

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им.М.В.ЛОМОНОСОВА.

Заочная математическая школа.

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ, А.П.САВИН.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИ-  
ЧЕСКИХ ОЛИМПИАД.

Рисунки Т.И.Кузнецовой.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, 1968.

Этот сборник познакомит вас с любопытными задачами и с некоторыми разделами математики, которые не входят в школьную программу и в то же время не относятся к классической "высшей математике". Тем из вас, кто собирается принять участие в математической олимпиаде — городской, областной или Всесоюзной — сборник поможет к ней подготовиться. Из задач, которые часто предлагаются на олимпиадах, в этой книжке нет алгебраических (про делимость целых чисел, уравнения, неравенства и т.п.); им предполагается посвятить отдельные книжки. На стр.4 вы найдете список книг, в которых собрано много прекрасных задач "олимпиадного" типа и рассказывается о тех понятиях современной математики, которые в нашей книжке лишь слегка затронуты.

Все замечания по поводу этой брошюры просьба присылать по адресу: Москва В 234 мехмат ЗМШ В.Г.Друмм.

Заочная математическая школа

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Авторы старались выбрать из множества задач, предлагавшихся в последние годы на разных математических олимпиадах, те, которые казались им необычными и наиболее красивыми. Поэтому не удивительно, что в этот сборник попали, за очень небольшим исключением, трудные задачи. В среднем эти задачи труднее, чем задачи любого тура Всесоюзной олимпиады. Здесь встречаются задачи, на решение которых можно потратить не только несколько часов, но и несколько недель. Почти все задачи снабжены указаниями или ответами. В §I много задач с непривычными для школьника постановками вопросов. Некоторые из этих задач решены подробно, но в большинстве случаев указания написаны настолько коротко, что требуется еще большая самостоятельная работа, чтобы получить из них решение. Некоторые указания относятся сразу к целой группе похожих задач. Вообще задачи очень разнообразны и по тематике, и по методам решения, но мы старались расположить их до некоторой степени в систематическом порядке. Этот порядок отражен в оглавлении в конце книжки. Значком ° отмечены задачи, которые являются, так сказать, узловыми в соответствующих разделах; звездочкой — самые трудные задачи.

Н.Васильев

А.Савин

1. А.А.Леман. Сборник задач московских математических олимпиад. Издательство "Просвещение", 1965.

Книги серии "Библиотека математического кружка", особенно:

2. Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. I Арифметика и алгебра (последнее издание - "Наука", 1965), ч. II Геометрия (планиметрия) и ч. III Геометрия (стереометрия) готовятся к переизданию.

3. Е.Б.Динкин и В.А.Успенский. Математические беседы. Гостехиздат 1952.

4. И.М.Яглом и В.Г.Болтянский. Выпуклые фигуры. Гостехиздат, 1951.

5. А.М. и И.М.Ягломы. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Гостехиздат, 1954.

6. Г.Радемахер и О.Теплиц. Числа и фигуры. Физматгиз, 1962.

Книги популярной серии "Современная математика", особенно:

7. О.Оре. Графы и их применение. "Мир", 1965.

8. Стиррод Н., Чини У., Первые понятия топологии. "Мир", 1967.

Другие книжки.

9. Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию. "Наука", 1966.

10. Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. "Наука", 1965.

11. Штейнгауз Г. Сто задач. Физматгиз, 1963.

12. А.М. и И.М.Ягломы. Вероятность и информация. Физматгиз, 1960.

13. Б.Н.Делоне и О.К.Литомирский. Задачник по геометрии. Физматгиз, 1959.

14. Дж.Кемени, Дж.Снелл, Дж.Томсон. Введение в конечную математику. Изд. иностр. литер., 1963.

15. Сборник "Математическое просвещение" вып. I-6. Физматгиз, 1957-1961.

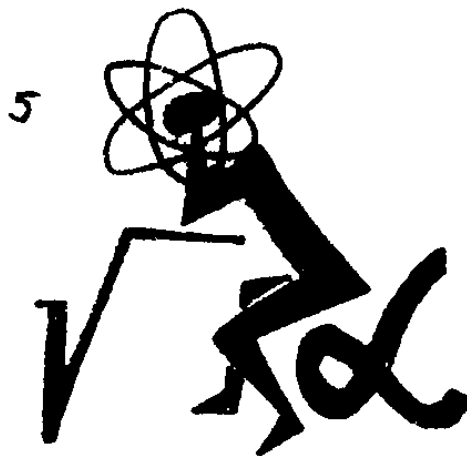
16. Н.Я.Виленкин. Рассказы о множествах. "Наука", 1966 и план 1968.

17. Н.Я.Виленкин. Комбинаторика. "Наука", план 1968.

18. И.М.Яглом. Необыкновенная алгебра. "Наука", план 1968.

19. Динкин Е.Б., и др. Математические соревнования (арифметика и алгебра). "Наука", план 1968.

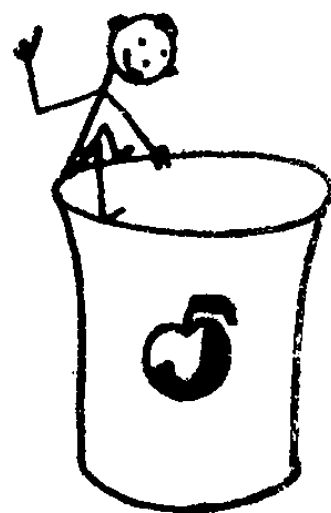
## §1



1. Двое часов начали и кончили бить одновременно. Первые бьют через каждые две секунды, вторые – через каждые три секунды. Всего было насчитано 13 ударов /слившиеся удары воспринимались как один/. Сколько времени на первых часах ?

2. Из Нью-Йорка в Гавр в 12 часов ежедневно отправляется пароход. Расстояние между этими портами он покрывает за 7 суток. Сколько пароходов, следующих из Нью-Йорка в Гавр, встретит на своем пути пароход, отправляющийся в 6 часов из Гавра в Нью-Йорк ?

3. Имеется два сосуда. В первом находится один литр воды, а второй пустой. Из первого переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Найти количество воды, оказавшейся в первом сосуде после 1965 переливания.



4. Восьмиклассники построены в шеренгу. Перед каждым из них стоит семиклассник, который ниже его по росту. Доказать, что если шеренгу восьмиклассников выстроить по росту, и шеренгу семиклассников тоже выстроить по росту, то по-прежнему каждый восьмиклассник

будет выше стоящего перед ним семиклассника.

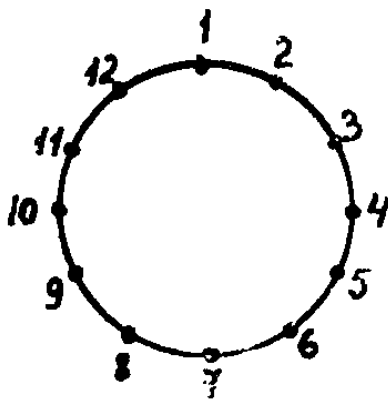
5. В ящик вложили  $k$  ящиков. В каждый из  $k$  ящиков или вложили новые ящики, либо не вложили ни одного и т.д. Найти число пустых ящиков, если заполненных ящиков /т.е. ящиков, в которые вставлены другие ящики/ оказалось  $m$  штук.



6. Один математик решил выписать подряд натуральные числа, повторяя некоторые из них так, чтобы у каждого числа  $n$  оказались выписанными ровно  $n$  его делителей /включая 1 и само число  $n$ /. Получилась такая последовательность: 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, ...

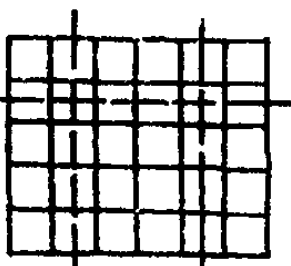
а/ Сколько раз ему придется написать число  $3^m$  ?

б/ Доказать, что в этой последовательности встретятся все натуральные числа.



7. Числа 1, 2, ...,  $n$  расположены на окружности по часовой стрелке. Ходом называется перестановка любых двух чисел. Найти наименьшее число ходов, после которых числа располагаются против часовой стрелки в том же порядке.

8. В таблице  $m \times n$  разрешается у всех чисел одной строки или у всех чисел одного столбца изменить знак. Доказать, что несколькими такими заменами можно добиться того, что сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке будет неотрицательна.



9. Имеется 35 целых чисел. Разрешается одновременно прибавить по единице к некоторым 23 из них. Доказать, что, повторив эту операцию достаточное число раз, можно сделать все данные числа равными.

Каким условиям должны удовлетворять числа

$m$  и  $n$  ( $m < n$ ) чтобы была разрешима общая задача: заданы произвольные

$n$  целых чисел, разрешается прибавлять по единице к любым  $m$  из них и требуется добиться того, чтобы все они стали равными?

10. В  $n$  кошельках лежат деньги.

Из первого кошелька перекладывают во второй  $1/n$  часть содержащихся в нем денег, затем из второго перекладывают в третий  $1/n$  часть образовавшейся там суммы, затем из третьего — перекладывают в четвертый  $1/n$  образовавшейся там суммы, и т.д., наконец, из последнего перекладывают в первый  $1/n$  часть образовавшейся там суммы. Какое количество денег было первоначально в каждом кошельке, если после всех перекладываний в каждом кошельке осталось  $A$  рублей?

II\*. В ящик ставим два ящика, каждый из этих двух ставим еще два ящика, в каждый из этих четырех — еще два ящика и т.д. После  $n$  таких операций получаем  $2^n$  маленьких ящиков. В каждый из них кладем по монете орлом или решкой вверх. Разрешается перевернуть одновременно все монеты в каком-либо ящике /любого размера/.

а/ Доказать, что не более чем за  $n$

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| + |   | + |
| 2 | 2 | 4 |
| + | + |   |
| 3 | 3 | 4 |
| + | + |   |
| 4 | 4 | 4 |

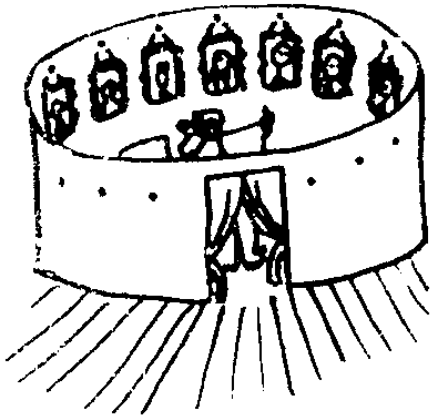
!

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 1 | 2 |
|   |   | + | + |
| 5 | 3 | 2 | 3 |
|   |   | + | + |
| 5 | 3 | 3 | 4 |
|   |   | + | + |
| 5 | 4 | 3 | 5 |
|   |   | + | + |
| 5 | 5 | 4 | 5 |
|   |   | + | + |
| 5 | 6 | 5 | 5 |
|   |   | + | + |
| 6 | 6 | 6 | 5 |
|   |   | + | + |
| 6 | 6 | 7 | 6 |

?

первоначально можно уравнивать число орлов и решек.

