$$

Näide 5.27. Leida võrrandi

$$y' = y + x$$

ligikaudne lahend Runge-Kutta meetodiga kohal $x = 1$, mis rahuldaks algtingimust

$$y(0) = 1.$$

Tegemist on sama ülesandega, mis näites 5.25. Seekord jaotame lõigu $[0,1]$ viieks osaks:

$$x_i = ih, i = 0, \ldots, 5, \quad h = 0.2.$$

Praegusel juhul

$$\frac{dy}{dx} = y + x, \qquad f(x, y) = x + y,$$

seepärast

$$k_1 = f(x_{i-1}, y_{i-1}) = x_{i-1} + y_{i-1},$$

$$k_2 = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1\right) = x_{i-1} + \frac{h}{2} + y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1,$$

$$k_3 = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2\right) = x_{i-1} + \frac{h}{2} + y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2,$$

$$k_4 = f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3) = x_{i-1} + h + y_{i-1} + hk_3,$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

x_{i-1}	y_{i-1}	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i
0	**1**	**1**	**1,2**	**1,22**	**1,444**	**1,2428**
0,2	**1,24280**	**1,44280**	**1,687080**	**1,711508**	**1,985102**	**1,583636**
0,4	**1,583636**	1,983636	2,282000	2,311836	2,646003	2,044213
0,6	2,044213	2,644213	3,008634	3,045076	3,453228	2,651042
0,8	2,651042	3,451042	3,896146	3,940656	4,439173	3,436502
1,0	**3,436502**	Ligikaudne lahend $\boldsymbol{y(1) \approx 3,436502}$				

Täpne lahend oli $y = 2e^x - x - 1$, $y(1) = 2e - 2 = 3{,}43656$. Kuna tegemist on täpsema meetodiga, on lahend ka poole väiksema osalõikude arvu korral oluliselt täpsem.

5.5. TEIST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Teist järku hariliku diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{F(x, y, y', y'') = 0}.$$

Funktsioon F esitab seose sõltumatu muutuja x, otsitava funktsiooni $y = y(x)$ ja otsitava funktsiooni esimese ja teise tuletise vahel. Tavaliselt on teist järku diferentsiaalvõrrandi lahendiks funktsioon, mis sisaldab 2 suvalist parameetrit

$$\boldsymbol{y = f(x, C_1, C_2)},$$

kuid lahendid võivad olla esitatud ka ilmutamata kujul $\boldsymbol{\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0}$.
Erijuhul, kui $\boldsymbol{y'' = f(x)}$, saab võrrandi lahendada kaks korda järjest integreerides. Arvestame, et

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Siis

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Lahendi saamiseks integreerime teist korda, sellega saame

$$y = \int\left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx + C_2 = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2.$$

Erijuhul, kui diferentsiaalvõrrand on kujul

$$\boldsymbol{F(x, y', y'') = 0},$$

saab võrrandi järku alandada muutujavahetusega

$$\boldsymbol{y' = u, y'' = u'}.$$

5.5.1. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarseks homogeenseks teist järku diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit kujul

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = 0}, \tag{5.21}$$

kus a, b on konstandid.

Teoreem 5.3.
Lineaarse homogeense võrrandi (5.21) lahendite summa on samuti selle võrrandi lahend.

Teoreem 5.4.
Kui y_1 on lineaarse homogeense võrrandi (5.21) lahend, siis on lahendiks ka Cy_1, kus C on suvaline konstant.

Järeldus.
Kui y_1 ja y_2 on lineaarse homogeense võrrandi (5.21) lahendid, siis on lahendiks ka nende lahendite lineaarne kombinatsioon $y = C_1y_1 + C_2y_2$ igasuguste konstantide C_1 ja C_2 korral.

Kui y_1 ja y_2 on **lineaarselt sõltumatud** võrrandi (5.21) **lahendid**, siis on

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

võrrandi (5.21) **üldlahendiks**.

Kaht funktsiooni $\boldsymbol{y_1}$ ja $\boldsymbol{y_2}$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks nende määramispiirkonnas X, kui

$$\boldsymbol{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, x \in X,}$$

kehtib vaid

$$C_1 = C_2 = 0$$

korral. Funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, kui nad ei ole lineaarselt sõltumatud. Võrrandi (5.21) lahendit on loomulik otsida selliste funktsioonide seast, mille tuletised on sarnased lähtefunktsiooniga, nii et pärast nende võrrandisse asendamist võiksid kõik liikmed välja koonduda. Üheks selliseks funktsiooniks on eksponentfunktsioon

$$y = e^{kx},$$

kus k on parameeter. Selle funktsiooni tuletised on

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}.$$

Eksponentfunktsioon on võrrandi lahendiks parajasti siis, kui

$$k^2 e^{kx} + ake^{kx} + be^{kx} \equiv 0$$

ehk

$$e^{kx}(k^2 + ak + b) \equiv 0.$$

Kuna $e^{kx} \neq 0$, siis samasuse kehtimiseks peab võrduma nulliga teine tegur, s.t

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Saime ruutvõrrandi, mille lahendid avalduvad kujul

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\,.$$

Definitsioon 5.17.

Diferentsiaalvõrrandile (5.21) **vastavaks karakteristlikuks võrrandiks** nimetatakse ruutvõrrandit

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Diferentsiaalvõrrandi (5.21) lahendite leidmisel tuleb vaadelda kolme juhtu vastavalt karakteristliku võrrandi lahenditele:

1) reaalsed ja omavahel erinevad,
2) võrdsed,
3) imaginaarsed.

1) Reaalsed ja omavahel erinevad karakteristliku võrrandi lahendid.

Olgu võrrandi $\boldsymbol{k^2 + ak + b = 0}$ lahendid $\boldsymbol{k_1, k_2}$ ja $k_1 \neq k_2$. Siis diferentsiaalvõrrandi (5.21) **lahendid** on

$$\boldsymbol{e^{k_1 x}} \text{ ja } \boldsymbol{e^{k_2 x}}.$$

Näitame, et need funktsioonid on võrrandi (5.21) lahendid. Saame

$$(e^{k_1x})' = k_1e^{k_1x},$$

$$(e^{k_1x})'' = k_1^2e^{k_1x},$$

$$(e^{k_1x})'' + a(e^{k_1x})' + be^{k_1x} = k_1^2e^{k_1x} + ak_1e^{k_1x} + be^{k_1x} = e^{k_1x}(k_1^2 + ak_1 + b) = 0,$$

sest

$$k_1^2 + ak_1 + b = 0.$$

Lahendiks on ka teine eksponentfunktsioon, sest k_2 on samuti karakteristliku võrrandi lahend. Näitame, et funktsioonid e^{k_1x} ja e^{k_2x} on lineaarselt sõltumatud. Olgu mingite arvude C_1 ja C_2 korral

$$C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} = 0, x \in X,$$

kus X võib olla suvaline hulk, mis sobib lahendi määramispiirkonnaks. Diferentseerides saame

$$C_1k_1e^{k_1x} + C_2k_2e^{k_2x} = 0, x \in X,$$

mis koos eelmise võrdusega moodustab lineaarse homogeense süsteemi C_1 ja C_2 määramiseks. Selle süsteemi determinant on

$$\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = (k_2 - k_1)e^{(k_1+k_2)x} \neq 0,$$

seepärast $C_1 = C_2 = 0$.

Reaalsete ja omavahel erinevate karakteristliku võrrandi

$$k^2 + ak + b = 0$$

lahendite k_1 ja k_2 korral on diferentsiaalvõrrandi (5.21) **üldlahendiks**

$$\boldsymbol{y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}},$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

2) Võrdsed karakteristliku võrrandi lahendid.

Sel juhul

$$a^2 - 4b = 0$$

ja seega

$$k_1 = k_2 = -\frac{a}{2}.$$

Diferentsiaalvõrrandi (5.21) lahenditeks on

$$e^{k_1x} \text{ ja } xe^{k_1x}.$$

Eelmises punktis on näidatud, et esimene neist on diferentsiaalvõrrandi lahend, sest k_1 on karakteristliku võrrandi lahend. Veendume, et teine funktsioon rahuldab diferentsiaalvõrrandit. Saame

$$(xe^{k_1x})' = e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x},$$

$$(xe^{k_1x})'' = k_1e^{k_1x} + k_1e^{k_1x} + k_1^2xe^{k_1x} = 2k_1e^{k_1x} + k_1^2xe^{k_1x},$$

$$(xe^{k_1x})'' + a(xe^{k_1x})' + bxe^{k_1x} = 2k_1e^{k_1x} + k_1^2xe^{k_1x} + a(e^{k_1x} + k_1xe^{k_1x}) + bxe^{k_1x} =$$

$$= xe^{k_1x}(k_1^2 + ak_1 + b) + (2k_1 + a)e^{k_1x} = 0,$$

kus kasutasime ka võrdust $k_1 = -a/2$. Näitame funktsioonide $e^{k_1 x}$ ja $xe^{k_1 x}$ lineaarset sõltumatust. Olgu arvude C_1 ja C_2 korral

$$C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = 0, x \in X.$$

Siis (jagame teguriga $e^{k_1 x} \neq 0$)

$$C_1 + C_2 x = 0, x \in X.$$

Siit aga järeldub, et $C_1 = C_2 = 0$.

Funktsioonid $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud.

Võrdsete karakteristliku võrrandi lahendite

$$k_1 = k_2 = -a/2$$

korral on diferentsiaalvõrrandi (5.21) **üldlahend**

$$\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{a}{2} x}}.$$

3) Imaginaarsed karakteristliku võrrandi lahendid.

Imaginaarsete lahendite korral on ruutvõrrandi lahendivalemi ruutjuurealune avaldis (diskriminant) negatiivne

$$a^2 - 4b < 0.$$

Siis on karakteristliku võrrandi lahenditeks kaaskompleksarvude paar $k_1 = \alpha + i\beta,\ k_2 = \alpha - i\beta$, kus

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2},$$

seejuures muidugi $\beta > 0$. Paneme tähele, et nendest võrdustest saame kohe

$$a = -2\alpha,$$

lisaks

$$\beta^2 = \frac{1}{4}(4b - a^2) = b - \frac{1}{4}a^2,$$

millest

$$b = \beta^2 + \frac{1}{4}a^2 = \beta^2 + \frac{1}{4}4\alpha^2 = \beta^2 + \alpha^2.$$

Diferentsiaalvõrrandi (5.21) lahenditeks on funktsioonid $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$, veendume selles. Leiame kõigepealt

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

ja nüüd võrrandis (5.21)

$$(e^{\alpha x}\cos\beta x)'' + a(e^{\alpha x}\cos\beta x)' + be^{\alpha x}\cos\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x - 2\alpha\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x + a\alpha\cos\beta x - a\beta\sin\beta x + b\cos\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}\big((\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)\cos\beta x - (2\alpha\beta + a\beta)\sin\beta x\big) = 0,$$

sest (kasutame võrdust $b = \beta^2 + \alpha^2$ ja seejärel $a = -2\alpha$)

$$\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b = 2\alpha^2 + a\alpha = \alpha(2\alpha + a) = 0,$$

samuti

$$2\alpha\beta + a\beta = \beta(2\alpha + a) = 0.$$

Sarnased arvutused teise funktsiooniga on

$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)' = \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + 2\alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$(e^{\alpha x}\sin\beta x)'' + a(e^{\alpha x}\sin\beta x)' + be^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x) + ae^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + be^{\alpha x}\sin\beta x =$$

$$= e^{\alpha x}(\alpha^2\sin\beta x + 2\alpha\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x + a\alpha\sin\beta x + a\beta\cos\beta x + b\sin\beta x) =$$

$$= e^{\alpha x}\big((\alpha^2 - \beta^2 + a\alpha + b)\sin\beta x + (2\alpha\beta + a\beta)\cos\beta x\big) = 0.$$

Näitame nende lahendite lineaarset sõltumatust. Olgu arvude C_1 ja C_2 korral

$$C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = 0, x \in X,$$

mis on samaväärne sellega, et

$$C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x = 0, x \in X.$$

Selle diferentseerimisel saame

$$-C_1\beta\sin\beta x + C_2\beta\cos\beta x = 0, x \in X,$$

kus võib teguriga $\beta \neq 0$ jagada. Saadud süsteemis

$$\begin{cases} C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x = 0, \\ -C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x = 0 \end{cases}$$

on determinant $\cos^2\beta x + \sin^2\beta x = 1$, seepärast on ainus võimalus, et $C_1 = C_2 = 0$.

Imaginaarsete karakteristliku võrrandi lahendite

$$\boldsymbol{k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i}$$

korral on diferentsiaalvõrrandi (5.21) **üldlahend**

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)}.$$

Näide 5.28. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^2 + 4k + 3 = 0,$$

selle lahendid on $k_1 = -3$, $k_2 = -1$. Need on reaalsed ja omavahel erinevad, seega on üldlahend

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}.$$

Näide 5.29. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^2 + 6k + 9 = 0,$$

mille lahenditeks on $k_1 = k_2 = -3$. Võrrandi üldlahend on

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}.$$

Näide 5.30. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand ja selle lahendid on

$$k^2 + 6k + 13 = 0,\ k_1 = -3 + 2i,\ k_2 = -3 - 2i.$$

Lahendid on imaginaarsed, seega on üldlahend

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

5.5.2. KONSTANTSETE KORDAJATEGA LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Konstantsete kordajatega lineaarne mittehomogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' + ay' + by = f(x)}, \tag{5.22}$$

kus a, b on konstandid ja vabaliige f on argumendi x funktsioon.

Võrrandi (5.22) **üldlahend** on esitatav kujul

$$\boldsymbol{y = y_h + y_*},$$

kus y_h on vastava homogeense võrrandi

$$y'' + ay' + by = 0$$

üldlahend ja y_* on võrrandi (5.22) üks konkreetne **lahend**.

Näeme, et võrrandi (5.22) üldlahendi leidmiseks on vaja lisaks eelmises punktis vaadeldud homogeense võrrandi lahendamisele leida üks konkreetne võrrandi (5.22) lahend.
Määramata kordajate meetod lahendi otsimiseks.
Lahendit tuleb otsida sarnaselt funktsiooni f kujule.

1) **f on konstant**: $\boldsymbol{f(x) = C}$.
Esitame otsitava lahendi samuti konstandina

$$\boldsymbol{y_* = A}.$$

Kuna tegemist on konstandiga, siis tuletised $y_*' = y_*'' = 0$ ja võrrandisse (5.22) asendades saame

$$bA = C, \quad A = \frac{C}{b}, \qquad y_* = \frac{C}{b}.$$

Kui võrrandis (5.22) $b = 0$, kuid $a \neq 0$, siis otsime lahendit kujul

$$y_* = Ax.$$

Leiame tuletised $y_*' = A,\ y_*'' = 0$ ja asendades võrrandisse, saame

$$aA = C, \quad A = \frac{C}{a}, \qquad y_* = \frac{C}{a}x.$$

Kui $a = b = 0$, siis võrrandi

$$y'' = C$$

lahendiks on $y_* = \frac{C}{2}x^2$, mis saadakse vahetu integreerimise teel.

