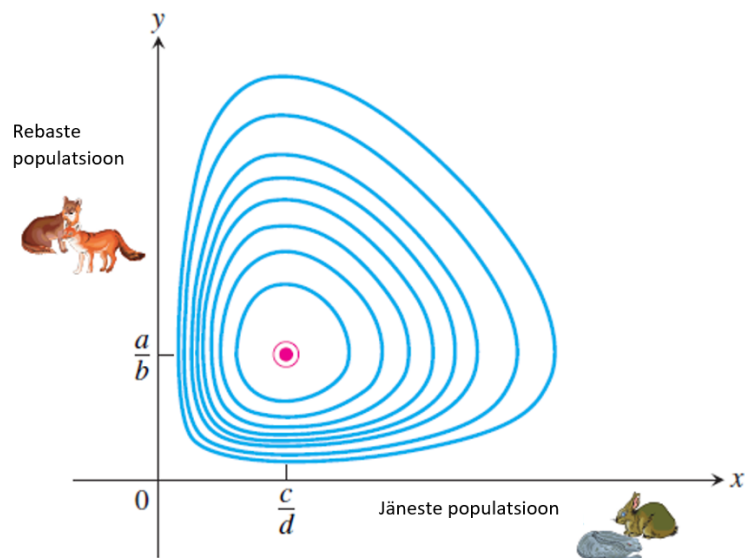


LTMS.00.003
Kõrgem matemaatika



2025/2026 õa
sügissemester

Ülesannete kogu

1	Funktsioonid	2
1.1	Funktsionaalsed sõltuvused	2
1.2	Funktsioonide graafikud	2
1.3	Funktsioonid ja nende omadused	4
2	Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmfunksioon	5
2.1	Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon	5
2.2	Eksponentfunksioon	5
2.3	Logaritmfunksioon	6
2.4	Logistiline kõver	7
3	Funktsiooni piirväärtus	8
3.1	Piirväärtuse omadused	9
3.2	Piirväärtuse arvutamine	9
3.3	Mõned erilised piirväärtused	10
4	Piirväärtus ja pidevus. Tuletis	11
4.1	Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded	11
4.2	Rakenduslikud ülesanded	11
4.3	Pidevad ja katkevad funktsioonid	12
4.4	Funktsiooni tuletise definitsioon	13
5	Tuletis. Liitfunktsiooni tuletis	14
5.1	Funktsiooni tuletise leidmine	14
5.2	Liitfunktsiooni tuletis	15
5.3	Kõrgemat järku tuletis	16
5.4	Joone puutuja ja normaal	17
6	Diferentsiaal	18
6.1	L'Hospitali reegel	18
6.2	Funktsiooni diferentsiaal	18
6.3	Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine	19
6.4	Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	19
7	Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine	21
7.1	Tuletis kui protsessi muutumise kiirus	21
7.2	Kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad, kumerus- ja nõgususpkiirkonnad	21
7.3	Ekstreemumid	22
7.4	Optimiseerimine	23
7.5	Graafiku asümptoodid	24

8	Määramata integraal	25
8.1	Määramata integraali mõiste	25
8.2	Määramata integraali leidmine	25
8.3	Diferentsiaali märgi alla viimine	26
8.4	Muutujavahetus	27
9	Ositi integreerimine	28
9.1	Ositi integreerimine	28
9.2	Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	29
10	Diferentsiaalvõrrandid	30
10.1	Harilikud diferentsiaalvõrrandid	30
10.2	Diferentsiaalvõrrandi lahend	30
10.3	Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	31
10.4	Rakenduslikud ülesanded	32
11	Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	34
11.1	Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	34
11.2	Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine	34
11.3	Rakenduslikud ülesanded	35
12	Maatriksid	36
12.1	Maatriksid	36
12.2	Tehted maatriksitega	36
12.3	Maatriksite korrutamine	37
12.4	Maatrikstehete omadused	38
12.5	Rakenduslikud ülesanded	39
13	Determinandid	40
13.1	Determinandi arvutamine	40
13.2	Determinantide omadused	41
13.3	Determinantide arendamine	42
13.4	Rakenduslikud ülesanded	43
14	Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine	44
14.1	Pöördmaatriks	44
14.2	Pöördmaatriksi leidmine	45
14.3	Maatriksvõrrandite lahendamine	46
14.4	Rakenduslikud ülesanded	47
15	Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid	48
15.1	Maatriksi astak	48
15.2	Süsteemi üldlahend ja erilahend	48
15.3	Gaussi elimineerimismeetod	49
15.4	Crameri valemid	51
15.5	Rakenduslikud ülesanded	51

1.1 Funktsionaalsed sõltuvused

Definitsioon 1.1

Olgu antud hulk $X \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y , siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud **funktsioon** f , mida märgitakse $y = f(x)$.

Kui suurus y on võrdeline (proportsionaalne) suurusega $f(x)$, siis seda sõltuvust iseloomustab funktsioon $y = kf(x)$, kus k on mingi konstant (võrdetegur).

Ülesanne 1.1. Kirjutage välja järgmised funktsionaalsed sõltuvused.

- (a) Ümara lati tugevus S on võrdeline tema jämeduse h neljanda astmega
- (b) Delfiini energiakulu E ujudes on proportsionaalne tema liikumiskiiruse v kuubiga
- (c) Teekonna keskmine kiirus v on pöördvõrdeline kulutatud ajaga t
- (d) Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud G on pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga

Ülesanne 1.2. (K) Keemilise elemendi erisoojus s on energia hulk kalorites, mida on vaja 1 grammi elemendi 1 kraadiliseks soojendamiseks.

Otsustage järgmise tabeli põhjal, kas erisoojus s on võrdeline või pöördvõrdeline aatommassiga w . Kui seos kehtib, leidke vastav võrdetegur k .

element	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6,9	24,3	27,0	55,8	107,9	207,2	200,6
s	0,92	0,25	0,21	0,11	0,056	0,031	0,033

1.2 Funktsioonide graafikud

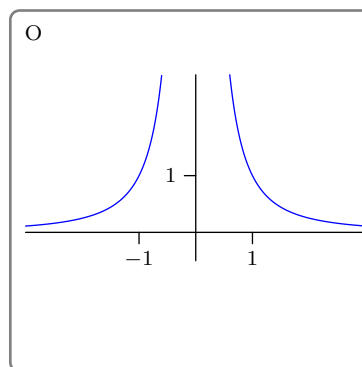
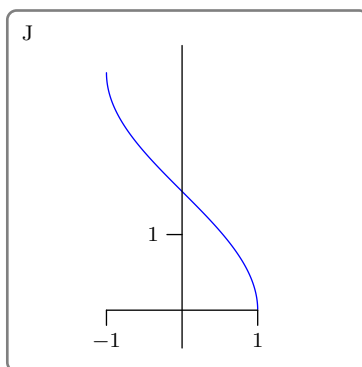
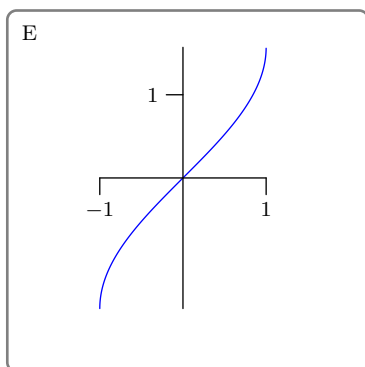
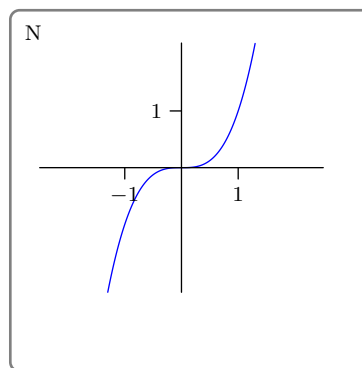
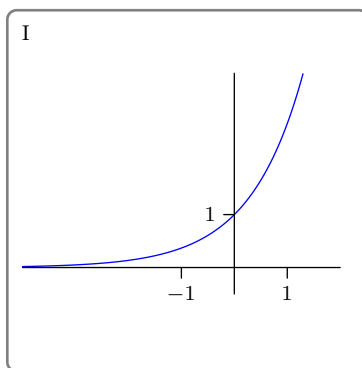
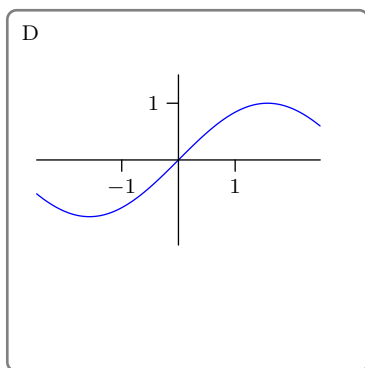
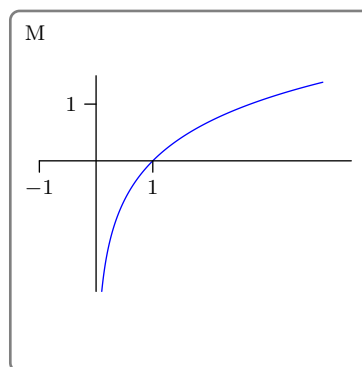
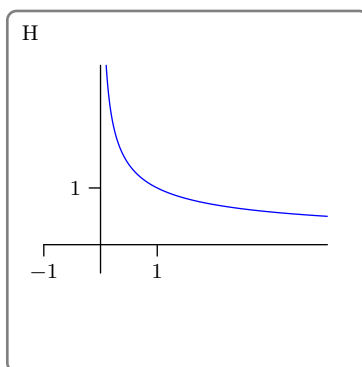
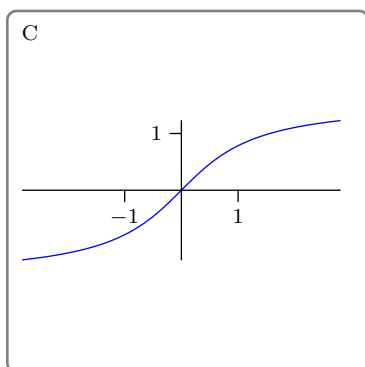
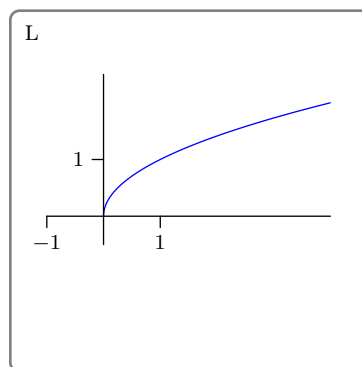
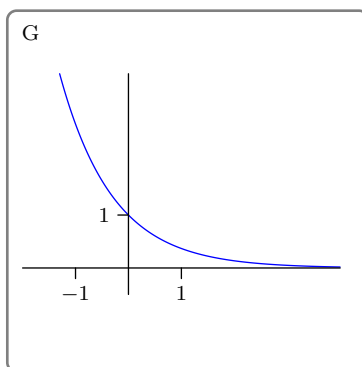
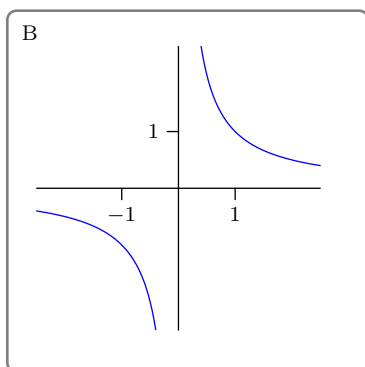
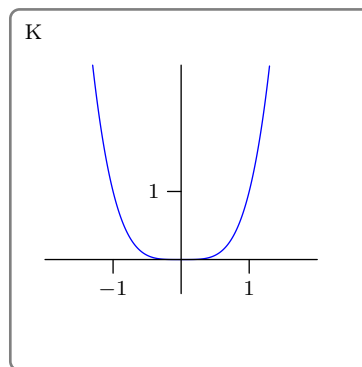
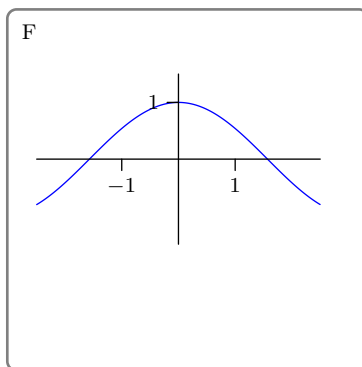
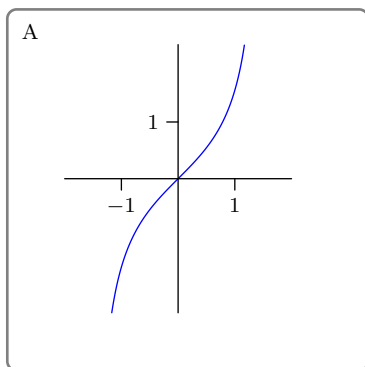
Ülesanne 1.3. Selgitage, kas funktsioonide $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ korral kehtib võrdus $f = g$? Skitseerige nende funktsioonide graafikud.