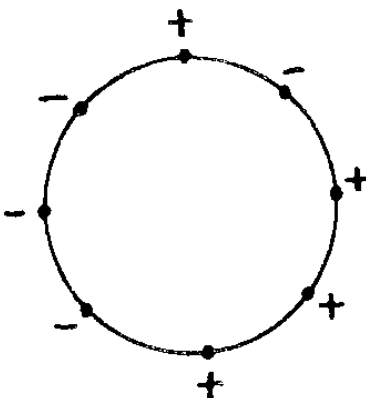
б/ За какое наименьшее число переворачиваний можно /при произвольном начальном расположении монет/ добиться того, чтобы все монеты лежали орлом вверх?



12. В круглой гостиной замка развешаны портреты всех его прежних владельцев. Слуге разрешается менять местами любые два соседних портрета, кроме портретов отца и сына. Доказать, что он может перевесить портреты в произвольном заданном порядке /расположения портретов, отличающиеся поворотом, считаются одинаковыми/.

13°. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 1965. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них их разность /по модулю/. Доказать, что нельзя добиться того, чтобы на доске остался один нуль.

14. В  $n$  стаканах достаточно большой вместимости налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких  $n$  можно за конечное число шагов слить всю воду в один стакан?



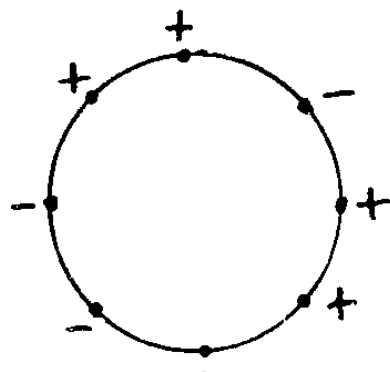
15\*. По окружности написаны в произвольном порядке несколько плюсов и минусов - всего  $n$  штук. Затем в промежутке между одинаковыми знаками пишется плюс, между разными - минус, а первоначальные знаки стираются; с новым набором проде-



лывается в то же самое и т.д.

а/ Доказать, что если  $n = 2^k$ , то из произвольного набора плюсов и минусов в конце концов получится набор из одних плюсов.

б/ Выяснить, из каких первоначальных наборов в конце концов получается набор из одних плюсов, если  $n \neq 2^k$ .



16. Доказать, что в любой бесконечной арифметической прогрессии найдется член, десятичная запись которого начинается с цифры 1.

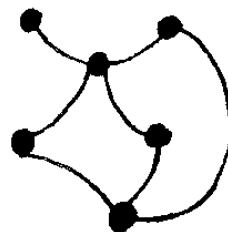
17. Разбить множество натуральных чисел на два подмножества, так, чтобы ни одно из них не содержало бесконечную арифметическую прогрессию.

18.\* Все наборы /любой конечной длины/ из двух цифр 0 и 1 каким-то образом разбиты на два класса. Доказать, что любую бесконечную последовательность нулей и единиц можно разрезать на такие куски, что все они, кроме, быть может, первого куска, принадлежат одному классу.

0101110111101

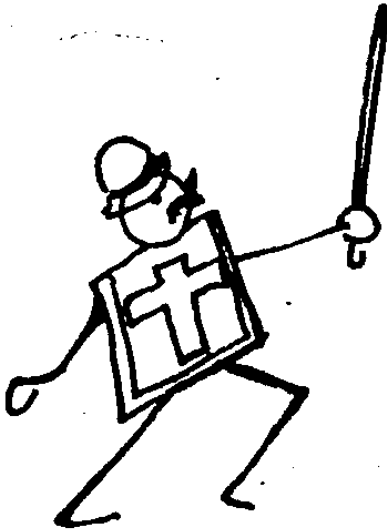
19.\* Доказать, что из II любых бесконечных десятичных дробей можно выбрать две такие, которые совпадают в бесконечном количестве разрядов.

20. Доказать, что среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых между собой, либо трое попарно не знакомых.



21. Семнадцать математиков из разных стран переписываются друг с другом. Каждые два переписываются на одном из трех языков:

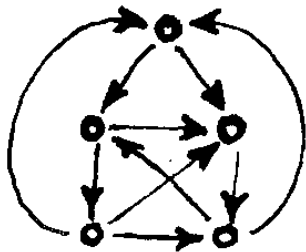
английском французском или русском. Доказать, что найдутся трое, которые переписываются на одном и том же языке.



22. Среди девяти мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Доказать, что если среди них нет трех таких, что все они должны драться друг с другом, то найдется четверо друзей.

23.\* В шахматном турнире участвуют 11 человек. В настоящее время среди любых трех двое еще не сыграли друг с другом. Доказать, что сыграно не более 30 партий.

24.\* В некоторой стране между любыми городами имеется непосредственное железнодорожное сообщение только в одном направлении. Из каждого города можно выехать в какой-нибудь другой. Город называется "легко доступным", если из любого другого города можно попасть в него либо непосредственно, либо через один промежуточный город. Доказать, что существует не менее трех легко доступных городов.



25. При дворце короля Артура собрались  $2n$  рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более  $n-1$  врага. Доказать, что Мерлин - советник короля Артура - может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

26. В народной дружине 100 человек, и каждый вечер на дежурство выходят трое. Доказать, что нельзя составить график дежурств так, чтобы любые два человека дежурили вместе ровно один раз.

27. Составьте отряду дружинников такое расписание дежурств на неделю, чтобы каждый день на дежурство выходили трое и каждые двое дежурили вместе ровно один раз. Сколько человек должно быть в таком отряде? Сколько раз должен дежурить каждый? /Сравните эту задачу с задачей 87 /.

28. Некая комиссия собиралась 40 раз. Каждый раз на заседании присутствовало 10 человек, причем никакие двое из членов комиссии не встречались на ее заседаниях более одного раза. Доказать, что число членов комиссии больше 60.

29. В турнире участвуют 10 шахматистов, причем каждые двое участников встречаются по одному разу. Могут ли какие-нибудь три шахматиста набрать на 4 очка больше, чем остальные семеро?

30. Пять пенсионеров решили провести турнир в домино так, чтобы каждый из них имел каждого из остальных один раз партнером и два раза — противником /каждую партию играют двое на двое/. Сколько партий они должны сыграть? Сколько существует различных расписаний такого турнира (составить расписание — значит указать, какие



пары из пяти пенсионеров А, Б, В, Г, Д должны играть между собой/ ?

31. Шесть шахматистов А, Б, В, Г, Д и Е сыграли в турнире по одной партии. А проиграл только победителю и занявшему последнее место, Б выиграл три партии, В сыграл все партии вничью, Г опередил Д на полтора очка, Е выиграл у Д и сыграл вничью с победителем турнира. Кто сколько очков набрал ?

32. В футбольном турнире участвовало пять команд, которые мы будем обозначать по номерам занятых ими мест  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ . Определить, как закончилась каждая игра, если известно, что каждые две команды встречались один раз, причем команда  $A_1$  не сделала ни одной ничьей,  $A_2$  не проиграла ни одного матча и  $A_4$  не выиграла ни одного матча.

33.<sup>o</sup> В розыгрыше первенства по футболу в Австралии каждые две команды встречаются один раз. Доказать, что в любой момент состязаний имеются две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое количество матчей.

34.<sup>o</sup> Доказать, что из  $n + 1$  целого числа можно выбрать два, разность которых делится на  $n$ .

35. Для каждого натурального числа  $n$  существует число вида  $111...11000...00$ , делящееся на  $n$ . Доказать.

36. Доказать, что из  $n + 1$  числа,

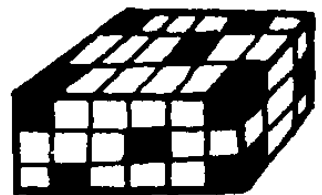
меньшего  $2n$ , всегда можно выбрать два, отношение которых — степень числа 2.

37. Доказать, что из  $n+1$  числа, меньшего  $2n$ , всегда можно выбрать три числа, из которых одно равно сумме двух других.

38. Числа от 1 до  $2n$  выписаны в ряд в произвольном порядке и под каждым числом написан его номер в этом ряду. Затем каждое число складывается со своим номером. Доказать, что среди этих сумм найдутся две, разность которых делится на  $2n$ .

39.\* Даны натуральные числа  $a_1 < a_2 < \dots < a_k < n$ . Доказать, что если  $k > \frac{n+1}{2}$ , то среди чисел  $a_1, \dots, a_k$  можно найти три, из которых одно равно сумме двух других.

40.\* Имеется неограниченное число белых и черных кубиков. Нужно построить из них плоскую башню в форме прямоугольного параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик в башне граничил с черным числом белых, а каждый белый — с нечетным числом черных. Доказать, что при любом заданном нижнем слое такую башню /конечной высоты/ построить можно.



41.\*  $2^n$  натуральных чисел выписаны в ряд. Известно, что если выписать все простые множители всех этих чисел, то среди них будет не более  $n$  различных. Доказать, что из данного ряда можно выбрать несколько стоящих подряд чисел так, что их произведение будет точным квадратом.

42.\* Даны двадцать различных положительных целых чисел таких, что самое большое из них не превосходит 70. Доказать, что среди всевозможных попарных разностей этих чисел имеется по крайней мере четыре равных.

43. Задано несколько натуральных чисел из которых ни одно не является началом другого. Пусть  $K_n$  — количество заданных чисел с  $n$  цифрами. Доказать, что

1  
19  
196  
1967

$\frac{K_1}{10} + \frac{K_2}{10^2} + \dots + \frac{K_n}{10^n} + \dots \leq \frac{9}{10}$   
/Мы говорим, что натуральное число  $a$  является началом числа  $b$ , если  $a = b$  или если к  $a$  можно дописать справа несколько цифр так, что получится  $b$  /.

АББАБ  
БАБАА  
БААББ  
АБАБА

44.\* В марсианском алфавите всего две буквы: А и Б. Каждые два слова одинаковой длины отличаются по крайней мере в трех местах. Доказать, что слов длины  $n$  не более чем  $\frac{2^n}{n+1}$ .

45. В выражении  $x_1 : x_2 : \dots : x_n$  для указания порядка, в котором нужно выполнять деление, расставляются скобки и результат записывается в виде такой дроби:

$$x_1 : (x_2 : (x_3 : x_4)) = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}$$

$$(x_1 : x_2) : (x_3 : x_4) = \frac{x_1 x_4}{x_2 x_3}$$

$\frac{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{n-k}}}$   
/каждое из чисел  $x_1, \dots, x_n$  стоит или в числе, или в знаменателе этой дроби/. Сколько различных дробей такого вида можно получить из данного выражения, по разному расставляя в нем скобки ?

$$x_1 : ((x_2 : x_3) : x_4) = \frac{x_1 x_3 x_4}{x_2}$$

$$(x_1 : (x_2 : x_3)) : x_4 = \frac{x_1 x_3}{x_2 x_4}$$

46. В алфавите некоторого африканского языка  $n$  букв. Чтобы передавать те-

леграммы на этом языке, нужно составить "азбуку Морзе", т.е. поставить каждой букве в соответствие некоторую последовательность точек и тире. Доказать, что обязательно найдется такая буква, для которой соответствующая последовательность точек и тире состоит не менее чем из  $\log_2 n - 1$  знаков.