2) ***f* on polünoom.**

Võrrandi (5.22) lahendit otsitakse **sama astme polünoomina**, näiteks kui

$$f(x) = px^2 + qx + r,$$

kus p, q ja r on antud, siis otsime lahendit ruutpolünoomina

$$y_* = Ax^2 + Bx + C.$$

Määrame konstandid A, B ja C nii, et y_* oleks võrrandi (5.22) lahend. Selleks leiame tuletised

$$y_*' = 2Ax + B, y_*'' = 2A.$$

Asendades need võrrandisse (5.22), saame

$$2A + a(2Ax + B) + b(Ax^2 + Bx + C\ ) = px^2 + qx + r.$$

Korrastame vasakul pool võrdusmärki olevad liikmed

$$Abx^2 + x(2Aa + Bb) + 2A + aB + bC = px^2 + qx + r.$$

Siis x^2 kordajate võrdumine annab $Ab = p$, millest

$$A = \frac{p}{b},$$

x kordajatest $2Aa + Bb = q$ ja

$$B = \frac{1}{b}\left(q - 2a\frac{p}{b}\right),$$

vabaliikmetest $2A + aB + bC = r$ ja

$$C = \frac{1}{b}\left(r - 2\frac{p}{b} - \frac{a}{b}\left(q - 2a\frac{p}{b}\right)\right).$$

Kui võrrandis (5.22) $b = 0$, kuid $a \neq 0$, siis otsitakse lahendit kujul

$$y_* = x(Ax^2 + Bx + C).$$

Juhul $a = b = 0$ on võrrandiks

$$y'' = f(x)$$

ja lahend y_* leitakse polünoomi f kaks korda integreerides. Sel juhul on muidugi võrrandi (5.22) üldlahend leitav kohe suvalise funktsiooni f korral otsese integreerimisega

$$y = C_1 x + C_2 + \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx.$$

3) Vabaliige on kujul $\boldsymbol{f(x) = pe^{qx}}$.
Lahendit otsime kujul

$$\boldsymbol{y_* = Ae^{qx}}.$$

Paneme tähele, et otsitavas lahendis on eksponentfunktsioon sama, mis vabaliikmes. Siis

$$y_*' = Aqe^{qx}, y_*'' = Aq^2 e^{qx}$$

ning võrrandisse asendamine annab

$$Aq^2 e^{qx} + aAqe^{qx} + bAe^{qx} = pe^{qx}$$

ehk

$$A(q^2 + aq + b) = p.$$

Sellest saame

$$A = \frac{p}{q^2 + aq + b}.$$

Kui $q^2 + aq + b = 0$, mis tähendab, et ***q* on karakteristliku võrrandi lahend**, siis **ühekordse** lahendi korral (kui k_1 ja k_2, kus $k_1 \neq k_2$, on karakteristliku võrrandi lahendid ja kas $q = k_1$ või $q = k_2$) otsime lahendit kujul

$$y_* = Axe^{qx},$$

kahekordse lahendi q korral ($q = k_1 = k_2$) aga kujul

$$y_* = Ax^2 e^{qx}.$$

4) **Vabaliige on trigonomeetrilisel kujul**

$$\boldsymbol{f}(x) = p \cos \omega x + q \sin \omega x.$$

Siin on loomulik eeldada, et $\omega \neq 0$, sest võrdus $\omega = 0$ sisaldub eespool toodud juhtudes. Lahendit otsime kujul (ka siis, kui $p = 0$ või $q = 0$)

$$\boldsymbol{y_* = A \cos \omega x + B \sin \omega x}.$$

Paneme tähele, et otsitavas lahendis on siinus- ja koosinusfunktsioon sama, mis vabaliikmes. Leiame funktsiooni tuletised ja asendame võrrandisse:

$$y_*' = -A\omega \sin \omega x + B\omega \cos \omega x,$$

$$y_*'' = -A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x,$$

$$-A\omega^2 \cos \omega x - B\omega^2 \sin \omega x - aA\omega \sin \omega x + aB\omega \cos \omega x +$$

$$+bA \cos \omega x + bB \sin \omega x = p \cos \omega x + q \sin \omega x.$$

Võrdsustades $\cos \omega x$ ja $\sin \omega x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki, saame võrrandisüsteemi kordajate A ja B leidmiseks:

$$\begin{cases} -A\omega^2 + aB\omega + bA = p, \\ -B\omega^2 - aA\omega + bB = q. \end{cases}$$

Süsteemi determinant tuleb

$$\begin{vmatrix} -\omega^2+b & a\omega \\ -a\omega & -\omega^2+b \end{vmatrix} = (-\omega^2+b)^2 + a^2\omega^2.$$

Kui $a \neq 0$, on süsteemi determinant nullist erinev ning kordajad A ja B üheselt määratud. Kui $a = 0$, siis juhul $-\omega^2 + b \neq 0$ on ikkagi A ja B üheselt määratud. Juhul $a = 0$ ja $b = \omega^2$ on karakteristliku võrrandi lahendid $k_1 = \omega i$ ja $k_2 = -\omega i$ ning lahend on olemas kujul

$$y_* = x(A\sin\omega x + B\cos\omega x).$$

Sarnaselt eelnevaga annavad arvutused siin, et

$$A = -\frac{q}{2\omega}, B = \frac{p}{2\omega}.$$

Märkused.

1. Kui võrrandi (5.22) paremal poolel esineb eespool vaadeldud **funktsioonide summa**, siis lahendi saame, kui otsime seda **vastavate funktsioonide summana**. Selle võtte aluseks on asjaolu, et
2. Kui võrrandi (5.22) paremal poolel on **korrutis vaadeldud funktsioonidest**, siis otsitakse lahendit sobiva **korrutise kujul**. Siin tugineb võte funktsioonide korrutisest tuletise arvutamise eeskirjale.

Näide 5.31. Leiame võrrandi

$$y'' + 2y' - 8y = 2x + 1$$

üldlahendi.

Algul leiame võrrandile vastava homogeense võrrandi

$$y'' + 2y' - 8y = 0$$

üldlahendi karakteristliku võrrandi

$$k^2 + 2k - 8 = 0$$

lahendite

$$k_1 = -4, \qquad k_2 = 2$$

järgi, see on

$$y_h = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}.$$

Mittehomogeense võrrandi lahendit otsime vabaliikme

$$f(x) = 2x + 1$$

kujuga sarnasel kujul määramata kordajatega. Võttes

$$y_* = Ax + B,$$

saame

$$y_*' = A, y_*'' = 0.$$

Määramata kordajate A ja B leidmiseks asendame otsitava lahendi ja selle tuletised lahendatavasse võrrandisse, võrdsustame mõlemat pool võrdusmärki olevad muutuja x kordajad ning vabaliikmed:

$$2A - 8Ax - 8B = 2x + 1,$$

$$-8A = 2, \quad A = -\frac{1}{4},$$

$$2A - 8B = 1, \quad B = -\frac{3}{16},$$

$$y_* = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16},$$

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

Näide 5.32. Leiame võrrandi

$$y'' - 2y' = x^2 + 4x$$

üldlahendi.

Leiame vastava homogeense võrrandi üldlahendi

$$k^2 - 2k = 0, \quad k_1 = 0, \qquad k_2 = 2, \;\; y_h = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Mittehomogeense võrrandi lahendit otsime kujul (tegemist on erijuhuga, kuna $b = 0$)

$$y_* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Siis

$$y_*' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \; y_*'' = 6Ax + 2B,$$

$$6Ax + 2B - 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 + 4x,$$

$$6Ax + 2B - 6Ax^2 - 4Bx - 2C = x^2 + 4x,$$

$$-6A = 1, \quad A = -\frac{1}{6},$$

$$6A - 4B = 4, \qquad B = -\frac{5}{4},$$

$$2B - 2C = 0, \qquad C = -\frac{5}{4},$$

$$y_* = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x,$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x.$$

Näide 5.33. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$y'' + 3y' - 10y = 16e^{3x}$$

üldlahendi.

Leiame vastava homogeense võrrandi üldlahendi

$$k^2 + 3k - 10 = 0, \quad k_1 = -5, \qquad k_2 = 2, \;\; y_h = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}.$$

Lähtevõrrandi lahendit otsime kujul

$$y_* = Ae^{3x}.$$

Siis

$$y_*' = 3Ae^{3x}, \; y_*'' = 9Ae^{3x},$$

$$9Ae^{3x} + 3 \cdot 3Ae^{3x} - 10Ae^{3x} = 16e^{3x},$$

$$8A = 16, \quad A = 2,$$

$$y_* = 2e^{3x},$$

$$y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + 2e^{3x}.$$

Näide 5.34. Leiame võrrandi

$$y'' + 4y = 12\cos 2x$$

üldlahendi.

Leiame vastava homogeense võrrandi üldlahendi

$$k^2 + 4 = 0, \quad k_1 = 2i, \qquad k_2 = -2i, \quad y_h = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Lahendit otsime kujul

$$y_* = x(A\cos 2x + B\sin 2x),$$

sest tegemist on erijuhuga, sest kuna $a = 0$, siis $k_{1,2} = \pm 2i$ ja võrrandi paremal pool oleva trigonomeetrilise funktsiooni argumendi kordaja $\omega = 2$ on võrdne karakteristliku väärtuse imaginaarosaga. Leiame

$$y_*{}' = A\cos 2x + B\sin 2x + x(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x),$$

$$y_*{}'' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x + x(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x) =$$

$$= 4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x,$$

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x - 4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + 4(Ax\cos 2x + Bx\sin 2x) = 12\cos 2x.$$

Võrdsustades koosinuse ja siinuse kordajad mõlemal pool võrdusmärki, saame

$$4B = 12, \qquad B = 3, \qquad\qquad -4A = 0, \quad A = 0,$$

$$y_* = 3x\sin 2x, \qquad y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 3x\sin 2x.$$

5.5.3. TEIST JÄRKU VÕRRANDID FÜÜSIKAS. MEHAANILISED VÕNKUMISED*

Vaatleme vertikaalselt asetsevat vedru, mis on ülalt kinnitatud ja mille alumises otsas asub koormus massiga m. Koormuse kõrvalekallet tasakaaluasendi suhtes tähistame muutujaga y. Kõrvalekallet alla loeme positiivseks ja üles negatiivseks. Tasakaaluasendis on koormus tasakaalus vedru elastsusega. Eeldame, et jõud F_1, mis püüab koormust viia tasakaaluasendisse, on võrdeline kõrvalekaldega y:

$$F_1 = -ky, \quad k = \text{const}, k > 0,$$

kus k on vedru jäikus. Koormuse liikumist takistab vastupanujõud F_2, mis on suunatud liikumise vastassuunas ja on võrdeline massi liikumise kiirusega

$$F_2 = -\lambda v = -\lambda\frac{dy}{dt}, \quad \lambda = \text{const}, \qquad \lambda > 0.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$ma = F_1 + F_2, \quad a = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \lambda\frac{dy}{dt}, \quad \lambda > 0, k > 0.$$

Saime teist järku konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}. \tag{5.23}$$

Võrrandit (5.23) nimetatakse **vabavõnkumiste võrrandiks**.
Oletame, et vedru alumine punkt liigub vertikaalselt vastavalt seadusele

$$z = \varphi(t).$$

Vedru alumine ots on kinnitatud rulli külge, mis koos vedru ja koormusega liigub mööda konarusi. Sellisel juhul on taastav jõud

$$F_1 = -ky - k\varphi(t),$$

ning takistav jõud

$$F_2 = -\lambda v - \lambda\varphi'(t) = -\lambda y' - \lambda\varphi'(t).$$

Võrrandi (5.23) asemel saame

$$my'' = -ky - k\varphi(t) - \lambda y' - \lambda\varphi'(t),$$

$$my'' + \lambda y' + ky = -k\varphi(t) - \lambda\varphi'(t),$$

$$y'' + p\,y' + qy = f(t), \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m}, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}. \tag{5.24}$$

Võrrandit (5.24) nimetatakse **sundvõnkumiste võrrandiks**.

5.5.3.1. VABAVÕNKUMISED*

Vabavõnkumiste võrrand on kujul (5.23),

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m},$$

kus otsitav on funktsioon $y = y(t)$. Lahendame selle võrrandi ja analüüsime võimalikke lahendeid. Karakteristlik võrrand ja selle lahendid on

$$k^2 + pk + q = 0, \quad k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \qquad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Kuna diferentsiaalvõrrandi lahend sõltub karakteristliku võrrandi lahenditest, siis vaatame erinevaid variante. Eelkõige huvitab meid lahendi y käitumine, kui $t \to \infty$.

1. Kui $\boldsymbol{p^2/4 > q}$, siis lahendid on reaalsed ja negatiivsed ning üldlahend on kujul

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}, \qquad k_2 < k_1 < 0.$$

Siis

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t} = e^{k_1t}\left(C_1 + C_2e^{(k_2-k_1)t}\right)$$

ja $k_2 - k_1 < 0$ tõttu protsessis $t \to \infty$, $e^{(k_2-k_1)t} \to 0$ (monotoonselt), millest näeme, et y saab märki vahetada ainult ühe korra, $y \to 0$ ja edaspidiselt võnkumist ei teki. Põhjuseks on siin, et liikumist takistavad jõud on suured võrreldes vedru jäikusega.

2. Kui $\boldsymbol{p^2/4 = q}$, $k_1 = k_2 = -p/2$ ja võrrandi üldlahend on

$$y = (C_1 + C_2t)e^{-\frac{p}{2}t}.$$

Ka siin $t \to \infty$ korral y käitumine sarnane juhuga 1, s.t $y \to 0$ ning y saab märki vahetada ülimalt üks kord.

3. Olgu $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, mis tähendab, et takistusjõud puudub. Siis karakteristlik võrrand ja tema lahendid on

$$k^2 + q = 0, \quad k_1 = \beta i, \quad k_2 = -\beta i, \quad \beta = \sqrt{q}.$$

Diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t.$$

Tähistame

$$C_1 = A \sin \varphi_0, C_2 = A \cos \varphi_0,$$

kus A, φ_0 on suvalised. Avaldame A, φ_0 kordajate C_1 ja C_2 kaudu:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \varphi_0 = \arctan \frac{C_1}{C_2}.$$

Siis

$$y = A \sin \varphi_0 \cos \beta t + A \cos \varphi_0 \sin \beta t = A \sin(\varphi_0 + \beta t),$$

$$y = A \sin(\varphi_0 + \beta t).$$

Sellist võnkumist nimetatakse harmooniliseks võnkumiseks. Lahenditeks ehk integraalkõverateks on sinusoidid. Võnkeperioodiks nimetatakse ajavahemikku T, mille jooksul siinuse argument muutub 2π võrra. Antud juhul

$$T = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Võnkesageduseks nimetatakse võngete arvu aja 2π jooksul. Antud juhul on sageduseks β. Võnkeamplituudiks nimetatakse suurimat hälvet tasakaaluasendist (täpsemalt, selle absoluutväärtust). Suurim hälve tasakaaluasendist on A. Arvu φ_0 nimetatakse algfaasiks.