Ülesanne 1.4. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud.

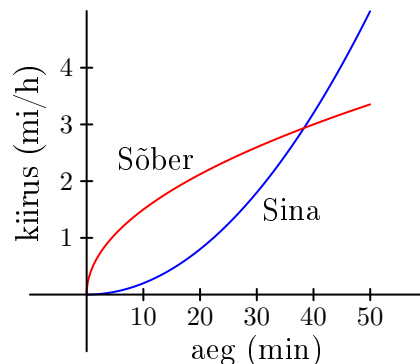
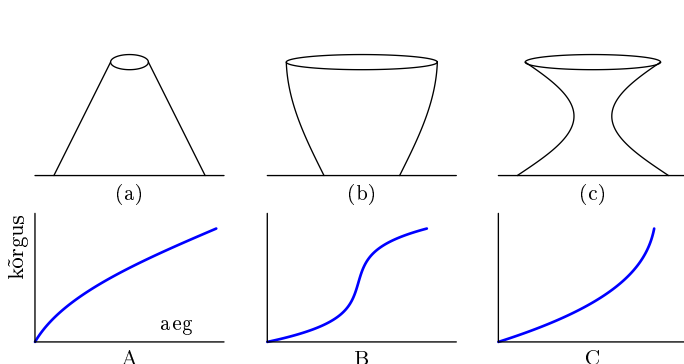
- (a) $f(x) = -x^2 + 1$
- (b) $f(x) = \log(-x)$
- (c) $f(x) = \sin(x - \pi)$
- (d) $f(x) = \arcsin x + \pi/2$
- (e) $f(x) = e^{-2x}$
- (f) $f(x) = \cos x$
- (g) $f(x) = \cos 2x$
- (h) $f(x) = \cos 3x$
- (i) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$
- (j) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$
- (k) $f(x) = \tan 2x$
- (l) $f(x) = \tan(x - 2\pi)$

Ülesanne 1.5. (IT) Multiprotsessoriga arvuti suudab töötada S korda kiiremini, kui ühe protsessoriga arvuti. Skitseerige S graafik protsessorite arvu n järgi, kui $S = \frac{5n}{4+n}$.

Ülesanne 1.6. Milliste põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud on kujutatud järgmistel joonistel?



Ülesanne 1.7. Kolmel graafikul on toodud anuma veega täitumise kõrgus, kui veevool on ühtlane. Milline anum vastab millisele graafikule?



Ülesanne 1.8. Graafikul (ülal paremal) on toodud teie ja sõbra liikumise kiirus ajas. Liikumist alustatakse samast punktist ja liigutakse samas sihis.

- (a) Kes liigub kiiremini hetkel $t = 20$? (b) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 20$?
 (c) Millal on teie vahemaa suurim? (d) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 50$?

1.3 Funktsioonid ja nende omadused

Definitsioon 1.2

Kõikide elementide X hulka, mille puhul elemendile $x \in X$ seatakse funktsiooniga f vastavusse $f(x)$, nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka $\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulgaks ja seda tähistatakse $f(X)$.

Definitsioon 1.3

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse

1. **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;
2. **paarituks funktsiooniks**, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral;
3. **perioodiliseks**, kui leidub arv $T > 0$ nii, et $f(x + T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 1.9. Leidke järgmiste funktsioonide määramis- ja muutumispiirkonnad.

- (a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ (c) $f(x) = \log(x-6)$
 (d) $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$ (e) $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$ (f) $f(x) = \arcsin(2x-1)$
 (g) $f(x) = \arccos \frac{2}{1+x}$

Ülesanne 1.10. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid.

- (a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$ (b) $f(x) = x(5^{2x} - 5^{-2x})$ (c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$
 (d) $f(x) = \sin x - x \cos x$ (e) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ülesanne 1.11. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leidke vähim periood T .

- (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = \cos 3x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = \tan \frac{x}{2} + 3$

Praktikum 2

Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmifunktsioon

2.1 Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon

Definitsioon 2.1

Funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks** funktsiooniks, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas Y , s.t $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Üksühese vastavuse $f: X \rightarrow Y$ **pöördfunktsioon** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ määratakse võrdusega $f^{-1}(y) = x$, kus $f(x) = y$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 2.1. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$

(d) $f(x) = 1 + \log|x - 2|$, $x \in (-\infty, 2)$

(b) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0)$

(e) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$, $x \in [-3, 0]$

(c) $f(x) = 10^x + 1$

(f) $f(x) = 1 + \arccos(1 - x)$

Ülesanne 2.2. Määrake, kas funktsioon f on üksühene.

(a) $f(x) = 3x - 2$

(d) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$

(b) $f(x) = 2^x$

(e) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = x^2$

(f) $f(x) = \sin x$

Ülesanne 2.3. Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutage ilmutatud kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

(a) $x = t + 5$, $y = t + \ln t$

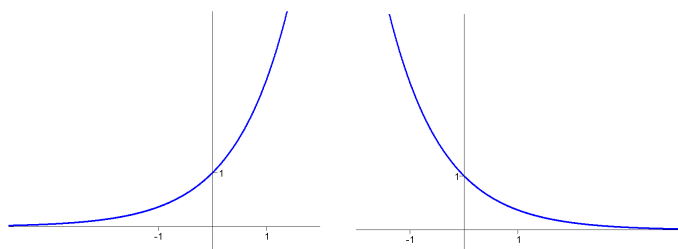
(b) $x = t^5 + t$, $y = e^t$

Ülesanne 2.4. Esitage järgmised ilmutamata kujul antud joonte võrrandid ilmutatud kujul.

(a) $\ln(y - \sin x) = x$

(b) $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$

2.2 Eksponentfunktsioon



Eksponentfunktsioon on $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktsiooni $y = e^x$ korral räägitakse eksponentsiaalsest kasvust ja $y = e^{-x}$ korral eksponentsiaalsest langusest.

Omadus 2.1

Eksponentfunktsioonil on järgmised omadused:

$$\begin{array}{llll}
 (a) & a^0 = 1 & (c) & a^{x+y} = a^x a^y & (e) & a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} & (g) & (ab)^x = a^x b^x \\
 (b) & a^x > 0 & (d) & a^{-x} = \frac{1}{a^x} & (f) & (a^x)^y = a^{xy}
 \end{array}$$

Ülesanne 2.5. Lihtsustage avaldis $\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, kui $f(x) = Ae^{kx}$.

Ülesanne 2.6. Turule investeeritakse 300 eurot intressiga 3 % aastas. Leidke investeeringu suurus 10 aasta pärast.

Ülesanne 2.7. (K) Mõõtesead registreerib jões 1 km eemal kemikaali lekkekohast 620 osakest miljoni (ppm) ning seadme näitajad vähenevad 12,5 % iga kilomeetri kohta lekkekohast eemal. Kui kaugel on seadme näit 100 ppm?

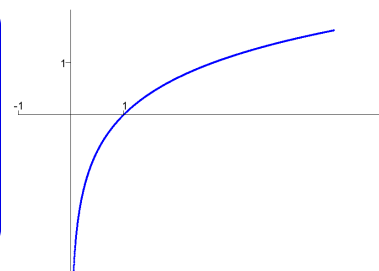
2.3 Logaritmifunktsioon

Definitsioon 2.2

Positiivse arvu x **logaritmiks alusel** a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse arvu c , millega alust a astendades saadakse arv x , s.t.

$$\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x.$$

Logaritm- ja eksponentfunktsioon on teineteise pöördfunktsioonid.


Omadus 2.2

Logaritmifunktsioonil on järgmised omadused:

$$\begin{array}{llll}
 (a) & \log xy = \log |x| + \log |y|, & (c) & \log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y| & (f) & e^{\ln x} = x \\
 & (xy > 0) & & & & \\
 (b) & \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} & (d) & \log x^a = a \log x & (g) & \log 1 = 0 \\
 & & (e) & x = a^{\log_a x}, (x > 0) & (h) & \ln e = 1
 \end{array}$$

Ülesanne 2.8. Lihtsustage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{lll}
 (a) & e^{5 \ln x} & (b) \ln \frac{1}{e^{3x}} & (c) e^{(3 \ln 9)/2} \\
 (d) & 4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln x^{1/3} & (e) 16^{\log_2 \sqrt[4]{48} - 1} & (f) \log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}} \\
 (g) & -\log_8 \log_4 \log_2 16 & (h) & e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2
 \end{array}$$

Ülesanne 2.9. Lihtsustage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & 5 \log_5 25 + 8 \log_2 64 - 4 \log_3 27 + \log_2 2 + \log_5 1 \\
 (b) & 3^{1 - \log_3 7} + 5^{\log_5 8 + 1} - 2 \cdot 4^{\log_{2,4} 10 + 1} \\
 (c) & \log_2 12 + \log_2 25/3 + 2 \log_2 4/5 - \log_2 2^7 \\
 (d) & 4 \cdot (81^{1/4 - 1/2 \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8})
 \end{array}$$

Ülesanne 2.10. Vesi kuumutatakse nõus 90 kraadini ja asetatakse ruumi, mille temperatuur on 0 kraadi. Newtoni jahtumisseadusest tuletatakse võrrand $\ln T = \ln 90 - 0,23t$, kus T on vee temperatuur ja t on aeg minutites. Esitage T ajast t sõltuva funktsioonina.

Ülesanne 2.11. (F) Kahe tähe näivheledused m_1 ja m_2 on seotud nende tegelike heledustega b_1 ja b_2 järgmise logaritmilise seose abil:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log_{10} \frac{b_2}{b_1}.$$

Avaldage b_2 .

Siiriuse näivheledus on $-1,4$ ning veel silmaga nähtavate tähtede näivheledus on u. $6,0$. Mitu korda on Siiriuse tegelik heledus suurem, kui veel silmaga nähtavatel tähtedel?