47.<sup>0</sup> Известно, что среди 80 монет есть одна фальшивая — более легкая, чем остальные. Каким наименьшим числом взвешиваний на рычажных весах /без гирь/ можно выделить фальшивую монету? Та же задача — для  $n$  монет.



48. Имеется 5 грузиков и рычажные весы без гирь. Расположить грузики по возрастанию веса, используя 7 взвешиваний.

49.\* Из набора гирь весом 1, 2, 3, ..., 26 г. выделить шесть гирь так, чтобы из них нельзя было выбрать две кучки равного веса. Доказать, что нельзя выбрать семь гирь, обладающих тем же свойством.

50.\* Из 19 шаров 2 радиоактивных. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что за 8 проверок всегда можно выделить оба радиоактивных шара.

51.\* Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любую кучку шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в ней хотя бы один радиоактивный шар или нет (но нельзя узнать, сколько таких шаров в кучке). Доказать, что

менее чем за семь проверок нельзя гарантировать нахождение обоих радиоактивных шаров.

52. Имеется 10 мешков монет. В девяти мешках монеты настоящие (весят по 10г), а в одном мешке — фальшивые (весят по 11г). Одним взвешиванием на весах со стрелкой, указывающей разность весов на правой и левой чашке, определить, в каком мешке фальшивые монеты.

53. Имеется 11 мешков, в каждом из которых находится неограниченное количество монет, и весы со стрелкой /см. предыдущую задачу/. Каково наименьшее число взвешиваний, за которое можно выделить мешок с фальшивыми монетами? Известно только, что фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих.

54. В каждую клетку таблицы  $10 \times 10$  требуется вписать одно из чисел 1 или -1 так, чтобы произведение всех чисел в каждой строке и в каждом столбце было равно 1. Сколькими способами можно заполнить таблицу ?

|   |   |   |
|---|---|---|
| + | - | - |
| - | - | + |
| - | + | + |

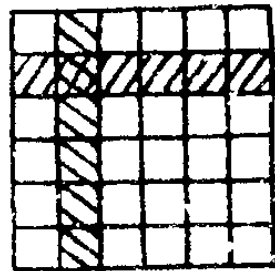
55. В таблицу  $10 \times 10$  нужно вписать натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце стояла арифметическая прогрессия. Сколькими способами это можно сделать ?

|   |    |    |   |
|---|----|----|---|
| 9 |    |    |   |
|   |    |    | 4 |
|   |    | 16 |   |
|   | 18 |    |   |

56. Заполнить клетки так, чтобы в каждом столбце и в каждой строке стояла геометрическая прогрессия /см. рисунок на полях/.



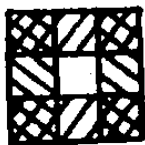
57. В клетки квадратной таблицы  $n \times n$  записаны числа, причем известно, что сумма  $2n-1$  чисел, составляющих произвольный крест /т.е. заполняющих некоторую строку и некоторый столбец/ равна 0. Доказать, что все числа в столбце равны 0.



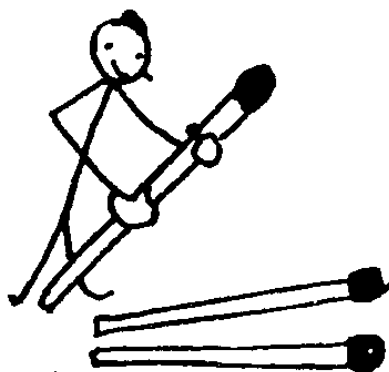
58.\* На клетчатой доске  $11 \times 11$  отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток ?

59.\* В каждой клетки квадратной таблицы  $n \times n$  стоит неотрицательное число /целсе/. При этом, если на пересечении столбца и строки стоит 0, то сумма чисел в этом столбце и в этой строке вместе не меньше  $n$ . Доказать, что сумма всех чисел в таблице не меньше  $\frac{n^2}{2}$ .

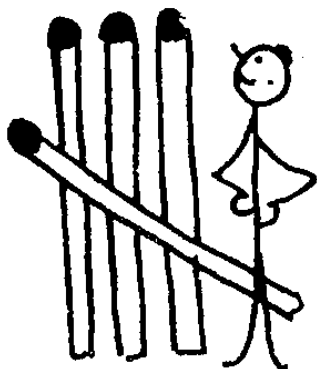
60. Все стороны правильного треугольника разбиты на  $n$  частей и через точки деления проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Затем в каждой из получившихся маленьких треугольников записывают одно из чисел  $1$  или  $-1$  так, чтобы произведение числа в каждом треугольнике на все числа в треугольниках, имеющих с ним общую сторону, равнялось  $1$ . а/ Доказать, что в углах треугольника должны стоять равные числа. б/ Сколькими разными способами можно заполнить таким образом нашу треугольную таблицу ?



61. Имеется доска  $3 \times 3$  клетки и 9 карточек размером в одну клетку, на которых написана какие-то числа. Двое играющих поочередно кладут по одной карточке на клетки доски. После того, как все карточки разложены, первый /начинающий/ подсчитывает сумму шести чисел, стоящих в верхней и нижней строках, второй подсчитывает сумму в левом и правом столбцах. Выигрывает тот, у которого сумма больше. Доказать, что при правильной игре первого второй не сможет выиграть, независимо от того, какие числа написаны на карточках.



62. Двое приятелей играют в такую игру: первый называет произвольное число от 1 до 10, второй прибавляет в нему одно из чисел от 1 до 10 и называет сумму, затем первый снова прибавляет к этой сумме одно из чисел от 1 до 10 и называет новую сумму и т.п. Выигрывает тот, кто первым назовет 100. Доказать, что в этой игре начинающий может обеспечить себе выигрыш.



63. Имеется две кучки по  $n$  спичек. Два игрока действуют поочередно. Каждый из них берет любое количество спичек из одной из кучек, не обязательно всякий раз из одной и той же. Запрещается оставлять равное число спичек в обеих кучках, за исключением того случая, когда в одной кучке спичек уже нет. Выигрывает тот, кто заберет весь остаток. Как надо играть, чтобы выиграть?

64. Двое играют в такую игру: Из кучки, где имеется 25 спичек, берут по очереди — каждый себе — одну, две или три спички. Выигрывает тот, у которого в конце будет четное число спичек. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или противник ?

\*\*\*

65. Написано двадцать чисел: 1, 2, 3 ... 19, 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки + или -. (Знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех двадцати знаков сумма была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй ?

$$-1 \quad 2 + 3 - 4 \quad 5$$

66.\* Даны двадцать карточек, на каждой из которых написана одна цифра 0, 1, 2, ..., 9, причем каждая цифра написана на двух карточках. Можно ли расположить эти карточки в ряд так, чтобы нули стояли рядом, между единицами лежала ровно одна карточка, между двойками — две, и так далее до девяток, между которыми должно лежать девять карточек ?

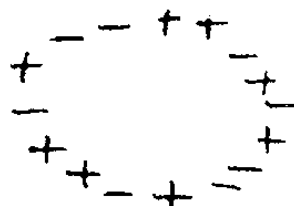
$$. \boxed{3} \boxed{0} \boxed{0} \boxed{1} \boxed{3} \boxed{1}$$

67 а/ По кругу выписаны  $p$  плюсов и  $q$  минусов.  $a$  — число рядом стоящих плюсов,  $b$  — число рядом стоящих минусов.

Доказать, что  $p - q = a - b$ .

б/  $x_1, x_2, \dots, x_m$  либо +1, либо -1. Известно, что  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + \dots + x_{m-1} x_m + x_m x_1 = 0$ .

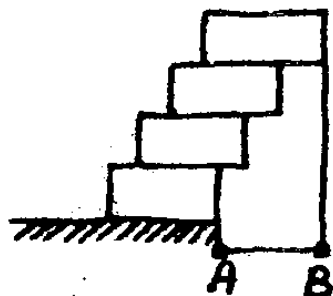
Доказать, что  $m$  делится на 4.



68. Найти все десятизначные числа, которых первая цифра равна количеству нулей в числе, вторая — количеству единиц, и т.д., десятая — количеству девяток.

69.  $a$  — число больше 2. Некто пишет на карточках числа  $a, a^2, a^3, \dots, a^n$  /каждое число на одной карточке/. Потом часть карточек он кладет себе в правый карман, часть — в левый, а остальные выбрасывает. Доказать, что сумма чисел в правом кармане не может быть равна сумме чисел в левом.

70. В автобусе без кондуктора ехало  $4n$  пассажиров, у которых были только монеты в 10, 15 и 20 копеек. Известно, что каждый пассажир, тем не менее, смог заплатить за проезд и получить сдачу. Доказать, что наименьшее общее число монет, которое могло быть у всех пассажиров, равно  $5n$ . /Стоимость проезда в автобусе — 5 коп./



71.\*  $n$  одинаковых кирпичей лежат друг на друге, как показано на рисунке, и не падают. Длина каждого кирпича — 1. Какую наибольшую длину может иметь отрезок AB?

72.\* На кольцевой автомобильной дороге стоит  $n$  одинаковых автомашин. Общее количество бензина у всех этих машин достаточно для того, чтобы одна из них смогла проехать по всей кольцевой дороге. Доказать, что хотя бы одна из указанных

автомашин может, забирая по пути бензин, остальных автомашин, проехать по всей кольцевой дороге.

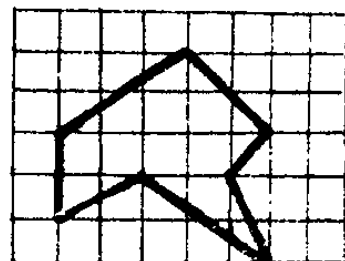
73.\*  $n^2 + 1$  различных чисел выписаны в ряд. Доказать, что можно выбрать  $n+1$  из этих чисел так, что они будут расположены в порядке возрастания или в порядке убывания.



74.\* В школе работает несколько кружков. Известно, что для любых  $k$  кружков ( $k = 1, 2, \dots$ ) количество ребят, которые пришли бы на совместное заседание этих кружков, не меньше  $k$ . Доказать, что можно выбрать в каждом кружке старосту так, чтобы никто не был старостой сразу двух кружков.

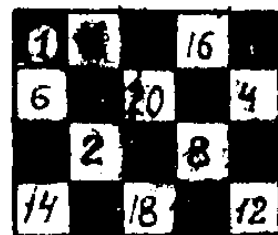


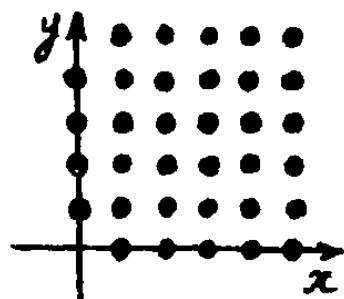
75. Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки, нарисованного на клетчатой бумаге, равна  $j + \frac{z}{2} - 1$ , где  $j$  — число узлов, лежащих внутри многоугольника,  $z$  — число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах. (Узлами мы называем точки, где пересекаются линии сетки. Сторона клетки принята за 1.) Доказать.



