

Seminar üliõpilaste matemaatika olümpiaadidest

Kevad 2024

1. seminar (Birgit)

1. **(1998 IberoAmerican UMO P1)** Olgu f ja g pidevad funktsioonid lõigul $[0, 1]$ ja olgu

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 (g(x))^2 dx = 1.$$

Tõesta, et leidub reaalarv c nii, et

$$f(c) + g(c) \leq 2.$$

2. **(IMC 2001 P2)** Olgu r, s, t paarikaupa ühistegurita positiivsed täisarvud ja olgu $a, b \in G$, kus G on kommutatiivne rühm ühikelemendiga e . Olgu $a^r = b^s = (ab)^t = e$.

(a) Tõesta, et $a = b = e$.

(b) Kas sama kehtib ka mittekommutatiivse rühma G korral?

3. **(Brasiilia ÜMO 2018 P2)** Rahuldagu funktsioonid $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kõigi reaalarvude x ja y korral järgmist tingimust:

$$f(x + g(y)) = -x + y + 1.$$

Millega võrdub $g(x + f(y))$?

4. **(Leedu IMO TST 2014 P2 ja Eesti EGMO TST 2024)** Kas leiduvad sellised 11 erinevat naturaalarvu, millest ühegi 6 arvu summa ei jagu 6-ga?

5. **(IMC 1994 P4)** Olgu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja olgu F ja G vektorruumi $\mathbb{R}^n$ lineaar-teisendused, mis rahuldavad järgmist tingimust:

$$F \circ G - G \circ F = \alpha F.$$

(a) Tõesta, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $F^k \circ G - G \circ F^k = \alpha k F^k$.

(b) Tõesta, et leidub $k \geq 1$, mille korral $F^k = 0$.

6. **(Putnam 2023 P2 D2)** Positiivse täisarvu n korral tähistagu $k(n)$ ühtede arvu arvu $2023 \cdot n$ kahendesituses. Mis on arvu $k(n)$ minimaalne väärtus?

2. seminar (Martin Puškin)

1. **(IMC 2023 P6)** Ivan kirjutab tahvlile maatriksi $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Seejärel rakendab ta maatriksil mitu korda järgmist operatsiooni:

- vali maatriksi rida või veerg ja
- korruta või jaga seda maatriksi rida või veergu sama maatriksi ülejäänud rea või veeruga.

Kas Ivan saab saada pärast lõplikku arvu samme tulemuseks maatriksi $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

2. **(IMC 2018 P1)** Olgu $(a_n)_{n=1}^\infty$ ja $(b_n)_{n=1}^\infty$ positiivsete arvude jadad. Tõesta, et järgmised tingimused on samaväärsed:

- Leidub positiivsete arvude jada $(c_n)_{n=1}^\infty$ nii, et $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n}{c_n}$ ja $\sum_{n=1}^\infty \frac{c_n}{b_n}$ mõlemad koonduvad;
- $\sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{a_n}{b_n}}$ koondub.

3. **(IMC 2000 D1 P5)** Olgu R (mitte tingimata kommutatiivne) ring karakteristikaga 0. Olgu e, f ja g sellised ringi R idempotendid, et $e + f + g = 0$. Näita, et $e = f = g = 0$.

Ringi R karakteristik on 0, kui ei leidu sellist naturaalarvu n , et iga $r \in R$ korral $\underbrace{r + r + \dots + r}_n = 0$.

Elementi $i \in R$ nimetatakse idempotendiks, kui kehtib $i^2 = i$.

4. **(IMC 2000 D2 P2)** Olgu f pidev funktsioon hulgal $[0, 1]$, mis pole ühelgi intervallil monotoonne. Näita, et punktide hulk, kus f saavutab lokaalse miinimumi, on tihe hulgas $[0, 1]$.

Hulga S tihedus hulgas $X \subseteq \mathbb{R}$ tähendab seda, et iga mittetühi lahtine intervall $I \subseteq X$ sisaldab hulga S elementi.

5. **(IMC 1997 D2 P2)** Olgu A, B, C, D, E, F, G, H sellised $n \times n$ maatriksid, et $2n \times 2n$ maatriks $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ on pööratav. Olgu $M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$. Näita, et $\det(M) \cdot \det(H) = \det(A)$.

