

Peatükk 1

Diskreetne matemaatika

I Dirichlet' printsiip

Dirichlet'¹ printsiip (lihtvariant). Kui n puuris istub kokku vähemalt $n + 1$ küülikut, siis leidub puur, milles istub vähemalt kaks küülikut.

1. Tuginedes antropoloogiale, võib öelda, et ei leidu inimest, kellel oleks rohkem kui 500 000 juuksekarva. Tõesta, et Eestis leidub kaks võrdse juuksekarvade arvuga inimest.
2. Korratul õpilasel on sahtlis viit eri värvi sokke (igast värvist vähemalt kaks). Mitu sokki tuleks sahtlist võtta, et võetud sokkide seas oleks kaks sama värvi?
3. Tõesta, et mistahes kümne positiivse täisarvu seas leidub alati kaks arvu, mis algavad ühe ja sama numbriga. Kas võib väita, et leiduvad kaks sellist, mille lõpunumbrid on võrdsed?
4. Viskame kaht täringut. (*Vise* tähendab täisarvupaari saamist, kus mõlemad paarilised on hulgast $\{1, \dots, 6\}$.) Mitu korda on tarvis visata, et kindlasti saada kaks viset, mille silmade summad on võrdsed?

Dirichlet' printsiip (üldvariant). Kui n puuris istub kokku vähemalt $kn + 1$ küülikut, siis leidub puur, milles istub vähemalt $k + 1$ küülikut.

5. Koolis on 36 õpilast. Kas järgnevad väited on tõesed? a) Vähemalt kahel õpilasel on sünnipäev samal kuupäeval (kuu võib erineda). b) Vähemalt neljal õpilasel on sünnipäev ühel ja samal kuul. Mitu õpilast peaks selles koolis vähemalt olema, et kindlasti leiduks vähemalt 3 last, kes tähistaksid oma sünnipäeva ühel ja samal päeval aastas? (Vaatleme ainult lihtaastaid.)
6. Konverentsist võttis osa 40 delegaati 13 riigist. Tõesta, et vähemalt ühe riigi delegatsioon oli rohkem kui 3 liiget.

¹Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), saksa matemaatik

7. Mitu korda on tarvis visata kolme täringut, et kindlasti olla teinud vähemalt neli viset, mille silmade summad on võrdsed? (*Vise* tähendab täisarvukolmiku saamist, kus kõik elemendid on hulgast $\{1, \dots, 6\}$.)
8. Mitu korda on tarvis visata kahte täringut, et saada garanteeritult kolm korda samad silmad mõlemal täringul? (*Vise* tähendab täisarvupaari saamist, kus mõlemad paarilised on hulgast $\{1, \dots, 6\}$.) Lahendada ülesanne a) juhul, kui täringud on ühesugused, st. silmade paarid $(2, 1)$ ja $(1, 2)$ loeme võrdseteks; b) juhul, kui täringud on erinevad (näiteks eri värvi), st. näiteks silmade paarid $(2, 1)$ ja $(1, 2)$ loeme erinevateks.
9. Konverentsist võttis osa 70 delegaati, kes kõnelesid 11 erinevat keelt. Iga delegaat kõneles ainult üht keelt. Üht keelt kõneles ülimalt 15 delegaati. Otsustati valida ametlikuks keeleks iga selline keel, mida kõneles vähemalt 5 delegaati. Tõesta, et konverentsil oli vähemalt 3 ametlikku keelt.
10. Kuus matemaatikut erinevatest riikidest on omavahel kirjavahetuses. Iga kaks matemaatikut kirjutavad ühel meetodil kahest: e-post või tavapost. Tõesta, et leiduvad kolm, kes omavahel kirjutavad ühel ja samal meetodil.
11. Seitseteist matemaatikut erinevatest riikidest on omavahel kirjavahetuses. Iga kaks matemaatikut kirjutavad ühes kolmest keelest: inglise, prantsuse või vene. Tõesta, et leiduvad kolm, kes omavahel kirjutavad ühes ja sellesamas keeles.
12. Lõpmatul malelaua paiknevad 7991 maleratsut. Tõesta, et nende hulgast on võimalik välja valida 1997 sellist, millest ükski pole teise tule all.

Rakendusi geomeetrias

13. Aias mõõtmetega $35 \text{ m} \times 42 \text{ m}$ on 100 puud. Kas saab leida sellise $3 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ ristküliku, et selles kasvaks vähemalt kaks puud?
14. Aianduses kehtivate reeglite kohaselt peab kahe puu vaheline kaugus olema suurem kui 5 meetrit. Tõesta, et ristkülikukujulises aias mõõtmetega $20 \text{ m} \times 15 \text{ m}$ peab seetõttu olema vähem kui 26 puud.
15. Ruudus mõõtmetega $10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ asetsevad 101 punkti. Näidake, et selles ruudus võib leida kolmnurga pindalaga 1 cm^2 , milles asub vähemalt kaks antud punkti.
16. Ruudus küljepikkusega 1 on märgitud 51 punkti. Tõesta, et leiduvad kolm märgitud punkti, mis asuvad: a) ruudus küljepikkusega 0,2; b) ringis raadiusega $\frac{1}{7}$.
17. Ringis diameetriga 5 on valitud 10 punkti. Tõesta, et nende seas leidub 2 punkti, mille vaheline kaugus on vähem kui 2.

Rakendusi arvuteoorias

18. Tõesta, et kolme suvalise täisarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu, mille summa ja vahe jaguvad arvuga 2.
19. Tõesta, et viie suvalise täisarvu seast on alati võimalik välja valida kolm arvu, mille summa jagub kolmega.

20. Tõesta, et mistahes $n + 1$ täisarvu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende vahe jagub arvuga n .
21. Tõesta, et viie mistahes täisarvu ruudu seast on alati võimalik välja valida kaks arvu nii, et nende ruutarvude vahe jagub seitsmega.
22. Tõesta, et iga positiivse täisarvu n jaoks leidub arv kujul $11 \dots 100 \dots 0$, mis jagub n -ga.
23. Esimese klassi õpilane Peeter tunneb vaid numbrit 1. Tõesta, et ta võib kirjutada arvu, mis jagub arvuga 1989.
24. Tõesta, et n arvu seast saab valida mõned selliselt, et nende summa jagub arvuga n .
25. Tõesta, et arvu 37 mingi aste lõpeb numbrite rühmaga 00001.
26. Olgu arv p ühistegurita arvuga 100000. Tõesta, et arvu p mingi astme kümnendesitus lõpeb numbrite rühmaga 00001. Tõesta veel, et iga positiivse täisarvu n korral leidub selline positiivne täisarv k , et p^k kümnendesituse lõpus on n nulli ja number 1.
27. Koordinaattasandil on märgistatud 5 täisarvuliste koordinaatidega punkti ning ühendatud paarikaupa lõikudega. Tõesta, et nende lõikude keskpunktide seas leidub vähemalt üks, mille koordinaadid on samuti täisarvud.

II Matemaatiline induktsioon

Näide. Tõesta, et

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Lahendus. Kontrollime kõigepealt võrduse kehtivust juhul $n = 1$. Sel juhul on vasakul pool 1 ja paremal pool $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Järelikult juhul $n = 1$ väide kehtib.

Eeldame nüüd, et võrdus kehtib mingi arvu $n = k$ korral ja näitame, et sellest järeldub võrduse kehtivus $n = k + 1$ jaoks. Olgu siis $n = k + 1$; teisendades saame

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (n-1) + n &= 1 + 2 + \dots + k + (k+1) \stackrel{(*)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

kusjuures märgiga $(*)$ tähistatud kohas kasutasime eeldust. Tuleb välja, et võrduse kehtivusest mingi arvu $n = k$ jaoks järeldub võrduse kehtivus järgmise arvu $n = k + 1$ jaoks. Matemaatilise induktsiooni printsiibi kohaselt kehtib võrratus iga arvu $n \in \mathbb{N}$ korral. $\square$

28. Tõesta järgmised väited:

- a) $5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2}$ jagub 19-ga iga täisarvu $n \geq 0$ korral;
 b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ jagub 133-ga iga positiivse täisarvu n korral;

c) kui $n > 1$, siis $2^{2^n} + 1$ lõpeb 7-ga.

