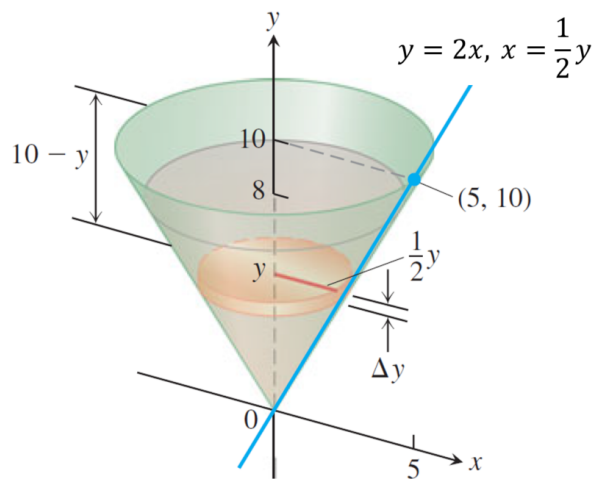


MTMM.00.340, LTMS.00.081
Kõrgem matemaatika I
Kõrgem matemaatika I (arvutitehnikutele)



2025/2026 õa
sügissemester

Ülesannete kogu

Tuletiste, integraalide ja trigonomeetriliste seoste valemid

Põhiliste elementaarfunktsioonide tuletised

$$\begin{array}{lll} (C)' = 0, \quad C \in \mathbb{R} & (\sin x)' = \cos x & (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \neq 0 & (\cos x)' = -\sin x & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (e^x)' = e^x & (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} & (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (a^x)' = a^x \ln a & (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\ (\ln |x|)' = \frac{1}{x} & (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} & \end{array}$$

Integreerimise põhivalemid

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \int 0 \, dx = C & (7) \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C \\ (2) \quad \int dx = x + C & (8) \quad \int \cos x \, dx = \sin x + C \\ (3) \quad \int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) & (9) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ (4) \quad \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C & (10) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \\ (5) \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & (11) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \\ (6) \quad \int e^x \, dx = e^x + C & (12) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \end{array}$$

Trigonomeetrilised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

1	Absoluutväärtus. Vektorite skalaarkorrutus. Vektorite vaheline nurk	2
1.1	Reaalarvu absoluutväärtus	2
1.2	Summa sümbol	2
1.3	Vektorite skalaarkorrutus	3
1.4	Vektorite vaheline nurk, ristprojektsioon	4
2	Vektorkorrutus ja segakorrutus	5
2.1	Vektorkorrutus	5
2.2	Segakorrutus	6
3	Sirge ja tasandi võrrandid	7
3.1	Tasandi võrrand ruumis	7
3.2	Sirge võrrand ruumis	8
4	Kompleksarvu algebraline kuju	9
4.1	Kompleksarvu algebraline kuju	9
4.2	Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul	10
5	Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	11
5.1	Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju	11
5.2	Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul	12
5.3	Rakenduslikud ülesanded	13
6	Kompleksarvu astendamine ja juurimine	14
6.1	Kompleksarvu astendamine ja juurimine	14
6.2	Algebraliste võrrandite lahendamine	15
7	Funktsioonid	16
7.1	Funktsionaalsed sõltuvused	16
7.2	Funktsioonide graafikud	16
7.3	Funktsioonid ja nende omadused	18
8	Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmfunksioon	19
8.1	Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon	19
8.2	Eksponentfunksioon	19
8.3	Logaritmfunksioon	20
8.4	Logistiline kõver	21
9	Funktsiooni piirväärtus	22
9.1	Piirväärtuse omadused	23
9.2	Piirväärtuse arvutamine	23
9.3	Mõned erilised piirväärtused	24