Ülesanne 2.12. (K) Putukamürk DDT keelati USA-s 1972. aastal. Olgu A_0 alghetkel piirkonda pritsitud DDT kogus ning A hetkel t (aastat) veel lagundamata DDT kogus. Neid kahte suurust seob võrrand

$$\log_{10} A = \log_{10} A_0 + 0,1t \log_{10} 0,8.$$

Avaldage A kui aja t -funktsioon.

Ülesanne 2.13. (M) Näidake, et kehtib võrdus $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

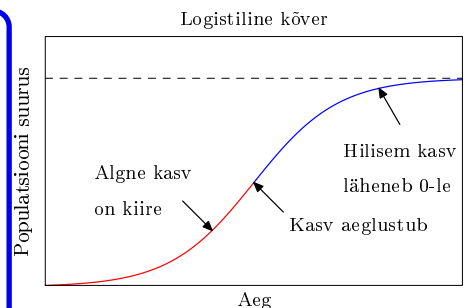
Ülesanne 2.14. (M) Arvutage b^b , kui $a^b = 8$, $b^c = 10$ ja $a^c = 2$.

2.4 Logistiline kõver

Logistiline S-kõver

$$y = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} = \frac{L}{1 + b e^{-kx}}$$

on laialt kasutusel populatsiooni modelleerimisel. Siin L on kõvera maksimaalne väärtus, k iseloomustab kasvu kiirust ja x_0 on keskpunkti asukoht. Logistilist kõverat kasutatakse palju ka statistikas ja IT-s masinõppes, kuna lubab modelleerida 0 ja 1 tüüpi väärtusi.



Joonis: <http://www.math.andyou.com/161>

Ülesanne 2.15. Ülikoolilinnakus on 5000 tudengit. Üks tudeng naaseb puhkuselt linnakusse kaua kestva gripiviirusega. Viiruse levikut modelleeritakse parajasti logistilise mudeliga $y = \frac{5000}{1+4999e^{-0,8t}}$, kus t on aeg päevades ja y näitab nakatunud tudengite arvu. Mitme päeva pärast tuleb õppetöö lõpetada, kui eeskirja järgi tehakse seda olukorras, kus on vähemalt 40 % nakatunuid.

Praktikum 3

Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 3.1

Hulga $X \subset \mathbb{R}$ **kuhjumispunktiks** nimetatakse punkti $a \in \mathbb{R}$, kui punkti a iga ümbrus (vahemikud $(a - \delta, a + \delta)$, kus $\delta > 0$) sisaldab vähemalt ühte temast erinevat hulga X punkti.

Definitsioon 3.2

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktile a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kui tahes vähe.

Teoreem 3.1

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis (nn. kahepoolne) piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ eksisteerib parajasti siis, kui

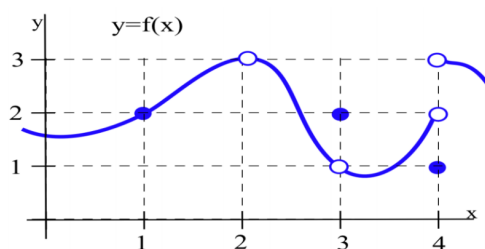
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb avaldist, millest leitakse piirväärtust, teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

Ülesanne 3.1. Leidke joonise põhjal järgmised piirväärtused.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Ülesanne 3.2. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b .

(a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}$

3.1 Piirväärtuse omadused

Teoreem 3.2

Kui on olemas **lõplikud** piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

siis kehtivad järgmised tehete seotud omadused:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{kui } B \neq 0.$$

Teoreem 3.3

Kui funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, siis $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$.

Teoreem 3.4

Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ülesanne 3.3. Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning olgu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$. Millistele piirväärtuse omadustele tuginedes on tehtud järgmised teisendused?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)\right)^{2/3}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7\right)^{2/3}} = \frac{7}{4}.$$

Ülesanne 3.4. Kas kehtib võrdus $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{1/x}$? Põhjendage!

Ülesanne 3.5. Leidke järgmised piirväärtused või põhjendage, miks piirväärtust ei eksisteeri.

(a) $\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - 5)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos 2x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 7}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4+x}{2 + e^{\frac{-1}{\sin x}}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

3.2 Piirväärtuse arvutamine

Ülesanne 3.6. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - 1}{2x-2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(2x^2 - 8)x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

(i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$

(h) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{x-4}$

Ülesanne 3.7. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$

(c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{y+16}}{y}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+5x}}$

Ülesanne 3.8. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log 2x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-7x+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x^2-x+1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{(4x+3)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

3.3 Mõned erilised piirväärtused

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \end{aligned}$$

Ülesanne 3.9. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 5x}{(x-x^3)^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{3x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

Praktikum 4

Piirväärtus ja pidevus. Tuletis

4.1 Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded

Ülesanne 4.1. Leidke järgmised piirväärtused või põhjendage, miks piirväärtust ei eksisteeri.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 + x - 2}$	(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} + x)$	(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 6x}$
(b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}}$	(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$	(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$
(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{(x+1)^2}$	(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 5x}$	(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x - 1}$
		(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2}{x} - 1 \right)$

4.2 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 4.2. (B) Loomade õppimisvõime uurimiseks teostas üliõpilane eksperimendi, kus rotid lasti korduvalt läbida labürinti. Mõõtmistulemused näitasid, et n -dal korral läbis rott labürindi ajaga $T(n) = (5n + 17)/n$ minutit. Mis juhtub labürindi läbimiseks kuluva ajaga, kui katsete arv tõkestamatult kasvab?

Ülesanne 4.3. (B) Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega $S = \frac{36 + 24y^3}{1 + 4y^3}$ (mm²), kus y on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pupilli pindala teoreetiliselt muutuda?

Ülesanne 4.4. (F) Einsteini erirelatiivsusteooria järgi on liikuva keha mass leitav valemiga $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m > 0$ on seisumass ja v on keha liikumise kiirus. Arvutage järgmiste avaldiste väärtused. Mis on vastavate tulemuste füüsikaline sisu?

(a) $M(0)$	(b) $M\left(\frac{c}{2}\right)$	(c) $\lim_{v \rightarrow c-} M(v)$	(d) $\lim_{v \rightarrow c+} M(v)$
------------	---------------------------------	------------------------------------	------------------------------------

Ülesanne 4.5. (F) Punktmassi liikumist aja t järgi kirjeldab seos $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$. Leidke punktmassi liikumise kiirus hetkel $t = 2$, s.t leidke piirväärtus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$.

Ülesanne 4.6. On ennustatud, et t aasta pärast on eeslinna populatsioon $p = p(t)$ tuhat inimest, kus $p(t) = 20 - \frac{7}{t+2}$. Keskkonnaameti uuring näitas, et keskmine süsihappegaasi tase on c osakest miljoni osakese kohta, kus $c(p) = \frac{2\sqrt{p^2 + p + 21}}{5}$. Mis juhtub süsihappegaasi tasemega pikas perspektiivis, kui $t \rightarrow \infty$?

Ülesanne 4.7. (K) Analüüsige vesiniku aatomi $3s$ -orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa $R_{3s}(r)$ väärtusi protsessides $r \rightarrow 0+$ ja $r \rightarrow \infty$. Siin N ja a_0 on konstandid, r on elektroni kaugus tuumast:

$$R_{3s}(r) = N \cdot \left(27 - \frac{18}{a_0} r + \frac{2}{a_0^2} r^2 \right) \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}.$$

4.3 Pidevad ja katkevad funktsioonid

Definitsioon 4.1

Vaatleme reaalmuutuja funktsioone $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu $a \in X$. Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks punktis** a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Selleks, et funktsioon oleks pidev punktis a , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

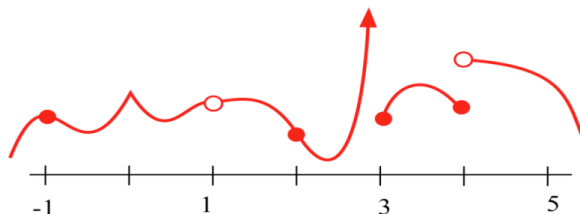
1. funktsioonil on olemas väärtus $f(a)$;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ protsessis $x \rightarrow a$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon f on **katkev punktis** a (punkti a nimetatakse funktsiooni f **katkevuspunktiks**). Katkevuspunktist a räägitakse ka siis, kui funktsioon f ei ole määratud punktis a , kuid eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teoreem 4.1

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Ülesanne 4.8. Leidke joonise põhjal intervallid, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta ei ole pidev.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

Ülesanne 4.9. Joonestage ühe funktsiooni f graafik, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

- | | |
|--|--|
| (a) funktsioon f on määratud lõigus $[0, 5]$ | (c) $f(1) = 0$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ | (d) funktsioon f on tõkestatud lõigus $[4, 5]$ |
| | (e) funktsioon f ei ole pidev punktis $x = 3$ |

Ülesanne 4.10. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$ | (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ | (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ |
| (d) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$ | (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ | |

Ülesanne 4.11. Leidke parameetrite a ja b väärtused, mille korral järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x - a, & x < 1 \\ \cos \pi x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \leq 2 \\ 2x + b, & x > 2 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3 + ax^2, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ülesanne 4.12. Töötaja leping näeb ette, et tema esialgne palk on 1000 € ning eduka töö korral ootab teda iga poole aasta tagant palgatõus 3%. Joonistage töötaja palga graafik järgmise 5 aasta jaoks ning uurige palgafunktsiooni pidevust.

4.4 Funktsiooni tuletise definitsioon

Definitsioon 4.2

Olgu antud funktsioon $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Anname argumentidele $a \in X$ muudu Δx nii, et $a + \Delta x \in X$, vastav funktsiooni muut olgu $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks punktis** a ja tähistatakse $f'(a)$.

Niisiis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib ja on reaalarv.

Ülesanne 4.13. Lähtudes definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$(a) f(x) = 6x - 1$$

$$(d) f(x) = \sqrt{3x}$$

$$(b) f(x) = 2x^2 - 5$$

$$(e) f(x) = \cos x$$

$$(c) f(x) = x^3$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{x}$$

Praktikum 5

Tuletis. Liitfunktsiooni tuletis

5.1 Funktsiooni tuletise leidmine

Teoreem 5.1

Tehetega seotud diferentseerimise reeglid

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v, u - v, uv, \frac{u}{v}$ (lisatingimusel) eksisteerivad tuletised punktis x , kusjuures

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2. $(uv)' = u'v + uv'$

3. $(cu)' = cu', c = \text{const}$

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ kui } v \neq 0$

Ülesanne 5.1. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $f(x) = 3x^5$

(d) $f(x) = 2^x - e^x$

(g) $f(x) = 21x^{-7} - \frac{\arcsin x}{2}$

(b) $f(x) = x + 6x^{\frac{1}{3}}$

(e) $f(x) = \log_2 |x| + \sin x$

(h) $f(x) = -\ln |x| + \frac{x^3}{6}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2e$

(f) $f(x) = \frac{1}{2x} - 3 \arccos x$

(i) $f(x) = 3\pi^2 + 6\sqrt[3]{x^4}$

Ülesanne 5.2. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a, b ja α on konstandid).

