Barütsentrilised koordinaadid

Artur Avameri

Fikseerime mingi kolmnurga ABC (selle kolmnurga valik võib vaadelda kui koordinaattelgede valimist tavalises koordinaatsüsteemis). Igale punktile P määrame järjestatud kolmiku $P = (x, y, z)$ nii, $\vec{P} = x\vec{A} + y\vec{B} + z\vec{C}$ ning $x + y + z = 1$.

Eelnevaga samaväärne definitsioon: kolmnurga PBC suunatud pindala on võrdne suurusega $x \cdot S_{ABC}$. Teisisõnu, võime vaadelda koordinaate kujul

$$P = \left(\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}, \frac{S_{PCA}}{S_{BCA}}, \frac{S_{PAB}}{S_{CAB}}\right).$$

Märkame, et $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ ja $C = (0, 0, 1)$.

Teoreem 1 (Pindala)**.** Olgu $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ kolm punkti $i = 1, 2, 3$ jaoks. Siis

$$\frac{S_{P_1P_2P_3}}{S_{ABC}} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Teoreem 2 (Sirge võrrand)**.** Sirge võrrand on kujul $ux + vy + wz = 0$ mingite reaalarvuliste konstantide u, v, w jaoks.

Seega on sirge AB võrrandiks $z = 0$ ning suvalise sirge läbi A võrrandiks $vy + wz = 0$.

Sellest piisab, et tõestada Ceva teoreem.

Barütsentrilised võrrandid on homogeensed, ehk koordinaadid (x, y, z) ja $(30x, 30y, 30z)$ vastavad samale punktile. Seega defineerime $(x : y : z) = (\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z})$. Teisisõnu, iga nullist erineva reaalarvu k korral $(kx : ky : kz) = (x : y : z)$ ning $(x : y : z) = (x, y, z)$, kui $x + y + z = 1$.

Teoreem 3 (Suvaline sirge läbi kolmnurga tipu e tseviaan)**.** Olgu $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ suvaline punktist A erinev punkt. Siis kõik sirgel AP asuvad punktid esituvad kujul $(t : x_1 : z_1)$.

Saame leida kõik olulisemad punktid kolmnurga sees.

- $G = (1 : 1 : 1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
- $I = (a : b : c)$
- $I_A = (-a : b : c)$ ja analoogselt I_B, I_C jaoks
- $O = (\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C)$
- $H = (\tan A : \tan B : \tan C)$

Defineerime $S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$ ning analoogselt S_B ja S_C. Siis $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ ning $H = (S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$.

Selle abil saame tõestada nurgapoolitaja teoreemi.

Teoreem 4 (Ühel sirgel asumise tingimus)**.** Olgu $P_i = (x_i : y_i : z_i)$ kolm punkti $i = 1, 2, 3$ jaoks. Siis need kolm punkti on ühel sirgel parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Järeldame, et sirge läbi kahe punkti $P = (x_1 : y_1 : z_1)$ ning $Q = (x_2 : y_2 : z_2)$ on antud valemiga

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Teoreem 5 (Sirgete ühes punktis lõikumine)**.** Olgu meil 3 sirget valemitega $u_ix+v_iy+w_iz = 0$ $i = 1, 2, 3$ jaoks. Need sirged on kõik paralleelsed või lõikuvad ühes punktis parajast siis, kui

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Defineerime nihkevektori (displacement vector) järgnevalt. Kahe punkti $P = (p_1, p_2, p_3)$ ja $Q = (q_1, q_2, q_3)$ nihkevektor $\vec{PQ}$ võrdub avaldisega $(q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$. Täheldame, et nihkevektori koordinaatide summa on 0.

Teoreem 6 (Pikkus)**.** Olgu P ja Q suvalised punktid ja $\vec{PQ} = (x, y, z)$ nende nihkevektor. Siis lõigu PQ pikkus avaldub valemist

$$| PQ |^2 = -a^2yz - b^2zx - c^2xy$$

.

Teoreem 7 (Ringjoone valem)**.** Üldine ringjoone valem esitub kujul

$$-a^2yz - b^2zx - c^2xy + (x + y + z)(ux + vy + wx) = 0$$

mingite reaalarvuliste konstantide u, v, w jaoks.

Teoreem 8 (Kahe ristuva sirge tingimus)**.** Olgu $\vec{MN} = (x_1, y_1, z_1)$ ning $\vec{PQ} = (x_2, y_2, z_2)$ kaks nihkevektorit. Siis sirged MN ja PQ on risti parajasti siis, kui

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0.$$