76. Прямоугольник со сторонами  $m$  и  $n$  нарисован на клетчатой бумаге так, что его стороны проходят по линиям сетки. Сколько клеток пересекает диагональ?

77.\* Доказать, что шахматный конь не может обойти доску  $4 \times n$  так, чтобы побывать на каждом поле ровно один раз и последним ходом вернуться в исходную клетку ( $n$  — любое натуральное число).





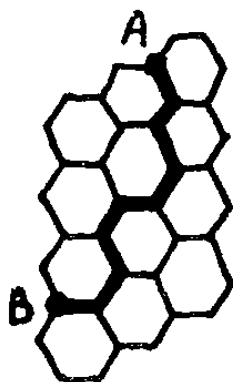
78. Доказать, что каждое целое неотрицательное число можно и притом единственным образом представить в виде

$$\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}, \text{ где } x \text{ и } y - \text{целые неотрицательные числа.}$$

79. В городе 10 улиц параллельны и 10 других пересекают их под прямым углом. Какое наименьшее число поворотов может иметь замкнутый маршрут, проходящий через все перекрестки?

80. Какое наибольшее число веревочек, соединяющих соседние узлы волейбольной сетки с квадратными ячейками можно разорвать так, чтобы сетка не распалась на куски, если размеры сетки  $m \times n$  ячеек?

81\*. На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная линия, все звенья которой равны и все вершины которой лежат в вершинах клеток. Доказать, что число звеньев такой ломаной обязательно четно.



82\*. На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных шестиугольников со стороной 1 (сетка). Дук прополз, двигаясь по линиям сети, из узла A в узел B по кратчайшему пути, равному 100. Доказать, что половину пути он полз в одном направлении.

83. На белую плоскость брызнули черной краской (тем самым все точки плоскости разбиты на два непустых множества -

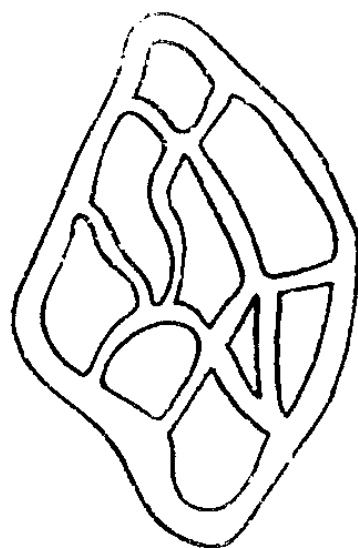
"черные" и "белые").

а/ Доказать, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1966м.

б/ Доказать, что найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно 1966м.

84. Какое число нужно поставить на место многоточия, чтобы следующая задача имела единственное решение: "На плоскости расположены несколько прямых, причем известно, что они пересекаются ровно в ... точках. Найти число прямых."

85. Город разбит на 50 кварталов, каждый из которых имеет периметр 600м. По внешним сторонам кварталов проходит кольцевое шоссе. Турист обошел город по этому шоссе за полтора часа и прочел в справочнике, что суммарная длина всех улиц города, не считая шоссе, составляет 12 км. С какой скоростью шел турист ?



86. Дан прямоугольник. Доказать, что при  $n \geq 5$  его можно разбить на  $n$  прямоугольников так, чтобы никакие два соседних прямоугольника не образовывали вместе прямоугольника.

87.\* Доказать, что семь прямых и семь точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы через каждую точку проходили ровно три прямые и на каждой прямой лежали ровно три точки.

88.<sup>0</sup> Доказать, что из куска проволоки длиной 120 см нельзя, не разламывая его, сделать каркас куба с ребром 10 см.

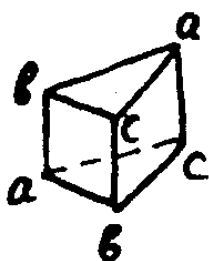
89. Турист, приехавший в Москву на поезде, весь день бродил по городу пешком. Поужинав в кафе на одной из площадей, он решил вернуться на вокзал и при этом идти только по тем улицам, по которым он шел до этого нечетное число раз. Доказать, что он всегда сможет это сделать.



90. Царь решает такую задачу: как разделить свое государство между пятью сыновьями, чтобы любые две из пяти частей царства имели общий кусок границы. Доказать, что эта задача неразрешима.

91°. На какое наибольшее число частей могут разбить плоскость четыре окружности?  $n$  окружностей?

92. Какое наименьшее количество различных букв достаточно расставить в вершинах  $n$ -угольной призмы, чтобы в концах каждого ребра стояли разные буквы? Тот же вопрос для  $n$ -угольной пирамиды.



93. Стороны выпуклого  $n$ -угольника последовательно пронумерованы числами от 1 до  $n$ . Внутри этого  $n$ -угольника берется точка и соединяется с каждой вершиной отрезком. Нужно пронумеровать эти отрезки числами от 1 до  $n$  так, чтобы сумма номеров сторон для всех  $n$  треугольников, на которые разбит многоугольник, была одна и та же. Доказать, что это можно сделать тогда и только тогда, когда  $n$  нечетно.

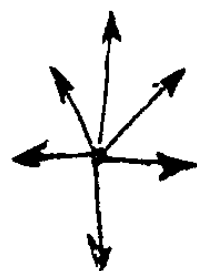
94. На окружности даны 1966 точек:



$A_1, A_2, A_3, \dots, A_{1966}$ . Составляются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: тех для которых точка  $A_1$  является вершиной, или тех, для которых она вершиной не является?

95. Окружность покрыта несколькими дугами. Эти дуги могут налегать друг на друга, но ни одна из них не покрывает окружность целиком. Доказать, что всегда можно выбрать несколько из этих дуг так, чтобы они тоже покрывали всю окружность и в сумме составляли не больше  $720^\circ$ .

96. Из точки  $O$  на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов /или, может быть, один вектор/ так, что длина их суммы больше 1.



97 а/ Требуется построить замкнутую самопересекающуюся ломаную линию, которая каждое свое звено пересекает один раз. Доказать, что такая ломаная обязательно имеет четное число звеньев  $n$ . Для четного  $n \geq 6$  построить примеры.

б/ Доказать, что для любого нечетного  $n \geq 5$  существует самопересекающаяся замкнутая ломаная линия из  $n$  звеньев, которая каждое свое звено пересекает ровно два раза.

98. В выпуклом лесу площади  $S$  заблудился человек. Доказать, что он может выйти из леса, пройдя путь, не больший, чем  $\sqrt{2\pi S}$ . Другими словами, доказать, что существует линия длины  $\sqrt{2\pi S}$ , которую нельзя поместить целиком ни в какую выпуклую фигуру площади  $S$ .

99. Внутри квадрата задано 1965 точек так, что никакие три из этих точек и вершин квадратов не лежат на одной прямой. Проводится несколько разрезов, соединяющих эти точки между собой и с вершинами квадратов. После этого оказывается, что весь квадрат разбит на треугольники, внутри которых данных точек нет. Сколько проведено разрезов и сколько получилось треугольников ?

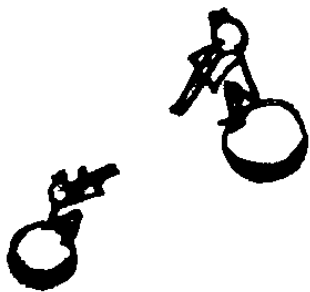
100. На плоскости расположено несколько точек, все расстояния между которыми различны. Каждую точку соединяют отрезком с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутый многоугольник? Могут ли получиться пересекающиеся отрезки ?

101. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояние между планетами попарно различно. Доказать, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

102. Доказать: что в круге радиуса 1 нельзя выбрать более пяти точек, попарные расстояния между которыми больше 1.

103. Доказать, что в круге радиуса 10 нельзя поместить 400 точек так, чтобы расстояние между любыми двумя было больше 1.

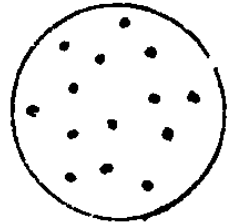
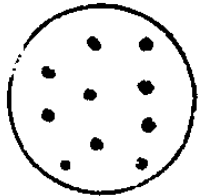
104. Можно ли разместить в квадрате со стороной 1 1965 точек, так, чтобы любой



прямоугольник площади  $\frac{1}{200}$  со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержал внутри хотя бы одну из этих точек? /Рассматриваются, конечно только прямоугольники, лежащие внутри квадрата/.

105.\* В единичный квадрат бросили 51 точку. Доказать, что некоторые три из них обязательно лежат внутри круга радиуса  $\frac{1}{7}$ .

106.\*  $n$  точек на плоскости расположены так, что любой треугольник с вершинами этих точек имеет площадь не больше 1. Доказать, что все эти точки можно поместить в треугольник площади 4.



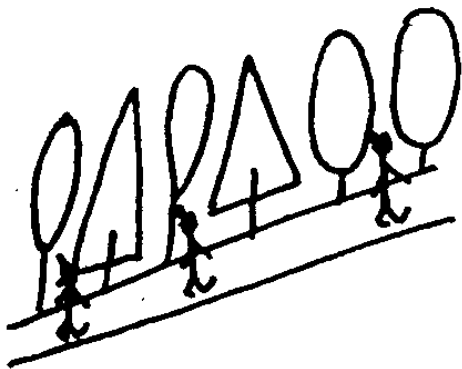
107. На плоскости дано 100 точек. Доказать, что их можно заключить в несколько пересекающихся кругов, сумма диаметров которых меньше 100 и расстояние между любыми двумя из которых больше 1. /Расстояние между двумя не пересекающимися кругами — это расстояние между их ближайшими точками/.

108. На плоскости лежит  $n$  точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми меньше 1. Доказать, что на плоскость можно положить  $n$  кругов радиуса 1, которые закроют все эти точки.

109. На круглом столе радиуса  $R$  расположена без наложения  $n$  круглых монет радиуса  $r$  так, что больше нельзя положить ни одной монеты. Доказать, что

$$\frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} - 1 \right) < \sqrt{n} < \frac{R}{r}.$$

IIО. По прямолинейному желобу длиной  $1\text{м}$ , закрытому с обоих концов, катаются 100 маленьких абсолютно упругих шариков. Скорость каждого шарика —  $100\text{м/сек}$ . Сколько будет столкновений в течение одной секунды? /Трением пренебечь; шарики считать точками, двигающимися по одной прямой; начальное расположение не задано/.



III. По аллее длиной  $100\text{м}$  прогуливаются три джентльмена. Первый ходит со скоростью  $1\text{км/час}$ ; второй — со скоростью  $2\text{км/час}$ , третий — со скоростью  $3\text{км/час}$ . Дойдя до конца аллеи, каждый поворачивается и идет с прежней скоростью в обратном направлении. Доказать, что можно выбрать такой промежуток времени продолжительностью в одну минуту, в течение которого все трое будут идти в одном и том же направлении.