29. Tõesta võrdused:

- a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
- b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$;
- d) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$;
- e) $1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$;
- f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$;

30. Tõesta induktsiooniga, et kumera n -nurga sisenurkade summa S_n avaldub valemiga $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

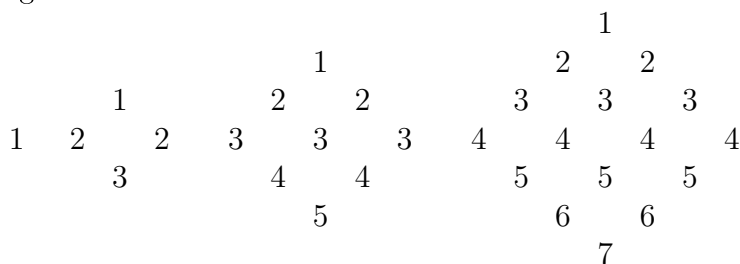
31. Tõesta, et tasandil asuvad n sirget tekitavad ülimalt $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ piirkonda.

32. Läbi ühe punkti pannakse n tasandit nii, et ükski kolm neist ei lõiku mööda sama sirget. Tõesta, et need tasandid jaotavad ruumi $n^2 - n + 2$ osaks.

33. Loeme, et kogum tasandeid on üldasendis siis, kui igal kahel tasandil leidub ühine lõikesirge ja igal kolmel tasandil leidub ühine lõikepunkt, kusjuures need lõikesirged ja lõikepunktid on kõik erinevad. Tõesta, et n üldasendis tasandit jaotavad ruumi $\frac{n^3 + 5n + 6}{6}$ osaks.

34. Ringmaanteel, mille pikkus on 100 km, seisab n autot. Neil on ühtekokku nii palju bensiini, et katta 101 km. Tõesta, et leidub üks auto, mis, alustades oma bensiiniga ja kogudes teel bensiini ülejäänud autodelt, võib läbida täisringi. (Bensiini tohib võtta ainult siis, kui autod on kõrvuti; autot lükata ei tohi.

35. Positiivsetest täisarvudest koostatakse rombid küljepikkusega 1, 2, 3, ... allnäidatud viisil. Leia n -nda rombi arvude summa ja tõesta saadud valemi õigsus induktsiooniga.



36. Linnas elab n latatara, kusjuures $n \geq 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada mingi uudise. Tõesta, et on võimalik organiseerida telefonikõned niiviisi, et pärast $2n - 4$ kõnet teab iga latatara iga ülejäänud uudist.

37. Tõesta, et kui n positiivse reaalarvu $x_1, x_2, \dots, x_n$ korral $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$, siis $(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n) \geq \frac{1}{2}$.

38. Malelaul mõõtmega $2^n \times 2^n$ ruutu värvitakse üks vabalt valitud ruut punaseks. Tõesta, et malelaua saab katta kolmeruuduliste L -kujuliste tükidega nii, et nähtavale jääb ainult punane ruut.



Leia viga järgmises kahes „tõestuses”.

39. Kõik linnud on ühte värvi.

Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k + 1$ lindu $L_1, \dots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \dots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \dots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \dots, L_k$, seega on kõik $k + 1$ lindu ühte värvi.

40. Kõik positiivsed täisarvud on omavahel võrdsed. Märkigu tähis $\max(x, y)$ arvude x ja y seast suurimat. Tõestame väite induktsiooniga arvu $\max(x, y)$ väärtuse järgi.

Baas. Kui $\max(x, y) = 1$, siis peab olema $x = y = 1$, sest tegemist on positiivsete täisarvudega.

Samm. Eeldame, et väide kehtib arvude puhul, mille maksimum on k . Olgu nüüd arvud x ja y sellised, et $\max(x, y) = k + 1$. Viimane võrdus on samaväärne võrdusega $\max(x - 1, y - 1) = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $x - 1 = y - 1$, millest $x = y$.

III Graafid

Graaf $G = \langle V, E \rangle$ koosneb **tippude** (lõplikust) hulgast V ning hulga V kaheelemendiliste alamhulkade (**servade**) hulgast E . Tippude hulk V ei tohi olla tühi.

Selline definitsioon **ei luba** graafe, milles oleks *silmuseid* (servi tipust tema endani) ning *kordseid servi* (kahe tipu vahel rohkem kui üks serv). Mõnikord nimetatakse antud definitsioonile vastavaid graafe *lihtgraafideks*; kui lubada ka silmuseid ja kordseid servi, saame *multigraafi*. (Kui pole öeldud teisiti, on edasises kõik graafid lihtgraafid. Mitmed järgnevad mõisted on siiski võimalik defineerida ka multigraafide jaoks.)

Graafina võime vaadelda näiteks:

- 1) punkte ja nendevahelisi jooni tasandil või ruumis, kui pole oluline punktide paigutus, joonte kuju ja lõikumine väljaspool punkte;
- 2) linnu ja nendevahelisi maanteid, lennu- või rongiliine;
- 3) ristmikke ja nendevahelisi tänavalõike linnas;
- 4) tube ja nendevahelisi uksi majas;
- 5) inimesi ja nendevahelisi tutvus-, sõprus- vm. suhteid;
- 6) mingi mängu seise ja ühest seisust teise viivaid käike.

Graafi tipu **astmeks** nimetatakse sellest lähtuvate servade arvu.

Ahelaks graafi tipust x tippu y nimetatakse lõplikku servade järjendit $xa_1, a_1a_2, \dots, a_{n-2}a_{n-1}, a_{n-1}y$. Ahelat, mille kõik tipud on erinevad, nimetatakse **lihtahelaks**. Ahelat, mille algus- ja lõpptipp langevad kokku, nimetatakse **kinniseks ahelaks**. Kinnist ahelat, mille kõik tipud on erinevad ja milles on vähemalt kolm tippu, nimetatakse **tsükliks**.

Graafi nimetatakse **sidusaks**, kui selle mistahes kahe tipu jaoks leidub neid ühendav ahel.

Graafi, mille kõik servad on varustatud suunaga, nimetatakse **orienteeritud** graafiks. Kui kõik servad on ilma suunata, räägitakse **orienteerimata** graafist.

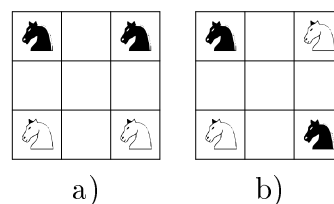
Ahelat, mis sisaldab graafi iga serva täpselt ühe korra, nimetatakse **Euleri² ahelaks**. **Kinniseks Euleri ahelaks** nimetatakse Euleri ahelat, mille esimene ja viimane tipp langevad kokku. **Euleri graafiks** nimetatakse sidusat graafi, milles leidub kinnine Euleri ahel.

Sidusat tsükliteta graafi nimetatakse **puuks**. Igal sidusal graafil leidub *aluspuu*, st. niisugune puu, mille tipud langevad kokku esialgse graafi tippudega ning mille servade hulk on antud graafi servade hulga alamhulk.

41. 3×3 laual on kaks valget ja kaks musta ratsut. Kas on võimalik ratsudel malekäikude abil saada olukorrast a) olukorda b)?

42. Tõesta, et igas graafis on tippude astmete summa paarisarv.

43. Tõesta, et igas graafis on paaritu astmega tippe paarisarv.



44. Tõesta, et igal vähemalt kahe inimesega peol leidub kaks inimest, kes tunnevad sama arvu teisi peolisi.

Märkus. Siin ülesandes (ja üldse tüüpiliselt) rahuldab selline tundmise/tutvuse seos järgmisi tingimusi: *irrefleksiivsus* (keegi ei tunne iseennast) ja *sümmeetrilisus* (kui A tunneb B -d, siis ka B tunneb A -d).

45. Tõesta, et 51 inimesega peol leidub alati inimene, kes tunneb paarisarvu teisi inimesi.

46. Tõesta, et igas vähemalt 2 tipuga puus leidub *leht*, st. tipp astmega 1.

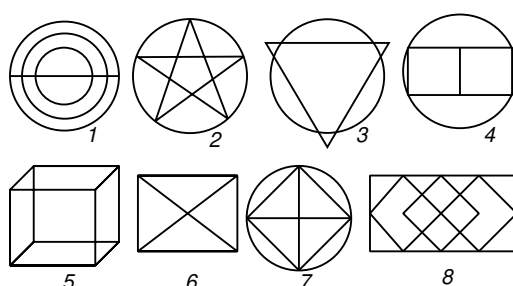
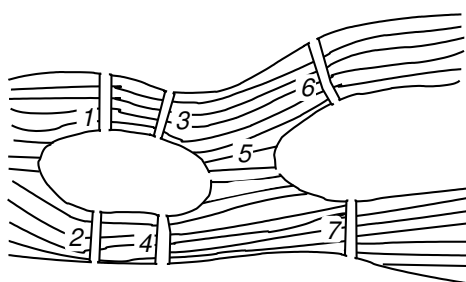
47. Olgu T graaf, millel on n tippu ($n \geq 2$). Tõesta, et järgmised väited on kõik üksteisega samaväärsed.