10 Piirväärtus ja pidevus. Tuletis	25
10.1 Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded	25
10.2 Rakenduslikud ülesanded	25
10.3 Pidevad ja katkevad funktsioonid	26
10.4 Funktsiooni tuletise definitsioon	27
11 Tuletis. Liitfunktsiooni tuletis	29
11.1 Funktsiooni tuletise leidmine	29
11.2 Liitfunktsiooni tuletis	30
11.3 Kõrgemat järku tuletis	31
11.4 Joone puutuja ja normaal	32
12 Diferentsiaal	33
12.1 L'Hospitali reegel	33
12.2 Funktsiooni diferentsiaal	33
12.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine	34
12.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine	34
13 Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine	35
13.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus	35
13.2 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõguspiirkonnad	35
13.3 Ekstreemumid	36
13.4 Optimeerimine	37
13.5 Graafiku asümptootid	38
14 Määramata integraal	39
14.1 Määramata integraali mõiste	39
14.2 Määramata integraali leidmine	39
14.3 Diferentsiaali märgi alla viimine	40
14.4 Muutujavahetus	41
15 Ositi integreerimine	42
15.1 Ositi integreerimine	42
15.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	43
16 Diferentsiaalvõrrandid	44
16.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid	44
16.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend	44
16.3 Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandid	45
17 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	46
17.1 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid	46
17.2 Rakenduslikud ülesanded	46
18 Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	48
18.1 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid	48
18.2 Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine	48
18.3 Rakenduslikud ülesanded	49

19 Matriksid	50
19.1 Matriksid	50
19.2 Tehted matriksitega	50
19.3 Matriksite korrutamine	51
19.4 Matrikstehete omadused	52
19.5 Rakenduslikud ülesanded	53
20 Determinandid	54
20.1 Determinandi arvutamine	54
20.2 Determinantide omadused	55
20.3 Determinantide arendamine	56
20.4 Rakenduslikud ülesanded	57
21 Pöördmatriks. Matriksvõrrandite lahendamine	58
21.1 Pöördmatriks	58
21.2 Pöördmatriksi leidmine	59
21.3 Matriksvõrrandite lahendamine	60
21.4 Rakenduslikud ülesanded	61
22 Matriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid	63
22.1 Matriksi astak	63
22.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend	63
22.3 Crameri valemid	64
23 Riemanni summad ja numbriline integreerimine	65
23.1 Riemanni summad	65
23.2 Numbriline integreerimine	66
24 Määratud integraali arvutamine	68
24.1 Newton-Leibnizi valem	68
24.2 Määratud integraali omadused	68
24.3 Muutujavahetus määratud integraalis	69
25 Määratud integraali ositi integreerimine	71
25.1 Ositi integreerimine	71
25.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine	71
26 Pindala arvutamine	72
26.1 Kõvertrapetsi pindala	72
26.2 Kõversektori pindala	72
26.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral	73
27 Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine	74
27.1 Joone pikkus	74
27.2 Keha ruumala ristlõikepindala kaudu	74
27.3 Pöördkeha ruumala	75
28 Määratud integraali füüsikalised rakendused	76
28.1 Teepikkuse arvutamine	76
28.2 Kiirus ja kiirendus	77
28.3 Töö	78
28.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö	78

29 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	79
29.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine	79
29.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine	80
30 Päratud integraalid lõpmatute rajadega	81
30.1 Lõpmatute rajadega integraalid	81
31 Päratud integraalid tõkestamata funktsioonist	82
31.1 Integraal tõkestamata funktsioonist	82
31.2 Päratud integraalide rakendusi	83
32 Maatriksid	84
32.1 Maatriksid	84
32.2 Tehted maatriksitega	84
32.3 Maatriksite korrutamine	85
32.4 Maatrikstehete omadused	86
32.5 Rakenduslikud ülesanded	87
33 Determinandid	88
33.1 Determinandi arvutamine	88
33.2 Determinantide omadused	89
33.3 Determinantide arendamine	90
33.4 Rakenduslikud ülesanded	91
34 Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine	92
34.1 Pöördmaatriks	92
34.2 Pöördmaatriksi leidmine	93
34.3 Maatriksvõrrandite lahendamine	94
34.4 Rakenduslikud ülesanded	95
35 Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid	97
35.1 Maatriksi astak	97
35.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend	97
35.3 Crameri valemid	98
36 Lineaarvõrrandisüsteemid. Gaussi meetod	99
36.1 Gaussi elimineerimismeetod	99
36.2 Rakenduslikud ülesanded	100