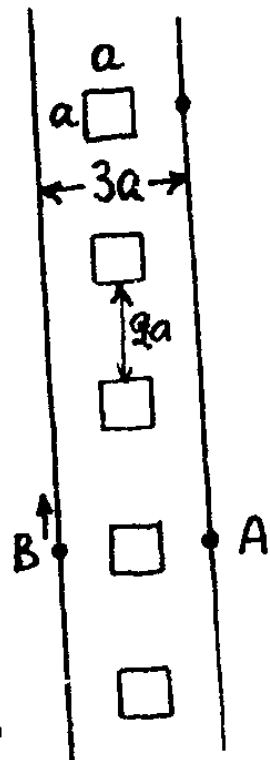
II2. По четырем прямым дорогам, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, равномерно /каждый со своей скоростью/ идут четыре пешехода. Известно, что 1-й встречается со вторым, с 3-м и с 4-м, а 2-й — с 3-м и с 4-м. Доказать, что 3-й и 4-й тоже встречаются между собой.

II3. Улитка ползла с непостоянной скоростью. В течение 6 минут несколько человек наблюдало за ней, так что ни в какой момент она не была без наблюдения. Каждый наблюдал ровно одну минуту и обнаружил, что за эту минуту улитка проползла ровно  $1\text{м}$ . Доказать, что за все 6

минут улитка могла проползти такое большее  
10м.

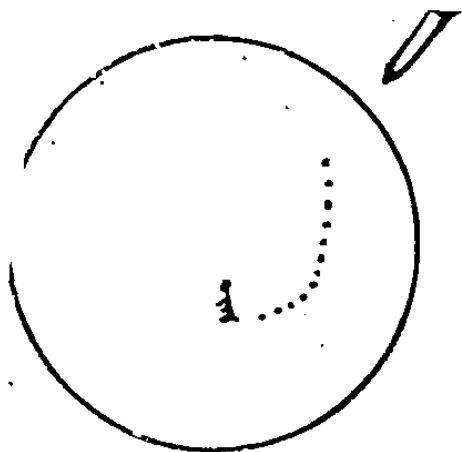
114. Самолет-разведчик летает по кругу с центром в точке А. Радиус круга 10 км., скорость самолета - 1000 км/час. В некоторый момент из точки А выпускается ракета, которая имеет ту же скорость, что и самолет, и управляется так, что она все время находится на прямой, соединяющей самолет с точкой А. Через какое время ракета достигнет самолет ?

115.\* Между двумя параллельными дорогами, находящимися на расстоянии  $3a$  друг от друга, стоит бесконечный ряд одинаковых домиков размером  $a \times a$  на расстоянии  $2a$  один от другого. По одной из дорог со скоростью и интервалом  $a$  движется цепь полицейских. В тот момент, когда один из полицейских находится напротив одного из домиков /в точке А/, по другую сторону от этого домика на второй дороге /в точке В/ появляется гангстер. С какой постоянной скоростью и в каком направлении должен идти гангстер по своей дороге, чтобы скрываться от полицейских за домами ?



116.\* На маленьком острове стоит прожектор, луч которого освещает некоторый отрезок поверхности моря, начинающийся у острова. Прожектор равномерно вращается вокруг вертикальной оси так, что конец его луча перемещается со скоростью  $U$ . Доказать, что катер, имеющий максимальную скорость  $U/8$ , не сможет незаметно /не попадая в луч прожектора/ подойти к острову.



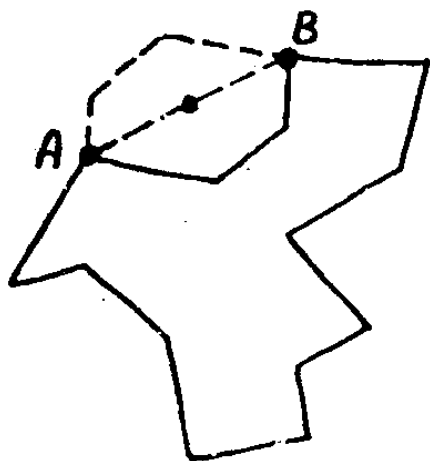


117.\* К непрозрачной планете, имеющей форму шара, подлетает космический корабль, который может летать со скоростью  $U$ . Единственный житель планеты может передвигаться по ее поверхности со скоростью не более  $u$ . Доказать, что если отношение  $\frac{U}{u}$  больше десяти, то корабль сможет обнаружить жителя, как бы тот не пытался скрыться.

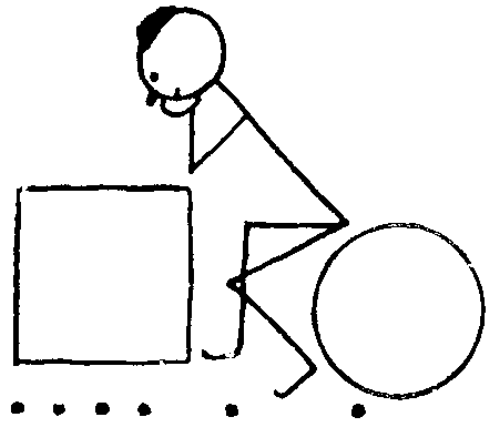


118. Ученик плавает в круглом бассейне. На крак бассейна стоит учитель, который не умеет плавать, но бежит в четыре раза быстрее, чем плавает ученик. Смогут ли ученик убежать от учителя, если он бежит быстрее, чем учитель?

119.\* Из любой точки города в любую другую можно попасть не проходя через любой наперед заданный перекресток. Доказать, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два не пересекающихся пути. /Предполагается, что в городе больше двух перекрестков/.



120.\* С невыпуклым многоугольником проделываются следующие операции: если  $A$  и  $B$  — две его не соседние вершины и весь многоугольник лежит по одну сторону от прямой  $AB$ , то часть контура, лежащая между точками  $A$  и  $B$ , симметрично отражается относительно центра отрезка  $AB$ . Доказать, что через конечное число таких операций многоугольник превратится в выпуклый.



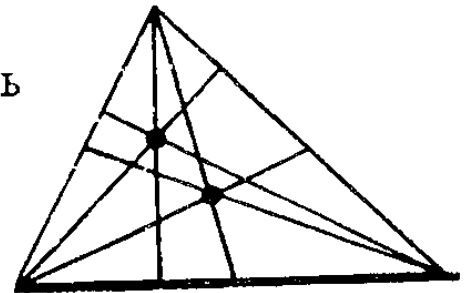
## §2

1. Разделить угол в  $19^\circ$  на 19 равных частей с помощью циркуля и линейки.

2. Построить треугольник, если дана прямая, на которой лежит основание, и две точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

3. Построить треугольник, зная положение одной из его вершин, середины противоположной стороны и точки пересечения высот.

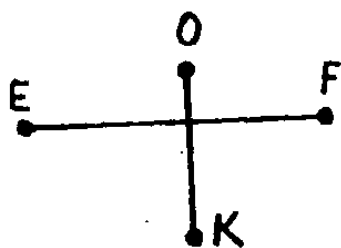
4. Дана прямая линия и две точки, лежащие по одну сторону от этой прямой. Построить треугольник, основание которого лежит на данной прямой, а данные точки являются ортоцентром /точкой пересечения высот/ и центром тяжести.



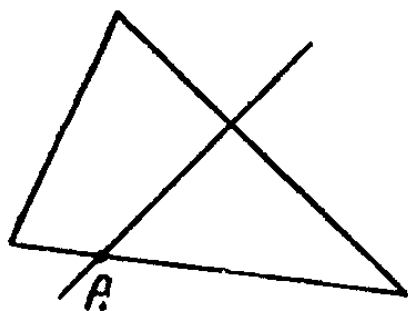
5. Построить треугольник, если известны медиана, проведенная к одной из его сторон, высоты, проведенные к другим сторонам.

6. Дана прямая и две точки, лежащие по разные стороны от нее. Построить треугольник, для которого данные точки были бы основаниями высот, а третья высота лежала бы на данной прямой.

7. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане одного из катетов.

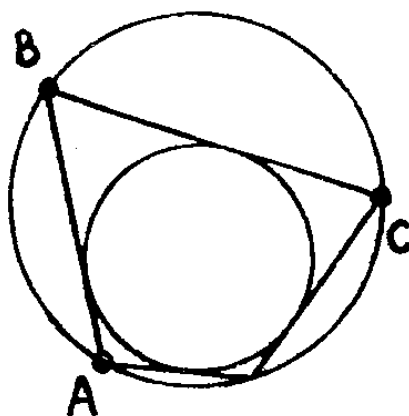


8. На доске была начерчена трапеция в ней была проведена средняя линия  $EF$  и опущен перпендикуляр  $OK$  из точки  $O$  пересечения диагоналей на большее основание. Затем трапецию стерли. Как восстановить чертеж по сохранившимся отрезкам  $EF$  и  $OK$ ?



9. На одной стороне треугольника дана точка  $A$ . Требуется провести через нее прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника на две равные части.

10. Дана окружность, точка  $A$ , лежащая на окружности, и точка  $M$ , лежащая внутри окружности. Найти на окружности точки  $B$  и  $C$  такие, чтобы точка  $M$  была а) центром тяжести треугольника  $ABC$ ; б) точкой пересечения биссектрис треугольника  $ABC$ ; в) точкой пересечения высот треугольника  $ABC$ .



11. Построить вписанный в окружность четырехугольник по его сторонам.

12. На окружности даны три точки. Найти на окружности четвертую точку такую, чтобы в четырехугольник с вершинами в эти точках можно было вписать окружность.

13. Дан круг и внутри него две точки  $A$  и  $B$ . Вписать в круг прямоугольный треугольник, катеты которого проходят через точки  $A$  и  $B$ .

14. Построить равнобедренный треугольник по данным расстояниям его сторон до касательных к описанной окружности, проведенных параллельно сторонам.



15. Построить параллелограмм, вершины которого лежат по две на двух данных окружностях, и точка пересечения диагоналей находится в данной точке.

16. На окружности даны точки  $A$  и  $B$ . Провести хорду  $XU$  так, чтобы отношение  $AX:AU$  и разность углов  $XAB$  и  $UAB$  имели заданные значения.

17. Через точки  $A$  и  $B$  провести окружность, пересекающую две данные параллельные прямые в точках  $E$  и  $F$ , так, чтобы  $EF = AB$ .

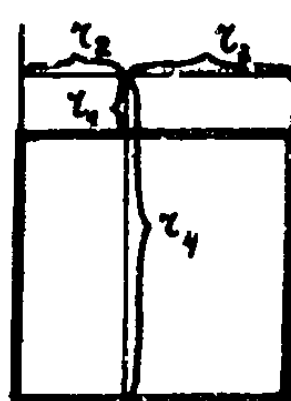
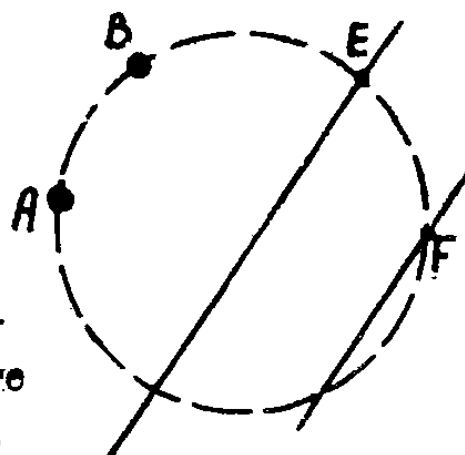
18. В данную окружность вписать трапецию, если известна ее боковая сторона и расстояние от центра до точки пересечения диагоналей.