5.5.3.2. SUNDVÕNKUMISED*

Sundvõnkumiste võrrand (5.24) on

$$y'' + p\,y' + qy = f(t), \quad f(t) = -\frac{k\varphi(t) + \lambda\varphi'(t)}{m}, \quad p = \frac{\lambda}{m}, q = \frac{k}{m}.$$

Praktikas on sageli võnkeid põhjustav välisjõud perioodiline, siis

$$f(t) = a \sin \omega t.$$

Eeldame, et koormuse liikumine toimub vastavalt seadusele

$$y'' + p\,y' + qy = a \sin \omega t, \quad p \neq 0, \quad \frac{p^2}{4} < q,$$

kus q iseloomustab vedru jäikust ja p liikumisele mõjuvat takistust, mis on võrdeline kiirusega. Leiame kõigepealt vastava homogeense võrrandi lahendi. Vastava karakteristliku võrrandi lahendid on sel juhul imaginaarsed

$$k^2 + pk + q = 0, \quad k_1 = \alpha + i\beta,$$

$$k_2 = \alpha - i\beta, \qquad k = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \quad \alpha = -\frac{p}{2}, \;\; \beta = \sqrt{-\frac{p^2}{4} + q},$$

homogeense võrrandi üldlahend on

$$y = e^{\alpha t}(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin \beta t).$$

Tähistame

$$C_1 = A \sin \varphi_0, C_2 = A \cos \varphi_0,$$

siis

$$y = Ae^{\alpha t}(\sin \varphi_0 \cos\beta t + \cos \varphi_0 \sin \beta t) = Ae^{\alpha t}\sin (\varphi_0 + \beta t).$$

Mittehomogeense võrrandi lahendit otsime kujul

$$y_* = M\cos \omega t + N\sin \omega t.$$

Leiame tuletised ja asendame võrrandisse:

$$y_*' = -M\omega\sin \omega t + N\omega\cos \omega t, \;\; y_*'' = -M\omega^2\cos \omega t - N\omega^2\sin \omega t,$$

$$-M\omega^2\cos \omega t - N\omega^2\sin \omega t + p(-M\omega\sin \omega t + N\omega\cos \omega t) + q(M\cos \omega t + N\sin \omega t) = a \sin\omega t.$$

Võrdsustades $\cos \omega t$ ja $\sin \omega t$ kordajad, saame

$$-M\omega^2 + pN\omega + qM = 0, \qquad -N\omega^2 - pM\omega + qN = a,$$

millest

$$M = \frac{-ap\omega}{(\omega^2 - q\,)^2 + p^2\omega^2}\,, \qquad N = \frac{a(q - \omega^2)}{(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}\,.$$

Võtame kasutusele uued parameetrid A_* ja φ_* võrdustega

$$M = A_*\sin \varphi_*, \qquad N = \; A_*\cos \varphi_*.$$

Nendest saame

$$A_* = \sqrt{M^2 + N^2} = \sqrt{\frac{a^2p^2\omega^2 + a^2(q - \omega^2)^2}{[(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2]^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}\,,$$

$$\varphi_* = \arctan\frac{M}{N}.$$

Mittehomogeense võrrandi üheks lahendiks saame niisiis

$$y_* = M\cos \omega t + N\sin \omega t = A_*\sin \varphi_*\cos \omega t + A_*\cos \varphi_*\sin \omega t =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi_*).$$

Lähtevõrrandi üldlahend on

$$y = Ae^{\alpha t}\sin (\varphi_0 + \beta t) + \frac{a}{\sqrt{a^2\,(q - \omega^2)^2 + p^2\omega^2}}\sin(\omega t + \varphi_*).$$

Esimene liidetav kujutab sumbuvat võnkumist, aja t kasvades see liige kahaneb ja teise liidetava osatähtsus suureneb. Teine liidetav määrab sundvõnkumise. Võngete sagedus ω on võrdne välisjõu f sagedusega. Sundvõnkumiste amplituud on seda suurem, mida väiksem on p ja mida lähemal on ω^2 väärtus q väärtusele.

5.5.4. LINEAARSED HOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne homogeenne teist järku diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0,}$$

kus $\boldsymbol{p_1, p_2}$ on antud funktsioonid.

Kui on teada lineaarse homogeense võrrandi kaks lineaarselt sõltumatut lahendit y_1, y_2 vahemikus (a, b), siis selle võrrandi **üldlahendiks** piirkonnas $(a, b) \times \mathbb{R}$ on

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).} \tag{5.25}$$

Võrrandi erilahendi saame üldlahendist konstantide C_1, C_2 sobiva fikseerimise teel.

Wronski determinant.
Vaatleme algul kahte funktsiooni $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x)$, mis on diferentseeruvad ning lineaarselt sõltuvad vahemikus (a, b). Siis leiduvad arvud $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, millest vähemalt üks on nullist erinev, nii, et iga $x \in (a, b)$ korral kehtib võrdus

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0.$$

Diferentseerides saadud võrdust, saame

$$k_1 y_1'(x) + k_2 y_2'(x) = 0.$$

Neid kahte võrdust võime vaadelda lineaarse homogeense võrrandisüsteemina arvude k_1 ja k_2 suhtes. Süsteemi determinant võrdub nulliga, sest tegemist on lineaarselt sõltuvate funktsioonidega ehk iga $x \in (a, b)$ korral

$$W(x) = 0,$$

kus

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x).$$

Determinanti W nimetatakse funktsioonide y_1 ja y_2 **Wronski determinandiks**.
Funktsioonide y_1 ja y_2 Wronski determinandi võrdumine nulliga on tarvilikuks tingimuseks nende funktsioonide lineaarseks sõltuvuseks antud vahemikus. Teisiti sõnastades, kui diferentseeruvad funktsioonid on lineaarselt sõltuvad, siis nende Wronski determinant on samaselt null. Seepärast, kui funktsioonide Wronski determinant on nullist erinev (vähemalt ühe argumendi väärtuse korral), on need funktsioonid lineaarselt sõltumatud.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.
Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi kaks lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (5.25), kuid nende lahendite leidmiseks üldine meetod puudub. Sellepärast tuleb võrrandi lahendamiseks sageli kasutada **järgu alandamise võtet**. Kui me teame võrrandi mingit lahendit $y_1 \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: võrrandis

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

teeme esiteks muutujavahetuse

$$\boldsymbol{y = y_1 z}$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$\boldsymbol{z' = u}, \quad z = z(x), u = u(x).$$

Vaatame **Liouville–Ostrogradski valemini** jõudmise mõttekäiku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi jaoks kujul

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Olgu y_1 ja y_2 vaadeldava võrrandi kaks lahendit, mis on lineaarselt sõltumatud vahemikus (a, b). Siis iga $x \in (a, b)$ korral

$$y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x) = 0$$

ja

$$y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x) = 0.$$

Korrutades esimest võrdust suurusega $(-y_2(x))$ ja teist võrdust suurusega $y_1(x)$ ning liites tulemused, saame:

$$-y_1''(x)y_2(x) \; + y_2''(x)y_1(x) + p_1(x)\big(y_2'(x)y_1(x) - y_1'(x)y_2(x)\big) = 0.$$

Siin $p_1(x)$ kordaja on võrdne lahendite y_1 ja y_2 Wronski determinandiga

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

esimese kahe liikme vahe aga on Wronski determinandi tuletis $W'(x)$:

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

Seega iga $x \in (a, b)$ korral kehtib võrdus

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0.$$

Selle esimest järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks (piirkonnas $(a, b) \times \mathbb{R}$) on

$$\boldsymbol{W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}, C} \in \mathbb{R},$$

kus (nagu varem määratlesime) $\int p_1(x)\,dx$ tähistab ühte funktsiooni p_1 algfunktsiooni. Seda valemit nimetatakse **Liouville–Ostrogradski valemiks**. Oletame, et lahend $y_1 \neq 0$ on leitud. Võttes Liouville–Ostrogradski valemis näiteks $C = 1$, saame esimest järku lineaarse võrrandi

$$\boldsymbol{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{-\int p_1(x)dx}}$$

lahendi y_2 leidmiseks. Üks võimalusi y_2 leidmiseks on järgmine. Jagame võrrandi avaldisega $\big(y_1(x)\big)^2$ (see on võimalik nende x väärtuste korral, kus $y_1(x) \neq 0$), tulemusena saame võrrandi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2(x)}{y_1(x)}\right) = \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}$$

ehk

$$\boldsymbol{y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{\big(y_1(x)\big)^2}dx.}$$

Seejuures y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud, sest nende Wronski determinant on

$$e^{-\int p_1(x)dx} \neq 0.$$

Näide 5.35. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=0.$$

Võrrandi kordajateks on polünoomid

$$p_0(x)=x^2+1,\ p_1(x)=-2x,\ p_2(x)=2.$$

On vaja leida üks võrrandi lahend, et saaks Liouville–Ostrogradski valemit kasutada. Selleks tuleb proovida kordajatega sarnaseid funktsioone, alustades kõige lihtsamast. Proovime $y_1(x)=C$ võrrandi lahendiks sobivust. Asendades võrrandisse $y=C, y'=y''=0$, saame $y_1=0$. See lahend ei sobi, kuna vajame nullist erinevat lahendit. Otsime lahendit kujul

$$y_1(x)=Ax+B.$$

Siis $y_1'=A,\ y_1''=0$ asendades võrrandisse annab

$$-2Ax+2Ax+2B=0,\quad B=0.$$

Otsitavaks lahendiks sobib $y_1(x)=Ax$, kus A on suvaline konstant. Võtame lahendiks

$$y_1(x)=x.$$

Teisendame võrrandi kujule

$$y''-\frac{2x}{x^2+1}y'+\frac{2}{x^2+1}y=0,$$

Seejärel leiame Liouville–Ostrogradski valemi järgi lahendi y_2

$$y_2(x)=x\int\frac{e^{-\int-\frac{2x}{x^2+1}dx}}{x^2}dx=x\int\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)dx=$$

$$=x\left(\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx\right)=x\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2-1.$$

Tulemuseks on võrrandi teine lahend, mille suvaline lineaarne kombinatsioon esimesena leitud lahendiga annab meile võrrandi üldlahendi

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x+C_2(x^2-1).$$

Lahendame sama ülesande lahendit $y_1=x$ kasutades **järgu alandamise võtte abil:**

$$y=y_1z,\qquad z'=u.$$

Siis

$$y=xz$$

ja tuletised on kujul (korrutise tuletise valemi järgi)

$$y'=z+xz', y''=2z'+xz''.$$

Diferentsiaalvõrrand saab peale asendust kuju

$$(x^2+1)(2z'+xz'')-2x(z+xz')+2xz=0,$$

millest saame

$$(x^3+x)z''+2z'=0.$$

Teise sammuna teeme asenduse

$$z'=u,\qquad z''=u',$$

millega saame

$$(x^3 + x)u' + 2u = 0.$$

Tegemist on esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandiga. Võrrandi järk on alandatud ning saadud madalamat järku võrrand on samuti lineaarne. See ongi lineaarsuse säilitamine. Kuna tegemist on lineaarse homogeense võrrandiga, saame selle lahendada muutujate eraldamise teel

$$\frac{du}{u} = \frac{-2dx}{x^3 + x}.$$

Integreerimiseks teisendame võrrandi paremal pool asuva murru osamurdude summaks:

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2+1)}.$$

Võrdsustame lugejas kõigepealt vabaliikmete kordajad, saame

$$A = -2.$$

Lineaarliikmete (muutuja x) kordajate võrdumine annab

$$C = 0.$$

Seejärel x^2 kordajate võrdumisest tuleb

$$A + B = 0,$$

millest

$$B = 2.$$

Kokkuvõttes oleme saanud

$$\frac{-2}{x(x^2+1)} = \frac{-2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}.$$

Võrrandit integreerides leiame (meid huvitab vaid üks lahend)

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{-2dx}{x^3 + x} = \int \frac{-2}{x} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx,$$

$$\ln|u| = -2\ln|x| + \ln|x^2 + 1|,$$

$$u = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Asendades $u = z'$, leiame

$$z' = \frac{x^2 + 1}{x^2},$$

millest

$$z = \int \frac{x^2 + 1}{x^2} dx = x - \frac{1}{x}.$$

Kuna $yx = z$, siis

$$y = x^2 - 1,$$

mis on eespool leitud lahendi $y = x$ kõrval teine lahend. Võrrandi üldlahend on seega

$$y = C_1 x + C_2(x^2 - 1).$$

5.5.5. LINEAARSED MITTEHOMOGEENSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Lineaarne teist järku mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)},$$

kus $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ ja f on antud funktsioonid.

Kui on teada homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit y_1, y_2 ja mittehomogeense võrrandi üks lahend y_*, siis üldlahend avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = y_* + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}. \tag{5.26}$$

Võrrandi (5.26) mistahes lahend on saadav üldlahendist konstantide C_1, C_2 väärtuste fikseerimisel.

Lahendi leidmine konstantide varieerimise meetodiga.
Kui on leitud lineaarse homogeense võrrandi $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ kaks lineaarselt sõltumatut lahendit, siis lahendit y_* otsitakse kujul

$$y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

Niisiis, homogeense võrrandi üldlahendis (5.25) asendame suvalised konstandid C_1, C_2 funktsioonidega $C_1(x), C_2(x)$. Funktsioonid $C_1(x), C_2(x)$ määrame nii, et y_* rahuldaks mittehomogeenset võrrandit.
Kõigepealt võtame lahendi avaldisest tuletise, kusjuures arvestame, et kasutame korrutise diferentseerimise reeglit

$$y_*'(x) = C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x).$$

Kuna meil on kaks otsitavat funktsiooni ja ainult üks võrrand, siis võtame teiseks võrrandiks

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Siis

$$y_*'(x) = C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

$$y_*''(x) = C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

Asetame viimased kaks avaldist esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) +$$

$$+p_1(x)\big(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)\big) + p_2(x)\big(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)\big) = f(x).$$

Kuna y_1 ja y_2 on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi lahendid, siis asendades need homogeensesse võrrandisse, tekib samasus. Seega osa liikmeid saadud võrrandist annavad kokku arvu 0

$$C_1(x)y_1''(x) + p_1(x)\big(C_1(x)y_1'(x)\big) + p_2(x)\big(C_1(x)y_1(x)\big)$$
$$= C_1(x)\big(y_1''(x) + p_1(x)y_1'(x) + p_2(x)y_1(x)\big) = C_1(x) \cdot 0 = 0,$$

$$C_2(x)y_2''(x) + p_1(x)\big(C_2(x)y_2'(x)\big) + p_2(x)\big(C_2(x)y_2(x)\big)$$
$$= C_2(x)\big(y_2''(x) + p_1(x)y_2'(x) + p_2(x)y_2(x)\big) = C_2(x) \cdot 0 = 0.$$

Järelejäänud liikmetest saame võrrandi

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Funktsioonide $C_1(x), C_2(x)$ leidmiseks saime süsteemi

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).} \end{cases} \qquad (5.27)$$

Süsteem (5.27) on üheselt lahenduv, sest selle determinant, olles lineaarselt sõltumatute lahendite y_1, y_2 Wronski determinant, on iga x korral nullist erinev. Olgu selle lahendid

$$C_1'(x) = g_1(x), C_2'(x) = g_2(x).$$

Nendest leiame

$$C_1(x) = \int g_1(x)\,dx, C_2(x) = \int g_2(x)\,dx$$

(siin peame jälle silmas mingeid konkreetseid algfunktsioone, sest me otsime vaid ühte mittehomogeense võrrandi lahendit.

Näide 5.36. Lahendame diferentsiaalvõrrandi $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2$.