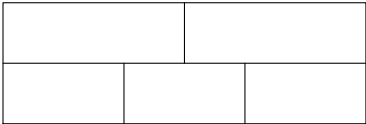
- T on puu (st. sidus ja tsükliteta).
- T on tsükliteta graaf, millel on $n - 1$ serva.
- T on sidus graaf, millel on $n - 1$ serva.
- T on sidus ning iga tema serv on *sild* (selline serv, mille kustutamisel graafi sidusus kaob).
- T suvalise kahe tipu vahel on täpselt üks lihtahel.
- T on tsükliteta, aga mistahes uue serva lisamisel tekib tsükkel.

²Leonhard Euler (1707–1783), šveitsi matemaatik.

Näpunäide. Tõesta kõigepealt implikatsioonid $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$ ning seejärel $(a) \Rightarrow (e) \Rightarrow (f) \Rightarrow (a)$.

48. Linnas M võib mistahes metroojaamast mistahes teise sõita (võib-olla ümberistumisega). Tõesta, et leidub jaam, mille võib remondiks sulgeda, nii et kõigist teistest jaamadest saab kõigisse teistesse sõita nagu enne.
49. (Euler, 1736) Königsbergis (praegu Kaliningrad) oli Euleri ajal 7 silda, mis ühendasid Pregeli jõe kaldaid saartega. Kas võib jalutuskäigul linnas läbida kõik seitse silda, ületamata ühtki neist kahte korda?
50. Milliseid kujunditest 1–8 on võimalik joonistada pliatsit paberilt tõstmata ja juba tõmmatud joont üle joonistamata?



51. Tõesta **Euleri teoreem**: Lõplikus rohkem kui ühe tipuga sidusas graafis G leidub Euleri tsükkel parajasti siis, kui G kõigi tippude astmed on paarisarvud.
52. (NL 1961, 8. klass) On antud 16 lõigust koosnev kujund. Tõesta, et ei leidu kõverat, mis lõikaks kõiki lõike täpselt üks kord. Kõver ei tarvitse olla kinnine, võib ennast lõigata, kuid ei tohi lõike puutuda ega läbida lõikude otspunkte.
 
53. Matemaatikaringi kogunemisele tuli 10 õpilast, kellele esitati 10 ülesannet. Iga ülesande lahendas ära kaks õpilast ning iga õpilane lahendas ära kaks ülesannet. Tõesta, et võib korraldada lahenduste ettekandmise sel viisil, et iga õpilane räägiks ühe oma lahenduse ning kõigi ülesannete lahendused saaksid ette kantud.
54. Tõesta, et mistahes kuue inimese seas leiduvad kolm sellist, kes paarikaupa tunnevad üksteist, või kolm sellist, kes paarikaupa üksteist ei tunne.
55. (Austraalia, 1998) Härja ja proua Mäger läksid piknikule, kus peale nende osales veel 4 abielupaari. Kohale jõudes tervitasid mõned neist oma paremaid sõpru kättpidi, kuid keegi ei surunud seejuures kätt oma abikaasale. Peo edenedes tekkis hr. Mägral huvi, kui paljudega keegi neist oli kätelnud, ning ta küsis seda kõigilt teistelt (sh. ka oma abikaasalt). Kui mitme piknikul viibijaga kätles hr. Mäger, kui kõik 9 küsitletut andsid hr. Mägrale erinevad vastused?
56. (Lõuna-Aafrika Vabariik, 1997) Klassi poisid korraldasid maadlusvõistluse, kus iga poiss maadles ühe korra igaühega ülejäänutest ning iga kohtumine lõppes ühe maadleja võiduga. Tüdrukud otsustasid anda auhinna igale poisile, kes võidab igaüht ülejäänutest kas omavahelises kohtumises või kaudselt (ütleme, et poiss A võidab

kaudselt poissi B , kui leiduvad poisid $C_1, \dots, C_k$, nii et A võidab C_1 , C_1 võidab C_2 , $\dots$, C_k võidab B -d).

- Kui palju võis n poisi korral maksimaalselt olla auhinnasaajaid? (Eeldame, et $n \geq 3$.)
- Kas on võimalik, et ükski poistest ei saanud auhinda?
- Tõesta, et kui auhinna sai ainult üks poiss, siis ta võitis kõik kohtumised.

IV Invariandid ja värvimised

Olgu meil objekt $\mathcal{O}$. **Invariandiks** nimetatakse objektiga $\mathcal{O}$ tehtava teisenduse sellist omadust, mis jääb teisenduse käigus muutumatuks.

Näiteks kui ruumis on alguses 58 inimest ja neid tuleb sinna juurde või läheb ära alati 7-kaupa, siis on invariandiks inimeste arvu jääk 7 järgi. Kas saab mingil ajahetkel ruumis olla 1000 inimest?

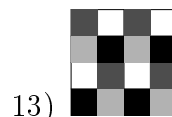
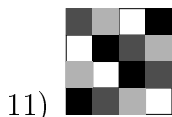
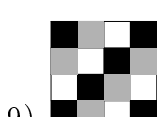
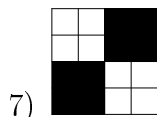
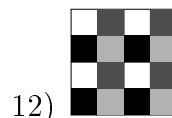
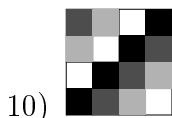
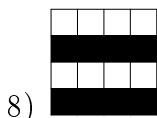
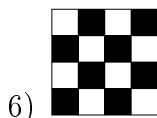
Invariandiülesannete tüüpiliseks sõnastuseks on: „Kas on võimalik ... [mingi teisendus] abil saada ... [mingi lõppolek]?“

Sellisel ülesandel saab olla kaht sorti lahendusi. Kui vastus küsimusele on jaatav, siis tuleb ära näidata teisenduste tegemise järjekord ning veenduda, et saavutati soovitud lõppolek. Kui aga vastus on eitav, tuleb leida teisendusele sobiv invariant, ning põhjendada, et algolekus ja lõppolekus on invariandi väärtused erinevad.

Ülalesitatud ülesandes on vastus eitav, kuna 58 (algolek) jääk 7 järgi on 2, aga 1000 (lõppolek) jääk 7 järgi on 6.

Levinud invariante ja värvimisi:

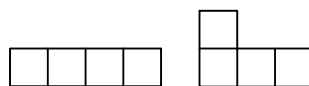
- 1) arvude summa või korrutis;
- 2) arvu jääk mingi mooduli järgi;
- 3) arvu ruudu vm. astme jääk mingi mooduli järgi (mooduliks sobivad hästi 3, 5, 7, 8 jne.)
- 4) arvu täisarvulisus;
- 5) malendite käikude invariandid (diagonaalid, ruutude värvid jne.);



57. Rahaautomaat annab raha peeneks vahetades iga mündi asemele alati viis münti. Kas selle automaadi abil on võimalik ühte metallmünti vahetada 26-ks mündiks?