6. **(Rein Prank 2020)** Ütleme, et kaks osaliselt järjestatud hulka on sarnased, kui nende vahel leidub järjestust säilitav bijektsioon. Kas loomuliku lineaarse järjestusega $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ on sarnased?

Funktsioon f säilitab järjestust, kui kehtib $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

3. seminar (Aleksei)

“but I see a way. There is a narrow way through.”

Paul Atreides

P - Putnam, RMO - Rumeenia (õpilaste) matemaatika olümpiaad

1. **(IMC2004)** Olgu D kinnine ühikketas tasandil ja olgu $z_1, z_2, \dots, z_n$ fikseeritud D punktid. Tõesta, et D -s leidub punkt z niisugune, et n kauguste $d(z, z_i)$ summa on suurem või võrdne n -ga.
2. **(IMC2005)** Olgu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $(f(x))^n$ on polünoom iga täisarvu $n \geq 2$ korral. Kas f peab samuti olema polünoom?
3. **(AOPS)** Leia kõik 2024×2024 regulaarsed maatriksid A , mille korral kõik maatriksite A ja A^{-1} elemendid on hulgas $\{0, 1\}$.
4. **(RMO2023-11-1)** Leia kõik kahekordselt diferentseeruvad funktsioonid $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad seost

$$(f'(x))^2 + f''(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **(P1983)** Olgu $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ funktsioon, mis iga $n \in \mathbb{Z}^+$ korral rahuldab

$$f(n) = n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor.$$

Tõesta, et iga positiivse täisarvu m korral jada

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$$

sisaldab mingi täisarvu ruutu.

6. **(RMO2016-12-2)** Olgu A ring ja olgu D selle mittepööratavate elementide hulk. Kui iga $a \in D$ korral $a^2 = 0$, tõesta, et:
 - a) $axa = 0$ kõigi $a \in D$ ja $x \in A$ korral;
 - b) Kui D on lõplik hulk, milles on vähemalt kaks elementi, siis leidub $a \in D, a \neq 0$ niisugune, et iga $b \in D$ korral $ab = ba = 0$.
7. **(Lõppvoor 2023)** Nimetame permutatsiooni $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ arvudest $1, 2, \dots, n$ vahelduvaks, kui iga $i = 1, \dots, n-1$ korral $(-1)^i \sigma_i < (-1)^i \sigma_{i+1}$. Iga naturaalarvu n korral olgu α_n vahelduvate permutatsioonide osakaal kõigi permutatsioonide hulgas arvudest $1, 2, \dots, n$. (Näiteks $\alpha_1 = \frac{1}{1}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{2}{6}$ jne.) Tõesta, et leiduvad reaalarvud c_1, c_2 vahemikust $(0; 1)$ ning naturaalarv N , nii et iga naturaalarvu $n \geq N$ korral $c_1^n < \alpha_n < c_2^n$.
8. **(P1983)** Tõesta või lükka ümber: leidub niisugune reaalarv α , et $\lfloor \alpha^n \rfloor - n$ on paarisarv iga positiivse täisarvu n korral.

- **(Josef Pepa)** Üks hunt ja $n \geq 2$ lammast istuvad ümmarguse laua taga. Igal ajahetkel liigub hunt ühe koha võrra vasakule või paremale (tõenäosusega 0.5, viskades münti) ja sööb sellel kohal oleva lamba ära (kui see on olemas). Hunt on lõpetanud pärast $n - 1$ lamba söömist. Sa oled lammas. Kuhu sa soovid istuda?

4. seminar (Rain)

1. **(IMC2016, 1.)** Olgu funktsioon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pidev ja vahemikus (a, b) diferentseeruv. Oletame, et funktsioonil on lõpmatult palju nullkohti, aga ei leidu ühtegi punkti $x \in (a, b)$ nii, et $f(x) = f'(x) = 0$.

(a) Tõesta, et $f(a)f(b) = 0$.

(b) Too näide sellisest funktsioonist lõigul $[0, 1]$.