19. На плоскости дан квадрат. Найти геометрическое место точек таких, что расстояния от каждой из них до сторон квадрата, взятые в некотором порядке, образуют арифметическую прогрессию. /Под расстоянием от точки до стороны понимается расстояние до прямой, на которой она лежит/.

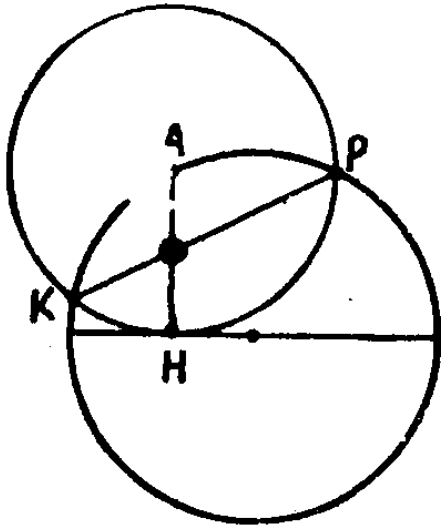
20. По внутренней стороне окружности катится окружность вдвое меньше радиуса. На второй окружности взята точка  $A$ . По какой траектории она будет двигаться?

21. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найти геометрическое место точек  $M$  таких, что треугольники  $ABM$  и  $ACM$  — оба равнобедренные.

22. Из точки  $M$  квадратного бильярда пускается шарик параллельно одной из диаго-



налей. Найти геометрическое место точек  $P$  на бильярде таких, что шарик, пущенный из точки  $P$  одновременно с первым шариком со скоростью равной /по величине и направлению/ скорости первого, столкнется с ним.

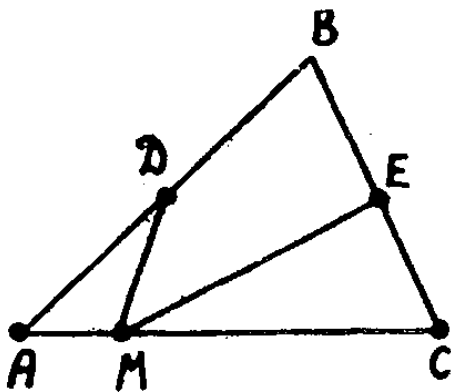


23. Дана окружность и на ней точка  $A$ . Произвольная окружность с центром  $A$  пересекается с данной окружностью в точках  $K$  и  $P$  и касается диаметра данной окружности в точке  $H$ . Найти геометрическое место точек пересечения отрезков  $KP$  и  $AH$ .

24.  $A, B, C, D$  — последовательные вершины выпуклого четырехугольника  $ABCD$ . Доказать, что если  $AB + BD < AC + CD$ , то  $AB < AC$ .

25. В круг радиуса  $1$  вписан квадрат, в него — круг, в него — правильный 8-угольник, в него — круг, в него — правильный 16-угольник и т.д. до бесконечности. Доказать, что радиусы всех кругов больше  $\frac{2}{5}$ .

26.  $D$  и  $E$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Точка  $M$  лежит на  $AC$ . Если  $MD < AD$ , то  $ME > CE$ . Доказать.



27. Даны три точки  $A, B, C$ . Где нужно выбрать точку  $M$ , чтобы сумма радиусов окружностей, описанных около треугольников  $ABM$  и  $CBM$ , была наименьшей?

28. На продолжении наибольшей стороны  $AC$  треугольника  $ABC$  отложен отрезок  $CD=BC$ . Доказать, что угол  $ABD$  — тупой.

29. Доказать, что выпуклый четырехугольник, имеющий ось симметрии, является либо вписанным, либо описанным.

30. В четырехугольнике три тупых угла. Доказать, что из двух его диагоналей большей является та, которая проведена из вершины острого угла.

31. Доказать, что круги, построенные на сторонах произвольного четырехугольника, как на диаметрах, целиком его накрывают.

32\*. Доказать, что площадь квадрата, лежащего внутри треугольника, не превосходит половины площади этого треугольника.

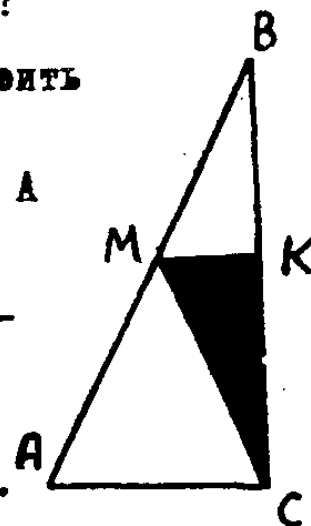
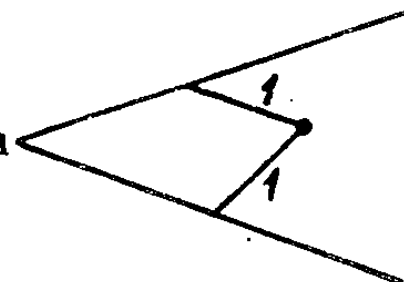
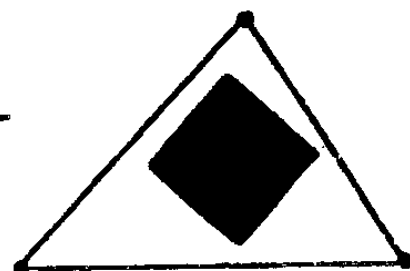
33\*. Дан угол. Двумя отрезками длины 1 отсечь от него четырехугольник наибольшей площади.

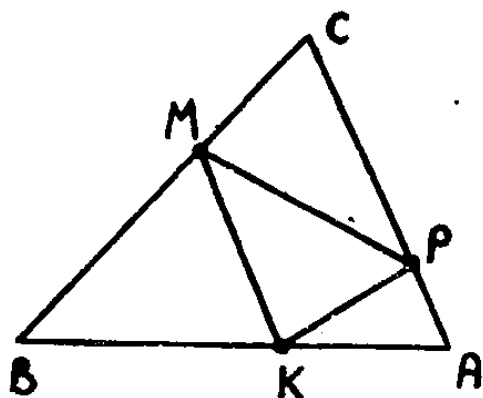
34. Внутри круга с центром в точке  $O$  дана точка  $A$ , отличная от  $O$ . Найти на окружности точку  $M$ , для которой угол  $AMO$  максимален.

35. Какую наименьшую ширину должна иметь бесконечная полоса бумаги, чтобы из нее можно было вырезать любой треугольник площади  $1 \text{ см}^2$ ?

36. На плоскости даны точки  $A$  и  $B$ . Построить квадрат, содержащий эти точки на границе, у которого сумма расстояний от вершин до точки  $A$  была бы минимальной.

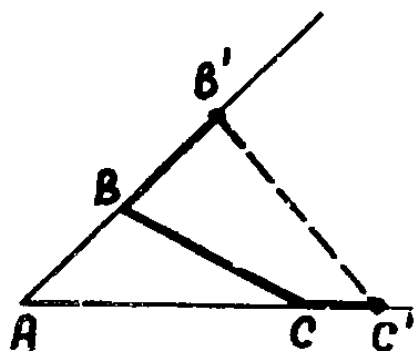
37. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  найти точку  $M$ , обладающую тем свойством, что треугольник  $МСК/К$  — проекция точки  $M$  на катет  $AC$  имеет наименьшую площадь.





38. В остроугольном треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбрана произвольная точка  $M$ . Построить треугольник  $MKP$  минимального периметра так, чтобы на каждой стороне данного треугольника находилось по одной вершине искомого.

39. Дан разносторонний треугольник. Найти на плоскости точку, сумма расстояний которой до сторон треугольника была бы минимальной.



40. Дан треугольник  $ABC$ . На продолжении сторон  $AB$  и  $AC$  за вершины  $B$  и  $C$  берутся точки  $B'$  и  $C'$  так, что  $BB' + CC' = BC$ . При каких условиях отрезок  $B'C'$  будет наименьшим?

41. Даны две concentric окружности. Через точку, лежащую внутри меньшей из них, провести луч так, чтобы его отрезок заключенный между окружностями, был а) наименьшим, б) наибольшим.

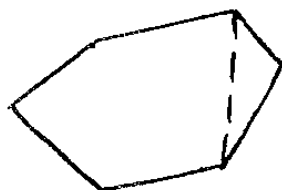
42. В произвольном четырехугольнике найти точку, сумма расстояний которой до всех вершин была бы наименьшей.

43. Через точку, лежащую внутри угла, проведите прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.

44. В данный прямоугольник поместит

ромб наибольшей площади.

45.\*.\* Доказать, что в любом выпуклом шестиугольнике найдется диагональ, которая отсекает от него треугольник площади не большей, чем одна шестая площади шестиугольника.



46. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника, как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1:3. Вычислить углы треугольника.

47. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AB = BC$ ) угол  $ABC$  равен  $80^\circ$ . Внутри треугольника взята точка  $O$  так, что угол  $OAC$  равен  $10^\circ$ , а угол  $OCA$  равен  $30^\circ$ . Найти угол  $AOB$ .

48. Найти угол  $C$  треугольника  $ABC$ , если расстояние от вершины  $C$  до ортоцентра треугольника равно радиусу описанной окружности.

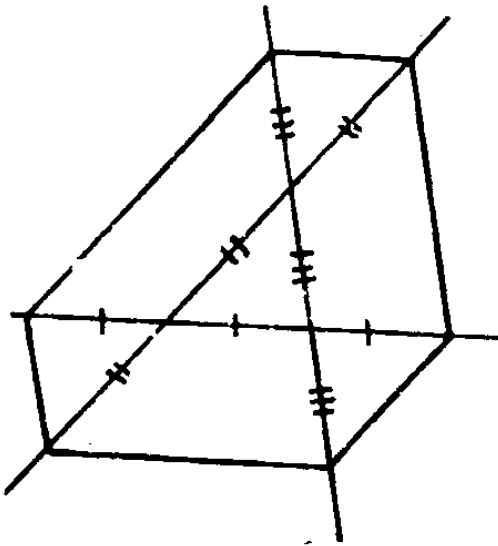
49. Определить углы равнобедренного треугольника, если центры вписанной и описанной около него окружностей симметричны относительно его основания.

50. Высоты треугольника пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $OC = AB$ . Найти угол при вершине  $C$ .