(a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

(f) $f(x) = -\frac{5x}{x - 6}$

(b) $f(x) = x^a b^x$

(g) $f(x) = \frac{e^x a^x}{1 + \ln a}$

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

(h) $f(x) = \frac{x \tan \alpha}{1 + x^2} + x \ln x$

(d) $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$

(i) $f(x) = \arccos x \arcsin x$

(e) $f(u) = \frac{\sin u}{u} - \ln u \cdot \cos u$

(j) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + a^2 \arctan x$

Ülesanne 5.3. Leidke funktsiooni $f(x) = (3x - 1)(3x + 1)(x^2 - 4)$ tuletis

(a) kasutades korrutise tuletise valemit

(b) korrutades sulud läbi

Ülesanne 5.4. Arvutage järgmiste funktsioonide tuletised punktis t .

(a) $f(t) = 15t^3 e^t$ ja $t = 1$

(b) $f(t) = \frac{t^2(1-2t)}{3t-7}$ ja $t = -1$

Ülesanne 5.5. (F) Laserite teoorias avaldub kiirgusvõimsus valemiga

$$P = \frac{kf^2}{\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2},$$

kus f on sagedus ning a , k ja ω on teatud konstandid. Leidke $\frac{dP}{df}$.**Ülesanne 5.6. (IT)** Arvutisüsteem töötleb N bitti andmeid ajaga t , mis on võrdeline arvuga $N \ln(N)$. Leidke aja muutumise kiirus bittide arvu suhtes $\frac{dt}{dN}$.**Ülesanne 5.7. (K)** Termodünaamikas seob temperatuuri T , rõhku p ja gaasi ruumala V valem, kus a , b ja R on konstandid. Leidke $\frac{dT}{dV}$, kui rõhk on konstantne ja

$$T = \left(p + \frac{a}{V^2}\right) \left(\frac{V-b}{R}\right).$$

5.2 Liitfunktsiooni tuletis

Teoreem 5.2***Teoreem liitfunktsiooni diferentseerimisest.** Kui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in X$, $f(X) \subset Y$ ja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $y = f(x)$, siis $h = gf : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x ja*

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Ülesanne 5.8. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = (4x-3)^5 + (-3x)^2$

(d) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(g) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$

(b) $y = 5(3x^6 - 4)^{\frac{2}{3}}$

(e) $y = \ln(x + \ln x)$

(c) $y = (\sin x)^{-1}$

(f) $y = 6\sqrt{x} + 4^{6x}$

(h) $y = \frac{e^{0,5x}}{2x}$

Ülesanne 5.9. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^2$

(f) $y = \frac{\cos^2 3x}{1 + 2 \sin^2 2x}$

(b) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{4x+1}}$

(g) $y = \ln \tan 2x + \ln \cot 2x$

(c) $y = \ln(4x-3)^3$

(h) $y = 6 \arcsin \sqrt{2-x}$

(d) $y = \cos(-9x+2) + \sin^3 4x^5$

(i) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$

(e) $y = \frac{1}{\cos(-7x)} + \frac{1}{\sin(-7x)}$

(j) $y = \arccos x \cdot \ln \arctan x$

Ülesanne 5.10. Tabelis on antud funktsioonide f ja g ning nende tuletiste väärtused kohal $x = 3$. Leidke funktsiooni $u(x) = \sqrt{f(x)^2 + 2 \cdot g(x)^2}$ tuletise väärtus punktis $x = 3$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	3	4	6	-5

Ülesanne 5.11. (F) Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k\sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel (a , k ja m on konstandid, L laine pikkus). Leidke L väärtused, mille korral $v'(L) = 0$.

Ülesanne 5.12. (B) Näidaku funktsioon $y = y(t)$ mingi liigi isendite, taime osade, rakkude arvu vms ajahetkel t . Sel juhul tuletist $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ nimetatakse ka absoluutseks kasvukiiruseks hetkel t . Absoluutne kasvukiirus võib erisuurustes organismide vahel palju erineda ja see ei anna meile infot nn efektiivsuse kohta. Olgu kasvukiirus $y'(t) = G(t)$, s.t. ajast sõltuv funktsioon. Sel juhul jagades mõlemat poolt suurusega y saame

$$\frac{y'(t)}{y} = \frac{G(t)}{y}.$$

Jagatist $R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ nimetatakse suhteliseks kasvukiiruseks ja see iseloomustab nn materjali efektiivsust toota uut materjali (näiteks metsa kasv). Sookase (*Betula pubescens*) ja mägivahtra (*Acer pseudoplatanus*) seemned istuti maha ja kasvanud taimed kärbiti iga kahe nädala tagant. Esimese 18 nädalaga selgus mõõtetulemustest, et puud kasvasid seaduste

$$W_{kask}(t) = 0,0441 e^{0,3041 t}, \quad W_{vahter}(t) = 0,3837 e^{0,2243 t}$$

alusel, kus t ühikuks olid nädalad ja W ühikuks grammid. Kirjutage välja mõlema liigi suhtelised kasvukiirused $R(t)$. Milline liik taastoodab ennast efektiivsemalt?

Ülesanne 5.13. (K) Kui gaasi ruumala muutub väga kiiresti, siis rõhk P muutub ligikaudu pöördvõrdeliselt ruumala $3/2$ -astmega. On teada mõõtmistulemus, et 300 kPa rõhuga $V = 100 \text{ cm}^3$. Leidke rõhu P muutumise kiirus ruumala V järgi hetkel, mil $V = 100 \text{ cm}^3$.

5.3 Kõrgemat järku tuletis

Kui eksisteerib $(f')'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x , seega

$$(f')'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Analoogiliselt defineeritakse n -järku tuletis

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Ülesanne 5.14. Leidke järgmised kõrgemat järku tuletised.

(a) $f(x) = \ln x$, leidke f''

(c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2$, leidke $f^{(10)}$

(b) $f(x) = \sin x$, leidke $f^{(13)}$

(d) $f(x) = \tan x$, leidke f''

Ülesanne 5.15. Leidke nõutud kõrgemat järku tuletised, kui funktsioon $u = u(x)$ on vajalik arv kordi diferentseeruv.

(a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f''

(c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f'''

(b) $f(x) = u(e^x)$, leidke f'''

(d) $f(x) = \frac{u(x^2)}{x}$, leidke f''

Ülesanne 5.16. Arvutage nõutud kõrgemat järku tuletise väärtus.

(a) $f''' \left(\frac{\pi}{4} \right)$, kui $f(x) = \cos^2 x$

(b) $f^{(4)}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$

Ülesanne 5.17. Leidke

(a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, kui $y = \frac{\ln x}{x}$

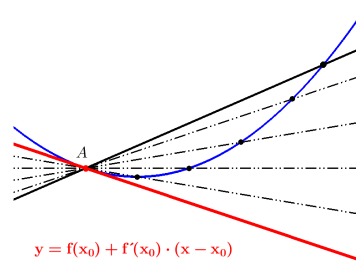
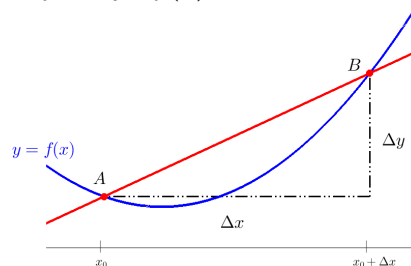
(b) $\frac{d^2 p}{dq^2}$, kui $p = qe^{q^2}$

(c) $\frac{d^3 s}{dt^3}$, kui $s = \frac{t}{2 + 3t}$

5.4 Joone puutuja ja normaal

Definitsioon 5.1

Joone **puutujaks** punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.



Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (5.1)$$

Definitsioon 5.2

Joone $y = f(x)$ **normaali** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand punktis $(x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (5.2)$$

Ülesanne 5.18. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja normaal nõutud punktis $(x_0, f(x_0))$.

(a) $y = x^2 + 2x$ punktis $(2, 8)$

(c) $y = 4 - x^2$ punktis $(3, -5)$

(b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ punktis $(3, -6)$

(d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ punktis $(-1, \frac{1}{2})$

Ülesanne 5.19. Leidke funktsiooni graafiku puutuja või normaal etteantud tõusuga.

(a) $y = x^2 - 2x$ puutuja, tõusuga 2

(c) $y = (2x - 1)^3$ normaal, tõusuga $-\frac{1}{24}$, $x > 0$

(b) $y = \sqrt{2x - 9}$ puutuja, tõusuga 1

(d) $y = \frac{x^4}{2} + 1$ normaal, tõusuga 4

Ülesanne 5.20. Arvutimängus liiguvad lennukid ekraanil vasakult paremale eeskirja $y = 2 + \frac{1}{x}$ järgi. Lennukite relvadeks on raketid, mida tulistatakse ainult liikumise suunas. Sihtmärgid asuvad x -teljel: $x = 1, 2, 3, 4$. Kas punktist $(1, 3)$ lastud rakett tabab ühte sihtmärkidest?

Ülesanne 5.21. Näidake, et joone $y = x + 2x^2 - x^4$ puutuja punktis $(1, 2)$ on selle joone puutujaks ka punktis $(-1, 0)$.

Ülesanne 5.22. Käiaga terariistu teritades lendavad sädemed mööda käia välispinna puutujat. Leidke punktist $(3, 4)$ lenduva sädeme trajektoor (sirge), kui käi on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ kujuga.

6.1 L'Hospitali reegel

Teoreem 6.1

L'Hospitali reegel. Kui mingis protsessis $x \rightarrow a$ (siin $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{või} \quad \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

siis selles protsessis kehtib võrdus $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ülesanne 6.1. Leidke l'Hospitali reegli abil järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9}{5x^2 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5}{x^4 + 5x^3 - 6}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 6x}{\ln \sin 3x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$,

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

Ülesanne 6.2. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{(\pi - x)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x$

(g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (1 - \sin x) \tan x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$

6.2 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 6.1

Olgu antud punktis x diferentseeruv funktsioon f . Anname argumendile x muudu Δx . Korrutist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{ehk} \quad dy = f'(x)dx. \quad (6.1)$$

Ülesanne 6.3. Leidke funktsioonide diferentsiaalid.

(a) $y = x^5 + 4x$

(d) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{8x}$

(g) $y = 6x\sqrt{1 - 4x}$

(b) $y = 3x^2 + 6$

(e) $y = xe^x$

(h) $y = \frac{x}{5x + 2}$

(c) $T = \frac{2}{r^5} + 3\pi^2$

(f) $R = \sqrt{\frac{6u}{1 + 2u}}$

(i) $y = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x - 1}}$

Ülesanne 6.4. Arvutage funktsioonide diferentsiaalid ette antud väärtustel.

(a) $y = 7x^2 + 4x$, $x = 4$, $\Delta x = 0,2$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+4x}$, $x = 12$, $\Delta x = 0,06$

(b) $y = (x^2 + 2x)^3$, $x = 7$, $\Delta x = 0,02$

(e) $y = \frac{x}{\sqrt{6x-1}}$, $x = 3,5$, $\Delta x = 0,025$

(c) $y = (x^2 + 1)^2$, $x = 1$

(f) $f(x) = \tan x$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

6.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis võime funktsiooni f muudu Δf asemel leida funktsiooni f diferentsiaali df ,

$$\Delta f \approx df \quad \text{ehk} \quad f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 6.5. Avaldage ringi pindala S raadiuse funktsioonina. Leidke selle funktsiooni muut ΔS ning diferentsiaali definitsiooni põhjal funktsiooni diferentsiaal dS . Leidke suurus, mille võrra erinevad funktsiooni muut ja diferentsiaal.

Ülesanne 6.6. Arvutage, kui palju ligikaudu suureneb kera pinna pindala, kui raadiust pikendada 50 sentimeetrilt 51 sentimeetrini.