2. **(Putnam and beyond, 355)** Olgu S kõikide naturaalarvude hulk, mille kümnendesisituses ei ole numbrit 9. Tõesta, et

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} < 80.$$

3. **(IMC2013, 1.)** Olgu $n \geq 2$ ja $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ nii, et

$$A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}.$$

Tõesta, et $\det(A) = \det(B)$. Kas sama kehtib ka $A, B \in \text{Mat}_n(\mathbb{C})$ korral?

4. **(Putnam 1989 B2)** Olgu S mittetühi hulk binaarse tehtega, mis rahuldab järgnevaid tingimusi iga $a, b, c \in S$ korral:

- $(ab)c = a(bc)$
- $ab = ac \implies b = c$
- $ba = ca \implies b = c$
- Hulk $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ on lõplik.

Kas S on tingimata rühm?

5. **(IMC2012, 1.)** Iga naturaalarvu n korral väljendagu $p(n)$ mitut viisi saab esitada arvu n naturaalarvude summana. Näiteks $p(4) = 5$, sest

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Lisaks olgu $p(0) = 1$.

Tõesta, et arvu n saab esitada sellise naturaalarvude summana, kus ükski liidetav ei võrdu ühega, täpselt $p(n) - p(n-1)$ viisil.

6. **(SMT Power 1.9)** Olgu $A, B \subset \mathbb{Z}$ mittetühjad hulgad. Nimetame hulki A ja B hulga $\mathbb{Z}$ lahutuseks (tähistatud $A \oplus B = \mathbb{Z}$) kui igit täisarvu $n \in \mathbb{Z}$ on võimalik **üheselt** esitada kujul $a + b$, kus $a \in A$ ja $b \in B$.

(a) Leia kaks lõpmatut hulka A ja B nii, et $A \oplus B = \mathbb{Z}$.

(b) Kas leidub kaks lõpmatut hulka nii, et $A \oplus B = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?

7. (**Putnam 2012 A6**) Olgu $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pidev funktsioon. On teada, et iga ristküliku R puhul, mille pindala on 1, on funktsiooni $f(x, y)$ topeltintegraal üle piirkonna R võrdne nulliga. Kas $f(x, y) = 0$?
8. (**HMMT 2024, 4.**) Olgu $f(x)$ kahe ruutpolünoomi jagatis. On teada, et $f(n) = n^3$ kui $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Arvuta $f(0)$.

5. seminar (Kaur)

1. (1959 IMO)

Tõesta, et iga $n \in \mathbb{Z}$ korral on murd $\frac{21n+4}{14n+3}$ taandumatu

2. (1988 Putnam B-1)

Näita, et iga kordarv on väljendatav, kui $xy + xz + yz + 1$, kus $x, y, z \in \mathbb{N}$

3. (2021 Putnam A-1)

Rohutirts alustab oma vahvat hüpetega teekonda koordinaatteljestiku alguest $(0, 0)$. Iga ta hüpe on pikkusega 5 ja peale igat hüpet peab rohutirts olema punktis, mille koordinaadid on täisarvulised. Mis on vähim hüpete arv, mida meie rohutirts vajab, et jõuda punkti $(2021, 2021)$

4. (2021 Putnam A-1)

Olgu S vähim naturaalarvude hulk nii, et

- (a) $2 \in S$
- (b) $n \in S$, kui $n^2 \in S$
- (c) $(n + 5)^2 \in S$, kui $n \in S$

Millised naturaalarvud ei kuulu hulka S ?

5. (Varia)

Adolf ja Benito tahavad ehitada Reini jõe äärde maja, mida võime vaadelda, kui intervalli $[0, 1]$. Sina tahad samuti selle jõe kaldale maja ehitada. Kuna naabrid harjutavad tihti valjuhääelseid kõnesid, siis sa tahad, et su maja ei oleks neile väga lähedal. Samuti soovid, et vahemaa sinu ja su lähima naabri vahel oleks rangelt suurem, kui ükskõik, mis teise naabri vahemaa tema lähimast naabrist. Oletades, et Adolf ja Benito valivad oma majade asukohad suvaliselt (uniformly at random), siis mis on tõenäosus, et sa saad oma nõudmised täidetud.?