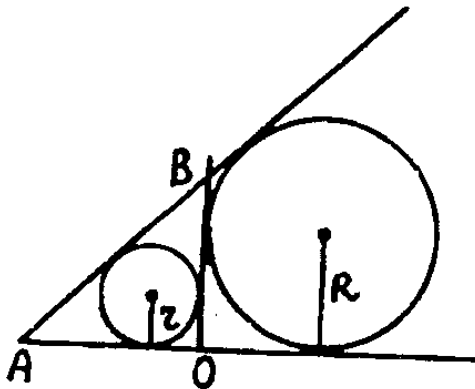
51. Дан треугольник  $ABC$ , у которого угол  $A$  вдвое больше угла  $B$ , а сторона  $AB$  больше стороны  $AC$ . На стороне  $AB$  взята точка  $E$  такая, что  $AE = AC$ . Найти длину отрезка  $CE$ , если  $AC = 1$ .

52. Треугольник и вписанный в него

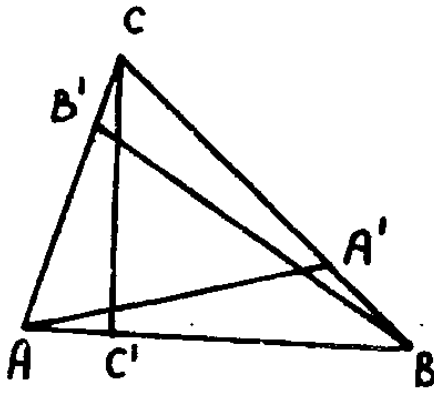
ромб имеют общий угол. Отношение сторон треугольника, образующих этот угол —  $k$ . Найти отношение площадей треугольника и ромба.



53. Если на каждой из прямых, образующих в пересечении треугольник, отложить в обе стороны от вершин по отрезку, равному длине сторон треугольника, лежащей на этой прямой, то получим 6 точек. Соединим их прямыми. Выразить площадь полученного шестиугольника через площадь данного треугольника.



54. Даны два смежные прямые угла с вершиной в точке  $O$ . В один из них вписана окружность радиуса  $r$ , а в другую — окружность радиуса  $R$  ( $R > r$ ). Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает стороны углов в точках  $A$  и  $B$ . Определить площадь треугольника  $AOB$ .

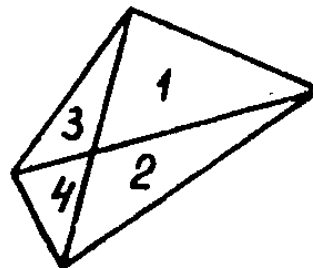


55. Стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  треугольника  $ABC$  разделены точками  $C'$ ,  $A'$  и  $B'$  в одном и том же отношении  $k$ . Найти  $k$ , если прямые  $AA'$ ,  $BB'$ , и  $CC'$  образуют треугольник, площадь которого составляет  $1/4$  площади данного.

56. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты, расположенные вне треугольника. Вычислить площадь шестиугольника, образованного теми вершинами квадратов, которые не являются вершинами треугольника, если известны гипотенуза и сумма катетов треугольника.

57. Из двух углов треугольника один в два раза больше другого. Найти стороны треугольника, зная, что они выражаются целыми числами.

58. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника. Известно, что площади этих треугольников выражаются целыми числами. Доказать, что произведение этих четырех чисел не может оканчиваться цифрами ... 1965.



59. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ . Найти угол  $A'S'B'$ , если угол  $ACB$  равен  $120^\circ$ .

60. Дан выпуклый четырехугольник. Середины его сторон последовательно соединены отрезками. Выразить площадь полученного четырехугольника через площадь данного.



61. В равносторонний треугольник вписан другой равносторонний треугольник, стороны которого перпендикулярны к сторонам данного. В каком отношении разделятся стороны данного треугольника вершинами вписанного?

62. Дан четырехугольник  $ABCD$ , причем известно, что периметры треугольников  $ABC$ ,  $ABD$  и  $BSD$  равны. Доказать, что  $ABCD$  — прямоугольник.

63. Если площади прямоугольных треугольников относятся как квадраты их гипотенуз, то треугольники подобны. Доказать.

64. Если разность между суммой двух сторон треугольника и его третьей стороной равна диаметру вписанного круга, то треу-

гольник — прямоугольный. Доказать.

65. Доказать, что прямая, соединяющая вершину прямого угла прямоугольного треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, делит прямой угол пополам.

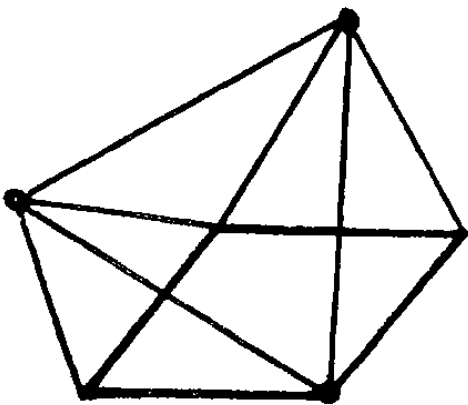
66. В прямоугольник  $ABCD$  вписан равносторонний треугольник  $APK$  так, что вершина  $K$  находится на стороне  $BC$ , а  $P$  — на  $CD$ . Из вершины  $K$  проводится высота  $KH$ . Доказать, что треугольник  $BHC$  — равносторонний.

67. В треугольник  $ABC$  вписано три квадрата: у одного две вершины лежат на стороне  $AB$ , у другого — на стороне  $BC$ , у третьего — на стороне  $AC$ . Оказалось, что все три квадрата равны. Доказать, что треугольник  $ABC$  — равносторонний.

68. На двух смежных сторонах параллелограмма вне него построены равносторонние треугольники. Доказать, что третьи вершины этих треугольников и четвертая вершина параллелограмма являются вершинами равностороннего треугольника.

69. Если прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два треугольника, подобных данному, то данный треугольник — прямоугольный и приведенная прямая перпендикулярна гипотенузе.

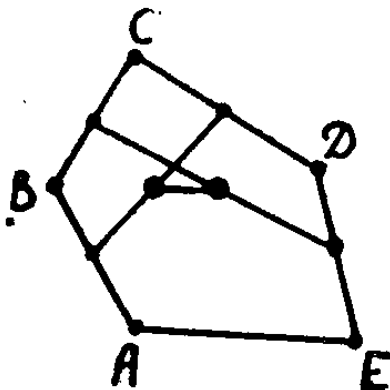
70. В круг вписаны две равнобедренные трапеции с соответственно параллельными сторонами. Доказать, что диагональ одной из них равна диагонали другой трапеции.



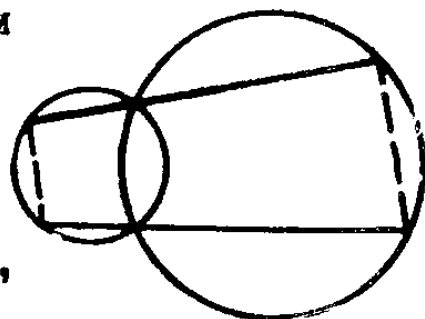


71. Через точку, взятую на продолжении диагонали трапеции и середину каждого основания проведены две прямые, пересекающие боковые стороны трапеции в точках К и Н. Доказать, что отрезок КН параллелен основаниям трапеции.

72. Середины сторон АВ и СД, ВС и ДЕ выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Середины полученных отрезков снова соединены. Доказать, что последний отрезок параллелен отрезку АЕ и равен  $1/4$  АЕ.

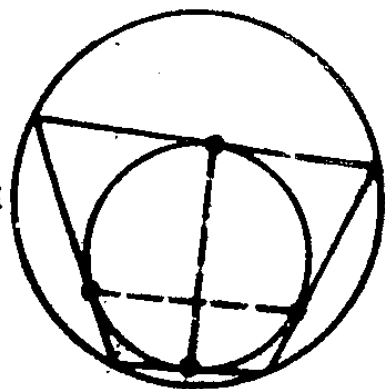


73. Через точки пересечения двух окружностей проводятся две произвольные секущие. Доказать, что хорды, соединяющие новые точки пересечения этих секущих с окружностями, параллельны.



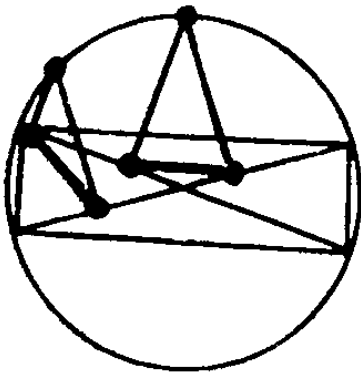
74. Через середину каждой диагонали выпуклого четырехугольника проведена прямая, параллельная другой диагонали. Точка их пересечения соединена с серединами сторон четырехугольника. Доказать, что последними четырьмя отрезками данный четырехугольник делится на равновеликие части.

75. Некоторый четырехугольник является одновременно вписанным и описанным. Доказать, что прямые, соединяющие противоположные точки касания вписанной окружности, перпендикулярны.



76. Доказать, что прямые, соединяющие середины дуг стягиваемых противоположными сторонами вписанного в окружность четырехугольника, взаимно перпендикулярны.

77. Соедините все вершины произвольного выпуклого четырехугольника с серединами двух противоположных его сторон. Докажите, что площадь образовавшегося при этом четырехугольника равна сумме площадей двух примыкающих к нему треугольников.



78. Из произвольной точки окружности описанной вокруг прямоугольника, опущены перпендикуляры на диагонали прямоугольника /или их продолжения/. Доказать, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от положения точки на окружности.

79. Из точки  $P$ , внешней к данной окружности, проведены касательные  $PT_1$  и  $PT_2$  / $T_1$  и  $T_2$  - точки касания/. Внутри окружности построена дуга  $T_1T_2$  с центром в точке. Произвольная точка  $A$  этой дуги соединена точками  $T_1$  и  $T_2$ . Доказать, что точки  $M_1$  и  $M_2$ , в которых прямые  $AT_1$  и  $AT_2$  второй раз пересекают окружность, диаметрально противоположны.

80. В окружность вписан четырехугольник. Доказать, что для всякой точки этой окружности произведение расстояний до одной пары противоположных сторон четырехугольника равно произведению расстояний до другой пары сторон, а также до диагоналей.

81. Если в трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, то сумма квадратов диагоналей равна квадрату суммы оснований. Доказать.

82. Три окружности проходят через

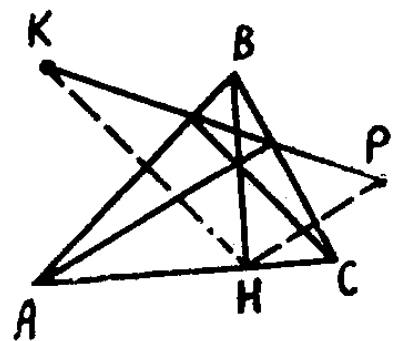
точки А и В. Через точку А проведена произвольная секущая, встречающая окружности вторично в точках С, Д и Е. Доказать, что отношение  $CD:DE$  не зависит от выбора секущей.

83. Через точку М диаметра некоторой окружности проведена секущая под углом  $45^\circ$  к диаметру. Пусть А и В – точки пересечения окружности и секущей. Доказать, что  $MA^2 + MB^2$  не зависит от точки М.

84. В окружности проведены три равные хорды: АВ, ВС и СД. Доказать, что диаметр ВЕ отсекает от хорды АД отрезок АF равный АВ, а хорда СЕ делит отрезок FD пополам.