Praktikum 1

Absoluutväärtus. Vektorite skalaarkorrutus. Vektorite vaheline nurk

1.1 Reaalarvu absoluutväärtus

Definitsioon 1.1

Reaalarvu a absoluutväärtuseks nimetatakse arvu $|a|$, mis rahuldab tingimust $|a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0, \\ -a, & \text{kui } a < 0. \end{cases}$

Ülesanne 1.1. Leidke järgmised väärtused.

(a) $|-3-5|$ (b) $|-|-8||$ (c) $\sqrt{9}$

Ülesanne 1.2. Lahendage järgmised võrrandid ja võrratused.

(a) $|x| = 3$ (c) $|2x+6| = 4$ (e) $|x| < 2$ (g) $x^2 < 2$
(b) $|2x-3| = 7$ (d) $|8-3x| = 9$ (f) $|1-x| > 1$

1.2 Summa sümbol

Järjestikuste indeksitega suuruste $a_1, a_2, \dots, a_n$ summa märkimiseks kasutatakse sümbolit Σ järgmiselt:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

kus a_i on summa üldliige, i on summeerimisindeks ($i = 1, \dots, n$).

Ülesanne 1.3. Kirjutage summa sümboli Σ abil järgmised summad.

(a) $1+2+3+4+5$ (c) $1+1+1+1+1+1$ (e) $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+7$
(b) $1-1+1-1+1-1$ (d) $1-4+9-16+25$ (f) $1+q+q^2+\dots+q^k$

Ülesanne 1.4. Kirjutage ilma summa sümbolita järgmised summad.

(a) $\sum_{k=1}^6 b_k$ (b) $\sum_{j=2}^5 3^j$ (c) $\sum_{n=1}^1 (-1)^{n+1} 5^n$ (d) $\sum_{k=0}^n 3$

1.3 Vektorite skalaarkorrutis

Definitsioon 1.2

Vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}$ **skalaarkorrutiseks** nimetatakse reaalarvu, mis võrdub nende vektorite pikkuste ja nende vahelise nurga koosinuse korrutisega, s.t

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Vektori $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ **pikkus** $|\vec{a}|$ avaldub võrdusega

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Omadus 1.1

Vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ skalaarkorrutis avaldub võrdusena

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Kui $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, siis

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Ülesanne 1.5. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

- | | |
|---|--|
| (a) $ \vec{a} = 8, \vec{b} = 6, \varphi = 2\pi/3$ | (d) $ \vec{a} = 1, \vec{b} = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ |
| (b) $ \vec{a} = 2, \vec{b} = 3, \vec{a} + \vec{b} = 4$ | (e) $ \vec{a} = 3, \vec{b} = 1, \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ |
| (c) $ \vec{a} = 4, \vec{b} = 12, \vec{a} - \vec{b} = 10$ | (f) $ \vec{a} = 3, \vec{b} = 1, \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ |

Ülesanne 1.6. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

- | | |
|--|---|
| (a) $\vec{a} = (2, -3), \vec{b} = (4, 2)$ | (c) $\vec{a} = (7, -4, 2), \vec{b} = (3, 1, 0)$ |
| (b) $\vec{a} = (2, -3, 1), \vec{b} = (4, 2, -5)$ | (d) $\vec{a} = (0, 0, 0), \vec{b} = (-2, 6, 0)$ |

Ülesanne 1.7. Arvutage vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis.

