

Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2023

1. seminar (Hendrik)

1. Analüüs

- a) (**Putnam 1979 A1**) Leia naturaalarvud n ja $a_1, a_2, \dots, a_n$, nii et

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1979$$

ning korrutise $a_1 a_2 \dots a_n$ väärtus on suurim võimalik.

- b) (**Imperial College 2018/19 - Round 1**) Olgu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pidev, $g(0) = 0$ ning iga $x > 0$ korral $g(x)g(-x) > 0$. Leia funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, nii et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral

$$g(f(x+y)) = g(f(x)) + g(f(y)).$$

- c) (**IMC 2022 D1 P1**) Olgu $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ integreeruv ning olgu iga $x \in [0, 1]$ korral $f(x)f(1-x) = 1$. Tõesta, et

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 1.$$

2. Algebra

- a) (**Indonesia National Undergraduate MO 2020 - D2 P1**) Ütleme, et kompleksarvude paar (a, b) on *tasakaalus*, kui $|a| = |b| = |a + b|$.

- Tõesta, et leidub tasakaalus paar (a, b) , nii et $a \neq b$.
- Kui (a, b) on tasakaalus ning $a^{2020} = b^{2020}$, tõesta, et $a = b$.

- b) (**Indonesia National Undergraduate MO 2020 - D2 P4**) Olgu R ühikelemendiga ring. Olgu $x, y \in R$ sellised, et $xy = 1$, kuid $yx \neq 1$.

- Tõesta, et erinevate positiivsete täisarvude m, n korral kehtib $y^m x^m \neq y^n x^n$.
- Tõesta, et leidub lõpmata palju elemente $z \in R$, nii et $z^{2020} = 1$.
- Tõesta, et leidub lõpmata palju elemente $z \in R$, nii et $z^{2020} = 0$.

- c) (**Indonesia National Undergraduate MO 2020 - D1 P5**) Olgu G lõplik rühm ning m kolmega jaguv naturaalarv. Kui rühmas G on täpselt m elementi, mille järk on m , tõesta, et m jagub kuuega ning et rühmas G on täpselt kolm m -elemendilist tsüklilist alamrühma.

3. Muu

- a) (**Putnam 1966 B1**) Olgu P kumer hulknurk, mis asub tervenisti ruudu sees küljepikkusega 1. Tõesta, et P külgede pikkuste summa on maksimaalselt 4.
- b) (**Indonesia National Undergraduate MO 2020 - D2 P2**) Olgu $B = \{1, 2, \dots, n\}$ ning $k \leq n$ positiivne täisarv. Leia jadade $B_1, B_2, \dots, B_k$ arv, nii et iga $1 \leq i \leq k$ korral $B_i \subseteq B$ ning

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = B.$$

- c) (**ICMC 2021 Round 1 P5**) Leia kõik kordarvud m , nii et alati kui positiivsete täisarvude a ja b korrutis on m , on nende summa kahe aste.

2. seminar (Birgit)

1. **(Putnam 2001 A1)** Hulgal S on defineeritud kahekohaline algebraline tehe $*$, s. t. iga $a, b \in S$ korral $a*b \in S$. Iga $a, b \in S$ korral olgu $(a*b)*a = b$. Tõesta, et iga $a, b \in S$ korral $a*(b*a) = b$.
2. **(Putnam 2005 B2)** Leia kõik positiivsed täisarvud $n, k_1, \dots, k_n$ nii, et $k_1 + \dots + k_n = 5n - 4$ ja

$$\frac{1}{k_1} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

3. **(Putnam 1996 B1)** Nimetame *isekaks hulgaks* hulka, mille kardinaalarv (elementide arv) on selle hulga element. Nimetame *minimaalseks isekaks hulgaks* hulka, mille ükski pärisalamhulk pole *isekas*. Leia, koos tõestusega, hulga $\{1, 2, \dots, n\}$ *minimaalsete isekate* alamhulkade arv.
4. **(Putnam 1997 A4)** Olgu G rühm ühikelemendiga e ja olgu $\phi : G \rightarrow G$ selline funktsioon, et

$$\phi(g_1)\phi(g_2)\phi(g_3) = \phi(h_1)\phi(h_2)\phi(h_3),$$

kui $g_1g_2g_3 = e = h_1h_2h_3$. Tõesta, et leidub selline element $a \in G$ nii, et $\psi(x) = a\phi(x)$ on homomorfism (s. t. $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ iga $x, y \in G$ korral).