Ülesanne 6.7. Arvutage ligikaudu, kui palju on vaja värvi, et katta 55 m raadiusega poolkera-kujuline klaasist kuppel 0,5 mm paksuse värvikihiga.

Ülesanne 6.8. Ilmajaam ripub raadiusega 3,5 m kerakujulise õhupalli otsas. Õhupall kattub ühtlase jää kihiga, mille paksus on 1,2 mm. Leidke jää ligikaudne ruumala.

6.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 6.9. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $\sqrt{1,08}$

(d) $\sin 46^\circ$

(g) $\sqrt[3]{1,02}$

(i) $\arctan 1,05$

(b) $\sqrt{15,93}$

(e) $\log 11$

(h) $\sqrt{\frac{2,92^2 - 5}{2,92^2 + 7}}$

(c) $(3,02)^5$

(f) $e^{0,1}$

Ülesanne 6.10. Esitage ligikaudne valem funktsiooni väärtuse arvutamiseks etteantud punkti a ümbruses ning arvutage saadud valemi põhjal funktsiooni väärtus kohal b .

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 8}$, $a = 2$, $b = 1.92$

(b) $f(x) = x^2(x+1)^4$, $a = -2$, $b = -1.87$

Ülesanne 6.11. (B) Inimese ellujäämise tõenäosus y põletushaavade korral $x\%$ kehast on ligikaudselt esitatav valemiga $y = \frac{300}{0,0005x^2 + 2} - 50$. Esitage y ligikaudse arvutamise valem kohal $x = 50\%$. Arvutage saadud valemi põhjal inimese ellujäämise tõenäosus y , kui kehal on põletushaavu 45% .

Kontrolltöö nr. 1 (LTMS.00.003) teemad

1. Funktsioonid

1. Määramispiirkond, muutumispiirkond, paaris- ja paaritu funktsioon, üksühene funktsioon.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, elementaarfunktsioonide graafikute skitseerimine.
3. Pöördfunktsiooni leidmine.
4. Eksponent- ja logaritmifunktsioonide omadused.

2. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

1. Piirväärtuse arvutamine, piirväärtuse omadused, määramatuste ($\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$) avamine (tegurdamine).

2. Piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3. Funktsiooni pidevuse uurimine.

3. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal, rakendused

1. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal.
2. Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
3. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
4. L'Hospitali reegel. Funktsiooni diferentsiaali leidmine. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.

Praktikum 7

Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine

7.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus

Ülesanne 7.1. Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala) hetkel, kui $r = 25$ m?

Ülesanne 7.2. Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega 20 cm³/min. Kui kiiresti suureneb kera raadius r , kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6$ cm?

Ülesanne 7.3. Silindri kõrgus h suureneb kiirusega 7 m/s ja aluse raadius r suureneb 3 m/s. Kui kiiresti suureneb silindri ruumala, kui $h(0) = 5$ m ja $r(0) = 6$ m?

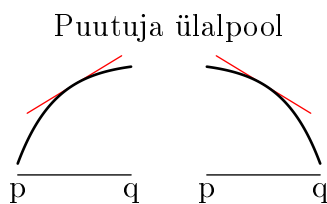
7.2 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõgususpiirkonnad

Teoreem 7.1

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

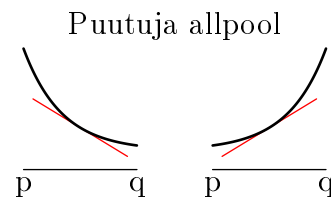
Definitsioon 7.1

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub ülalpool graafikut.



Definitsioon 7.2

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub allpool graafikut.

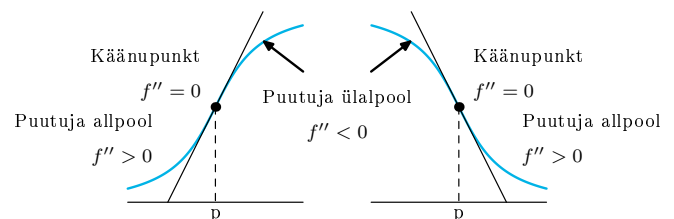


Teoreem 7.2

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **kumer** selles vahemikus. Kui $f''(x) > 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **nõgus** selles vahemikus.

Definitsioon 7.3

Olgu funktsioon f diferentseeruv vähemalt vahemikes (a, c) ja (c, b) ning pidev punktis c . Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.



Ülesanne 7.4. Leidke järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (c) $f(x) = x - \sin x$ (e) $f(x) = \arccos(1 + x)$
 (b) $f(x) = 8x^2 - x^4$ (d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (f) $f(x) = xe^{-x}$, kus $x > 0$

Ülesanne 7.5. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumerus- ja nõgususkiirkonnad ning käänupunktid.

- (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ (c) $f(x) = \arctan x - x$ (f) $f(x) = x^3 - 6x^2$
 (b) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ (d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ (g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
 (e) $f(x) = e^{-x^2}$ (h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

Ülesanne 7.6. Skitseerige pidevate funktsioonide $y = f(x)$ graafikud, millel on nimetatud omadused.

- (a) $f(0) = -1$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$ (c) $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral; $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f''(x) > 0$, kui $x > 0$
 (b) $f(1) = 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (d) $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$; $f'(x) < 0$, kui $x < -1$; $f'(x) > 0$, kui $x > -1$; $f''(x) < 0$, kui $0 < x < 2$; $f''(x) > 0$, kui $x < 0$ või $x > 2$

7.3 Ekstreemumid

Definitsioon 7.4

Öeldakse, et funktsioonil $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, on punktis (kohal) $a \in X$ **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis (kohal) a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Definitsioon 7.5

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**. Punkte c , kus $f'(c) = 0$, nimetatakse **statsionaarseteks punktideks**.

Lause 7.1

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv punktis c . Siis funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne maksimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) < 0,$$

funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne miinimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) > 0.$$

Ülesanne 7.7. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(e) $f(x) = x \ln^2 x$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(f) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

(c) $f(x) = x \ln x$

(g) $f(x) = x - \arctan x$

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

Funktsiooni **globaalsed ekstreemumid** on funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis piirkonnas.

Globaalsete ekstreemumite leidmine:

1. Leiame kõik lokaalsed ekstreemumid.
2. Arvutame funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga).
3. Saadud funktsiooni väärtustest suurim on globaalne maksimum ja väiksem on globaalne miinimum.

Ülesanne 7.8. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, x \in [0, 5]$

(d) $f(x) = \arccos x$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, x \in [-2, 3]$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(c) $f(x) = x - \ln x, x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

(f) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

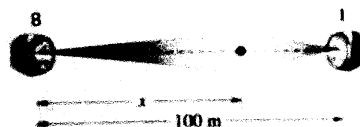
7.4 Optimeerimine

Ülesanne 7.9. Risttahukakujuline karp on tehtud nii, et on võetud 12×8 mõõtmetega papist ristkülik, lõigatud igast nurgast välja $x \times x$ ruut ning keeratud vastavad servad üles. Koostage karbi ruumala arvutamiseks funktsioon, mis sõltub argumentist x . Skitseerige ruumala $V = V(x)$ graafik. Leidke x väärtus nii, et sellise karbi ruumala oleks suurim.

Ülesanne 7.10. Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1,2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2,5, siis mis mõõdus koti ruumala oleks suurim?

Ülesanne 7.11. (B) Katsed näitavad, et kui inimene köhib, siis õhu kiirus kõris on $v = kr^2(a-r)$, kus a on kõri raadius normaalasendis ja k on konstant. Leidke r väärtus, mille korral kiirus v on suurim.

Ülesanne 7.12. (F) Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga.



Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem? Näpunäide: valgustihedused liidetakse.

Ülesanne 7.13. (K) Teatud kemikaali reageerimiskiirus R mg/s sõltub kemikaali hulgast m mg. Leidke kogus m , et reageerimiskiirus R oleks maksimaalne, kui $R = 12\sqrt{m}(27-m)$.

7.5 Graafiku asümptoodid

Definitsioon 7.6

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty, \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty. \end{aligned}$$

Definitsioon 7.7

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0 \quad (7.1)$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right). \quad (7.2)$$

Parempoolse (vasakpoolse) **kaldasümptoodi** $y = ax + b$ võrrandi saamiseks leitakse piirväärtused

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right), \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right). \end{aligned}$$

Kaldasümptoot puudub, kui piirväärtus on lõpmatus.

Ülesanne 7.14. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$

(f) $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

Ülesanne 7.15. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

(b) $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2}$

(f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$

(g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Ülesanne 7.16. (F) Eeldades lihtsustatult, et vihmapiisk on kerakujuline ja langedes piisa raadius väheneb ühest kuni r_0 millimeetrini, siis piisa kiirus avaldub valemiga

$$v = k \left(r - \frac{1}{r^3} \right) \quad \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Skitseerige kiiruse graafik juhul, kui $k = 1$.

Praktikum 8

Määramata integraal

8.1 Määramata integraali mõiste

Definitsioon 8.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **alg-funktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 8.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvalise konstandi tähis, nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ülesanne 8.1. Veenduge, et järgmised valemid kehtivad.

(a) $(\int f(x) dx)' = f(x)$

(b) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

(c) $\int d f(x) = f(x) + C$

Ülesanne 8.2. Leidke järgmiste funktsioonide algfunktsioonid.

(a) $12x^5 + 6x$

(b) $4\sqrt{x} + 3$

(c) $\frac{5}{2}x^{3/2}$

(d) $3(R^2 + 1)^2(2R)$

Ülesanne 8.3. Miks on nii, et $(x + 5)^3$ on funktsiooni $3(x + 5)^2$ algfunktsiooniks, aga $(2x + 5)^3$ ei ole funktsiooni $3(2x + 5)^2$ algfunktsiooniks?

8.2 Määramata integraali leidmine

Valem 8.1

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0 dx = C$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(2) $\int dx = x + C$

(6) $\int e^x dx = e^x + C$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$
 $a \neq -1$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Ülesanne 8.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{y^3}{3} dy$

(c) $\int 5x\sqrt{x} dx$

(f) $\int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2}{t^2} \right) dt$

(b) $\int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

(d) $\int \sqrt{x}(x^2 - 5x) dx$

(g) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx$

(e) $\int (2x^{-2/3} + 3^{-2}) dx$

$$(h) \int \frac{3x^2 - 4x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx \quad (i) \int \frac{x^2 - 2x + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Ülesanne 8.5. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int (2^x 5^x + e) dx \quad (b) \int (e^x + \ln 2)^2 dx \quad (c) \int \frac{dx}{e^x} \quad (d) \int \frac{2^x}{4^x} dx$$

Ülesanne 8.6. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \quad (c) \int \sqrt{1 + \frac{x^2 + x^4}{1 - x^4}} dx \quad (d) \int \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2 - 2x^2}} dx$$

$$(b) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

Valem 8.2

Trigonomeetriselised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Ülesanne 8.7. Leidke järgmised integraalid

$$(a) \int (2 \cos^2 x - \cos 2x) dx \quad (c) \int \tan^2 x dx \quad (e) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$(b) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad (d) \int (\sin \alpha + 3 \cos(\pi + x)) dx$$

8.3 Diferentsiaali märgi alla viimine

Valem 8.3

$$(12.1) f'(x) dx = d f(x) \quad (12.4) dx = \frac{1}{a} d(ax + b) \quad (12.6) \frac{dx}{x} = d \ln |x|$$

$$(12.2) dx = d(x + b) \quad (12.5) x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}, \quad (12.7) \cos x dx = d \sin x$$

$$(12.3) dx = \frac{1}{a} d(ax) \quad n \neq -1 \quad (12.8) \sin x dx = -d \cos x$$