6. seminar (Hendrik)

1. **(VJIMC 2004 II P1)** Kas rühmad $(\mathbb{Q}, +)$ ja $(\mathbb{Q}^+, \cdot)$ on isomorfsed. Sümbol $\mathbb{Q}^+$ tähistab kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulka.

Def. Rühmad $(G, *)$ ja $(H, \circ)$ on isomorfsed, kui leidub bijektiivne kujutus $f : G \rightarrow H$ nii, et iga $a, b \in G$ korral

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b).$$

2. **(VJIMC 2003 II P2)** Olgu antud kettad $D_1, D_2, \dots, D_n$ tasandil ning arvud $a_{ij} = S(D_i \cap D_j)$ ($S(A)$ on A pindala).

Tõesta, et suvaliste $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ korral:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \geq 0.$$

3. **(VJIMC 2000 II P3)** Olgu m ja n positiivsed täisarvud ja $x \in [0, 1]$. Tõesta, et

$$(1 - x^n)^m + (1 - (1 - x)^m)^n \geq 1.$$

Vihje. Uuri $m \times n$ malelauda.

4. **(VJIMC 2004 II P2)** Leia kõik funktsioonid $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ nii, et iga $x, y, z \in \mathbb{R}_0^+$ korral

1. $f(x, 0) = f(0, x) = x$,
2. $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$ ja
3. leidub $k \in \mathbb{R}$ selline, et $f(x + y, x + z) = kx + f(y, z)$.

5. **(VJIMC 2009 II P2)** Olgu E kõigi pidevalt differentseeruvate funktsioonide $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ hulk nii, et $f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Olgu

$$J(f) = \int_0^1 (1 + x^2) (f'(x))^2 dx.$$

- (a) Näita, et mingi E elemendi korral saavutab J enda vähima väärtuse.
- (b) Leia $\min_{f \in E} J(f)$.

6. **(VJIMC 2000 II P2)** Kui me kirjutame järjendi $AAABABBB$ ringjoonele, siis iga kolmetäheline sõna (AAA , AAB , ABA , BAB , ABB , BBB , BBA , BAA) esineb ringjoonel täpselt üks kord. Kas leidub mingi tähtede järjend k -tähelisest tähestikust nii, et kui asetada selle ringjoonele, siis iga l -pikkune sõna esineb täpselt üks kord?

7. seminar (Riki)

1. **(Putnam 2004 A1)** Kossuäss Meelis on vabavisetes kõva käpp. Olgu N vabavisete arv mingil hetkel antud hooajal ja $S(N)$ vastavalt edukate vabavisete arv N vabaviske seast. Tiimi statistik Mare märkas, et hooaja esimesel poolel oli $S(N) < 0,8N$ (Meelise kohta päris kehv ning reporterid säutsuvad, et Meelis prioritseerib rokkkonserite mängudele). Hooaja teisel poolel Meelis aga tõstis taset ning $S(N) > 0,8N$ (reporterid säutsuvad, et Meelis kasutab dopingut). Aita Marel veenduda, kas pidi olema moment, kui $S(N) = 0,8N$.

2. **(Putnam 2008 A1)** Olgu $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ selline, et $f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$ iga $x, y, z \in \mathbb{R}$ korral. Tõestada, et leidub funktsioon $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et $f(x, y) = g(x) - g(y)$ iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral.

3. **(IMO 2022 A1 - Nigeeria)** Olgu positiivsete reaalarvude jada (a_n) selline, et

$$(a_{n+1})^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2}.$$

Tõestada, et $a_{2022} \leq 1$

4. **(2018 Putnam B2)** Olgu $n \in \mathbb{N}$, olgu $f_n(z) = n + (n-1)z + (n-2)z^2 + \dots + z^{n-1}$. Tõestada, et polünoomil f_n ei ole juuri hulgal $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

5. **(Putnam 2010 A2)** Leida kõik diferentseeruvad funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n},$$

kus $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

6. **(2006 Putnam A2)** Jüri ja Lauri mängivad mängu, kus Jüri koostab n -punktilise kontrolltöö ning hinnates võtavad nad kordamööda punkte maha, kuid nad võivad punkte võtta maha ainult $p-1$ kaupa, kus $p \in \mathbb{P}$. Võidab see, kes võtab tudengilt viimase punkti ära. Lauri alustab. Tõestada, et on lõpmata palju selliseid n , et Jüri saab võita.