5. **(Putnam 2001 A5)** Tõesta, et leiduvad unikaalsed positiivsed täisarvud a, n nii, et $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.
6. **(IMC 2000 D2 P5)** Leia kõik funktsioonid $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, nii et iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y).$$

7. **(Arvuteooria 2023K praks 1 P7)** Olgu $a, b, c, k \in \mathbb{N}$ ja $(ab+c)(bc+a) = 13^k$. Tõestada, et k on paarisarv.

3. seminar (Riki)

1. **(Putnam 2004 A1)** Korvpalluri Mari tiimi statistik jälgis, mitu edukat vabaviset $S(N)$ Mari sooritas kõigist N vabaviskest. Hooaja alguses oli $S(N) < 80\%$ N -ist. Hooaja lõpus oli $S(N)$ aga suurem kui 80% N -ist. Kas hooaja jooksul pidi olema hetk, kui $S(N) = 80\%$ N -ist?
2. **(Putnam 2012 A2)** Olgu $*$ kommutatiivne ja assotsiatiivne kahekohaline algebraline tehe hulgal S . Iga $x, y \in S$ jaoks leidub $z \in S$ nii, et $x * z = y$ (kusjuures, z võib olla x -ist ja y -ist sõltuv). Tõestada, et kui $a, b, c \in S$ korral $a * c = b * c$, siis $a = b$.
3. **(IMO 2020 A3 (Israel))** Olgu $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ nii, et $(a+c)(b+d) = ac+bd$. Leida avaldise

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

vähim võimalik väärtus.

4. **(Putnam 1980 A3)** Leida integraali $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ väärtus, kui $f(x) = \frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$.
5. **(Putnam 2021 A1)** Rohutirts alustab hüppamist koordinaatide alguspunktist $(0, 0)$. Iga hüppe pikkus on 5 ja ta hüppab ainult täisarvuliste koordinaatidega punktidesse, st tal on 12 võimalust, kuhu hüppata. Mis on vähim hüpete arv, millega rohutirts saab jõuda punkti $(2021, 2021)$?

4. seminar (Georg)

1. (**Putnam 2001 A2**) Rikil on n münti $C_1, C_2 \dots C_n$. Iga k korral on münt C_k kallutatud nii, et tõenäosus mündiviskel kiri saada on $\frac{1}{2k+1}$. Kui visatakse n münti, mis on tõenäosus, et saadakse paaritu arv kordi kiri? Vastus tuleks anda n 'i funktsioonina kujul