58. Malelauast lõigatakse välja üks nurgaruut. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks?
59. Malelauast lõigatakse välja kaks teineteise vastas asuvat nurgaruutu. Kas järelejäänud osa on võimalik tükeldada 2×1 tükkideks? Kuidas on juhul, kui lõigatakse kaks sama servaga piirnevat nurgaruutu.
60. 12×12 ruudust, mis koosnes 144 ühikruudust, lõigati kolmest nurgast ära üks ruut mõõtmetega 1×1 . Kas järelejäänud kujundit, mis koosnes 141-st ühikruudust on võimalik katta 47 ristkülikuga, millede mõõtmed on 1×3 , nii et iga ristkülik kataks täpselt kolme ühikruutu?
61. Olgu meil malelaua ratsu asemel „sõjaratsu“, kes liigub kolm sammu mingis suunas ja ühe sammu kõrvale. Kas sõjaratsu saab mingist ruudust alustades kõik malelaa ruudud läbi käia?
62. Tahvlil on arvud 1, 2, ..., 2000. Tahvlilt kustutatakse samm-sammult kaks arvu ja kummagi asemel kirjutatakse nende arvude aritmeetiline keskmine. Kas mingi lõpliku arvu selliste sammude järel võivad tahvlil olla arvud 1000, 1000, ..., 1000?
63. Tahvlile kirjutatakse ritta arvud 1, 2, ..., 1996. Edasi tegutsetakse nii, et igal sammul kustutatakse rea algusest kaks arvu ära ja kirjutatakse nende korrutis rea lõppu juurde. Milline arv jääb lõpuks ainsana tahvlile?
64. Tünnis on 2008 õuna. Mari ja Jüri võtavad vaheldumisi tünnist õunu, kusjuures korraga võib võtta ühe kuni kolm õuna ning esimesena võtab õunu Mari. Tõesta, et Jüri saab alati tagada endale võimaluse võtta tünnist viimane õun.
65. Nummerdame korrapärase viisnurga küljed ja diagonaalid arvudega 1, 2, ..., 10 ja vaatleme kõikvõimalikke kolmnurki, mille tippudeks on esialgse viisnurga tipud. Kas on võimalik, et kõigi selliste kolmnurkade külgede arvude summad osutuvad võrdseks?
66. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades a) kahte b) kolme värvi. Tõesta, et alati leidub kaks sama värvi punkti, mille vaheline kaugus on 1 ühik.
67. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi (sealjuures mõlemat värvi punkte esineb). Tõesta, et alati leidub kaks eri värvi punkti, mille vaheline kaugus on 1 ühik.
68. Tasandi kõik punktid on värvitud kasutades kahte värvi. Tõesta, et sel tasandil leidub võrdhaarne kolmnurk, mille kõik tipud on sama värvi.
69. Tasandil on osa täisarvuliste koordinaatidega punkte värvitud valgeks ja kõik ülejäänud mustaks. Tõesta, et leidub võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille kõik tipud on täisarvuliste koordinaatidega ja ühte värvi.
70. Korrapärase seitsenurga tipud on värvitud kahte värvi – valgeks ja mustaks. Tõesta, et nende seas leidub kindlasti kolm sama värvi tippu, mis on tippudeks võrdhaarsele kolmnurgale. Kas analoogne väide kehtib ka korrapärase kaheksanurga korral?
71. Hiir hakkab sööma juustust kuubikut, mille serva pikkus on 3 ja mis on jaotatud 27-ks ühikkuubiks. Kui hiir on ära söönud mingi ühikkuubi, hakkab ta sööma järgmist ühikkuupi, millel oli eelnevaga ühine tahk. Kas hiir saab ära süüa kõik ühikkuubid peale keskmise?

72. Tõesta, et 8×8 ruudustikku ei saa tükeldada 15-ks joonisel näidatud tükiks A ja üheks tükiks B .



73. Tõesta, et 102×102 ruudustikku ei saa tükeldada ainult ristkülikuteks mõõtmetega 1×4 .
74. Ruudukujuline põrand mõõtmetega 100×100 , välja arvatud 2×2 tükk, tuleb katta 1×3 plaatidega. Kas see on võimalik, kui 2×2 põrandatükk asub a) täpselt põranda keskel; b) põranda ühes nurgas?
75. Ruudustiku 5×5 igal ruudul istub üks konn. Teatud ühel ja samal hetkel hüppab iga konn naaberruudule, mis omas esialgsega ühist serva. Tõesta, et pärast hüppamist jääb ruudustikku vähemalt üks tühi ruut.
76. Ristkülikukujulise karbi põhi täideti tükkidega 2×2 ja 1×4 ruutu. Tükid võeti karbist välja ja üks 2×2 tükk kaotati ära. Selle asemel leiti üks 1×4 tükk. Tõesta, et nüüd ei saa karbi põhja nende tükkidega katta.
77. Kas 7×7 ruudustikust on võimalik välja lõigata üks ruut selliselt, et järelejäänud ruudustikku ei saa katta 15 1×3 ruudust koosneva kujundiga ning ühe kolmest ruudust koosneva L-kujulise kujundiga?
78. 8×8 malelaud on tükeldatud 1 ühikruuduks ja 21 ristkülikuks kujuga 1×3 . Millised on ühikruudu võimalikud asukohad?

V Loogika

Sisulised loogika ülesanded (hulkadevahelise vastavuse leidmine)

Neid ülesandeid on võimalik lahendada võimaluste läbivaatamisega, seejuures sobivalt valitud skeemid ja tabelid lihtsustavad ülesande lahendamist.

79. Kokku said kolm sõpra, kelle perenimed olid Valge, Hall ja Must. Ühel neist oli valge särk, teisel oli hall ja kolmandal must särk. Valges särgis sõber ütles Mustale: „Huvitav, ühelgi meist ei ühti särgi värvus tema perenimega”. Millist värvi särki kandis iga sõber?
80. Kolm klassiõde Viire, Iiris ja Sirje on õpetajad ja nad õpetavad matemaatikat, füüsikat ja kirjandust Tartu, Räpina ja Kuressaare koolides. Viire ei tööta Räpinas, Iiris ei tööta Tartus, tartlane õpetab kirjandust, Räpinas töötav õpetaja ei õpeta füüsikat, Iiris ei õpeta matemaatikat. Millist ainet ja millises linnas õpetab iga kolmest klassiõdest?

Mõnikord on võimaluste vaatlemisel kasulik kõrvale heita võimatud sündmused.

81. Majas elab A , tema naine B ja kolm last C , D ja E . Järgmised väited nende kohta on õiged:
- Kui A vaatab telerit, siis ka B vaatab telerit.
 - Vähemalt üks lastest D ja E vaatab telerit.
 - Täpselt üks elanikest B ja C vaatab telerit.

- d) Lapsed C ja D kas vaatavad korraga või ei vaata kumbki telerit.
- e) Kui E vaatab telerit, siis vaatavad ka A ja D .

Kes vaatab ja kes ei vaata telerit?

- 82.** Valitseja andis kummalegi oma kahest targast ühe kaardi nii, et nad teise kaarti ei näinud ja lausus: „Kummalgi kaardil on üks positiivne täisarv, kusjuures need arvud erinevad ühe võrra”. Valitseja küsis esimeselt targalt: „Milline arv on teise targa kaardil?” ja sai vastuseks. „Ei tea”. Seejärel küsis ta teiselt targalt, kas see teab, milline arv on esimese targa kaardil. Ka teine vastas: „Ei tea”. Taas küsis valitseja sama küsimuse esimeselt targalt ja sai ikka täpselt sama vastuse. Kui ta nüüd küsis teist korda teiselt targalt, siis see ütles, milline arv oli esimese targa kaardil. Millised arvud olid kaartidel ja kuidas arutles teine tark?

Tõesed ja valed väited. Tõerääkijad (rüütliid), valetajad ja kavalpead

- 83.** Mitu raamatut võib Margusel olla, kui ainult üks järgmistest väidetest on tõene?
- a) Raamatuid on rohkem kui 1000.
 - b) Raamatuid on vähem kui 1000.
 - c) Üks raamat on tal kindlasti olemas.
- 84.** Viie võistleja lõpptulemuste kohta saadi viis järgmist kaheosalist väidet:
- a) Kalju sai I koha, Valeri aga IV koha;
 - b) Siim sai II koha, aga Valeri sai IV koha;
 - c) Siim sai II koha, aga Kalju jäi III kohale;
 - d) Tiit sai I koha, Meelis aga II koha;
 - e) Meelis sai III koha, Tiit aga V koha.

Koosta võistlejate paremusjärjestus, kui on teada, et igas väites on üks osa tõene, teine aga väär.

- 85.** Kohus arutab Brauni, Johanson ja Simsoni süüasja. Üks neist sooritas kuriteo. Ülekuulamisel tegi igaüks neist kaks avaldust.
Braun: „Mina seda ei teinud. Simson tegi seda.”
Johanson: „Simson ei ole süüdi. Braun tegi seda.”
Simson: „Mina seda ei teinud. Johanson ei teinud seda.”
Kohus tegi kindlaks, et üks süüalustest valetas mõlemal korral, teine rääkis mõlemal korral tõtt, kolmanda üks väidetest oli õige, teine aga vale. Kes sooritas kuriteo?
- 86.** Olgu x positiivne täisarv. Järgmistest väidetest $2x > 70$, $x < 100$, $4x > 25$, $x > 10$ ja $x > 5$ on kaks õiget ja kolm vale. Millega on võrdne x ?
- 87.** Nelja saareelaniku vahel toimus järgmine vestlus:
- a) Vähemalt üks meist on valetaja.
 - b) Vähemalt kaks meist on valetajad.
 - c) Vähemalt kolm meist on valetajad.
 - d) Meie seas pole valetajaid.