8. seminar (Laura)

1. **(IMC Eesti eelvoor 1999)** Olgu funktsioon f määratud kogu reaalteljel, kusjuures suvaliste $x \in \mathbb{R}$ ja $h > 0$ korral

$$|f(x+h) - f(x-h)| < h^2.$$

Tõestada, et $f(x) \equiv \text{const.}$

2. **(IMC Eesti eelvoor 2013)** Olgu $x_1, x_2, \dots, x_n$ nullist erinevad elemendid vektorruumis ja olgu A selline lineaarne teisendus, et

$$Ax_1 = x_1$$

ja

$$Ax_k = x_k + x_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Tõesta, et elemendid $x_1, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltumatud.

3. **(IMC Eesti eelvoor 2013)** Olgu antud 2013×2013 ruutmaatriksid A ja B , kusjuures $AB = 0$. Tõesta, et vähemalt üks maatriksidest $A + A^T$ ja $B + B^T$ on singulaarne.
4. **(IMC Eesti eelvoor 2017)** Olgu G rühm, mis on moodustatud fikseeritud elementide $a, b \in G$ kõikvõimalikest korrutistest, kusjuures $aba = b^3$ ja $b^5 = 1$. Tõesta, et G on Abeli rühm.
5. **(IMC Eesti eelvoor 2022)** Jüri ja Mari mängivad järgmist mängu. Mari valib 4×4 ruudustiku ruutudest välja 7 ruutu ning paigutab igaihesse neist ühe täрни. Seejärel valib Jüri välja kaks rida ja tühjendab need tärnidest, ning valib välja kaks veergu ja tühjendab need tärnidest. Kui ruudustik on nüüd tühi, võitis Jüri, vastasel korral võitis Mari.
- a Kirjeldage kõiki võimalusi, kuidas peab Mari tärnid paigutama, et tema võit oleks garanteeritud.
- b Leidke selliste tärnipaigutuste koguarv, mille korral Mari garanteeritult võidab. Ruudustikku ei pöörata; pööramistel ja peegeldustel üksteisest saadavad paigutused loeme erinevateks.

9. seminar (Henri)

1. **(V. Jarnik IMC 2015, C2, P1)** Olgu $A, B \in \text{Mat}_3(\mathbb{R})$ sellised, et leiduvad pöördmaatriksid maatriksitele $A, B, B^{-1} - A$ ja $A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}$. Tõestada, et siis kehtib võrdus

$$A - (A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1} = ABA.$$

2. **(V. Jarnik IMC 2019, C2, P1)** Olgu hulk $A \neq \emptyset$ ning assotsiatiivne tehe $*$: $A \times A \rightarrow A$.

(a) Kui kehtivad omadused

$$x * x * y = y \quad \text{ja} \quad y * x * x = y \quad \text{iga } x, y \in A \text{ korral,}$$

kas siis $*$ on kommutatiivne tehe?

(b) Kui kehtib omadus

$$x * x * y = y \quad \text{iga } x, y \in A \text{ korral,}$$

kas siis $*$ on kommutatiivne tehe?

3. **(V. Jarnik IMC 2011, C2, P1)** Olgu $n, k \in \mathbb{N}$ sellised, et $n > k$ ning $A_1, \dots, A_k \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$ sellised, et iga $i = 1, \dots, k$ $\text{rank}(A_i) = n - 1$. Tõestada, et siis

$$A_1 \cdot \dots \cdot A_k \neq 0.$$

4. **(V. Jarnik IMC 2018, C2, P1)** Leidke kõik reaalarvulised lahendid võrrandile

$$17^x + 2^x = 11^x + 2^{3x}.$$

5. **(V. Jarnik IMC 2002, C1, P2)** Olgu $3 < p \in \mathbb{P}$ ja $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Näidake, et n jagab $2^n - 2$

10. seminar (Martti)