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

2. (**BMO 2 2009**) Leia kõik positiivsete täisarvude paarid a, b , nii et

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2009}$$

3. (**Putnam 2017 A4**) $2N$ õpilasega klass tegi testi, kus võimalikud tulemused olid $0, 1, \dots, 10$. Igat tulemust saadi vähemalt korra ja keskmine tulemus oli täpselt 7.4. Näita, et klass on võimalik jagada kaheks N õpilasega grupiks, kus mõlema grupi keskmine on täpselt 7.4.
4. (**HMMT 2015**) Neol on lõpmatu kogus punaseid ja siniseid pille. Kui ta võtab punase pilli, ta kaal kahekordistub ja kui ta võtab sinise, siis ta kaotab ühe kilo. Kui Neo algul kaalub 1 kilo, mis on kõige väiksem pillide arv, mida ta peab võtma, et ta kaaluks 2015 kilo.
5. (**Putnam 2008 A2**) Jüri ja Mari mängivad mängu kus nad kordamööda täidavad algselt tühja 2008×2008 massiivi. Jüri alustab. Igal käigul mõlemad mängja valib reaalarvu ja asetab selle vabasse kirjesse. Mäng lõppeb kui massiiv on täidetud. Jüri võidab kui tulemusmaatriksi determinant ei ole null ja Mari kui determinant on null. Kummal mängjal on võitev strateegia?
6. (**MIT 18.A34**) Mõisas on n tuba. Igas toas on lamp ja lüliti, mis on ühendatud selle lambiga. Kuid lülitid võivad ka olla ühendatud lampidega teistes tubades järgmise tingimusega: kui lüliti toas a on ühendatud lambiga toas b , siis lüliti toas b on ühendatud lülitiga toas a . Iga lüliti muudab selle vajutamisel iga sellega ühendatud lambi olekut. Olgu kõik lambid välja lülitatud. Tõesta, et on võimalik käivitada kõik lambid.

5. seminar (Hendrik)

1. **(IMC 2002 D2 P2)** Kakssada õpilast osales matemaatikavõistlusel. Neil oli lahendada 6 ülesannet. On teada, et iga ülesande lahendas õigesti vähemalt 120 võistlejat. Tõestage, et peab olema kaks võistlejat, nii et iga probleemi lahendas vähemalt üks neist kahest õpilasest.
2. **(Putnam 2009 B1)** Näita, et iga positiivse ratsionaalarvu saab esitada algarvude faktoriaalide korrutiste jagatisena, kus algarvud võivad korduda. Näiteks,

$$\frac{10}{9} = \frac{2! \cdot 5!}{3! \cdot 3! \cdot 3!}.$$

3. **(HMMT 2005)** Arvuta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}.$$

4. **(IMC 2015 D1 P3)** Olgu $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{3}{2}$, ja $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$, kus $n \geq 2$.

- (a) Leia $F(n)$ üldine valem, mis sisaldab ainult konstante ja arvu n .
- (b) Kas summa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$$

on ratsionaalarv?

5. **(HMIC 2018 P4)** Leia kõik funktsioonid $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, nii et

$$f(x + f(y + xy)) = (y + 1)f(x + 1) - 1$$

iga $x, y \in \mathbb{R}^+$ korral.

($\mathbb{R}^+$ tähistab positiivsete reaalarvude hulka.)

6. seminar (Stefan)

1. (**Putnam 2009 A1**) Olgu f selline tasandil defineeritud reaalarvuliste väärtustega funktsioon, et iga ruudu $ABCD$ puhul, $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Kas tähendab see, et $f(P) = 0$ tasandi iga punkti P jaoks?
2. (**Putnam 2012 A1**) Olgu $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ reaalarvud vahemikus $(1, 12)$. Tõesta, et leiduvad paarikaupa erinevad indeksid i, j, k nii, et arvud d_i, d_j, d_k on mõne teravnurkse kolmnurga külgedepikkusteks.

3. (**Putnam 2014 A1**) Tõesta, et funktsiooni

$$(1 - x + x^2)e^x$$

Taylori rea kohal $x = 0$ iga nullist erineva kordaja on ratsionaalarv, mille (taandatud) lugeja on kas algarv või üks.

4. (**Putnam 2016 B1**) Olgu $x_0, x_1, x_2, \dots$ selline jada, et $x_0 = 1$ ja iga $n \geq 0$ jaoks,

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$$

Näita, et rida

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots$$

koondub ja leia selle summa väärtus.

5. (**Putnam 2015 B1**) Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kolm korda diferentseeruv funktsioon, millel on vähemalt viis nullkohta. Tõesta, et funktsioonil $f + 6f' + 12f'' + 8f'''$ leidub vähemalt kaks erinevat nullkohta.

7. seminar (Johanna)

1. **(IMC 2015 D1 P1)** Olgu $n \geq 2$ naturaalarv ning A ja B reaalarvuliste väärtustega $n \times n$ -maatriksid, mis rahuldavad võrdust

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1},$$

Näita, et $\det(A) = \det(B)$.