Kirjutame võrrandi kujul

$$y'' - \frac{2x}{x^2+1}y' + \frac{2}{x^2+1}y = x^2 + 1.$$

Vastav homogeenne diferentsiaalvõrrand on juba lahendatud eelmises näites (näide 5.35), lahendiks on

$$y_h = C_1x + C_2(x^2 - 1).$$

Järelikult antud võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1x + C_2(x^2 - 1) + y_*(x).$$

Leiame lahendi $y_*(x) = C_1(x) + C_1(x)(x^2 - 1)$ süsteemi (5.27) abil, mis antud juhul on

$$\begin{cases} C_1'x + C_2'(x^2 - 1) = 0, \\ C_1' + 2xC_2' = x^2 + 1. \end{cases}$$

Avaldades teisest võrrandist

$$C_1' = x^2 + 1 - 2xC_2'$$

ja asendades selle esimesse võrrandisse, saame

$$x(x^2+1) - 2x^2C_2' + x^2C_2' - C_2' = 0,$$
$$x(x^2+1) - (x^2+1)C_2' = 0,$$
$$C_2' = x.$$

Seejärel näiteks teise võrrandi abil

$$C_1' = x^2 + 1 - 2x^2 = -(-1) = -x^2 + 1.$$

Nendest

$$C_1(x) = -\frac{x^3}{3} + x\,, C_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

ja

$$y_* = -\frac{x^4}{3} + x^2 + \frac{x^2}{2}(x^2 - 1) = \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

Võrrandi üldlahendiks on

$$y = C_1 x + C_1(x^2 - 1) + \frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2}.$$

5.5.6. ERIKUJULISED LINEAARSED VÕRRANDID*

Legendre'i võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

kus l on reaalarv.

Mittenegatiivse täisarvu l korral avaldub Legendre'i võrrandi üldlahend kujul

$$y = a_0 y_1 + a_1 y_2,$$

kus a_0 ja a_1 on konstandid ja y_1 sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ning y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui l on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui l on paaritu, siis $a_0 = 0$. Loodusteadustes pakuvad huvi sellised võrrandi lahendid, mis on tõkestatud intervallis $-1 \le x \le 1$. Legendre'i võrrandi lahenditeks on l astme polünoomid, mida nimetatakse Legendre'i polünoomideks

$$P_l(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2l - 1)}{l!}\left\{x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \ldots\right\},$$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Legendre'i polünoomide vahel on rekurentne seos

$$(l + 1)P_{l+1}(x) - (2l + 1)xP_l(x) + lP_{l-1}(x) = 0,$$

kus andes ette $P_0(x) = 1$ ja $P_1(x) = x$, saab leida kõik kõrgema astme polünoomid.

Kui $\boldsymbol{l = 1}$, siis

$$2P_2 - 3xP_1 + P_0 = 0, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3xP_1 - P_0) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Kui $\boldsymbol{l = 2}$, siis $3P_3 - 5xP_2 + 2P_1 = 0$,

$$P_3(x) = \frac{1}{3}(5xP_2 - 2P_1) = \frac{1}{3}\left(5x\frac{1}{2}(3x^2 - 1) - 2x\right) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

Näide 5.37. Näitame, et $P_3(x)$ on Legendre'i võrrandi lahend $l = 3$ korral:

$$P_3'(x) = \frac{1}{2}(15x^2 - 3) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1),$$

$$P_3''(x) = \frac{1}{2}(30x) = 15x,$$

$$(1-x^2)15x - 2x\frac{3}{2}(5x^2-1) + 12\frac{1}{2}(5x^3-3x) =$$

$$= 15x - 15x^3 - 15x^3 + 3x + 30x^3 - 18x = 0.$$

Legendre'i polünoomid on intervallis $[-1, 1]$ ortogonaalsed:

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)\,dx = 0, \quad l \neq l'.$$

Näide 5.38. Näitame, et P_1 on ortogonaalne polünoomidega P_2 ja P_3. Leiame

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x)P_3(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(5x^3-3x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{5x^5}{5} - \frac{3x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\big(1 - 1 - (-1) + (-1)\big) = 0.$$

Hermite'i võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0,$$

kus n on reaalarv. Võrrandi üldlahend on mittenegatiivse täisarvu n korral kujul

$$y = a_0y_1 + a_1y_2,$$

kus $\boldsymbol{a_0}$ ja $\boldsymbol{a_1}$ on konstandid ja $\boldsymbol{y_1}$ sisaldab ainult paarisarvulisi muutuja x astmeid ja y_2 sisaldab ainult paarituarvulisi muutuja x astmeid. Kui n on paarisarv, siis $a_1 = 0$ ja kui n on paaritu, siis $a_0 = 0$. Selle võrrandi lahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Hermite'i polünoomideks

$$\boldsymbol{H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \ \dots,}$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \qquad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Kehtib rekursiivne seos

$$\boldsymbol{H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,}$$

kus andes ette $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, saab leida kõik kõrgemat järku polünoomid.

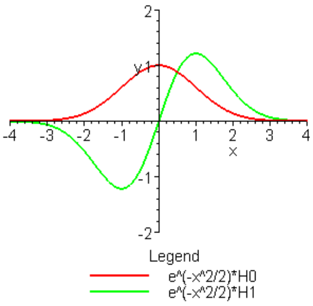
Hermite'i funktsioonid

$$y_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

on lahendiks diferentsiaalvõrrandile

$$y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0,$$

selle lahendamiseks sobib muutujavahetus



$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} v(x).$$

Hermite'i funktsioonid on ortogonaalsed reaalsirgel $(-\infty, \infty)$ kaaluge$^{-\frac{x^2}{2}}$a $e^{-\frac{x^2}{2}}$, s.t

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} H_m(x) H_n(x)\, dx = 0, \qquad \text{kui } m \neq n.$$

Nad esinevad kvantmehaanikas ja Schrödingeri võrrandiga seotud ülesannetes.

Laguerre'i võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

kus n on mittenegatiivne täisarv. Selle võrrandi lahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Laguerre'i polünoomideks:

$$\boldsymbol{L_n(x) = (-1)^n \left[x^n - \frac{n^2}{1!} x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} - \ \ldots + (-1)^n n! \right]},$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 2 - 4x + x^2, \quad L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3.$$

Kehtib järgmine rekursiivne seos

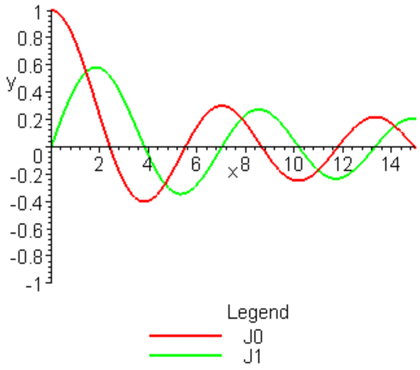
$$\boldsymbol{L_{n+1}(x) - (1 - 2n - x) L_n(x) + n^2 L_{n-1}(x) = 0},$$

millest saab leida kõrgemat järku polünoomid, andes ette $L_0(x) = 1$ ja $L_1(x) = 1 - x$.

Besseli võrrand on lineaarne võrrand kujul

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

kus n on reaalarv. Selle lahendeid kasutatakse membraanide vibratsioonide leidmisel ja ka Schrödingeri võrrandi lahendamisel ringis ning sfääril. Selle võrrandi lahenditeks on n astme polünoomid, mida nimetatakse Besseli funktsioonideks, neist esimest liiki on



$$\boldsymbol{J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}},$$

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ \ldots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1!\,2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \frac{1}{3!\,4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \ \ldots.$$

Protsessis $x \to \infty$ leiab aset

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

kus $\sim$ avaldiste vahel tähendab nende suhte koondumist arvuks 1. Samuti on esimest liiku Besseli funktsioonid

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

Kehtib ka rekursiivne seos

$$\boldsymbol{J_{n+1}(x) - \frac{2n}{x} J_n(x) + J_{n-1}(x) = 0}.$$

Sfäärilised Besseli funktsioonid järguga n on

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \qquad n \geq 0.$$

Sfäärilised Neumanni funktsioonid on

$$\eta_n(x) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-n-1/2}(x), \qquad n \geq 0.$$

5.6. KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.18.

Võrrandit

$$\boldsymbol{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0},$$

kus F on antud $n+2$ muutuja funktsioon, nimetatakse üldkujuliseks **n-järku harilikuks diferentsiaalvõrrandiks**.

Definitsioon 5.19.

Olgu funktsioon $F = F(x, y, y_1, \dots, y_n)$ määratud muutujate $x, y, y_1, \dots, y_n$ piirkonnas G. Vahemikus (a, b) **määratud** funktsiooni

$$\boldsymbol{y = y(x)}$$

nimetatakse võrrandi

$$\boldsymbol{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

lahendiks selles vahemikus, kui

1) funktsioon y on **n korda diferentseeruv** vahemikus (a, b),
2) iga $x \in (a, b)$ korral punkt koordinaatidega $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x))$ kuulub piirkonda G;
3) funktsiooni $y(x)$ asetamisel võrrandisse $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ otsitava y kohale saame **samasuse** $x \in (a, b)$ suhtes:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \text{ iga } x \in (a, b) \text{ korral.}$$

Öeldakse ka, et funktsioon $y = y(x)$ **rahuldab** võrrandit vahemikus (a, b).

Definitsioon 5.20.

Võrrandit kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})} \qquad (5.28)$$

nimetatakse **n-järku normaalkujuliseks** diferentsiaalvõrrandiks.

Võrrandi lahendi all mõistame siingi funktsiooni, mille asetamisel võrrandisse saame samasuse sõltumatu muutuja suhtes.

Definitsioon 5.21.

Võrrandi (5.28) **üldlahendiks** piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nimetatakse parameetritest $C_1, C_2, \dots, C_n$ sõltuvat funktsioonide peret (kogumit)

$$\boldsymbol{y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)},$$

kui

1) iga pere liige (parameetrite $C_1, C_2, \dots, C_n$ konkreetsete väärtuste andmisel saadav funktsioon) on võrrandi (5.28) lahend;
2) iga punkti $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ korral on olemas parameetrite $C_1, C_2, \dots, C_n$ sellised väärtused, et lahend $y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ rahuldab tingimusi

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (5.29)$$

Kui $n \geq 2$, siis võivad n-järku diferentsiaalvõrrandiga kaasneda ka tingimused, mis seovad otsitava funktsiooni $y = y(x)$ ja tema tuletiste väärtusi integreerimislõigu $[a, b]$ rajapunktides $x = a$ ja $x = b$. Niisuguseid tingimusi nimetatakse **rajatingimusteks**, diferentsiaalvõrrandit koos rajatingimustega aga **rajaülesandeks**.

Teoreem 5.6.
Cauchy teoreem. Olgu funktsioon

$$f = f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$$

pidev muutujate $x, y, y_1, \dots, y_{n-1}$ piirkonnas D ning olgu tal olemas piirkonnas D esimest järku pidevad osatuletised argumentide $y, y_1, \dots, y_{n-1}$ järgi. Siis iga punkti $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ korral on Cauchy ülesandel (5.28), (5.29) olemas **parajasti üks lahend $\boldsymbol{y = y(x)}$**.

Näide 5.39. Lahendame võrrandi

$$y^{(n)} = f(x).$$

Integreerides võrrandi mõlemat poolt, saame

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C_1,$$

kus x_0 on argumendi mingi fikseeritud väärtus ja C_1 on integreerimiskonstant. Integreerime veelkord

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] dx + C_1(x - x_0) + C_2.$$

Jätkates protsessi, saame

$$y = \int_{x_0}^{x} \dots \left[\int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] dx \dots dx + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n .$$

Kui on antud algtingimused

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

siis saame neid rahuldava lahendi, kui võtame

$$C_1 = y_{n-1}, \dots, C_n = y_0.$$

Näide 5.40. Lahendame võrrandi

$$y''' = e^{kx+1},$$

kus k on mingi nullist erinev reaalarv.

Integreerides võrrandi mõlemaid pooli muutuja x järgi, saame

$$y'' = \frac{1}{k} e^{kx+1} + C_0,$$

kus C_0 on suvaline konstant. Integreerides veel kaks korda, ja võttes $C_1 = C_0/2$, saame võrrandi lahenditeks

$$y = \frac{1}{k^3} e^{kx+1} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3,$$

kus C_1, C_2 ja C_3on suvalised konstandid.

5.6.1. DIFERENTSIAALVÕRRANDI JÄRGU ALANDAMINE

Diferentsiaalvõrrandis

$$\boldsymbol{F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0},$$

saab järku alandada muutujavahetusega

$$\boldsymbol{y^{(k)} = z},$$

lugedes z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$.
Uue otsitava funktsiooni suhtes on saadud diferentsiaalvõrrand $(n - k)$-järku kujul

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0.$$

Näide 5.41. Lahendame võrrandi

$$y^{(4)} = \sqrt{y'''}.$$

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y''' = z,$$

lugedes z muutuja x funktsiooniks $z = z(x)$. Siis saame diferentsiaalvõrrandi kujul

$$z' = \sqrt{z}$$

ehk esimest järku eralduvate muutujatega võrrandi. Lahendame selle võrrandi muutujate eraldamisega

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{z},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = dx,$$

$$2\sqrt{z} = x + C_1,$$

$$z = \frac{1}{4}(x + C_1)^2.$$

Muutujate eraldamisel jagades avaldisega $\sqrt{z}$ eeldame, et $\sqrt{z} \neq 0$, ehk $z \neq 0$. Võrrandi lahendiks on ka $z = 0$. Asendades tagasi z avaldise, saame võrrandi

$$y''' = \frac{1}{4}(x + C_1)^2,$$

mille lahendamiseks integreerime kolm korda järjest, tulemusena

$$y'' = \frac{1}{12}(x + C_1)^3 + C_2,$$

$$y' = \frac{1}{48}(x + C_1)^4 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{1}{240}(x + C_1)^5 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4,$$

(siingi läksime üle uuele konstandile C_2 võrreldes eelmise reaga).
Lahendades võrrandist $z = 0$ saadava võrrandi $y''' = 0$, saame lisaks lahendid kujul

$$y = C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Võrrandis

$$\boldsymbol{F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad n \geq 2,}$$

mis ei sisalda sõltumatut muutujat x, on lahendatav järgu alandamise teel muutujavahetusega

$$\boldsymbol{y' = z,}$$

kus $z = z(y)$ on muutuja y funktsioon, mitte argumendi x funktsioon.

Siis

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z'z,$$

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d(z'z)}{dx} = \frac{d(z'z)}{dy}\frac{dy}{dx} = z''z^2 + (z')^2z.$$

Järgnevate tuletistega säilib saadud seaduspärasus: iga järgmine y tuletis sisaldab uue muutuja z tuletisi, alates esimest järku tuletisest kuni ühe võrra väiksema järguni: $y^{(k)}$ sisaldab uue muutuja z tuletisi $z', z'', \ldots, z^{(k-1)}$, $2 \leq k \leq n$.

Näide 5.42. Lahendame võrrandi

$$y'^2 + yy'' = 0.$$

Alandame võrrandi järku asendusega

$$y' = z,$$

lugedes z muutuja y funktsiooniks $z = z(y)$. Siis

$$y'' = z'z$$

ja diferentsiaalvõrrand saab kuju

$$z^2 + yz'z = 0$$

ehk

$$\frac{dz}{dy}zy = -z^2,$$

$$\frac{z}{z^2}dz = -\frac{1}{y}dy.$$

Lahendades saadud esimest järku võrrandi, saame

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln C_1,$$

$$|z| = \frac{C_1}{|y|}.$$

See on küll samaväärne võrrandiga

$$\pm z = \frac{C_1}{y},$$

kuid C_1 suvalisuse tõttu võib sellest saada samaväärse võrrandi

$$z = \frac{C_1}{y}.$$

Asendades $z = y'$, saame esimest järku võrrandi

$$y' = \frac{C_1}{y}$$

ehk

$$ydy = C_1 dx,$$

mille lahenditeks on

$$y^2 = C_1 x + C_2.$$

5.6.2. KÕRGEMAT JÄRKU LINEAARSED DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Definitsioon 5.22.

Lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand üldkujul on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,} \tag{5.30}$$

kus $\boldsymbol{p_1, \dots, p_n}$ on antud funktsioonid.
Seda võrrandit nimetatakse **lineaarseks homogeenseks $\boldsymbol{n}$-järku diferentsiaalvõrrandiks**.