Kes neljast rääkis tõtt, kes valetas?

Kallamisülesanded

88. Meie käsutuses olevate anumate mahtuvus on 3 liitrit ja 5 liitrit. Vett saame kraanist ja seda ära kallata saame kraanikaussi. Kuidas saada 1 liiter vett?
89. Laual on kaks liivakella, millega saab mõõta vastavalt 7 minutit ja 11 minutit. Muna keetmiseks kulub 15 minutit. Kuidas keeta muna nii, et kellade ümber pööramisi oleks võimalikult vähe?
90. Kolmes hunnikus on 22, 14 ja 12 pähklit. Kolme ümbertõstmise abil võrdsusta pähklite arvud kuhjades. Seejuures võib ühe ümbertõstmisega ühest kuhjast võtta ja lisada teise kuhja täpselt nii palju pähkleid, kui on teises kuhjas sel hetkel juba olemas.
91. On antud kaks pudelit lahustega, mille kontsentratsioonid on erinevad. Ühes pudelis on 0,5 liitrit lahust, teises aga 0,3 liitrit. Võeti kaks ühesugust klaasi ja täideti ääreni (kumbki erinevast pudelist) ning seejärel kallati mõlemad klaasid tühjaks klaasis olevast lahusest erineva lahusega pudelisse. Tulemusena saadi mõlemas pudelis ühesuguse kontsentratsiooniga lahus. Milline oli klaaside mahtuvus?

Kaalumisülesanded

92. On n väliselt ühesugust münti, millede seas on üks teistest kergem valemünt. Kuidas on võimalik kangkaaludel ilma kaaluvihtideta määrata valemünt vähima kaalumiste arvuga juhul kui a) $n = 3$; b) $n = 9$; c) $n = 27$; d) n on suvaline positiivne täisarv?
(Saab näidata, et kui müntide arv rahuldab tingimust $3^{k-1} < n \leq 3^k$, siis vähim kaalumiste arv on k .)
93. Nelja münti seas on üks valemünt, mis erineb teistest kaalu poolest. Kuidas oleks seda münti võimalik kindlaks teha kahe kaalumisega kangkaaludel ilma kaaluvihtideta? Kas on võimalik kindlaks määrata ka seda, kas valemünt on kergem või raskem normist?
94. On 10 kotti müntidega. Üheksas kotis on õiged mündid (massiga 10 g igaüks), ühes kotis aga valemündid (massiga 11 g). Kuidas ühe kaalumisega osutiga kaaludel määrata kindlaks valemüntide kott?
95. Kuidas oleks võimalik teada saada koorma massi, kui meil on kangkaalud, mis ei ole õiged, aga vajalikul arvul kaaluvihte, mis on õiged?

Peatükk 2

Geomeetria

I Nurgad

Nurk – tasandi osa, mille eraldavad kaks ühise alguspunktiga kiirt, enamasti „väiksem“ osa tasandist; tähis $\angle ABC$, kus B on nurga tipp, BA ja BC nurga haarad

Sirgnurk – nurk, mille haarad on teineteise pikendid (haarad asetsevad ühel sirgel); kraadimõõdus 180°

Kõrvunurgad – nurgad, millel on üks ühine haar ning kaks ülejäänud haara moodustavad sirgnurga; kõrvunurkade summa 180°

Tippnurgad – kahe sirge lõikumisel tekkivad võrdsed nurgad, millest ühe haarad on teise haarade pikendid

Kolmnurga nurkade summa 180° (tõestuses kasutame sirgete paralleelsuse tunnuseid)

Kolmnurga **välisnurk** on võrdne temaga mitte kõrvuti olevate sisenurkade summaga.

Kolmnurga pikima külje vastas asub suurim nurk, suurima nurga vastas asub pikim külge.

Puutuja omadus: Puutepunktist tõmmatud raadius on risti puutujaga.

Nurgapoolitaja omadus: Punkt asub nurgapoolitajal parajasti siis, kui ta asub nurga haaradest võrdsel kaugusel.

II Kahe paralleelse sirge lõikamine kolmandaga

Kaht sirget tasandil nimetatakse paralleelseiks, kui neil ei ole ühiseid punkte. (St sirge ei ole paralleelne iseendaga.)

Kaks sirget on paralleelsed, kui nende sirgete lõikamise kolmanda sirgega tekkinud **kaasnurgad** on võrdsed (**põiknurgad** on võrdsed, **lähisnurkade** summa on 180°)

III Kolmnurk ja selle liigid

Kolmnurkade liigitus nurkade järgi – teravnurkne, täisnurkne, nürinurkne.

Kolmnurkade liigitus külgede järgi – võrdkülgne, võrdhaarne, erikülgne.

Kolmnurga võrratus. Positiivsed reaalarvud a, b, c on mingi kolmnurga küljepikkused parajasti siis, kui $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$.

Kongruentsus. Öeldakse, et kaks n -nurka on kongruentsed, kui nende vastavad küljed on võrdse pikkusega **ja** vastavad nurgad on võrdsed.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui

- kolmnurkade vastavad küljed on võrdse pikkusega (**KKK**);
- ühe kolmnurga külj ja teise kolmnurga vastav külj on võrdse pikkusega ning vastavad lähisnurgad on võrdsed (**NKN**);
- kolmnurkade kaks vastavat külge on võrdse pikkusega ja nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (**KNK**).

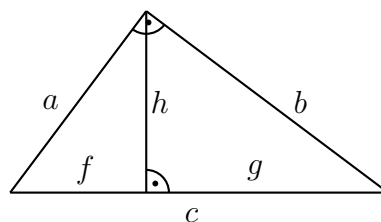
Sarnasus. Öeldakse, et kaks n -nurka on sarnased, kui nende vastavad küljed on võrdelised **ja** vastavad nurgad on võrdsed. Kolmnurkade sarnasuseks piisab kas vastavate külgede võrdelisusest **või** vastavate nurkade võrdsusest.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui

- ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga vastavate külgedega (**KKK**);
- ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga (**NN**);
- ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ning nende külgede vahelised nurgad on võrdsed (**KNK**);
- ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ning nurk, mis asub ühes kolmnurgas nimetatud küljepaari pikema külje vastas, on võrdne vastava nurgaga teises kolmnurgas (**KKN**).

Täisnurkses kolmnurgas kehtivad järgmised seosed:

- Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrgus jaotab kolmnurga kaheks esialgse kolmnurgaga sarnaseks kolmnurgaks.
- $h^2 = fg$ (kõrguse teoreem)
- $a^2 = fc$, $b^2 = gc$ (Eukleidese teoreem)
- $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagorase teoreem)



IV Lõigud kolmnurgas

Kolmnurga **kesklõik** on lõik, mis ühendab kahe külje keskpunktid. Kolmnurga kesklõik on alusega paralleelne ja tema pikkus on pool aluse pikkusest.

Kolmnurga **mediaanid** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga masskeskmes. Mediaanide lõikepunkt jaotab mediaani suhtes 2:1 tipust alates.

Kolmnurga **nurgapoolitajad** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga siseringjoone keskpunktis. Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mis suhtuvad nagu poolitava nurga lähisküljed.

Kolmnurga **kõrgused** lõikuvad ühes punktis.

Kolmnurga külgede **keskristsirged** lõikuvad ühes punktis – kolmnurga ümberringjoone keskpunktis.