Ülesanne 8.8. On antud funktsiooni diferentsiaal. Leidke see funktsioon.

$$(a) 3 dx \quad (c) 2\sqrt{x} dx \quad (e) -\frac{3}{x} dx \quad (g) e^2 x dx$$

$$(b) x dx \quad (d) \frac{dx}{x^3} \quad (f) \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (h) \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

Ülesanne 8.9. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int \cos(x + 2) dx \quad (c) \int (3x - 2)^7 dx \quad (e) \int e^{-2x+8} dx \quad (g) \int \frac{dx}{\cos^2(2x - 5)}$$

$$(b) \int \sin 3x dx \quad (d) \int \sqrt[3]{7 - 2x} dx \quad (f) \int \frac{dx}{3x + 5} \quad (h) \int \sin^2 x dx$$

8.4 Muutujavahetus

Lause 8.1

Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga U ja f on pidev määramispiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (8.1)$$

Ülesanne 8.10. Leidke järgmised integraalid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}} & \text{(c)} \int x^2 e^{x^3} dx & \text{(e)} \int \frac{\ln x^3}{2x} dx \\ \text{(b)} \int \frac{3\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} & \text{(d)} \int \frac{2x+7}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{(f)} \int \frac{dx}{x \ln x} \end{array}$$

Ülesanne 8.11. Leidke järgmised integraalid.

$$\text{(a)} \int \cos^2 x \sin x dx \quad \text{(b)} \int \tan x dx \quad \text{(c)} \int \cos^3 x dx \quad \text{(d)} \int \tan^3 x dx$$

Ülesanne 8.12. Leidke järgmised integraalid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx & \text{(e)} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} & \text{(i)} \int \frac{4z - 4}{\sqrt{z^2 - 2z}} dz \\ \text{(b)} \int \frac{2x}{x^4 + 3} dx & \text{(f)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx & \text{(j)} \int (x^2 + 4x + 4)^{1/3} dx \\ \text{(c)} \int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx & \text{(g)} \int x \cos x^2 \sin^2 x^2 dx & \text{(k)} \int (x^2 - x) \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right)^8 dx \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} & \text{(h)} \int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)} & \end{array}$$

Ülesanne 8.13. (IT) Karpe kokkupaneev robot peab avaldama jõudu $F = 6 \int e^{\sin(\pi t)} \cos(\pi t) dt$ N, kus t on aeg sekundites. Milline funktsioon $F = F(t)$ tuleb lisada arvuti programmi, kui $t = 1.5$ s korral peab jõud $F = 0$?

Ülesanne 8.14. (Maj) Ettevõtte andmed näitavad, et x generaatori tootmisel muutub päevase kasumi p (eurodes) kiirus ligikaudu seaduse $\frac{dp}{dx} = \frac{600(30-x)}{\sqrt{60x-x^2}}$ alusel. Leidke x generaatori tootmise kasum p , kui null generaatori tootmisel saadakse 5000 eurot kahjumit.

Ülesanne 8.15. Leidke järgmised integraalid märgitud muutujavahetusega.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int x\sqrt{1-x} dx, \quad t = \sqrt{1-x} & \text{(d)} \int \frac{dx}{\sin 2x}, \quad t = \tan x \\ \text{(b)} \int x^3\sqrt{1-x^2} dx, \quad t = \sqrt{1-x^2} & \text{(e)} \int \tan^3 x dx, \quad t = \cos x \\ \text{(c)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \text{(f)} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \quad x = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0 \end{array}$$

Ülesanne 8.16. Leidke sobiva muutujavahetusega järgmised integraalid.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} & \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} & \text{(c)} \int \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx & \text{(d)} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1 + e^x}} dx \end{array}$$

Praktikum 9

Ositi integreerimine

9.1 Ositi integreerimine

Lause 9.1

Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad ja eksisteerigu integraal

$$\int u'(x)v(x) dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x)v'(x) dx$$

ja kehtib võrdus

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \quad (9.1)$$

Võrdust (15.1) nimetatakse **määramata integraali ositi integreerimise valemiks**.

Kuna $u'(x)dx = du$ ja $v'(x)dx = dv$, siis esitatakse see võrdus sageli kujul

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (9.2)$$

Ülesanne 9.1. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int x e^x dx$

(d) $\int x 3^{-x} dx$

(g) $\int \ln x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(e) $\int \arctan x dx$

(h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(c) $\int x \sin(2x + 1) dx$

(f) $\int \arcsin x dx$

(i) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

Ülesanne 9.2. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise valemi mitmekordsel rakendamisel.

(a) $\int x^2 \sin x dx$

(c) $\int x^3 e^{-2x} dx$

(e) $\int e^{2x} \cos x dx$

(b) $\int x^3 e^x dx$

(d) $\int e^x \sin x dx$

(f) $\int \sin \ln x dx$

Ülesanne 9.3. (K) Et leida teatud tüüpi molekulide keskmine läbimõõt, tuleb leida integraal

$$\int x^3 e^{-x^2/8} dx.$$

Leidke antud integraal.

Ülesanne 9.4. Leidke viga järgmises lahenduskäigus. Et $e^{-x}e^x = 1$, siis $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u = e^{-x}$ ja $dv = e^x dx$. Siis $du = -e^{-x} dx$ ja $v = e^x$ ning ositi integreerimise valemist saame

$$\int dx = e^{-x}e^x + \int e^{-x}e^x dx \quad \text{ehk} \quad \int dx = 1 + \int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame vastuolu: $0 = 1$.

9.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Definitsioon 9.1

Kui polünoomi $P(x)$ aste on väiksem polünoomi $Q(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Valem 9.1

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

Olgu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd. Kui

$$Q(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + px + q)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole reaalseid nullkohti), siis kehtib võrdus

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} + \dots \\ \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + \dots,$$

kus konstandid $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m, \dots$ on mingid reaalarvud.

Ülesanne 9.5. Lahutage ratsionaalmurrud osamurdude summaks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} dx$

(e) $\int \frac{dt}{t^3 - t^2}$

(i) $\int \frac{2}{x^4 - x^2} dx$

(b) $\int \frac{x-2}{x(x+1)} dx$

(f) $\int \frac{2}{x^2(x^2-1)} dx$

(j) $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x^3(x-1)} dx$

(c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

(g) $\int \frac{y-9}{2y^2-3y+1} dy$

(k) $\int \frac{x+4}{x(x^2+2x+2)} dx$

(d) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$

(h) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(l) $\int \frac{16x+32}{x^4-16} dx$

Ülesanne 9.6. Miks ei saa integraali $\int \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} dx$ leidmisel kirjutada

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}?$$

Ülesanne 9.7. Eraldage murru täisosa, lahutage lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x^2+3}{x^2+3x} dx$

(b) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$

(c) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-1)(x+1)} dx$

(d) $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+3x+2} dx$

Ülesanne 9.8. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \frac{\sin 2x}{(3 - \sin x)^3} dx$

(d) $\int \frac{2r^3}{r^4 + 2r^2 + 1} dr$

(g) $\int \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^3} dx$

(b) $\int \frac{2x^3+3x-5}{(x^2+x-2)^2} dx$

(e) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$

(h) $\int \frac{3x+4}{x^2+2} dx$

(c) $\int \frac{2x^3+x^2+8x+10}{(x^2+1)(x^2+6x+10)} dx$

(f) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2-1)} dx$

(i) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+2} dx$

Praktikum 10

Diferentsiaalvõrrandid

10.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 10.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 10.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Ülesanne 10.1. (B) Olgu mingis levialas küülikute arv hetkel t aastat märgitud funktsiooniga $R = R(t)$. Ühendage vastav diferentsiaalvõrrand vastava kirjeldusega (igale olukorrale vastab ainult üks diferentsiaalvõrrand).

- | | |
|---|----------------------------------|
| (a) Küülikute arv on konstantne | (a) $R = 0$ |
| (b) Igal aastal sünnib 10 uut küülikut | (b) $\frac{dR}{dt} = 10 R$ |
| (c) Keskmiselt toodab iga küülik 10 uut küülikut aastas | (c) $\frac{dR}{dt} = 10$ |
| (d) Igal aastal toodab iga küülik 10 küülikut juurde, kuid 100 saab surma | (d) $\frac{dR}{dt} = 0$ |
| (e) Levialas küülikuid ei ole | (e) $\frac{dR}{dt} = 10 R - 100$ |

10.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 10.3

Hariliku diferentsiaalvõrrandi lahendiks intervallis (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, mis on selles intervallis diferentseeruv ning mille asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles intervallis.

Ülesanne 10.2. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?

- (a) $y = x^2$ (b) $y = x^2 + 1$ (c) $y = x^2 - 0.5$ (d) $y = (5x)^2$

Ülesanne 10.3. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?

- | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------|
| (a) $y = e^x$ | (d) $y = 4e^x$ | (g) $y = e^{2x} - 3$ |
| (b) $y = e^{-x}$ | (e) $y = -7e^x$ | (h) $y = e^x + e^{2x}$ |
| (c) $y = e^{0.5x}$ | (f) $y = e^{2x}$ | (i) $y = 2e^x - e^{2x}$ |

Ülesanne 10.4. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon. Siin C, C_1, C_2, C_3 on suvalised reaalarvud.

(a) $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2, y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(e) $xy' = y \ln \frac{y}{x}, y = xe^{Cx+1}$

(b) $y'' = x + \sin x, y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(f) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$

(c) $y'' - y' = x, y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0, y = Cx + C - C^2$

(d) $y' \tan x - y = 1, y = C \sin x - 1$

(h) $y''' + \frac{3}{x}y'' = 0, y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$

10.3 Eraldatud ja eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 10.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb leida määramata integraalid ja lahendid saadakse (üldjuhul ilmutamata kujul) võrdusega

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

millest määratakse funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$.

Ülesanne 10.5. Leidke antud eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid. Joonistage mõned integraaljooned.

(a) $dy = 2dx$

(c) $dy = \frac{dx}{x}$

(e) $y' = x^4$

(b) $dy = \cos x dx$

(d) $dy = e^x dx$

(f) $yy' - x = 5$

Definitsioon 10.5

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamiseks teisendatakse see eraldatud muutujatega võrrandiks

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Eraldi tuleb analüüsida punktihulki, kus $f_2(x) = 0$ või $g_1(y) = 0$. Need võivad anda lisalahendeid.

Ülesanne 10.6. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid.

- | | | |
|------------------------|----------------------------------|--|
| (a) $xy' = x + 1$ | (e) $x(yy' - x + 1) = -1$ | (i) $x(x + 1)y' + y = y^2$ |
| (b) $y' = \frac{1}{y}$ | (f) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$ | (j) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$ |
| (c) $y' = 2\sqrt{y}$ | (g) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$ | (k) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$ |
| (d) $xy' = y + 1$ | (h) $xy' = y(y - 1)$ | (l) $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$ |

Definitsioon 10.6

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi $y' = f(x, y)$ sellist lahendit $y = y(x)$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, nimetatakse **Cauchy ülesandeks** või ka **algtingimusega ülesandeks**.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ **erilahendiks** nimetatakse mistahes funktsiooni $y = y(x, C_0)$, mis saadakse üldlahendist $y = y(x, C)$, kui anda selles parameetrile C konkreetne väärtus C_0 . Selleks asendatakse algtingimus üldlahendisse.