2. **(VJIMC 1994 P4)** Otsusta, kas leidub mittekonstantne funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et kehtib

$$(f(x) - f(y))^2 \leq |x - y|^3$$

iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

3. **(Putnam 2018 A1)** Leia kõik järjestatud paarid (a, b) , mille korral kehtib

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2018}.$$

4. **(IMC 2001 P5)** Tõesta, et ei leidu sellist funktsiooni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $f(0) > 0$ ja

$$f(x + y) \geq f(x) + yf(f(x)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. **(Putnam 2021 B1)** Oletame, et tasand on kaetud lõpmatu malelauaga, mille kõik ruudud on sama suurusega. Kui nüüd veel üks samasugune ruut langeb suvalisele kohale suvalise orientatsiooniga, kui suur on tõenäosus, et ta ei kata ühtegi malelaua nurkadest?

6. **(VJIMC 1997 C1 P2)** Olgu $\alpha \in (0, 1]$ reaalarv ja rahuldagu jada (a_n) võrratust

$$a_{n+1} \leq \alpha a_n + (1 - \alpha)a_{n-1}$$

iga $n \geq 2$ korral. Tõesta, et kui jada on tõkestatud, siis ta peab olema koonduv.

8. seminar (Martti Karl Elvisto)

1. (**Alex Bellos's Monday puzzles 19.06.2017**) Pirukas jagatakse 100 matemaatiku vahel järgneval viisil: 1. matemaatik saab 1% pirukast, 2. matemaatik saab 2% järelejäänud pirukast, 3. matemaatik saab 3% nüüdseks järelejäänud pirukast jne, kuni viimane matemaatik saab terve ülejäänud piruka. Mitmes matemaatik saab suurima tüki?
2. (**MindYourDecisions blogi 23.04.2017**) Kaks matemaatikut seisavad koordinaattasandil, matemaatik A nullpunktis, matemaatik B koordinaatidel (n, n) . Nad hakkavad korraga kõndima, eesmärgiga jõuda punkti, kust teine matemaatik alustas. Iga sammuga liigub matemaatik A kas ühe ühiku üles, või ühe ühiku paremale, matemaatik B kas ühe ühiku alla või ühe ühiku vasakule. Võimalusel valivad nad iga sammu suuna suvaliselt ja võrdse tõenäosusega. Mis on tõenäosus, et mingil ajahetkel matemaatikud kohtuvad, kui
 - a) $n = 5$
 - b) üldjuhulja mis juhtub tõenäosusega, kui $n \rightarrow \infty$?
3. **Putnam 2012 B1** Olgu S funktsioonide $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ klass, mis on defineeritud järgnevalt:
 - (i) funktsioonid $f_1(x) = e^x - 1$ ja $f_2(x) = \ln(x + 1)$ kuuluvad S -i;
 - (ii) kui $f(x)$ ja $g(x)$ kuuluvad S -i, siis ka $f(x) + g(x)$ ja $f(g(x))$ kuuluvad S -i;
 - (iii) kui $f(x)$ ja $g(x)$ kuuluvad S -i ja $f(x) \geq g(x) \forall x \in [0, \infty)$, siis ka $f(x) - g(x)$ kuulub S -i.Tõesta, et kui $f(x)$ ja $g(x)$ kuuluvad S -i, siis ka $f(x)g(x)$ kuulub S -i.
4. (**IMC 2009 D2 P2**) Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv funktsioon, olgu $f(0) = 1$ ja $f'(0) = 0$. Tõesta, et kui
$$f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \infty)$$
siis
$$f(x) \geq 3e^{2x} - 2e^{3x} \quad \forall x \in [0, \infty).$$
5. (**MindYourDecisions blogi 03.07.2016**) Leia keskmine kaugus kahe suvaliselt ühikruutu paigutatud punkti vahel.