Definitsioon 5.23.
Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ vahemikus (a, b) määratud ja $n - 1$ korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Determinanti

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

nimetatakse funktsioonide $y_1, y_2, \dots, y_n$ **Wronski determinandiks** ehk wronskiaaniks (punktis x).

Wronski determinanti tähistatakse ka $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, kus on näidatud, millistest funktsioonidest on Wronski determinant võetud.

Teoreem 5.7. Olgu $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, \ \dots, n)$ vahemikus (a, b) $n - 1$ korda diferentseeruvad funktsioonid. Kui funktsioonid $y_1, \ \dots, y_n$ on **lineaarselt sõltuvad** vahemikus (a, b), siis nende funktsioonide **Wronski determinant $\boldsymbol{W(x)}$ on võrdne nulliga** iga $x \in (a, b)$ korral.

Vastupidine väide üldiselt ei kehti: Wronski determinant võib võrduda nulliga, kuid funktsioonid võivad olla lineaarselt sõltumatud antud piirkonnas.

Näide 5.43. Funktsioonid

$$y_1(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

ja

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^3, & x \geq 0, \end{cases}$$

on lineaarselt sõltumatud vahemikus $(-\infty, \infty)$, kuid nende funktsioonide Wronski determinant $W(x)$ on võrdne nulliga iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral. Kui arvutame funktsioonidest Wronski determinandi, saame $x < 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^3 & 0 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ja $x \geq 0$ korral

$$W(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 0 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Samas tingimusest

$$0 = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = \begin{cases} k_1 x^3, x < 0, \\ k_2 x^3, x \geq 0, \end{cases}$$

järeldub, et $k_1 = k_2 = 0$ ehk funktsioonid y_1 ja y_2 on lineaarselt sõltumatud.

Teoreem 5.8.
Kui lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (5.30) lahendid $y_1, \dots, y_n$ on vahemikus (a, b) **lineaarselt sõltumatud**, siis nende funktsioonide **Wronski determinant** $\boldsymbol{W(x)}$ **on nullist erinev** iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 5.24.
Öeldakse, et n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5.30) mis tahes n lineaarselt sõltumatut lahendit moodustavad selle võrrandi **lahendite fundamentaalsüsteemi**.

Teoreem 5.9.

Olgu $\boldsymbol{y_1, \dots, y_n}$ võrrandi (5.30) lahendite fundamentaalsüsteem. Siis võrrandi (5.30) **üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x).} \tag{5.31}$$

Üldlahendiga on määratud võrrandi (5.30) kõik lahendid, s.t võrrandi (5.30) mistahes lahendi saame üldlahendist konstantide $C_1, \dots, C_n$ sobiva fikseerimise teel.

Lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine.
Lineaarse homogeense võrrandi saab lahendada nii, et leiame kõigepealt selle võrrandi n lineaarselt sõltumatut lahendit ja kirjutame vastuse kujul (5.31). Samas, fundamentaalsüsteemi leidmiseks üldine meetod puudub. Sellepärast kasutatakse võrrandi lahendamiseks sageli üldist **järgu alandamise võtet**.
Kui teame võrrandi mingit lahendit $y_1 \neq 0$, siis võime võrrandi järku alandada võrrandi lineaarsust säilitades. Seda saame teha kahe asendusega: esiteks asendame võrrandis (5.30)

$$\boldsymbol{y = y_1 z,}$$

ning siis alandame võrrandi järku asendusega

$$\boldsymbol{z' = u}, \quad z = z(x), u = u(x).$$

Liouville–Ostrogradski valem.

Oletame, et vahemikus (a, b) määratud funktsioonid $y_1, \dots, y_n$ moodustavad võrrandi (5.30) lahendite fundamentaalsüsteemi. Siis funktsioonide $y_1, \dots, y_n(x)$ Wronski determinant $W(x)$ on vahemikus (a, b) nullist erinev iga $x \in (a, b)$ korral. Osutub, et W rahuldab võrrandit

$$W' + p_1(x) W = 0.$$

Selle lahendina saame Wronski determinandi W jaoks avaldise, mida nimetatakse **Liouville–Ostrogradski valemiks** (mõnikord ka Abeli valemiks)

$$\boldsymbol{W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}}.$$

Kordaja C sõltub sellest, millist algfunktsiooni eksponendi astmes silmas peetakse, kuid lahendite fundamentaalsüsteemi korral $C \neq 0$.
Kuigi võrrandi (5.30) lahendite fundamentaalsüsteem $y_1, \dots, y_n$ sõltub selle võrrandi kõigist kordajatest $p_1, \dots, p_n$, sõltub lahendite Wronski determinant W ainult kordajast p_1.

Lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$\boldsymbol{y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x).}$$

kus $\boldsymbol{p_1, \dots, p_n, f}$ on antud funktsioonid.
Seda võrrandit nimetatakse **lineaarseks $\boldsymbol{n}$-järku diferentsiaalvõrrandiks**.

Kui on teada lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

jaoks n lineaarselt sõltumatut lahendit, siis on selle üldlahendiks

$$y_h = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x),$$

ja kui on veel teada mittehomogeense võrrandi **üks lahend $\boldsymbol{y_*}$**, siis **mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend** avaldub kujul

$$\boldsymbol{y = C_1y_1(x) + \dots + C_ny_n(x) + y_*(x).} \tag{5.32}$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi mistahes lahend on saadav üldlahendist (5.32) konstantide $C_1, \dots, C_n$ väärtuste fikseerimisel.

Lahendi $\boldsymbol{y_*}$ leidmine konstantide varieerimise meetodiga.

Lahendit y_* otsitakse järgmisel kujul

$$y_*(x) = C_1(x)y_1(x) + \dots + C_n(x)y_n(x),$$

kus homogeense võrrandi üldlahendis (5.31) asendame suvalised konstandid $C_1, \dots, C_n$ funktsioonidega $C_1(x), \dots, C_n(x)$. Funktsioonid $C_1(x), \dots, C_n(x)$ määratakse nii, et y_* rahuldaks mittehomogeenset võrrandit. See on ainult üks tingimus n funktsiooni määramiseks. Puuduvad tingimused võime vabalt ette anda, need anname ette nii, et lahendi y_* tuletised kuni järguni $n-1$ oleksid võimalikult lihtsa kujuga.
Diferentseerides y_* avaldist, saame

$$y_*' = C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) + C_1(x)y_1'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x).$$

Esimese vabalt valitud tingimusena nõuame, et viimase avaldise paremal poolel olev esimene summa oleks võrdne nulliga:

$$C_1'(x)y_1(x) + \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0.$$

Siis

$$y_*' = C_1(x)y_1'(x) + \dots + C_n(x)y_n'(x),$$

mille diferentseerimisel saame

$$y_*'' = C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) + C_1(x)y_1''(x) + \dots + C_n(x)y_n''(x).$$

Teise tingimusena nõuame, et

$$C_1'(x)y_1'(x) + \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0.$$

Siis

$$y_*'' = C_1(x)y_1''(x) + \ \dots + C_n(x)y_n''(x).$$

Sarnaselt diferentseerime edasi ja nõuame uute lisatingimuste täidetust, kuni saame

$$y_*^{(n)} = C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) + C_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ \dots + C_n(x)y_n^{(n)}(x).$$

Nüüd kasutame tingimust, et y_* peab rahuldama mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit. Selleks asendame y_* esialgsesse diferentsiaalvõrrandisse, kust saame

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n)}(x) + p_1(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ \dots$$

$$\dots + p_n(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_k(x) = f(x).$$

Kirjutame võrduse ümber kujul

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\left(y_k^{(n)}(x) + p_1(x)y_k^{(n-1)}(x) + \ \dots + p_n(x)y_k(x)\right) = f(x).$$

Kuna y_k on võrrandi lahendid ($k = 1, \dots, n$), siis sulgudes olevad avaldised võrduvad nulliga. Järelikult on y_* võrrandi lahendiks, kui kehtib võrdus

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).$$

Võttes kokku kõik lisatud tingimused ja viimase võrduse, saame funktsioonide $C_1, \dots, C_n(x)$ leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} \boldsymbol{C_1'(x)y_1(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n(x) = 0,} \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1'(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n'(x) = 0,} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ \dots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x).} \end{cases} \tag{5.33}$$

See on tundmatute

$$C_1'(x), \dots, C_n'(x)$$

suhtes lineaarne mittehomogeenne võrrandisüsteem n võrrandi ja n tundmatuga. Süsteem on üheselt lahenduv, sest selle determinant on lahendite fundamentaalsüsteemi Wronski determinant, seega nullist erinev. Süsteemi lahendamisel leiame kõigepealt tuletised

$$C_1'(x) = g_1(x), \dots, C_n'(x) = g_n(x)$$

ja siis funktsioonid saame integreerimisel

$$C_i(x) = \int g_i(x)\,dx, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Siingi piisab meile iga i korral ainult ühest algfunktsioonist.

Lineaarse konstantsete kordajatega n-järku diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ \dots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),} \tag{5.34}$$

kus $\boldsymbol{a_1, \dots, a_n}$ on konstandid, f antud vabaliige ja $y = y(x)$ otsitav funktsioon. Võrrand on erijuht võrrandist (5.30).

Võrrandi lahendamiseks lahendatakse kõigepealt **vastav homogeenne võrrand**

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \tag{5.35}$$

milleks lahendatakse karakteristlik võrrand

$$\boldsymbol{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0} \tag{.536}$$

ja selle lahenditena leitakse karakteristlikud väärtused $k_1, \ldots, k_n$.

Definitsioon 5.25.
Võrrandit (5.36)

$$\boldsymbol{k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0}$$

nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (5.35) **karakteristlikuks võrrandiks**, võrrandi (5.36) lahendeid nimetatakse **karakteristlikeks väärtusteks**. Võrrandi (5.36) vasakul poolel olevat polünoomi

$$\boldsymbol{P(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n}$$

nimetatakse võrrandi (5.35) **karakteristlikuks polünoomiks.**

Karakteristlike väärtuste iseloomule vastavalt (reaalsed või imaginaarsed, kordsed) kirjutame välja võrrandi lineaarselt sõltumatud lahendid $y_1, \ldots, y_n$. Nende lineaarse kombinatsioonina saadakse võrrandi üldlahend.

a) igale **reaalsele ühekordsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab diferentsiaalvõrrandi lahend

$$\boldsymbol{y_i = e^{k_i x},}$$

b) igale **m-kordsele reaalsele** karakteristlikule väärtusele k_i vastab m lahendit

$$\boldsymbol{e^{k_1 x}, x e^{k_1 x}, x^2 e^{k_1 x}, \ldots, x^{m-1} e^{k_1 x}},$$

c) igale imaginaarsarvuliste karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab kaks reaalset lahendit

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x,}$$

d) igale **m-kordsele imaginaararvuliste** karakteristlike väärtuste paarile $k_{j,l} = \alpha \pm i\beta$ vastab $2m$ reaalset lahendit

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,}$$

$$\boldsymbol{e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.}$$

Teoreem 5.10.
Kui funktsioon $y = u + iv$ on lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi kompleksseks lahendiks, siis selle reaalosa u ja imaginaarosa kordaja v on võrrandi reaalseteks lahenditeks.

Teoreem 5.11.
Kui konstantsete kordajatega lineaarse homogeense n-järku diferentsiaalvõrrandi (5.35) karakteristlikud väärtused $k_1, \ldots, k_n$ on paarikaupa erinevad, siis funktsioonid $y_i = e^{k_i x}$ moodustavad diferentsiaalvõrrandi (5.35) lahendite fundamentaalsüsteemi ja seega tema üldlahendiks on

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_n e^{k_n x},}$$

kus $-\infty < x < \infty$ ja $C_1, \ldots, C_n$ on suvalised konstandid.

Teoreem kehtib ka kompleksarvuliste karakteristlike väärtuste korral

$$k_j = \alpha + i\beta, k_l = \alpha - i\beta,$$

kuid sellisel juhul vastab kompleksetele lahenditele kaks reaalset lahendit, milleks on komplekse lahendi reaalosa ja imaginaarosa kordaja. Näiteks kui

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

ja

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x,$$

siis sellest, et y_1 on võrrandi kompleksseks lahendiks, järeldub teoreemist 5.10, et ka lahendi reaalosa $\mathrm{Re}(y_1) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja imaginaarosa kordaja $\mathrm{Im}(y_1) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ on selle võrrandi lahenditeks. Seega kompleksetele lahenditele y_1 ja y_2 vastab kaks reaalset lahendit

$$\tilde{y}_1 = \mathrm{Re}(y_1) = e^{\alpha x}\cos\beta x\,, \qquad \tilde{y}_2 = \mathrm{Im}(y_1) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Näide 5.44. Leiame üldlahendi võrrandile

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^3 - 2k^2 - 3k = 0, \qquad k(k^2 - 2k - 3) = 0,$$

karakteristlikud väärtused on

$$k_1 = 0, k_2 = -1, k_3 = 3.$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendid on

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{3x}$$

ja üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

Näide 5.45. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^3 - k^2 - k + 1 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = -1, k_2 = k_3 = 1.$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendid on

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x, y_3 = xe^x$$

ja üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$$

Näide 5.46. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(7)} - 2y^{(6)} + 2y^{(5)} - 4y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0.$$

Vastav karakteristlik võrrand on

$$k^7 - 2k^6 + 2k^5 - 4k^4 + k^3 - 2k^2 = k^2(k-2)(k^2+1)^2 = 0$$

ja selle lahendid on

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = 2, k_4 = k_5 = i, k_6 = k_7 = -i.$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendid on

$$y_1 = 1, \qquad y_2 = x, \qquad y_3 = e^{2x}, \qquad y_4 = \cos x,$$

$$y_5 = x\cos x, \qquad y_6 = \sin x, \qquad y_7 = x\sin x.$$

ja üldlahendiks on

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x} + (C_4 + C_5x)\cos x + (C_6 + C_7x)\sin x.$$

Mittehomogeense võrrandi üldlahend avaldub vastava homogeense võrrandi üldlahendi ja mittehomogeense võrrandi ühe lahendi summana

$$\boldsymbol{y = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n + y_*.}$$

Näide 5.47. Leiame ühe lahendi võrrandile

$$y''' - y'' = e^x.$$

Kuna karakteristliku võrrandi

$$k^3 - k^2 = 0$$

lahendid on $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 0$, siis vastava homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y_h = C_1 + C_2x + C_3e^x.$$

Seega üks karakteristliku võrrandi lahenditest $k_1 = 1$ on võrdne arvu e^x astmes oleva argumendi x kordajaga. Seetõttu otsime lahendit kujul

$$y_* = Axe^x.$$

Siis

$$y_*' = Ae^x + Axe^x,$$

$$y_*'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x,$$

$$y_*''' = 2Ae^x + Ae^x + Axe^x = 3Ae^x + Axe^x.$$

Tundmatu kordaja A määramiseks asetame võrrandisse otsitava y tuletiste asemele vastavad y_* tuletiste avaldised. Saame

$$3Ae^x + Axe^x - 2Ae^x - Axe^x = e^x$$

ehk

$$Ae^x = e^x.$$

Siit saame, et $A = 1$ ja otsitavaks lahendiks on

$$y_* = xe^x.$$

5.7. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMID

Paljude ülesannete lahendamisel tuleb leida funktsioonid

$$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

mis rahuldavad diferentsiaalvõrrandite süsteemi argumendi x, otsitavate funktsioonide y_1, $\dots, y_n$ ning nende tuletiste suhtes. Harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkujus võib olla otsitavate funktsioonide kõrgemat järku tuletisi. Kõrgemat järku tuletised on võimalik asendada uute otsitavate funktsioonidega ja saada seeläbi süsteemid, kus esinevad ainult esimest järku tuletised otsitavatest funktsioonidest.