V Ülesanded

1. Tõesta, et kolmnurga võrratus on samaväärne ahelvõrratusega $a + b > c > |a - b|$.
2. Tõesta, et kui c on kolmnurga pikim külg, on kolmnurga võrratus antav ainult ühe võrratusega $a + b > c$.
3. Tõesta, et mistahes kinnise murdjoone $ABCD$ korral $|AD| > |AB| - |BC| - |CD|$.
4. Võrdkülgse kolmnurga ABC sees valitakse suvaliselt punkt P . Tõestage, et lõikudest PA , PB ja PC saab uuesti konstrueerida kolmnurga.
5. Tõesta, et kolmnurga tippu ja selle vastaskülje mingit punkti ühendav sirglõik (nn. *tseviaan*) on lühem kolmnurga poolest ümbermõõdust.
6. Tõesta, et nelinurga mistahes sisepunkti kauguste summa selle nelinurga tippudest on suurem nelinurga poolest ümbermõõdust. (Veendu, et tulemus on õige ka mitte-kumera nelinurga korral.)
7. Punktid K , L ja M on kolmnurga ABC sisepunktid, mis ei asetse ühel sirgel. Tõesta, et kolmnurga KLM ümbermõõt on väiksem kolmnurga ABC ümbermõõdust.
8. Tõesta, et teravnurkse kolmnurga kõrguste pikkuste summa on suurem kolmnurga poolest ümbermõõdust, kuid väiksem selle ümbermõõdust. Too näide, et väide ei tarvitse kehtida nürinurkse kolmnurga puhul.
9. Tõesta, et trapetsi diagonaalide pikkuste summa on väiksem trapetsi ümbermõõdust.
10. Tõesta, et kahe erineva, kuid ühel tasandil asuva ning vähemalt üht ühist punkti omava ringjoone keskpunktide O_1 ja O_2 vaheline kaugus $|O_1O_2|$ ei ületa nende ringjoonte raadiuste r_1 ja r_2 summat $r_1 + r_2$. Millal kehtivad võrdused $|O_1O_2| = r_1 + r_2$ või $|O_1O_2| = |r_2 - r_1|$?
11. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust A tõmmatud kõrguse aluspunkt D asub kaatetist AB kaugusel m ja kaatetist AC kaugusel n . Tõesta, et:
 - 1) $\triangle CDA \sim \triangle ADB$ ja leia sarnasustegur;
 - 2) $|AB| : |BC| = m : \sqrt{m^2 + n^2}$;
 - 3) $|AC| : |BC| = n : \sqrt{m^2 + n^2}$.
12. Tõesta, et ringjoonele samast punktist tõmmatud puutujalõigud on võrdsed.
13. Tõesta, et kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui tema alusnurgad on võrdsed.
14. Tõesta, et kolmnurk on võrdhaarne parajasti siis, kui kokku langevad kaks kolmest lõigust: kõrgus, nurgapoolitaja, mediaan.
15. Punkt D on kolmnurga ABC nurgapoolitaja CD aluspunkt küljel AB . Tõesta, et $|AC| : |CB| = |AD| : |DB|$.
16. Võrdhaarse kolmnurga siseringjoone ja ümberringjoone keskpunktid paiknevad sümmeetriliselt kolmnurga aluse suhtes. Tõesta, et selle kolmnurga alusnurk on 36° .

17. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga siseringjoone diameeter $2r$ avaldub kaatetite a ja b ning hüpotenuusi c kaudu kujul $2r = a + b - c$.
18. Tõesta, et kolmnurga pindala S avaldub siseringjoone raadiuse r ja poole ümbermõõdu p kaudu kujul $S = pr$.
19. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub küljega AC punktis M ja küljega BC punktis L nii, et $|AM| : |MC| = 2 : 3$ ja $|BL| : |LC| = 5 : 6$. Tõesta, et selle kolmnurga pindala S avaldub kujul $S = 1,5|AC| \cdot r$, kus r on kolmnurga ABC siseringjoone raadius.
20. Täisnurkse kolmnurga ABC siseringjoone raadius on r ja ümberringjoone raadius R . Kolmnurga ABC täisnurga tipust tõmmatud kõrgus h jaotab kolmnurga ABC kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille siseringjoonte raadiused, täisnurga tipust tõmmatud kõrgused ja ümberringjoonte raadiused olgu vastavalt r_1 ja r_2 , h_1 ja h_2 ning R_1 ja R_2 . Tõesta, et
 - 1) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$;
 - 2) $h^2 = h_1^2 + h_2^2$;
 - 3) $R^2 = R_1^2 + R_2^2$.
21. Tõesta, et kolmnurga kesklõigu pikkus võrdub poolega aluse pikkusest ning et kolmnurga kesklõik on alusega paralleelne.
22. Tõesta, et trapetsi kesklõigu pikkus on võrdne aluste pikkuste aritmeetilise keskmisega ning et trapetsi kesklõik on alustega paralleelne.
23. Tõesta, et trapetsi diagonaalide lõikepunkt poolitab seda punkti läbiva ja alustega paralleelse lõigu trapetsi haarade vahel.
24. Tõesta, et trapetsi diagonaalide lõikepunkti läbiva ja alustega paralleelse lõigu pikkus võrdub aluste pikkuste korrutise ja kesklõigu pikkuse jagatisega.
25. Trapetsi diagonaalide pikkused on d_1 ja d_2 , kõrguse pikkus aga h . Tõesta, et selle trapetsi kesklõigu pikkus k avaldub kujul

$$k = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d_1^2 - h^2} + \sqrt{d_2^2 - h^2} \right).$$

26. Rööpküliku $ABCD$ küljele AD on märgitud punkt P nii, et $|AP| : |AD| = 1 : n$. Lõikude AC ja BP lõikumiskoht on tähistatud Q . Tõesta, et $|AQ| : |AC| = 1 : (n + 1)$.
27. Punktid A ja B eraldavad ringjoonest keskpunktiga O välja kaare pikkusega 60° . Sellel kaarel on võetud punkt M . Tõesta, et sirge, mis läbib lõikude MA ja OB keskpunkte, on risti sirgega, mis läbib MB ja OA keskpunkte.

VI Hulknurk

Hulknurka nimetatakse **kõõlhulknurgaks**, kui kõik tema tipud asuvad ühel ringjoonel. Hulknurka nimetatakse **puutujahulknurgaks**, kui kõik tema küljed puutuvad ühte ringjoont.

Teoreem 1. *Kõõlnelinurga vastasnurkade summa on 180° .*

Teoreem 2. Kui kumera nelinurga vastasnurkade summa on 180° , on tegemist kõõlnelinurgaga.

Teoreem 3. Kui $\angle ABD = \angle ACD$ ning B ja C asuvad samal pool sirget AD , siis punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel.

Teoreem 4. Puutujanelinurga vastaskülgede pikkuste summad on võrdsed.

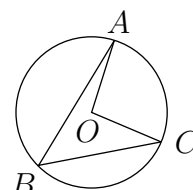
Teoreem 5. Kui kumera nelinurga vastaskülgede pikkuste summad on võrdsed, on tegu puutujanelinurgaga.

Millistel nelinurkadel leidub ümberringjoon/siseringjoon?

	ümberringjoon	siseringjoon
ruut		
ristkülik		
romb		
rööpkülik		
suvaline kumer 4-nurk		
trapets		

VII Ringjoonega seotud nurgad

Teoreem 6. Kaarele toetuv kesknurk on kaks korda suurem samale kaarele toetuvast piirdenurgast, st $\angle AOC = 2\angle ABC$.



28. Tõesta, et kõik samale kaarele (võrdse pikkusega kõõlule) toetuvad piirdenurgad on võrdsed.
29. Tõesta, et võrdse suurusega piirdenurgad toetuvad sama pikkadele kõõludele (sama suurtele kaartele).
30. Tõesta, et ringjoone diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.
31. Tõesta, et kolmnurgas ABC kehtib seos

$$\frac{|BC|}{\sin \angle BAC} = 2R,$$

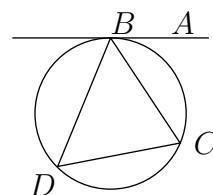
kus R tähistab kolmnurga ABC ümberringjoone raadiust.

32. Tõesta, et kõõlnelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.
33. Olgu tasandil antud kaks erinevat punkti A ja C ning nurgasuurus α . Leia kõigi selliste tasandi punktide B hulk, et kehtiks võrdus $\angle ABC = \alpha$.
34. Tõesta, et kui kumeras nelinurgas $ABCD$ kehtib võrdus $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, siis saab läbi punktide A, B, C ja D joonestada ringjoone (st nelinurk $ABCD$ on kõõlnelinurk).
35. Olgu tasandil antud neli erinevat punkti A, B, C ja D , kusjuures $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Tõesta, et läbi punktide A, B, C ja D saab joonestada ringjoone.