Ülesanne 10.7. Leidke algtingimusega ülesannete lahendid.

- | | |
|--|---|
| (a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x, y(2) = -1$ | (d) $yxdy + (x^2 - 1)dx = 0, y(1) = 0$ |
| (b) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, y(0) = 0$ | (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, y(0) = 1$ |
| (c) $y^2y' + 2x = 1, y(2) = -1$ | |

10.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 10.8. (Maj) Pangaarvel olev raha teenib intresse. Eeldades, et raha hulga R kasvamise kiirus on võrdeline raha hulgaga pangaarvel antud ajamomendil t , väljendage see seos diferentsiaalvõrrandi abil. Leidke selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

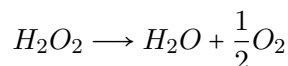
Ülesanne 10.9. (B) Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t . Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = ky,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leidke bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t = 0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Ülesanne 10.10. (B) Katseklaasis oli esialgselt N_0 bakterit. Ühe tunni pärast ($t = 1$) oli bakterite hulk $\frac{3}{2}N_0$. Eeldades, et bakterite kasvamise kiirus on võrdeline bakterite arvuga antud ajahetkel, leidke, kui kaua võtab aega, et bakterite arv kolmekordistuks.

Ülesanne 10.11. (K) Esimest järku reaktsiooni integraalne kiirusevõrrand. Vesinikperoksiidi lagunemine



on esimest järku reaktsioon, st vastav kineetiline võrrand on kujul

$$\text{lagunemise kiirus} = -\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2] \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}},$$

kus $[H_2O_2] = [H_2O_2]_t$ on aine molaarne kontsentratsioon ajahetkel t ning k on kiiruskonstant. Olgu $k = 0,51 \text{ min}^{-1}$ ja aine algkontsentratsioon $[H_2O_2]_0 = 10 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Leidke H_2O_2 kontsentratsioon aja t funktsioonina ja poolestusaeg $t_{1/2}$ (aeg, mille jooksul kontsentratsioon väheneb pooleni esialgsest).

Ülesanne 10.12. (F) Hubble'i seaduse kohaselt paisub universum kiirusega

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3c^2}} \cdot a,$$

kus a on kaugus kahe vaadeldava objekti vahel ja ρ on universumi energiatihedus. Kasutades erinevaid stsenaariume, lahendage võrrand ning analüüsige lahendi käitumist.

- (a) Eeldades, et universum koosneb enamasti ainest, siis $\rho = \frac{k}{a^3}$.
- (b) Kui universum koosneb enamasti kiirgusest, siis $\rho = \frac{k}{a^4}$.
- (c) Kui universum koosneb enamasti tumedast energiast (Einstein), siis $\rho = \text{Const}$.

Ülesanne 10.13. (M) Sotsioloogid kasutavad informatsiooni levimise kohta populatsiooni sees väljendit "sotsiaalne difusioon". Informatsioon ise võib olla kuulujutt, pärimus või uudis uuest tehnilisest leiutisest. Olgu piisavalt suure populatsioonis informatsiooni kuulnud inimeste arv x (hetkel t). Uudise levimise kiirus on võrdeline uudist kuulnud inimeste arvuga korda uudist veel mitte kuulnud inimeste arvuga:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

kus N on inimeste arv populatsioonis. Olgu t päevade arv, $k = 1/250$ ja kaks inimest on kuulnud kuulujuttu ajahetkel $t = 0$ ning $N = 1000$. Leidke x ajast t sõltuva funktsioonina. Mis hetkeks on mudeli järgi pool elanikkonnast seda kuulujuttu kuulnud?

Ülesanne 10.14. (K) Leidke n -ndat järku keemilise reaktsiooni toimumisel ühe lähteainega antud algtingimusel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = -kx^n, \quad x(0) = a, \quad n > 1.$$

Ülesanne 10.15. (K) Leidke kolmandat järku keemilise reaktsiooni $A + 2B$ toimumisel saadava diferentsiaalvõrrandi erilahend.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - 2x)^2,$$

kus a ja b on vastavalt lähteainete A ja B algkogused. Algtingimuseks on $x(0) = 0$.

Ülesanne 10.16. (B) Kahe liigi kooslus (kiskjad ja saakloomad). Olgu $x(t)$ jäneste ja $y(t)$ huntide arv ajamomendil t . Modelleerime nende kahe populatsiooni kooseksisteerimise lihtsustatud kujul, kus jäneseid on huntide ainsaks toiduks ja neil pole teisi looduslikke vaenlasi, jäneste toidulaua ei ole piiranguid, kuna hundid ei lase neil liialt paljuneda. Jäneste ja huntide kooseksisteerimist saab kirjeldada diferentsiaalvõrrandiga

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-by + b_1xy}{ax - a_1xy},$$

kus a, a_1, b, b_1 on mingid positiivsed konstandid. Leidke diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Praktikum 11

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

11.1 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 11.1

Esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x),$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Kui $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis saab esimest järku lineaarse võrrandi esitada kujul

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad (11.1)$$

kus p ja f on antud funktsioonid ning lahend y on otsitav.

Ülesanne 11.1. Millised on esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid?

(a) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $y' = 3x^2 + 1$

(e) $\ln xy' + y^2 = xy$

(b) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y' - \sin x = xy^2$

(f) $y'' - xy' = \frac{1}{x}$

11.2 Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod).

1. Lahendame lineaarsele võrrandile (17.1) vastava homogeense võrrandi $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Vastava homogeense võrrandi lahend on

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Võrrandi (17.1) lahenditeks on

$$y = y_h + y_*,$$

kus y_* on võrrandi üks konkreetne lahend.

2. Konkreetse lahendi y_* leiame kujul

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $C(x)$ on otsitav funktsioon. Asetame y_* ja y'_* võrrandisse (17.1) ja leiame $C(x)$.

Ülesanne 11.2. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$

(c) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(f) $xy' + x^2 - y = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = x^2$

(d) $y' - y \cos x = x^2 e^{\sin x}$

(g) $y' - y = x - 1$

(e) $(1+x^2)y' = 2xy$

(h) $xe^x y' + ye^x = 1$

(i) $y' = \frac{y+1}{x}$

(l) $y' + y = x$

(o) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(j) $y' + 2y = 4x$

(m) $x^2 y' + xy = -1$

(p) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$

(k) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(n) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

(q) $xy' + \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$

11.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 11.3. (F) Newtoni jahtumisseadus. Esimene seadus kehade jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newtoni poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas “keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnaühiku kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.”

Matemaatilisel kirjeldatuna tähendab see järgmist. Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T . Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_u . Argument on aeg t . Sel juhul võrrand on kujul

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_u), k > 0$$

kus k on mingi konstant. Lahendage võrrand üldkujul algitingimusel $T(0) = T_0$. Hetkel, kui kook ahjust võeti, oli tema temperatuur 150°C . Kolm minutit hiljem oli koogi temperatuur 93°C . Kui kaua võtab aega koogi jahtumine temperatuurini 30°C , kui toatemperatuur on 21°C ?

Ülesanne 11.4. (F) Kraadiklaas viiakse soojast 20°C toast õue, kus temperatuur on 5°C . Ühe minuti pärast näitab kraadiklaas 12°C . Kasutades Newtoni jahtumisseadust, vastake järgmistele küsimustele: (a) Palju näitab kraadiklaas kaks minutit pärast õueviimist? (b) Millal näitab kraadiklaas 6°C ?

Ülesanne 11.5. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktsoonipool induktiivsusega L . Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktsoonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t)$ avaldub kujul $a \sin(\omega t)$.

Ülesanne 11.6. (B) Eesmärki otsivale populatsiooni kasvu mudelile vastav diferentsiaalvõrrand on kujul

$$P'(t) = k(m - P(t)),$$

kus otsitavaks on populatsiooni suurus P , mis on aja t funktsioon, k on konstant, mis tähistab populatsiooni sünnimäära ning m on konstant, mis tähistab populatsiooni maksimaalset suurust (eesmärki, mida soovitakse saavutada).

Lahendage antud lineaarne diferentsiaalvõrrand, kui $k = 0.03$ ja $m = 100$. Leidke võrrandi lahend, kui $t = 0$ korral oli populatsioonis 10 isendit. Leidke, milline on populatsiooni suurus ajahetkel $t = 100$.

12.1 Maatriksid

Definitsioon 12.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristikülukukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $m \times n$ maatriksist.

Ülesanne 12.1. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n . Tähistage lühidalt maatriksi tema üldelemendi kaudu.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(k) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{30} \end{pmatrix}$

(l) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(m) $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(i) $I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(n) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 12.2

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$ korral.

Maatriksi $A = (a_{ij})$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude üravahetamisel, s.t $A^T = (a_{ji})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ruutmaatriks A on **sümmeetriline**, kui $A^T = A$.

Ülesanne 12.2. Leidke ülesandes 12.1: 1) võrdsed maatriksid, 2) sümmeetrilised maatriksid, 3) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 12.3. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a , b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Definitsioon 12.3

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis maatriksite A ja B **summaks** (**vaheks**) nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t $C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Maatriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse maatriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t $\lambda A = B = (b_{ij})$, kui $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 12.4. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 12.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

- | | | | |
|-----------------|--------------------------|---------------|---------------|
| (a) $2A - 3A$ | (d) $-H + 2I^T$ | (g) $A^T - B$ | (j) $F - E$ |
| (b) $3B + 2B^T$ | (e) $A + B$ | (h) $B^T + A$ | (k) $C + D$ |
| (c) $4E^T$ | (f) $C + \frac{1}{2}E^T$ | (i) $E + G$ | (l) $D^T - C$ |

12.3 Maatriksite korrutamine

Definitsioon 12.4

Kui maatriksi A veergude arv n võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i -nda rea elemendid maatriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ maatriks, B on $n \times p$ maatriks, siis C on $m \times p$ maatriks.

Ülesanne 12.5. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 12.1 antud maatriksite korral? Leidke defineeritud korrutised ning esitage vastavad korrutamise valemid.

- | | | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|-------------|------------------|
| (a) AB | (c) $A^T B$ | (e) DC | (g) FE | (i) $B^T C$ | (k) $O^T B$ |
| (b) BA | (d) CD | (f) EF | (h) $F^T E$ | (j) $D^T B$ | (l) $A^T \theta$ |

Ülesanne 12.6. Leidke maatriksite korrutised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ | (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |

Ülesanne 12.7. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

(a) AB

(b) BA

(c) $B^2 - A^2$

(d) $(B - A)^2$

Ülesanne 12.8. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

(a) $A^2 = A$

(b) $B^3 = B$

(c) $C^2 - 4C - 5E = O$

Ülesanne 12.9. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdsus.

12.4 Maatrikstehete omadused

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul **maatrikstehete jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$A + O = A$$

Sel juhul **transponeeritud maatriksite jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis kehtivad järgmised omadused:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$AO = O, OA = O$$

Ülesanne 12.10. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 12.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

(a) $\frac{1}{2}EB^T D - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^T E^6 A - \frac{1}{2}BE^4 B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2 AC$

(g) $\frac{3}{2}H^T EAC - \frac{1}{2}H^T AC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^T F I^T - A^T E H$

(j) $I F^T H + H^T E^2 H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^T H$

(l) $AB + F I^T H^T$

(m) $F I^T H^T - E^T H H^T$

(n) $\theta B - A^T O$

(o) $0(CA + AD)$

(p) $0(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 12.11. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 12.1 antud maatriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^T C$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$

(b) $(C^T)^T D = D(C^T)^T C$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(n) $(CD)^T = D^T C^T$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(i) $(BA)^T = A^T B^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(j) $ABA = B^T A^T B^T$

(o) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(k) $(C + D)A^T = CA^T + DA^T$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(l) $B^T(D - C) = B^T D - B^T C$

(p) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$

12.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 12.12. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B₃-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A . Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C . Laost viiakse välja kaks korda sama kogust kaste B . Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T ?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 12.13. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t} .