Definitsioon 5.26.

Normaalkujuliseks süsteemiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi, kus võrrandite vasakuteks poolteks on otsitavate funktsioonide esimest järku tuletised, paremad pooled aga tuletisi ei sisalda:

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{y_1}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f_1(x, y_1, \dots, y_n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dfrac{d\boldsymbol{y_n}}{d\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f_n(x, y_1, \dots, y_n)}, \end{cases} \tag{5.37}$$

kus $f_k(x, y_1, \dots, y_n)$ on antud funktsioonid ja $y_k = y_k(x)$ on otsitavad funktsioonid, $k = 1, \dots, n$. Arvu $\boldsymbol{n}$ nimetatakse süsteemi **järguks**.

Näide 5.48. Leiame järgmise süsteemi normaalkuju

$$\begin{cases} y' - 2zz' = 0, \\ \sin x + y'' - z^2 = 0. \end{cases}$$

Avaldades esimesest võrrandist z' ja teisest y'', saame süsteemi kujul

$$\begin{cases} z' = \dfrac{y'}{2z}, \\ y'' = z^2 - \sin x\,. \end{cases}$$

Võtame kasutusele uue funktsiooni

$$w = y',$$

millega saame süsteemi asendada kolmandat järku normaalkujulise süsteemiga otsitavate y, z ja w suhtes:

$$\begin{cases} y' = w, \\ z' = \dfrac{w}{2z}, \\ w' = z^2 - \sin x\,. \end{cases}$$

Definitsioon 5.27.

Normaalkujulise süsteemi (5.37) **lahendiks vahemikus** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ nimetatakse kogumit diferentseeruvatest funktsioonidest $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$, mis rahuldavad süsteemi (5.37) igat võrrandit iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 5.28.
Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (5.37) **Cauchy ülesanne** seisneb järgnevas: leida süsteemi lahendite hulgast niisugune

$$\boldsymbol{y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)},$$

mis rahuldab antud $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$ korral tingimusi

$$y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0.$$

Definitsioon 5.29.
Normaalkujulise süsteemi (5.37) **üldlahendiks** piirkonnas $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nimetatakse n parameetrist $C_1, \dots, C_n$ sõltuvat funktsioonide peret (kogumit)

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1 = y_1(x, C_1, \dots, C_n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{y_n = y_n(x, C_1, \dots, C_n)}, \end{cases} \tag{5.38}$$

millel on järgmised omadused:

1) iga $C_1, \dots, C_n$ valiku korral saadakse süsteemi (5.37) lahend;
2) iga punkti $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \in D$ korral leidub selline parameetrite $C_1, \dots, C_n$ valik, et

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_1(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_1^0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \boldsymbol{y_n(x_0, C_1, \dots, C_n) = y_n^0}. \end{cases}$$

Üldlahendist (5.38) parameetrite $C_1, \dots, C_n$ väärtuste fikseerimisel saadavaid lahendeid nimetatakse süsteemi (5.37) erilahenditeks.

Näide 5.49. Näitame, et järgmise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y \end{cases}$$

lahendiks on

$$\begin{cases} y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}, \\ z = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}, \end{cases}$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

Leiame esitatud funktsioonidest tuletised ja näitame, et need on võrdsed võrrandite paremate pooltega, kuhu on asetatud vaadeldavad funktsioonid

$$y' = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$y - z = -C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{3x},$$

$$z' = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x},$$

$$z - 4y = -2C_1 e^{-x} - 6C_2 e^{3x}.$$

Järelikult funktsioonid y ja z on tõepoolest süsteemi lahendid konstantide C_1 ja C_2 mistahes väärtuste korral.

Mõnikord ei sõltu süsteemis olevad võrrandid teistest otsitavatest funktsioonidest. Siis on võimalik lahendada võrrandid eraldi diferentsiaalvõrranditena. Järgnevas näites koosneb süsteem kahest teineteisest sõltumatust diferentsiaalvõrrandist ja süsteemi lahendamine taandub kahe eraldi võrrandi lahendamisele.

Näide 5.50. Leiame järgmise normaalkujulise süsteemi lahendi

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}, \end{cases}$$

algtingimustel

$$y(1) = 2 \text{ ja } z(1) = 3.$$

Tegemist on süsteemiga, mille mõlemad võrrandid on eraldi lahendatavad, nad ei sõltu teisest otsitavast. Lahendame nendest võrranditest esimese. Muutujate eraldamine annab

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integreerides saame

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

$$y = C_1 x, \qquad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Süsteemi teine võrrand on sisuliselt sama, mis esimenegi, ainult otsitav funktsioon on teine. Seepärast on selle lahendid

$$z = C_2 x, \qquad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lisame, et lahendite pere

$$\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

annab algse süsteemi kaks üldlahendit vastavalt piirkondades $(-\infty, 0) \times \mathbb{R}^2$ ja $(0, \infty) \times \mathbb{R}^2$, sest algses süsteemis ei ole argumendi väärtus $x = 0$ lubatud. Otsitava lahendi saame konstantide C_1 ja C_2 määramisel algtingimustest, need tulevad

$$C_1 = 2, C_2 = 3$$

ja lahendiks on

$$y = 2x, z = 3x,$$

mis on tegelikult teisest üldlahendist saadud erilahend määratuna $x > 0$ korral.

5.7.1. ÜHELE VÕRRANDILE TAANDAMISE MEETOD

Diferentsiaalvõrrandite süsteemide üks võimalikke lahendusmeetodeid seisneb nende taandamises ühele kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandile. Lahendades selle võrrandi, leiame ühe otsitavatest funktsioonidest. Ülejäänud otsitavad funktsioonid leiame lähtesüsteemi võrrandite ja süsteemi teisendamise käigus saadud seoste abil. Kuna diferentsiaalvõrrandite süsteemi ühele kõrgemat järku võrrandile taandamisel on põhilisteks operatsioonideks võrrandite diferentseerimine ja muutujate elimineerimine, nimetatakse ühele muutujale taandamise meetodit tihti ka **elimineerimismeetodiks**.

Näide 5.51. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendame diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$y' = z, \qquad z' = y,$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerides esimest võrrandit, saame

$$y'' = z'$$

ja asendades z' teise võrrandisse, saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$y'' = y.$$

Selle lahenditeks saame

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Esimesest võrrandist saame seejärel otsitava funktsiooni z:

$$z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}.$$

Näide 5.52. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y - 2zz' = 0, \\ \sin x + y'' - z^2 = 0, \end{cases}$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Diferentseerides teist võrrandit, saame

$$\cos x + y''' - 2zz' = 0.$$

Elimineerime korrutise $2zz'$, kasutades selleks süsteemi esimest võrrandit. Sellega saame kolmandat järku konstantsete kordajatega lineaarse võrrandi

$$y''' - y = -\cos x,$$

mille üldlahend avaldub kujul

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + y_*,$$

kus y_* on selle võrrandi üks lahend ja y_1, y_2, y_3 on vastava homogeense võrrandi lineaarselt sõltumatud lahendid. Vastava homogeense võrrandi

$$y''' - y \ = 0$$

karakteristlik võrrand on

$$k^3 - 1 = 0,$$

selle lahenditeks on

$$k_1 = 1, k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

seega homogeense võrrandi üldlahendiks on

$$y_h = C_1 e^{x} + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Mittehomogeense võrrandi lahendit otsime lähtudes vabaliikmest $-\cos x$, ehk siis kujul

$$y_* = A \cos x + B \sin x.$$

Siis

$$y_*' = -A \sin x + B \cos x,$$

$$y_*'' = -A\cos x - B\sin x\,, \qquad y_*''' = A\sin x - B\cos x.$$

Asendus võrrandisse annab

$$A\sin x - B\cos x - A\cos x - \ B\sin x = -\cos x.$$

Konstantide A ja B määramiseks peavad $\cos x$ ja $\sin x$ kordajad mõlemal pool võrdusmärki olema võrdsed, siit saame kaks võrrandit:

$$-B - A = -1, \qquad A - B = 0,$$

millest

$$A = B = \frac{1}{2}.$$

Oleme leidnud mittehomogeense võrrandi lahendi

$$y_* = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

ja üldlahend

$$y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

Nüüd on vaja leida teine otsitav funktsioon z. Selleks kasutame teist võrrandit, millesse asetame funktsiooni y teise tuletise. Tulemusena

$$z^2 = C_1 e^x - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}C_2 e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}C_3 e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$
$$-\frac{1}{2}C_3 e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x.$$

Selle võrdusega on ilmutamata kujul määratud otsitav funktsioon z.

Näide 5.53. Kasutades elimineerimismeetodit, lahendame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} y' = 2 - z, \\ z' = y - 4\cos x\,, \end{cases}$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.

Avaldame esimesest võrrandist otsitava z ja diferentseerime saadud võrdust:

$$z = 2 - y', \ \ z' = -y''.$$

Asendades saadud z' avaldise teise võrrandisse, saame

$$-y'' = y - 4\cos x$$

ehk

$$y'' + y = 4\cos x. \tag{5.39}$$

Saime teist järku konstantsete kordajatega lineaarse diferentsiaalvõrrandi. Kõigepealt lahendame võrrandile vastava homogeense võrrandi

$$y'' + y = 0.$$

Lahendamiseks moodustame vastava karakteristliku võrrandi

$$k^2 + 1 = 0,$$

mille lahenditeks on

$$k_1 = i, k_2 = -i.$$

Seega avaldub homogeense võrrandi üldlahend kujul

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Mittehomogeense võrrandi lahendi leidmisel peame arvestama, et võrrandi paremas pooles $4\cos x$ on koosinuse argumendi x kordaja 1, mis ühtib karakteristliku väärtuse imaginaarosaga, siis on tegemist **erijuhuga**, mille korral otsime lahendit kujul

$$y_* = x(A\cos x + B\sin x).$$

Siis

$$y_*' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$

$$y_*'' = -2A\sin x\, A + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x).$$

Asendades suurused y_*, y_*'' mittehomogeensesse võrrandisse (5.39), saame

$$-2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = 4\cos x.$$

Nüüd taanduvad välja liikmed, mis sisaldavad $xA\cos x, xB\sin x$ (nii juhtub alati) ja on võimalik leida kordajate A, B väärtused, võrdsustades vasakul ja paremal pool võrdusmärki $\cos x$ ja $\sin x$ kordajad:

$$-2A = 0, \quad 2B = 4.$$

Sellest

$$A = 0, B = 2.$$

Seega on otsitav erilahend

$$y_* = 2x\sin x$$

ja võrrandi üldlahend

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x.$$

Kuna meil on tegemist süsteemiga, milles on vaja leida ka otsitav funktsioon $z = z(x)$, kasutame selleks eespool esimesest võrrandist saadud võrdust

$$z = 2 - y'.$$

Sellesse asendame

$$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2\sin x + 2x\cos x,$$

millest saame

$$z = 2 - C_1\sin x + C_2\cos x - 2\sin x - 2x\cos x.$$

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahenditeks on seega

$$\begin{cases} y = C_1\cos x + C_2\,\mathrm{csinos}\, x + 2x\sin x, \\ z = 2 + C_1\sin x - C_2\cos x - 2\sin x - 2x\cos x. \end{cases}$$

5.7.2. INTEGREERUVATE KOMBINATSIOONIDE MEETOD

Teiseks meetodiks, mida sageli kasutatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamisel, on **integreeruvate kombinatsioonide meetod** ehk **kombineerimismeetod**. See meetod seisneb süsteemi võrrandite teisendamisel kujule, millest saab integreerimisega leida võrduseid $\varphi(x, y_1, .., y_n) = C$. Süsteemi võrrandite teisendamisel võrrandid sageli liidetakse omavahel või lahutatakse ühest võrrandist mõni teine. Nendele võtetele võib lisaks kasutada ka võrrandite korrutamist sobivate funktsioonidega enne liitmist või lahutamist, et oleks võimalik saadud võrrandite kombinatsiooni integreerida.

Näide 5.54. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases}$$

kus $y = y(x)$ ja $z = z(x)$ on otsitavad funktsioonid.
Tegemist on ülesandes 5.50 oleva süsteemiga, mille lahendasime elimineerimismeetodil. Lahendame sama ülesande nüüd teisel meetodil. Liites antud võrrandite vasakud ja paremad pooled, saame

$$y' + z' = z + y$$

ehk

$$\frac{d(y+z)}{dx} = y + z.$$

See ongi üheks integreeruvaks kombinatsiooniks, mille lahendamiseks teeme asenduse $u = y + z$ ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = u,$$

mille lahenditeks on

$$u = C_1 e^x.$$

Asendades u avaldise tagasi, saame

$$y + z = C_1 e^x.$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks lahutame süsteemi esimesest võrrandist teise. Tulemusena

$$y' - z' = z - y$$

ehk

$$\frac{d(y-z)}{dx} = -(y - z).$$

Saime teise integreeruva kombinatsiooni, mille lahendamiseks teeme asenduse

$$u = y - z$$

ja saame diferentsiaalvõrrandi

$$u' = -u,$$

mille lahenditeks on

$$u = C_2 e^{-x}.$$

Asendades u avaldise tagasi, saame

$$y - z = C_2 e^{-x}.$$

Saadud kahest võrdusest

$$y + z = C_1 e^x, \qquad y - z = C_2 e^{-x} \tag{5.40}$$

saame nende liitmisel ja lahutamisel avaldada

$$\begin{cases} y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - C_2 e^{-x}, \end{cases}$$

kus kordajatel C_1, C_2 on teine tähendus kui võrdustes (5.40), kuid mõlemal juhul on neil kõikvõimalikud reaalarvulised väärtused. Saadud lahend ühtib ülesande 5.51 lahendamisel saaduga. Muidugi võib võrdusest (5.40) kirjutada ka

$$e^{-x}(y+z)=C_1, e^{x}(y-z)=C_2,$$

esitades y ja z ilmutamata kujul.

Näide 5.55. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendame järgmine diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{x-y}{z-t}, \\ \dfrac{dz}{dt}=x-y+1, \end{cases}$$

kus $x=x(t), y=y(t)$ ja $z=z(t)$ on otsitavad funktsioonid.