36. Tasandil on antud sirged s , t , u , ja v , kusjuures $s \perp u$, $t \perp v$, nurk sirgete s ja t vahel on α ning nurk sirgete u ja v vahel on β . Tõesta, et $\alpha = \beta$ või $\alpha + \beta = 180^\circ$.
37. Tõestage, et igas puutujahulknurgas leidub kolm külge, millest saab teha kolmnurga.
38. Kaks võrdse raadiusega ringjoont lõikuvad punktides A ja B . Läbi punkti A tõmmatud sirge lõikab antud ringjooni teistkordselt vastavalt punktides C ja D . Tõesta, et kolmnurk BCD on võrdhaarne.
39. Ringjoonele keskpunktiga O on joonestatud kõõl AB ning sellel kõõlul on valitud punkt C . Ringjoon läbi punktide A , C ja O lõikub esialgse ringjoonega teistkordselt punktis D . Tõesta, et kolmnurk BCD on võrdhaarne.
40. Rööpküliku $ABCD$ külgedele BC ja CD (või nende pikendustele) on tõmmatud ristlõigud AM ja AN . Tõestage, et $\triangle MAN \sim \triangle ABC$.
41. Punktist M , mis asub antud nurga (mille tipp on A) sisepiirkonnas, on tõmmatud ristsirged MP ja MQ nurga haaradele. Punktist A on tõmmatud ristsirge AK lõigule PQ . Tõesta, et $\angle PAK = \angle MAQ$.
42. Punktid M ja N on kolmnurga ABC kõrguste AM ja BN aluspunktid. Tõesta, et $\triangle ABC \sim \triangle MNC$.
43. Trapetsi lühemale alusele kui diameetrile on joonestatud ringjoon, mis puudutab trapetsi teist alust ning läbib trapetsi diagonaalide keskpunkte. Tõesta, et trapets on võrdhaarne ning selle haar on kaks korda pikem kõrgusest.
44. Tõesta, et kolmnurgas, mille küljed on a , b ja c ning nende vastasnurgad α , β ja γ , ümberringjoone raadius R ja pindala S , on tõesed võrdused

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, \quad S = \frac{abc}{4R}.$$

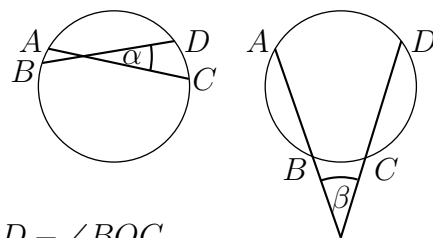
Teoreem 7 (teoreem puutujast ja kõõlust). *Ringjoonele on tõmmatud kõõl BC ning punktis B puutuja AB . Kaarel BC on võetud punkt D (vt joonist). Siis kehtib võrdus $\angle ABC = \angle BDC$.*



45. Kaks ringjoont lõikuvad punktides P ja Q . Ühel ringjoonel võetakse punkt A ; kiir AP lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis B , kiir AQ aga lõikab teist ringjoont teistkordselt punktis C . Tõesta, et sirge BC on paralleelne esimesele ringjoonele punktis A tõmmatud puutujaga.
46. Ringjooned S_1 ja S_2 lõikuvad punktides A ja P . Läbi punkti A on tõmmatud ringjoonele S_1 puutuja AB , läbi punkti P aga sirge CD , mis on paralleelne sirgega AB (punktid B ja C paiknevad ringjoonel S_2 , punkt D ringjoonel S_1). Tõestage, et $ABCD$ on rööpkülik.

Teoreem 8 (kahe kõõlu vaheline nurk). Olgu antud ringjoon keskpunktiga O ning punktid A, B, C ja D asetsegu sellel ringjoonel. Kõõlude AC ja BD vaheline nurk α ning kõõlude AB ja CD vaheline nurk β (vt joonist) avalduvad kujul

$$\alpha = \frac{\angle AOB + \angle COD}{2}, \quad \beta = \frac{\angle AOD - \angle BOC}{2}.$$



47. Punktid A, B, C ja D paiknevad ringjoonel antud järjekorras. Olgu M kaare AB keskpunkt. Tähistame kõõlude MC ja MD lõikepunktide kõõluga AB vastavalt E ja K . Tõestage, et $KECD$ on kõõlnelinurk.
48. Punktid A, B, C ja D paiknevad ringjoonel antud järjekorras. Punktid A_1, B_1, C_1 ja D_1 on vastavalt kaarte AB, BC, CD ja DA keskpunktid. Tõestage, et $A_1C_1 \perp B_1D_1$.
49. Kolmnurga ABC sees on võetud punkt P nii, et $\angle BPC = \angle A + 60^\circ$, $\angle APC = \angle B + 60^\circ$ ja $\angle APB = \angle C + 60^\circ$. Sirged AP, BP ja CP lõikavad kolmnurga ABC ümberringjoont punktides A', B' ja C' . Tõestage, et kolmnurk $A'B'C'$ on võrdkülgne.

VIII Lõigud ringjoones

Teoreem 9 (teoreem lõikuvatest kõõludest). Kui kõõlud AB ja CD lõikuvad punktis P , siis $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$.

Teoreem 10 (lõikuvate kõõlude teoreemi pöördteoreem). Kui lõigud AB ja CD lõikuvad punktis P nii, et $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$, siis asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel.

Teoreem 11 (teoreem lõikajalõikudest). Kui ringjoonele on punktist P tõmmatud lõikajad, mis lõikavad seda ringjoont vastavalt punktides A ja B ning C ja D , siis $|AP| \cdot |BP| = |CP| \cdot |DP|$.

Teoreem 12 (teoreem puutujast ja lõikajast). Kui ringjoonele on punktist P tõmmatud lõikaja, mis lõikab seda ringjoont punktides A ja B ning puutuja, mis puutub ringjoont punktis C , siis $|AP| \cdot |BP| = |CP|^2$.

Kehtivad ka Teoreemide 11 ja 12 pöördteoreemid. Teoreemide 9–12 koosseisus esinevat korrutatist nimetatakse punkti P potentsiks, täpsemalt, $p(P) = |PO|^2 - r^2$, kus r on selle ringjoone raadius, mille suhtes punkti P potentsi arvutatakse.

Kui on antud kaks ringjoont, siis selliste punktide geomeetriline koht, mille potentsid mõlema ringjoone suhtes on võrdsed, on sirge. Kõnealust sirget nimetatakse nende ringjoonte radikaalteljeks. (Lõikuvate ringjoonte korral läbib radikaaltelg ringjoonte lõikepunkte.)

50. Kaks ringjoont lõikuvad punktides X ja Y . Lõigul XY võetakse punkt P . Esimesel ringjoonel võetakse kõõl AB ja teisel ringjoonel kõõl CD nii, et nad lõikuvad punktis P . Tõesta, et punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel.

IX Mitmesuguseid ülesandeid

51. Tõesta, et kolmnurgas külgedega a, b, c ja nurkadega α, β, γ kehtib *koosinuslause*:
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
52. Tõesta *Stewarti teoreem*: kolmnurga tseviaan d rahuldab võrdust

$$a^2b' + a'b^2 = c(d^2 + a'b'),$$

kus a' ja b' on vastavate lõikude pikkused, milleks jagab tseviaan d kolmnurga külje c .

53. Kolmnurga ABC ümberringjoonel võetakse punkt P . Punktist P tõmmatakse ristlõigud sirgetele AB, BC, CA . Tõesta, et nende ristlõikude aluspunktid asuvad ühel sirgel (nn Simpsoni sirge).
54. Ringjoon keskpunktiga O puudutab nurga haarasid punktides A ja B . Lõigul AB valitakse punkt M . Sirgele OM punktis M joonestatud ristsirge lõikab nurga haarasid punktides X ja Y . Tõesta, et $|MX| = |MY|$.
55. Kõõlnelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD pikendused lõikuvad punktis P , külgede BC ja AD pikendused punktis Q . Tõestage, et nurkade AQB ja BPC poolitajate lõikepunktid nelinurga külgedega osutuvad rombi tippudeks.
56. Viisnurk $ABCDE$ on kõõlviisnurk. Punkti E kaugused sirgetest AB, BC ja CD on vastavalt a, b ja c . Leidke punkti E kaugus sirgest AD .
57. Kolmnurga ABC külgedele, kolmnurgast väljapoole on joonestatud kolmnurgad $ABC', AB'C$ ja $A'BC$, kusjuures tippude A', B' ja C' juures olevate nurkade summa on 180° . Tõestage, et konstrueeritud kolmnurkade ümberringjooned lõikuvad ühes punktis.
58. Tasandile on joonestatud kumer nelinurk $ABCD$ ning ringjooned K_A, K_B, K_C ja K_D keskpunktidega vastavalt A, B, C ja D ning sama raadiusega R . Ringjoonepaaridele on tõmmatud neli välist puutujat, mis lõikuvad punktides M, N, O ja P , nagu näidatud joonisel. Tõesta, et kui punktid A, B, C ja D asuvad ühel ringjoonel, siis asuvad ühel ringjoonel ka punktid M, N, O ja P .
59. Tasandil on antud kaks (mitte tingimata võrdse raadiusega) ringjoont keskpunktidega O_1 ja O_2 . Tõesta, et nende punktide P hulk tasandil, kust tõmmatud puutujalõigud neile ringjoontele on võrdsed, moodustab sirge, mis on risti sirgega O_1O_2 . (Seda sirget nimetatakse teatavasti nende ringjoonte radikaalteljeks.)