1. **(Alex Bellos's Monday puzzles 10.10.2016)**¹ Kolm sõpra A, B ja C mängivad lauatennist. Nad teevad seda standardse „võitja lauas“ reeglina, st kui mäng lõpeb, siis selle mängu võitja jääb edasi mängima ja kaotaja vahetatakse välja. A mängis 10 mängu, B 15 ja C 17. Kes kaotas teise mängu?
2. **(Putnam 2009 A3)** Tähistagu d_n sellise $n \times n$ maatriksi determinanti, mille elemendid vastavalt vasakult paremale ja seejärel ülevalt alla on $\cos(1), \cos(2), \dots, \cos(n^2)$, näiteks

$$d_3 = \begin{vmatrix} \cos(1) & \cos(2) & \cos(3) \\ \cos(4) & \cos(5) & \cos(6) \\ \cos(7) & \cos(8) & \cos(9) \end{vmatrix}.$$

Koosinuse argument on radiaanides. Leia $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$.

3. **(N. Reed, The Mathematical Gazette. 70 (454): lk 290–291)** Leia raadiusega 1 ringi poolt moodustatud tsükloidi pindala, kasutades vaid põhikooli geomeetria ja Cavalieri printsiipi.

Märkus. Tsükloid: D tähele sarnane kujund, mis on piiratud sirglõigu ja sirglõigul veereval ringjoonel asuva punktiga.

Cavalieri printsiip (kahemõõtmeline): Olgu tasandil kaks ala ja mingi sirge A. Kui saame valida suvalise sirgega A paralleelse sirge B ja selle tulemusena teame, et sirglõigud mis tekivad B ja vastavalt mõlema ala ühisosa võtmisel on võrdse pikkusega, siis nende kahe ala pindalad on võrdsed.

4. **(102 Combinatorial Problems, lk 13)**² Leia hulga $\{1, 2, \dots, 2000\}$ seliste alamhulkade arv, mille elementide summa jagub 5-ga.
5. **(Arvuteooria 2024 p9 ül 7)** Leida vähim naturaalarv, mis seitsmekordistub oma viimase numbriga esimeseks nihutamisel, st nt arv 1234 muutuks arvuks 4123.

6. **(V. Jarnik IMC 2011, C2, P2)** Olgu $k \in \mathbb{N}$. Leia avaldise

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} \dots \sum_{n_k=1}^{\infty} \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k (n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1)}$$

väärtus.

¹Tegu ei ole algallikaga.

²Tegu ei ole algallikaga.

11. seminar (Kevin)

1. (IMO 1969, Problem 2)

Olgu $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ja

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{1}{2} \cos(a_2 + x) + \frac{1}{4} \cos(a_3 + x) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos(a_n + x).$$

Näidata, et kui $f(x_1) = f(x_2) = 0$, siis leidub $m \in \mathbb{Z}$ nii, et $x_2 - x_1 = m\pi$.

2. (IMO 1969, Problem 3)

Iga $k = 1, 2, 3, 4, 5$ korral leida piisavad ja tarvilikud tingimused arvule $a > 0$, et leiduks tetraeeder, kus k serva on pikkusega a ning ülejäänud pikkusega 1.

3. (1989 APMO, Q5)

Leida kõik rangelt kasvavad funktsioonid $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mille korral

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x$$

4. (MIT IMO preparation, 2008)

On antud 8×8 ruudustik, leida kõik ruutude paarid nii, et ülejäänud 62 ruutu oleksid kaetavad 2×1 ristkülikutega.

5. (Informatsiooniteooria 2024, Jüri Lember)

Olgu positiivsed arvud $c_1 > c_2 \geq \dots \geq c_m$ sellised, et

$$\sum_{i=1}^m c_i = 1.$$

Protseduur on järgmine: Arvude $c_1, \dots, c_m$ seast valitakse kaks vähimat, liidetakse kokku ja lisatakse tagasi loetellu (paneme tähele, et ühe sammu teostamiseks võib olla mitu valikut).

Leiduvad arvud a ja b nii, et

- (a) kui $c_1 > a$, siis c_1 on kindlalt viimane arv, millel antud protseduuri teostatakse;
- (b) kui $c_1 < b$, siis c_1 kindlalt ei ole viimane arv millel antud protseduuri teostatakse.

Leida vähim a ja maksimaalne b .