Lahutades süsteemi esimesest võrrandist teise, saame

$$\frac{d(x-y)}{dt}=0,$$

millest integreerimisel

$$x-y=C_1.$$

Asendades saadud avaldise süsteemi teise ja kolmandasse võrrandisse, saame teist järku süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{C_1}{z-t}, \\ \dfrac{dz}{dt}=C_1+1. \end{cases}$$

Selle süsteemi teisest võrrandist saame integreerides

$$z=(C_1+1)t+C_2.$$

Asendades saadud avaldise uue süsteemi esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{dy}{dt}=\frac{C_1}{(C_1+1)t+C_2-t}=\frac{C_1}{C_1t+C_2}.$$

Saadud võrrandi integreerimisel saame

$$y=\ln|C_1t+C_2|+C_3.$$

Süsteemi lahenditeks on

$$\begin{cases} x=C_1+\ln|C_1t+C_2|+C_3, \\ y=\ln|C_1t+C_2|+C_3, \\ z=(C_1+1)t+C_2. \end{cases}$$

5.7.3. SÜMMEETRILISTE SÜSTEEMIDE LAHENDAMINE KOMBINEERIMISMEETODIL

Sümmeetriliseks $(n-1)$-järku süsteemiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1,\dots,x_n)}, \tag{5.41}$$

kus $a_1,\dots,a_n$ on antud funktsioonid. Juhul $n=2$ on tegemist ühe võrrandiga ja see on meile tuttav võrrand

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.42}$$

kus kujus (5.41)

$$a_1(x,y) = M(x,y), a_2(x,y) = -N(x,y).$$

Sisuliselt koosneb süsteem (5.41) $(n-1)$-st (5.42) tüüpi võrrandist, mis on kirjutatud üheskoos kompaktsemal kujul. Normaalkujul oleva süsteemi (5.37) saab kirjutada **sümmeetrilisel** kujul

$$\frac{dy_1}{f_1(x,y_1,\dots,y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x,y_1,\dots,y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x,y_1,\dots,y_n)} = \frac{dx}{1}, \tag{5.43}$$

pidades silmas kirjutisi

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x,y_1,\dots,y_n), i = 1,\dots,n\,.$$

Sümmeetrilises süsteemis tähendab murrus nimetaja võrdumine nulliga ka vastava lugeja võrdumist nulliga.
Sümmeetrilise süsteemi (5.41) lahend on süsteemi rahuldavate diferentseeruvate funktsioonide komplekt $x_i = x_i(x_k), i = 1,\dots,n, i \neq k,$ kus argumendiks x_k võib olla ükskõik milline muutujatest $x_1,\dots,x_n$.
Sümmeetrilisel kujul olevate süsteemide puhul tuleb jagamistehete tõttu täielikul analüüsil pöörata erilist tähelepanu olukorrale, kus esineb $a_i(x_1,\dots,x_n) = 0$ ühe või mitme indeksi i korral. Selle olulisust nägime kasvõi eralduvate muutujatega võrrandite puhul. Praeguses käsitluses pöörame peatähelepanu kombineerimismeetoditele, mis võimaldab leida lahendeid kirjeldavaid võrrandeid (võimalik, et ilmutamata kujul, nagu nägime kombineerimismeetodis normaalkujuliste süsteemide juures). Need saadakse integreeruvate kombinatsioonide integreerimisel.
Sümmeetrilise süsteemi lahendamiseks integreeruvate kombinatsioonide meetodil on võimalik kasutada **võrdsete murdude omadust**, mille kohaselt mistahes kordajate $k_1,\dots,k_n$ $(|k_1| + \dots + |k_n| \neq 0)$ korral kehtib

$$\frac{p_1}{q_1} = \dots = \frac{p_n}{q_n} = \frac{k_1p_1 + \dots + k_np_n}{k_1q_1 + \dots + k_nq_n}.$$

Selle omaduse tõttu võime korrutada iga murru lugejat ja nimetajat vastava kordajaga ning kui saadud nimetajate summa võrdub nulliga, saame lugejate summaks integreeruva kombinatsiooni.

Näide 5.56. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendame järgmise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-\ln x} = \frac{dz}{\ln x - 2y}.$$

Esimene võrdus annab

$$-\ln x\, dx = 2ydy,$$

mille integreerimisel saame

$$-x\ln x - x = y^2 + C_1$$

ehk

$$y^2 + x(\ln x - 1) = C_1.$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks liidame esialgse süsteemi kõikide murdude lugejad ja kõikide murdude nimetajad:

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-\ln x} = \frac{dz}{\ln x - 2y} = \frac{d(x+y+z)}{2y - \ln x + \ln x - 2y} = \frac{d(x+y+z)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, siis

$$d(x+y+z) = 0,$$

millest

$$x + y + z = C_2.$$

Süsteemi lahendid ilmutamata kujul määratakse võrranditega

$$y^2 + x(\ln x - 1) = C_1,$$

$$x + y + z = C_2.$$

Näide 5.57. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendame järgmise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Teine võrdus annab

$$ydy = zdz,$$

mille integreerimisel saame

$$\frac{y^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C_1,$$

siit

$$y^2 - z^2 = C_1.$$

Teise integreeruva kombinatsiooni saamiseks lahutame teise ja kolmanda murru lugejad ja nimetajad ja võrdsustame esimese murruga:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{d(y-z)}{z-y},$$

millest

$$\frac{dx}{z-y} = -d(z-y)$$

ehk

$$dx + (z-y)d(z-y) = 0.$$

Selle integreerimisel saame

$$x + \frac{(z-y)^2}{2} = C_2.$$

ehk

$$2x + (z-y)^2 = C_2.$$

Süsteemi lahendid määratakse võrdustega

$$y^2 - z^2 = C_1,$$

$$2x + (z - y)^2 = C_2.$$

Näide 5.58. Kasutades integreeruvate kombinatsioonide meetodit, lahendame järgmise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x}.$$

Korrutame esimest murdu (lugejat ja nimetajat) arvuga 3, teist arvuga 4 ja kolmandat arvuga 5 ning liites kõik saadud lugejad ja nimetajad kokku, saame

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x} = \frac{3dx + 4dy + 5dz}{12z - 15y + 20x - 12z + 15y - 20x} =$$

$$= \frac{d(3x + 4y + 5z)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(3x + 4y + 5z) = 0,$$

millest

$$3x + 4y + 5z = C_1.$$

Korrutame esimest murdu (lugejat ja nimetajat) avaldisega $2x$, teist murdu avaldisega $2y$ ja kolmandat avaldisega $2z$ ning liites kõik saadud lugejad ja nimetajad kokku, saame

$$\frac{dx}{4z - 5y} = \frac{dy}{5x - 3z} = \frac{dz}{3y - 4x} = \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{8xz - 10xy + 10xy - 6yz + 6yz - 8zx} =$$

$$= \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{0}.$$

Et nimetaja võrdumine nulliga sümmeetrilises süsteemis tähendab lugeja võrdumist nulliga, saame

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

millest

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Süsteemi lahendid määratakse võrranditega

$$3x + 4y + 5z = C_1,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

VI PTK
OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

6.1. OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDI MÕISTE

Definitsioon 6.1.

Võrrandit, mis seob otsitavat mitme muutuja funktsiooni tema osatuletistega ja sõltumatute muutujatega, nimetatakse **osatuletistega diferentsiaalvõrrandiks**.

Üldkuju kahe sõltumatu muutuja korral.

Kahe sõltumatu muutuja x ja y korral on esimest järku **osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks**

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

kus $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon.

Funktsioon F esitab seose sõltumatute muutujate x ja y ning funktsioonide

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

vahel. Tähistades

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \quad F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Olgu funktsioon $F(x, y, u, p, q)$ määratud muutujate x, y, u, p, q piirkonnas G.

Definitsioon 6.2.

Esimest järku osatuletisega diferentsiaalvõrrandi **lahendiks** muutujate x, y piirkonnas D nimetatakse sellist funktsiooni $\boldsymbol{u = u(x, y)}$, kui ta on piirkonnas D määratud ja pidevalt diferentseeruv ning

$$\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) \in G$$

ja

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\right) = 0$$

iga $(x, y) \in D$ korral, ehk mis sellesse võrrandisse asetatuna muudab võrrandi **samasuseks**.

Oluline erinevus harilike ja osatuletistega diferentsiaalvõrrandite vahel seisneb selles, et harilike diferentsiaalvõrrandite üldlahendites sisaldusid suvalised konstandid, osatuletistega diferentsiaalvõrrandites aga suvalised funktsioonid. Seega võrrandi lahend $u = u(x, y)$ võib sõltuda ühest **suvalisest funktsioonist**.

Näide 6.1. Võrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

üheks lahendiks on funktsioon $u = x + y$, kuna tema osatuletised on

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 1 = 0,$$

ehk saame samasuse $0 \equiv 0$.

Näide 6.2. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi, asendades osatuletise diferentsiaalide jagatisega

$$\frac{du}{dx} = 0,$$

millest korrutades argumendi diferentsiaaliga dx saame

$$du = 0.$$

Integreerime võrrandit argumendi x järgi, saame $u = C$. Kuna u on kahe muutuja funktsioon, siis C ei sõltu argumendist x, aga võib sõltuda argumendist y, võrrand on ikka rahuldatud. Võrrandi üldlahendiks on suvaline funktsioon argumendist y:

$$u = C(y).$$

Näide 6.3. Lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Vaatleme muutujat x parameetrina ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$x\frac{du}{dy} = -u.$$

Peale muutujate eraldamist saame

$$\frac{du}{u} = -\frac{dy}{x},$$

integreerime

$$\ln|u| = -\frac{y}{x} + \ln|C(x)|,$$

millest

$$u = C(x)e^{-\frac{y}{x}}.$$

Selle võrrandi lahendis olev integreerimiskonstant võib sõltuda argumendist x. Kontrollime lahendit, asendades selle esialgsesse võrrandisse:

$$x\frac{\partial\left(C(x)e^{-\frac{y}{x}}\right)}{\partial y} + C(x)e^{-\frac{y}{x}} = 0,$$

saame

$$x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot C(x)e^{-\frac{y}{x}} + C(x)e^{-\frac{y}{x}} = 0.$$

Geomeetriliselt vastab võrrandi lahendile $u = u(x, y)$ **pind ruumis**, seda pinda nimetatakse integraalpinnaks. Kuna üldlahendis on suvalised funktsioonid, sisaldab võrrandi lahend lõpmata palju integraalpindu.

Definitsioon 6.3.

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi järguks nimetatakse võrrandis leiduvat kõrgeimat osatuletise järku.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab kaht suvalist funktsiooni. Loodusteadustes kasutatavad teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandid:

a) **Lainevõrrand**, mis kirjeldab laine levikut, näiteks pillikeele võnkumist, on kujul

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

kus α on konstant. Pillikeele võnkumise ülesande jaoks on $\alpha^2 = T/\varrho$, kus T tähistab keele otstes mõjuvat tõmbejõudu ja ϱ lineaarset tihedust ehk massi pikkusühiku kohta.

b) **Difusioonivõrrand**, mis on kujul

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kus otsitav funktsioon $u = u(x, t)$ võib tähistada näiteks gaasi kontsentratsiooni või osarõhku, mis muutub ajas. Konstant D tähistab difusioonikordajat.

Näide 6.4. Lahendada teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Kirjutame antud võrrandi kujul

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Vastavat harilikku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

millest korrutades argumendi x diferentsiaaliga dx, saame

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = 0,$$

Integreerime ja arvestame, integreerimiskonstant võib sõltuda suvalisest argumendi y funktsioonist

$$\frac{du}{dy} = C(y),$$

integreerime argumendi y järgi ja arvestame, integreerimiskonstant võib sõltuda suvalisest argumendi x funktsioonist

$$u = \int C(y)\, dy + C_2(x).$$

Kuna suvalise argumenti y sisaldavat funktsiooni integreerides saame samuti argumendi y funktsiooni, tähistame

$$\int C(y)\,dy \doteq C_1(y),$$

saame üldlahendi, mis sisaldab kaht suvalist funktsiooni

$$u = C_1(y) + C_2(x).$$

Seega teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend sõltub kahest suvalisest funktsioonist. Kui järk on kõrgem, siis suvaliste funktsioonide arv, millest üldlahend sõltub, on võrdne võrrandi järguga.

6.2. CAUCHY ÜLESANNE

Cauchy ülesanne osatuletistega diferentsiaalvõrrandi jaoks on järgmine: **leida integraalpind, mis läbib etteantud kõverat**. Selle kõvera võrrandid võivad olla antud **ristkoordinaatides**

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

või **parameetrilisel kujul**

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), u = \chi(t),$$

kus parameeter t muutub mingis vahemikus (t_1, t_2). Tuleb leida selline võrrandi lahend, mille korral

$$\Phi\big(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)\big) \equiv 0.$$

Kui etteantud kõver asub mingil tasandil $x = x_0$ või $y = y_0$, kus x_0 ja y_0 on mingid etteantud arvud

$$x = x_0, u = \chi(y)$$

või

$$y = y_0, u = \psi(x),$$

siis algtingimuse saab kirjutada vastavalt

$$u(x_0, y) = \chi(y),$$

või

$$u(x, y_0) = \psi(x).$$

Näide 6.5. Lahendada Cauchy ülesanne

$$x\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0, \qquad u(x, 1) = x^2.$$

Üldlahendi leidsime näites 6.3 kujul

$$u = C(x)e^{-\frac{y}{x}},$$

algtingimusest asendame üldlahendisse $u = x^2$ ja $y = 1$, saame

$$x^2 = C(x)e^{-\frac{1}{x}},$$

kust avaldame suvalise funktsiooni $C(x)$

$$C(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Võrrandi erilahend on

$$u = x^2 e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{y}{x}} = x^2 e^{\frac{1-y}{x}}.$$

Näide 6.6. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy, \qquad u|_{x^2+y^2=1} = 1.$$

Loeme parameetriks argumendi y ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{du}{dx} = xy,$$

saame üldlahendi kujul

$$u = y \cdot \frac{x^2}{2} + C(y).$$

Üldlahendis $C(y)$ on muutuja y funktsioon. Leiame $C(y)$ nii, et oleks rahuldatud antud tingimus

$$1 = y \cdot \frac{1 - y^2}{2} + C(y),$$

$$C(y) = 1 - \frac{y(1 - y^2)}{2},$$

seega otsitav lahend Cauchy ülesandele on

$$u = y \cdot \frac{x^2}{2} + 1 - \frac{y(1 - y^2)}{2}.$$

Näide 6.7. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \qquad u(1, y) = y^2.$$

Loeme parameetriks argumendi y ja lahendame vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi. Üldlahend on kujul

$$u(x, y) = xy + C(y),$$

asendades algtingimusest $x = 1$ ja $u = y^2$, saame

$$y^2 = 1y + C(y).$$

Avaldame funktsiooni $C(y)$

$$C(y) = y^2 - y.$$

Erilahend on

$$u(x, y) = xy + y^2 - y.$$

Näide 6.8. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad u\left(\frac{1}{y}, y\right) = y.$$

Vastava hariliku diferentsiaalvõrrandi lahendamisel võtame muutuja y parameetriks. Muutujate eraldamiseks jagame võrrandit suurusega u

$$\frac{du}{u} = dx$$

ja integreerime, saame

$$\ln|u| = x + \ln C(y),$$

millest

$$u(x,y) = C(y)e^x.$$

Erilahendi saamiseks asendame algtingimusest $x = 1/y$ ja $u = y$

$$C(y)e^{\frac{1}{y}} = y,$$

saadud seosest avaldame $C(y)$

$$C(y) = ye^{\frac{1}{y}}.$$

Üldlahend on

$$u(x,y) = ye^{\frac{1}{y}}e^x = ye^{x-\frac{1}{y}}.$$

Cauchy ülesanne ei ole alati lahenduv: võib juhtuda, et läbi etteantud kõvera ei lähe ükski integraalpindadest. Samas võib läbi lähtekõvera minna rohkem kui üks integraalpindadest.

Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **erilahendi** leidmiseks peab olema teada ka otsitava funktsiooni u esimest järku **osatuletiste väärtus** lähtekõvera punktides, sest vaja on teada kahe suvalise funktsiooni väärtust, mille tähistame C_1 ja C_2.