X Koordinaatide meetod

Põhimõtteliselt on võimalik kõiki geomeetriaülesandeid lahendada järgmisel viisil. Fikseerime ristkoordinaadistiku, esitame ülesande tingimused koordinaatide keeles (sirgete ja ringjoonte võrrandid, lõikepunktid kui võrrandisüsteemide lahendid jne) ning tuletame ülesande tingimustest väite samuti koordinaatide keeles.

Rõhuval enamikul juhtudest on vajaminevad teisendused vaearikkad (eriti ringjoonte ja nurkade korral). Teisendusvaeva võib vähendada koordinaatide alguspunkti otstarbekas

valik (nt. mõne ringjoone keskpunktis, kolmnurga kõrguse aluspunktis vmt.). Mõnikord on otstarbekas kasutada ka muid koordinaadistikke, näiteks polaarkoordinaadid, kompleksstasand, barütsentrilised (vm. projektiivsed) koordinaadid.

Matemaatika olümpiaadidel on geomeetriaülesannete hindamisskeemid koostatud reeglina nii, et koordinaatide meetodil lahendades saab punkte ainult täislahenduse korral, kuna osalise lahenduse puhul on keeruline ette näha, kui mahukaks võivad lõpuks teisendused minna ning kas need on üldse inimvõimete piires tehtavad antud aja jooksul. (Mõistagi, arvutialgebrasüsteemid teeks sellised teisendused ära, aga kuna matemaatikavõistluste üks eesmärk on võrrelda ülesannete isiklikku lahendusoskust, mitte tarkvara kasutusoskust ega programmeerimisoskust, siis sellised vahendid on matemaatikavõistlustel keelatud.)

Peatükk 3

Kirjandusviited

1. Ülesanded lasteaiale, algkoolile, põhikooli nooremale osale

- „110 mõtlemisülesannet“, koost. P. Kees, Tallinn : Eesti Raamat, 1978. On ka kursuse kodulehel.
- U. Anderssoo, A. Lints „Tere, matemaatika! : tööraamat 6-a. lastele“, Tallinn : Valgus, 1985 (ja varasemad trükid). On ka kursuse kodulehel.
- „Matemaatika järelkasvu olümpiaadid Tartumaal 1979–1997 : 1000 nuputamis-ülesannet põhikooli õpilastele“, koost. A. Tootsi, Tartu : Vöödis, 1997. On ka kursuse kodulehel.

2. Õpikud ja ülesandekogud

- T. Tõnso, A. Veelmaa õpikute seeria (kõige põhjalikum, sisaldab palju lisamaterjali, keerukamaid ülesandeid, ka programmeerimisülesandeid matemaatikast)
- E. Abel, E. Jõgi, E. Mitt „Matemaatika ülesannete kogu keskkoolile“, Tallinn : Koolibri 1996. (Viimane peatükk „Täiendavaid teemasid“ sisaldab ka olümpiaadimaterjali.)

3. Nuputamine

- A. Lind „Nupula“, Tallinn : Valgus, 1988.
- A. Lind „Nupula jälgedes“, Tallinn : Valgus, 1988.
- A. Lind „Teel teadmiseni“, Tallinn : Avita, 2001.
- J. Perelman „Elav matemaatika“, Tallinn : Valgus, 1989.
- F. Nagibin „Huvitav matemaatika“, Tallinn : Valgus, 1969.

4. Keerdülesanded

- Ü. Kaasik „Lihtsaid ja keerulisi“, Tallinn : Valgus, 1970.
- Ü. Kaasik „Lihtsaid ja keerulisi : 2“, Tallinn : Valgus, 1975.

- G. Niese „100 kolumbuse muna“, Tallinn : Valgus, 1985.
- K. Freyer, R. Gaebler, W. Möckel „Julge pealehakkamine on pool võitu : 200 nuputamisülesannet“, Tallinn : Valgus, 1989.

5. Olümpiaadimaterjal: üldist

- <https://www.teaduskool.ut.ee>
- <https://www.math.olympiadid.ut.ee>
- <https://varamu.eu>
- <https://artofproblemsolving.com>
- <https://www.mccme.ru>

6. Olümpiaadimaterjal: arvuteooria

- „Arvuteooria elemendid. I“, koost. E. Abel, R. Vilt, Tartu : Atlex, 2013.
- „Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks (ülemaste) : Arvuteooria I“, koost. M. Ivanov. On ka kursuse kodulehel.
- „Ettevalmistus matemaatikaolümpiaadiks (ülemaste) : Arvuteooria II“, koost. M. Ivanov. On ka kursuse kodulehel.

7. Olümpiaadimaterjal: diskreetne matemaatika

- „Diskreetse matemaatika elemendid. I“, koost. E. Abel, I. Zolk, Tartu : Atlex, 2012.
- R. Palm „Diskreetse matemaatika elemendid“, Tartu : Tartu Ülikool, 2003. On ka kursuse kodulehel.
- N. Vilenkin „Kombinatorika“, Tallinn : Valgus, 1975.
- A. Kolman, O. Zich „Huvitav loogika“, Tallinn : Valgus, 1970.
- A. Andžāns, B. Johannesson „Dirichlet principle : part I“, Rīga, 2005. On ka kursuse kodulehel (inglise k.).
- A. Andžāns, B. Johannesson „Dirichlet principle : part II“, Rīga, 2005. On ka kursuse kodulehel (inglise k.).
- L. Bukovský, I. Kluvánek „Dirichletov princíp“, Praha 1970. Osaliselt kursuse kodulehel (eesti k.).

8. Olümpiaadimaterjal: geomeetria

- I. Šarõgin „Tasandi geomeetria“, Tallinn : Avita, 2000.
- В. Прасолов, „Задачи по планиметрии“, Москва : МЦНМО, 2006. On ka kursuse kodulehel (vene k.).

9. Olümpiaadimaterjal: algebra

- H. Keerutaja, K. Kruse, L. Tartes „Materjali klassiväliseks tööks matemaatikast IX-XI klassile“, Tallinn : Valgus, 1983. On ka kursuse kodulehel.

- J. Willemson, I. Zolk „Võrratused“, Tartu : Tartu Ülikool, 2003. On ka kursuse kodulehel.
- E. Abel, M. Abel, „Funktsionaalvõrrandite lahendamisvõtteid“, „Koolimatemaatika XXV“, Tartu, 1998, 70–76.
- J. Willemson, I. Zolk, „Funktsioonid“
<https://www.math.olympiaadid.ut.ee/arhiiv/oppemat/indrek/fneq.pdf>.
On ka kursuse kodulehel.

10. Põnev lugemine

- H. M. Enzensberger „Arvukratt“, Tallinn : Avita, 1999.
- V. Ljovšin „Hajameelse Magistri väitekirj“, Tallinn : Valgus, 1978.
- V. Ljovšin „Hajameelse Magistri reisimärkmed“, Tallinn : Valgus, 1979.
- V. Ljovšin „Varastatud marki otsimas : matemaatiline kriminull : nooremale koolieale“, Tallinn : Valgus, 1980.

11. Perioodika

- „Matemaatika ja kaasaeg“ https://et.wikipedia.org/wiki/Matemaatika_ja_kaasaeg

Vt. ka E. Mitt „Kirjandust klassiväliseks tööks matemaatikas“, Tartu : Tartu Riiklik Ülikool, 1989. Osaliselt kursuse kodulehel.