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P , et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 12.14. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 12.15. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

13.1 Determinandi arvutamine

Definitsioon 13.1

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant.

Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse maatriksi A **determinandi arendamiseks i -nda rea järgi**.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j -nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Kolmandat järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definitsioon 13.2

Ruutmaatriksi A elemendile a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Definitsioon 13.3

Elemendi a_{ij} **alamdeterminandiks** A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutatist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ülesanne 13.1. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alam-determinandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

13.2 Determinantide omadused

Omadus 13.1

1. Matriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda matriksi determinandi väärtust: $|A| = |A^T|$.
2. Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.
5. Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k .
6. Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summaksid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.
7. Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).
8. Sama järku ruutmatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t $|AB| = |A||B|$.

Ülesanne 13.2. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 13.3. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 13.4. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 13.5. Olgu antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

13.3 Determinantide arendamine

Ülesanne 13.6. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 13.7. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 13.8. Arvutage determinandi väärtus.

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} x^3 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3 + 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^\pi \\ 9999 & -e^\pi & 0 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (m) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

13.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 13.9. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S , kui

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1, 4), B(3, 1), C(2, 6)$

(c) $A(1, 0), B(2, 2), C(4, 3)$

(b) $A(-2, 2), B(1, 5), C(6, -1)$

(d) $A(3, 6), B(10, 1), C(-2, -3)$

Ülesanne 13.10. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V , kui

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $\vec{a} = (4, 0, 0), \vec{b} = (5, 2, 2), \vec{c} = (2, 6, 0)$

(b) $\vec{a} = (2, 0, 0), \vec{b} = (0, 4, 0), \vec{c} = (0, 0, 3)$

(c) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 4, 5), \vec{c} = (6, 0, 7)$

Ülesanne 13.11. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilsesse seisu, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ , siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P - \lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^4 x_i$ suhtes.

Ülesanne 13.12. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückeli meetodit, kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

$$(a) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$$

Praktikum 14

Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine

14.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 14.1

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib $AE = A$, $EA = A$, kus E on n -järku ühikmaatriks.

Definitsioon 14.2

Ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit A^{-1} , millega antud maatriksit A korrutades saadakse ühikmaatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Maatriksi korrutamine pöördmaatriksiga on kommutatiivne $AA^{-1} = A^{-1}A$.

Omadus 14.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ülesanne 14.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

(a) $B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 14.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 14.3. Olgu A n -järku ruutmaatriks ja E n -järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 14.4. Olgu A , B ja C pööratavad n -järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 14.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

14.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 14.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Definitsioon 14.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1}

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Ülesanne 14.6. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 14.7. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 14.8. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 14.9. Leidke pöördmaatriksid.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 14.10. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

14.3 Maatriksvõrrandite lahendamine

Olgu maatriksid A, B ja X selliste mõõtmetega, et maatriksvõrrandi lahendamiseks tehtav tehe on teostatav. Olgu maatriksid A ja B teada ning ruutmaatriks A olgu regulaarne. Maatriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Maatriksvõrrandi $AX = B$ korral otsitava X saame

$$X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandi $XA = B$ korral otsitava X saame

$$X = BA^{-1}.$$

Ülesanne 14.11. Lahendage võrrandisüsteemid maatrikskujul.

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 14.12. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(b) X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (g) X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 14.13. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad XR = PQ, \text{ kui } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad KXL = M, \text{ kui } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 14.14. (F) Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 14.15. (IT) Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. <https://goo.gl/z0Xm14>).

Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dekodeerige järgmised sõnumid.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 14.16. (K) Uue sulami tegemiseks segatakse kokku neli erinevat sulamit, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe).

Esimene sulam sisaldab 80% Cu ja 20% Ni, teine sulam sisaldab 60% Cu, 20% Ni ja 20% Zn.

Kolmas sulam sisaldab 30% Cu, 60% Ni ja 10% Fe, neljas sulam sisaldab 20% Ni, 40% Zn ja 40% Fe. Kui palju on igat sulamit vaja, et lõppsulamis oleks 56 g vaske, 28 g niklit, 10 g tsinki ja 6 g rauda? Koostage ning lahendage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = B$.

Praktikum 15

Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid

15.1 Maatriksi astak

Definitsioon 15.1

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse maatriksi A **k -järku miinoriks**.

Ülesanne 15.1. Millised alljärgnevatest on (4×4) -maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Definitsioon 15.2

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse rank A või $r(A)$.

Maatriksi astaku leidmiseks kasutame ridade elementaarteisendusi eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks. Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Ülesanne 15.2. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

15.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \quad (15.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Lineaarvõrrandisüsteem on esitatav maatrikskujul $Ax = b$.

Teoreem 15.1

Kronecker-Capelli teoreem. Lineaarvõrrandisüsteem $Ax = b$ on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem $Ax = b$ on lahenduv parajasti siis, kui $\text{rank } A = \text{rank } L$.

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A|b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend
 $r = n = m$ korral on Crameri peajuht;
 $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).
2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)
 $r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust;
 $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

Ülesanne 15.3. Lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

$$(a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$$

$$(e) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(h) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(b) \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

$$(f) \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$(i) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(c) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(g) \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$(d) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

15.3 Gaussi elimineerimismeetod

Gaussi elimineerimismeetod. 1. Võrrandisüsteem $Ax = b$ esitatakse laiendatud maatriksina $(A|b)$. 2. Laiendatud maatriks $(A|b)$ teisendatakse **ridade elementaarteisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi A peadiagonaalil allpool (või ülalpool) olevad elemendid teisendatakse nullideks. Viimasest võrrandist saab avaldada tundmatu x_n . Asendades selle eelviimasesse võrrandisse, saab avaldada x_{n-1} jne. Kui ridade teisendamisega saadakse nullid mõlemale poole peadiagonaali, siis räägitakse nn Gaussi täielikust elimineerimismeetodist või **Gauss-Jordani elimineerimismeetodist**.

Ülesanne 15.4. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas antud süsteem on lahenduv või mitte. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend. Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis leidke üldlahend ja üks erilahend.

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z + 2v = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 3y + v = -1 \\ 3z - 2v = -2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$$

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = 0$ on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend $x = 0$ (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend. Kui võrrandisüsteemi maatriksi A determinant $|A| = 0$ (juhul $n = m$), siis maatriksi A astak r on väiksem kui tundmatute arv n . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on $n - r$.

Ülesanne 15.5. Tehke kindlaks, kas homogeensel võrrandisüsteemil on triviaalne lahend või lõpmata palju lahendeid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$(a) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 15.6. Leidke milliste parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtuste korral süsteemil: 1) on üks lahend, 2) on lõpmata palju lahendeid, 3) lahendid puuduvad. Leidke võimalikud lahendid.

$$(a) \begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 2x + y + az = 5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 3x + 6y + z = 3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} 6x + 2y + 3w = 16 \\ 3x + y + 2z + aw = 14 \\ x - y - z + 3w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y + 2z - w = 4 \\ ay + z + 2w = 0 \\ -x + 2y + z + w = -4 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} ax + 3y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + y + 7z = 14 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 4x - 2y + az = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + az = -1 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x + 3y + 2w = 3 \\ x + y + az - 2w = -6 \\ -y + 2z + w = 9 \\ x + 3z + w = 6 \end{cases}$$

Ülesanne 15.7. Leidke millise parameetri $a \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on süsteemil: 1) ainult triviaalne lahend, 2) mittetriviaalsed lahendid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$(a) \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - 9y + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ -8x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + az = 0 \end{cases}$$

15.4 Crameri valemid

Lause 15.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga** (s.t tundmatute arv n on võrdne võrrandite arvuga m ja $|A| \neq 0$), siis on sellel süsteemil **täpselt üks lahend**.

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

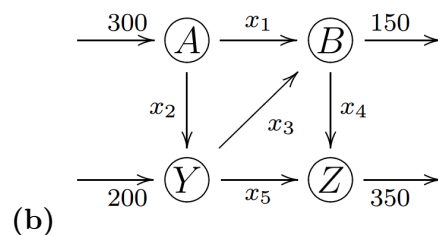
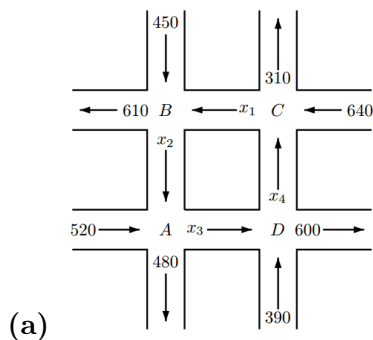
kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga b .

Ülesanne 15.8. Lahendage võrrandisüsteemid Crameri valemite abil.

$$(a) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + -5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z = 4 \end{cases}$$

15.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 15.9. Joonisel on toodud tänavaliikluse keskmised sõidukite arvud (ühes tunnis). Leidke arvud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 .



Ülesanne 15.10. (B) Mäletseja päevategevuse võib jagada jämedalt kolmeks tegevuseks: söömine, liikumine (uude söögikohta või kiskja eest põgenemine) ja puhkamine. Olgu söömisest saadav puhasenergia 200 kalorit tunnis. Liikumisel kaotatakse 150 cal/h ja puhkamisel 50 cal/h. Kuidas tuleks ööpäev jaotada nende kolme tegevuse vahel, et energiat kuluks sama palju, kui energiat saadakse? Kas selline jaotus on ühene? Kui loom peab ööpäevas puhkama vähemalt 6 tundi, kuidas peaks siis tegevused olema jaotunud? Kui ülesöömise vastu peaks loom liikuma ja sööma sama pikalt, kuidas on jaotus siis?

Kontrolltöö 2 (LTMS.00.003) teemad

1. Funktsiooni uurimine. Määramata integraal

1. Funktsiooni uurimine ja graafiku skitseerimine. Kasvamise ja kahenemise piirkonnad, lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.
2. Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
3. Muutujavahetus.
4. Ositi integreerimine.

2. Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid.
2. Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid.

3. Maatriksid

1. Maatriksite liigid. Ühikmaatriks, nullmaatriks. Regulaarne, singulaarne maatriks.
2. Tehted maatriksitega. Maatriksite korrutamine. Maatrikstehete omadused. Transponeeritud maatriksite omadused.
3. Pöördmaatriks.
4. Maatriksvõrrandite lahendamine.

4. Determinandid

1. Determinantide omadused, nende kasutamine determinandi arvutamisel.
2. Determinantide arendamine rea või veeru järgi.

Tuletiste, integraalide ja trigonomeetriliste seoste valemid

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{array}{lll} (C)' = 0, \quad C \in \mathbb{R} & (\sin x)' = \cos x & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \neq 0 & (\cos x)' = -\sin x & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' = e^x & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & \end{array}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \int 0 \, dx = C & (7) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ (2) \quad \int dx = x + C & (8) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C \\ (3) \quad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ (4) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & (10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\ (5) \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ (6) \quad \int e^x \, dx = e^x + C & (12) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \end{array}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$