Näide 6.9. Lahendada Cauchy ülesanne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad u(1,y) = y^2, \; \frac{\partial u}{\partial x} = y.$$

Vastavat harilikku diferentsiaalvõrrandite integreerime argumendi x järgi kaks korda, argumendi y loeme parameetriks, saame

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right) = 0, \quad \frac{du}{dx} = C_1(y),$$

$$u = \int C_1(y)\,dx + C_2(y) = xC_1(y) + C_2(y).$$

Erilahendi saamiseks teisest tingimusest asendame võrrandisse

$$\frac{du}{dx} = C_1(y),$$

tuletise asemele y, saame

$$C_1(y) = y$$

ja esimesest algtingimusest, asendades üldlahendisse $x = 1$ ja $u = y^2$, saame

$$1 \cdot C_1(y) + C_2(y) = y^2,$$

seejärel asendame $C_1(y)$ avaldise

$$y + C_2(y) = y^2,$$

millest avaldame $C_2(y)$

$$C_2(y) = y^2 - y.$$

Üldlahendisse leitud funktsioonide avaldiste asendamisel saame erilahendi kujul

$$u(x,y) = xy + y^2 - y.$$

6.3. LINEAARSED OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandit nimetatakse **lineaarseks**, kui ta on esimese astme võrrand otsitava funktsiooni ja selle osatuletiste suhtes. Kui otsitavaks funktsiooniks on kahe muutuja funktsioon $u = u(x, y)$, siis lineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on kujul

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y).} \tag{6.39}$$

Võrrandi (6.39) kordajad ja vabaliige sõltuvad ainult argumentidest x ja y.
Kvaasilineaarne osatuletistega diferentsiaalvõrrand on võrrand kujul

$$p(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x,y,u).$$

Kvaasilineaarne võrrand on lineaarne ainult osatuletiste suhtes ja mitte otsitava funktsiooni u suhtes.

Lineaarse homogeense esimest järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$\boldsymbol{p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.} \tag{6.40}$$

Lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **lahendamiseks** tuleb lahendada temaga sümmeetriline harilik diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dx}{p(x,y)} = \frac{dy}{q(x,y)}. \tag{6.41}$$

Osutub, et osatuletistega diferentsiaalvõrrandi (6.40) ja võrrandi (6.41) lahendamise ülesanded on ekvivalentsed. Sellise sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandi lahendi

$$\psi(x,y) = C$$

korral osatuletistega diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** on

$$\boldsymbol{u = \psi(x,y).}$$

Kui otsitav funktsioon on **kolme** muutuja funktsioon $u = u(x, y, z)$, tuleb lineaarse homogeense osatuletistega diferentsiaalvõrrandi

$$\boldsymbol{p(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + r(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0} \tag{6.42}$$

lahendamiseks lahendada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\frac{dx}{p(x,y,z)} = \frac{dy}{q(x,y,z)} = \frac{dz}{r(x,y,z)}. \tag{6.43}$$

Kehtivad järgmised laused.

Lause 6.1.
Kui valem

$$\psi(x,y,z) = C$$

esitab diferentsiaalvõrrandite süsteemi (6.43) lahendit (integraali), siis funktsioon

$$u = \psi(x,y,z)$$

on diferentsiaalvõrrandi (6.42) üheks erilahendiks.

Tõestus. Olgu

$$\psi(x,y,z)=C$$

süsteemi (6.43) lahend. Diferentseerime lahendit:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz=0. \qquad (6.44)$$

Süsteemis (6.43) tähistame suhte

$$\frac{dx}{p(x,y,z)}=\frac{dy}{q(x,y,z)}=\frac{dz}{r(x,y,z)}=\lambda,$$

siis

$$dx=\lambda p, dy=\lambda q, dz=\lambda r.$$

Asetame need võrrandisse (6.44), seejärel jagame läbi liikmega λ, saame

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}p+\frac{\partial\psi}{\partial y}q+\frac{\partial\psi}{\partial z}r=0.$$

Tulemuseks saime võrrandi (6.42), kus otsitava u asemel on funktsioon ψ. See aga tähendab, et funktsioon ψ rahuldab võrrandit (6.42), mistõttu on võrrandi üheks erilahendiks. ■

Kehtib ka vastupidine väide: Kui

$$\psi=\psi(x,y,z)$$

on võrrandi (6.42) erilahend, siis

$$\psi(x,y,z)=C$$

on süsteemi (6.43) lahend.

Lause 6.2.
Kui

$$\psi_1(x,y,z)=C_1 \text{ ja } \psi_2(x,y,z)=C_2$$

on kaks lahendit (integraali) vastavale harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile (6.43), siis

$$\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}$$

ehk suvaline funktsioon funktsioonidest ψ_1 ja ψ_2 rahuldab vastavat osatuletistega diferentsiaalvõrrandit (6.42).

Tõestus. Arvutame osatuletised funktsioonist $u=\varphi(\psi_1,\psi_2)$, saame

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial z},$$

seejärel asetame saadud osatuletised võrrandisse (6.42). Saame seose

$$\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_1}+$$

$$+\left(p(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+q(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial y}+r(x,y,z)\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\psi_2}\equiv 0.$$

Tulemus on samaselt null, sest lause 6.1 põhjal on mõlemad sulgudes olevad avaldised on samaselt nullid. Seega on **võrrandi (6.42) lahendiks funktsioon**

$$\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}.$$ ■

Seega saadud lahend $\boldsymbol{u=\varphi(\psi_1,\psi_2)}$ on võrrandi (6.42) **üldlahend**, kui funktsioonid

$$\boldsymbol{\psi_1(x,y,z)=C_1} \text{ ja } \boldsymbol{\psi_2(x,y,z)=C_2}$$

on lineaarselt sõltumatud.

Näide 6.10. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Vastav harilik diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}.$$

Lahendamiseks korrutame võrrandit suurusega xy, saame

$$xdx=-ydy,$$

integreerime

$$\frac{x^2}{2}=-\frac{y^2}{2}+\frac{C}{2},$$

millest

$$x^2+y^2=C.$$

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on suvaline funktsioon leitud lahendi vasakust poolest

$$u=\psi(x^2+y^2).$$

Näide 6.11. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandite süsteem on

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}.$$

Lahendame esimese võrrandi

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}.$$

Integreerides saame

$$\ln\,|x|=\ln|\,y|+\ln C_1,$$

millest

$$x=C_1y.$$

Avaldame konstandi C_1

$$\frac{x}{y}=C_1.$$

Lahendame teise võrrandi, milleks võtame võrdusest esimese ja kolmanda seose

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z}.$$

Integreerides saame

$$\ln|x| = \ln|z| + \ln C_2,$$

millest

$$x = C_2 z,$$

Avaldame konstandi C_2

$$\frac{x}{z} = C_2.$$

Seega

$$\psi_1 = \frac{x}{y}, \psi_2 = \frac{x}{z}$$

ning üldlahend on

$$u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right).$$

Kui tundmatuks on n muutuja funktsioon $\boldsymbol{u(x_1, x_2, \dots, x_n)}$, siis esimest järku lineaarse osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamine toimub analoogiliselt. Võrrand on kujul

$$\boldsymbol{p_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ \dots + p_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0} \tag{6.45}$$

ja temale vastav harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem on kujul

$$\boldsymbol{\frac{dx_1}{p_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{p_2(x_1, \dots, x_n)} = \ \dots = \frac{dx_n}{p_n(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Süsteem sisaldab $n-1$ sõltumatut võrrandit, järelikult saame leida süsteemile $n-1$ sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1,$$

$$\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_{n-1}.$$

Võrrandi (6.45) üldlahend on suvaline funktsioon, mis sõltub leitud lahenditest:

$$u = \varphi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n).$$

Kvaasilineaarse mittehomogeense võrrandi kujul

$$\boldsymbol{p(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial x} + q(x, y, u)\frac{\partial u}{\partial y} = r(x, y, u)} \tag{6.46}$$

lahendamise saab viia lineaarse homogeense võrrandi lahendamisele. Kuna võrrandi kordajad p, q ja r võivad sõltuda ka otsitavast funktsioonist u, on võrrand kvaasilineaarne. Võrrandi lahendit otsime ilmutamata kujul

$$V(x, y, u) = 0,$$

otsitavaks on funktsioon kujul V. Leiame funktsioonist V osatuletised argumentide x ja y järgi (ilmutamata funktsiooni tuletise valemi põhjal)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}},$$

ning asetame võrrandisse (6.46):

$$p(x,y,u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) + q(x,y,u)\left(-\frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{\frac{\partial V}{\partial u}}\right) - r(x,y,u) = 0.$$

Korrutame suurusega $-\partial V/\partial u$, saame

$$p(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial x} + q(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial y} + r(x,y,u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Tulemuseks on lineaarne homogeenne osatuletistega diferentsiaalvõrrand funktsiooni V suhtes. Moodustame võrrandile vastava harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$\boldsymbol{\frac{dx}{p(x,y,u)} = \frac{dy}{q(x,y,u)} = \frac{du}{r(x,y,u)}}.$$

Sellele süsteemile saame leida kaks sõltumatut üldlahendit

$$\psi_1(x,y,u) = C_1,$$

$$\psi_2(x,y,u) = C_2.$$

Võrrandi üldlahend on

$$V = \varphi(\psi_1, \psi_2),$$

kus φ on suvaline funktsioon. Seega esialgse võrrandi (6.46) lahendiks on funktsioon

$$\varphi(\psi_1, \psi_2) = 0.$$

Samal meetodil saab lahendada kvaasilineaarset homogeenset võrrandit, sellisel juhul tekib süsteemi viimases võrrandis nulliga jagamine. Saame süsteemi kahe võrrandiga, millest teine võrrand on $du = 0$, mille lahend on $u = C_1$ (näide 6.13).

Näide 6.12. Lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = xy.$$

Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}.$$

Saime harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kahe võrrandiga, millest lahendame kõigepealt esimese:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu},$$

Korrutame võrrandit muutujaga u

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

Integreerides saame

$$y = C_1 x,$$

kust

$$x = \frac{y}{C_1}.$$

Teise võrrandi

$$\frac{dy}{yu} = \frac{du}{xy}$$

Lahendamiseks korrutame võrrandit muutujaga u

$$\frac{dy}{y} = \frac{udu}{xy},$$

ja argumendiga y, saame

$$dy = \frac{udu}{x}.$$

Asendame argumendi x esimeses süsteemis saadud avaldisega $x = y/C_1$, võrrand saab kuju

$$dy = \frac{C_1 udu}{y},$$

korrutame võrrandit argumendiga y

$$ydy = C_1 udu,$$

integreerime

$$\frac{y^2}{2} = C_1 \frac{u^2}{2} + \frac{C_2}{2},$$

millest

$$y^2 = C_1 u^2 + C_2.$$

Lõpuks viime leitud lahendid kujule

$$\psi_1(x, y, z) = C_1 \text{ ja } \psi_2(x, y, z) = C_2,$$

et suvalised konstandid oleksid mõlemal juhul paremal pool võrdusmärki

$$\frac{y}{x} = C_1,$$

$$y\left(y - \frac{u^2}{x}\right) = C_2.$$

Üldlahendiks on

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, y\left(y - \frac{u^2}{x}\right)\right) = 0.$$

Sellest lahendist on võimalik avaldada otsitav funktsioon u, kui teiseks argumendiks oleva funktsiooni kirjutame kujul

$$y\left(y - \frac{u^2}{x}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ning avaldame suuruse u^2

$$u^2 = xy + f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

kus f_1 on suvaline diferentseeruv ühe muutuja funktsioon

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Näide 6.13. Leiame diferentsiaalvõrrandi

$$u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

lahendi, mis läbib sirget

$$x=y=u.$$

Siin on tegemist kvaasilineaarse võrrandiga, mis on homogeenne. Selle võrrandi lahendamiseks saame kasutada antud meetodit. Vastav diferentsiaalvõrrandisüsteem on kujul

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{-1}=\frac{du}{0},$$

millest saame süsteemi kahe võrrandiga. Kui nimetajas on null, siis võrdsustame lugeja nulliga.

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{-1},du=0.$$

Teisest võrrandist saame leida otsitava funktsiooni u avaldise:

$$u=C_1,$$

asendame esimesse võrrandisse ja lahendame, saame

$$C_1y=-x+C_2,$$

asendades esimesena saadud C_1 avaldise, saame võrrandi paremale poole konstandi

$$uy+x=C_2.$$

Võrrandi üldlahendiks on

$$\varphi(u,uy+x)=0.$$

Erilahendi leidmiseks asendame üldlahendisse $y=u$ ja $z=u$, saame

$$C_1=u,$$

$$C_2=u^2+u.$$

Seega

$$C_2=C_1(1+C_1).$$

Sellest saame avaldada erilahendi

$$uy+x=u(1+u).$$

6.4. DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEM KAHEST OSATULETISTEGA VÕRRANDIST

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldkuju:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=f(x,y,u),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=g(x,y,u).\end{cases}$$

Otsitav funktsioon $u=u(x,y)$, funktsioonid f ja g olgu pidevalt diferentseeruvad mingis muutujate x,y,u piirkonnas D.

Teoreem 6.1.
Süsteem on täielikult integreeruv parajasti siis, kui piirkonnas D kehtib samasus

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}g\equiv\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}f.$$

Sellisel juhul on süsteemil üks lahend, mis läbib etteantud punkti.

Järeldus. Kui on täidetud samasuse tingimus, siis on süsteemil olemas ühest parameetrist sõltuv lahendite parv $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{b})$, kus b on parameeter.

Näide 6.14. Lahendada süsteem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ax+y,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=x+\frac{y}{a}.$$

Integreerumise tingimus on täidetud:

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}g\equiv 1\equiv\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial u}f,$$

Integreerime esimest võrrandit, lugedes argumendi y parameetriks, saame

$$u=\frac{ax^2}{2}+yx+C(y),$$

Leiame saadud seosest tuletise argumendi y järgi

$$\frac{du}{dy}=x+C'(y)$$

ja asendame teise võrrandisse

$$x+C'(y)=x+\frac{y}{a},$$

millest

$$C'(y)=\frac{y}{a}.$$

Integreerides saame

$$C(y)=\frac{y^2}{2a}+b$$

ning süsteemi üldlahendiks

$$u=\frac{ax^2}{2}+yx+\frac{y^2}{2a}+b=\frac{1}{2a}(y+ax)^2+b.$$

KIRJANDUS

1. Mati Kilp, “Algebra I”, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.
2. Lembit Roots, Elmar Sakkov, „Kõrgem matemaatika: õppevahend majandusteaduskonna üliõpilastele”, Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, Tartu, 1982.
3. Elmar Reimers. Matemaatilise analüüsi praktikum II. Tallinn, 1988.
   https://drive.google.com/file/d/0BwtuAJRdWlyMS2s0ZzctTGdsS0U/view
4. L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus, 2009.
5. N. S. Piskunov. Diferentsiaal- ja integraalarvutus II. Tallinn, 1983.
6. Erich Steiner. The Chemistry Maths Book, Oxford University Press, 2008.
   https://cdn-cms.f-static.com/uploads/1259807/normal_5be50267d927a.pdf
7. George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir, Joel R. Hass. Thomas’ Calculus. 13th edition.
8. Arvet Pedas, Gennadi Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid: teooria, näiteid, ülesandeid. Tartu : Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011.
9. Lembit Roots. Valitud küsimusi kõrgemast matemaatikast. 1, [Osatuletistega diferentsiaal-võrrandid]: õppevahend Tartu Riikliku Ülikooli keemiaosakonna üliõpilastele, Tartu Riiklik Ülikool, teoreetilise mehaanika kateeder, 1981.

Veebimaterjalid:

1. Aivo Parringu konspekt “Algebra ja geomeetria”,
   https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.327/2021_fall/uploads/Main/Vruumid.pdf
2. Math Insight http://mathinsight.org