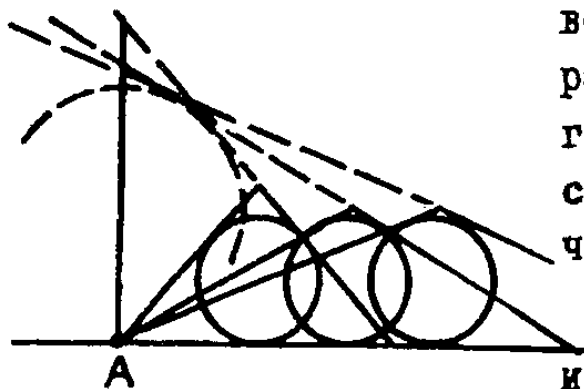
85. Через центр окружности проведен луч, на котором выбраны точки А и В так, что произведение их расстояний до центра окружности равно квадрату радиуса. Доказать, что для любой точки Р этой окружности отношение  $AP:BP$  постоянно.

86. Точки К и Р симметричны основанию Н высоты ВН треугольника ABC относительно его сторон АВ и ВС. Доказать, что точки пересечения отрезка КР со сторонами АВ и ВС (или их продолжениями) – основания высот треугольника ABC.



87. В параллелограмме ABCD диагональ AC больше диагонали BD. М – такая точка на AC, что четырехугольник ВСМД можно вписать в окружность. Доказать, что BD – общая внешняя касательная к окружностям AMB и AMD.

88.\* Про совокупность равнобедренных треугольников известно, что их основания лежат на данной прямой, они имеют общую



вершину  $A$  на этой прямой, кроме того радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники равны. Доказать, что все боковые стороны этих треугольников, не проходящие через вершину  $A$ , касаются одной окружности.

89. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  и четыре окружности, каждая из которых касается извне стороны четырехугольника и продолжений двух его сторон /например, стороны  $AB$  и продолжений сторон  $AD$  и  $BC$ /. Доказать, что центры этих окружностей лежат на одной окружности.

90.\* Точки  $A, B$  и  $C$  лежат на одной прямой, точка  $P$  — вне этой прямой. Обозначим через  $O_1, O_2$  и  $O_3$  центры окружностей, описанных около треугольников  $PBA, PCA$  и  $PAC$ . Доказать, что точки  $O_1, O_2, O_3$  и  $P$  лежат на одной окружности.

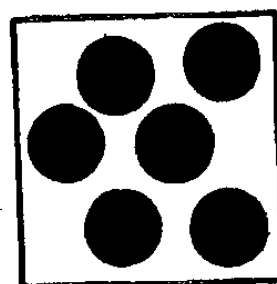
91.\* Три окружности  $O_1, O_2$  и  $O_3$  пересекаются в одной точке  $O$ . Точки  $A, B$  и  $C$  — точки пересечения, соответственно, окружностей  $O_1$  и  $O_2, O_2$  и  $O_3, O_3$  и  $O_1$ . Из произвольной точки  $M$  окружности  $O_1$  проведены секущие  $MAP$  и  $MCO$  ( $P$  и  $O$  — точки соответственно на  $O_2$  и  $O_3$ ). Доказать, что точки  $P, B$  и  $O$  лежат на одной прямой.

92. Через вершины  $C, B$  и центр вписанной в треугольник  $ABC$  окружности проведена окружность с центром в точке  $M$ . Доказать, что окружность, описанная около данного треугольника и биссектриса угла  $A$  проходят через точку  $M$ .

93. В треугольнике  $ABC$  на стороне  $AB$  берется точка  $P$ , а на стороне  $BC$  — точка  $K$ . На отрезках  $AK$  и  $CP$ , как на диаметрах строятся окружности. Доказать, что их общая хорда проходит через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .

94. В одном архиве найдена записка с описанием места, где спрятан ящик с старинными рукописями. В записке говорится: "Подойдете к березе и идите от нее до дуба, измеряя расстояние. Около дуба поверните направо, и пройдете такое же расстояние. Пусть  $M$  — точка остановки. Затем снова от березы идите до каменного столба, от которого пройдете влево такое же расстояние. В результате остановитесь в точке  $K$ . В середине отрезка  $MK$  закопан ящик с рукописями". Когда историки прибыли на указанное место, то обнаружили, что березы уже нет. Как найти ящик с рукописями?

95.\* В квадрате расположено несколько одинаковых кругов. Любые два из них не имеют общих точек. Доказать, что можно разрезать квадрат на выпуклые многоугольники так, чтобы каждый многоугольник заключал в себе ровно по одному кругу. Верно ли такое утверждение, если вместо кругов рассматриваются равные между собой треугольники? Если радиусы кругов не одинаковы?



96. Торт имеет форму правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $I$ . Из середины каждой стороны внутрь торта /в произвольном направлении/ проводится разрез длины  $I$ . Доказать, что при этом от торта будет

отрезан хотя бы один кусок.

97.<sup>o</sup> Плоские углы трехгранного угла  $A$  тетраэдра  $ABCD$  — прямые. Доказать, что основание высоты, опущенной из вершины  $A$ , совпадает с ортоцентром треугольника  $BCD$ .

98.\* Доказать, что, если площади граней тетраэдра различны, то существуют 8 сфер, касающихся всех четырех плоскостей его граней.

99. Сумма углов, составленных ребрами трехгранного угла с противоположными гранями, заключена между суммой плоских углов и половиной этой суммы. Доказать.

100. В правильный тетраэдр вписан куб так, что на каждой из граней тетраэдра лежат две вершины куба. Найти отношение объемов тетраэдра и куба.

101 а) Секущая плоскость делит боковые ребра треугольной пирамиды в отношениях:  $1:2$ ,  $1:3$ ,  $1:5$  (считая от вершины). В каком отношении эта плоскость разделит объем пирамиды?

б) На трех ребрах параллелепипеда, выходящих из его вершины  $A$ , выбираются три точки:  $K$ ,  $M$  и  $P$ , делящие эти ребра в отношении соответственно  $1:2$ ,  $1:3$ ,  $1:5$  (считая от вершины  $A$ ). В каком отношении плоскость  $KMP$  делит диагональ параллелепипеда, выходящую из вершины  $A$ ?

102.<sup>o</sup> Грани тетраэдра равновелики. Доказать, что

- а/ его противоположные ребра равны;  
б/ центры его описанной и вписанной сфер  
совпадают.

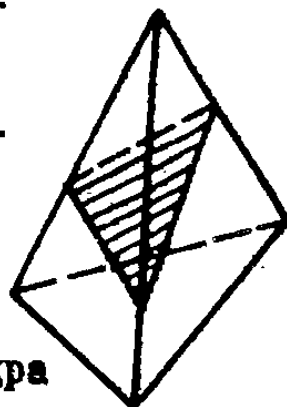
103. Существует ли тетраэдр, у которого каждое ребро является стороной тупого тупого угла?

104. Куб с ребром  $a$  срезан по углам так, что от каждой грани остался правильный восьмиугольник. Определить объем полученного тела.

105. Доказать, что общий перпендикуляр непараллельных диагоналей двух пересекающихся граней куба делит каждую из этих диагоналей в отношении 1:2.

106. Два тетраэдра имеют общий трехгранный угол. Доказать, что их объем относится как произведения ребер, исходящих из общего трехгранного угла.

107. Суммы противоположных ребер тетраэдра равны. Доказать, что окружности, вписанные в грани тетраэдра, попарно касаются.



108. Периметр каждой боковой грани выпуклой четырехугольной пирамиды равен периметру ее основания. Доказать, что в основании этой пирамиды можно вписать окружность.

109.\* Доказать, что высоты тетраэдра пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда суммы квадратов противоположных ребер равны.

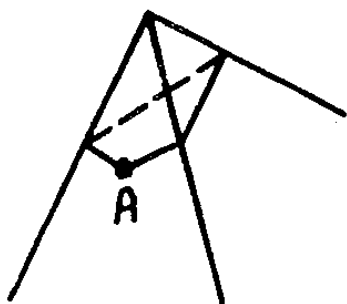
110. Доказать, что, если у тетраэдра два противоположных двугранных угла прямые, то

суммы квадратов площадей граней, заключающих эти прямые углы, равны между собой.

III. Суммы плоских углов при вершине каждой тетраэдра равна  $180^\circ$ . Доказать, что все грани тетраэдра равны.

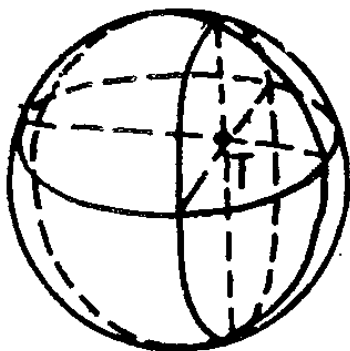
II2. Какое наибольшее значение может принимать объем многогранника, имеющего ровно 5 вершин, если все они лежат на сфере радиуса 1?

II3\*. Основанием четырехугольной пирамиды служит ромб ABCD. Угол ABC равен  $60^\circ$ , боковое ребро, проходящее через вершину B, равно стороне ромба. Доказать, что треугольник, составленный из остальных боковых ребер пирамиды — прямоугольный.



II4. Дан трехгранный угол и на одной из его граней точка A. Найти кратчайший замкнутый путь на поверхности трехгранного угла, пересекающий все ребра и проходящий через A.

II5. Определить полную поверхность призмы, описанной около шара, если площадь ее основания равна  $S$ .



II6. Дан шар и внутри него точка T. Через эту точку произвольным образом проводятся три взаимно-перпендикулярные плоскости, которые пересекают шар по трем кругам. Доказать, что сумма площадей этих трех кругов постоянна.

II7. Из 12 шнурков, длиной 10 см каждый, сделана сетка в форме куба. Внутри сетки помещен резиновый шар и раздут до



максимального размера. Поверхность шара  
плотно обтянута сеткой. Найти радиус шара.

118. Можно ли на непрозрачной планете,  
имеющей форму шара, расположить 8 станций  
слежения так, чтобы любое тело, находящееся  
над планетой на высоте, равной ее диаметру,  
было видно по крайней мере с двух станций?

119\* а) Проектор освещает угол  $90^\circ$ . До-  
казать, что расположенные в четырех произ-  
вольных точках прожектора можно направить  
так, чтобы осветить всю плоскость.

б) В каждой из восьми точек пространства  
стоит прожектор, который освещает октант  
(трехгранный угол со взаимно-перпендикуляр-  
ными ребрами) с вершиной в этой точке. До-  
казать, что можно направить прожектора так,  
чтобы они осветили все пространство.

120\* Из трех стержней нужно изготовить  
жесткую пространственную конструкцию так,  
чтобы стержни не соприкасались между собой,  
а были только связаны нитками, прикреплен-  
ными к их концам.

а) Какое наименьшее число  $k$  нитей для этого  
необходимо?

б) При каком соотношении между  $a$  и  $\ell$   
можно изготовить такую конструкцию, в кото-  
рой все стержни имеют длину  $a$ , а все  $k$   
нитей — длину  $\ell$  ?