- (a) $\vec{a} = (\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1), \vec{b} = (\beta + 1, \gamma + 1, \alpha + 1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- (b) $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$, kus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid

Ülesanne 1.8. Vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ja $\vec{c}$ moodustavad paarikaupa nurgad 60° . Leidke vektori $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ pikkus, kui $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2$ ja $|\vec{c}| = 6$.

Ülesanne 1.9. Leidke koordinaattelgedel punktid, mis asetsevad punktidest $A(1, 1)$ ja $B(3, 7)$ võrdse kaugusel.

Ülesanne 1.10. Millist tingimust peavad rahuldama punkti $M(x, y)$ koordinaadid, et see punkt asetseks võrdsetel kaugustel punktidest $A(7, -3)$ ja $B(-2, 1)$?

Ülesanne 1.11. Näidake, et vektorid $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{b} = \sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ sobivad mingi ruudu külgedeks, kui $\vec{i}, \vec{j}$ ja $\vec{k}$ on paarikaupa ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 1.12. (F) Jõud $\vec{P}$ ja $\vec{Q}$, mis mõjuvad 120° nurga all, on rakendatud ühte punkti. Leidke resultantjõu $\vec{R}$ arvväärus $|\vec{R}|$, kui $|\vec{P}| = 7$ ja $|\vec{Q}| = 4$.

1.4 Vektorite vaheline nurk, ristprojektsioon

Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk leitakse võrdusest

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Ülesanne 1.13. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke vektorite $\vec{CA}$ ja $\vec{CB}$ vaheline nurk.

- | | |
|---|---|
| (a) $A(5, 3), B(4, 8), C(2, 4)$ | (c) $A(2, -1, 4), B(1, -6, 8), C(0, -2, 6)$ |
| (b) $A(-2, 6, 7), B(-4, 5, 5), C(-3, 0, 2)$ | (d) $A(0, 4, -3), B(2, 5, 3), C(5, 1, 1)$ |

Ülesanne 1.14. Kasutades skalaarkorrutise valemit, leidke, millised kahest antud vektorist on risti, kollineaarsed, moodustavad teravnurga või nürinurga.

- | | |
|---|---|
| (a) $\vec{a} = (2, -7), \vec{b} = (5, 2)$ | (c) $\vec{a} = (2, 1, -8), \vec{b} = (7, 2, 2)$ |
| (b) $\vec{a} = (4, 16, -12), \vec{b} = (-6, -24, 18)$ | (d) $\vec{a} = (5, -3, 2), \vec{b} = (1, 3, 4)$ |

Vektori $\vec{a}$ ristprojektsioon vektori $\vec{b}$ sihile avaldub

$$pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} \vec{b}.$$

Ülesanne 1.15. Leidke vektori $\vec{a}$ ristprojektsioon vektori $\vec{b}$ sihile.

- | | |
|---|--|
| (a) $\vec{a} = (2, -5), \vec{b} = (3, 4)$ | (c) $\vec{a} = (2, 1, -3), \vec{b} = (7, -2, 4)$ |
| (b) $\vec{a} = (4, -5, 7), \vec{b} = (-3, -2, 4)$ | (d) $\vec{a} = (2, -3, 2), \vec{b} = (4, 3, 2)$ |

Ülesanne 1.16. Milline on ühikvektorite $\vec{m}$ ja $\vec{n}$ vaheline nurk, kui vektorid $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ on risti?

Ülesanne 1.17. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(-1, -2, 4), B(-4, -2, 0)$ ja $C(3, -2, 1)$. Leidke tipu B juures olev sisenurk.

Ülesanne 1.18. Leidke kuubi diagonaali ja kuubi ühe tahu diagonaali vaheline nurk.

Praktikum 2

Vektorkorrutis ja segakorrutis

2.1 Vektorkorrutis

Definitsioon 2.1

Vektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{E}_3$ **vektorkorrutiseks** nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b}$, mis rahuldab järgmist kolme tingimust:

- 1) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
- 2) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, s.t $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on risti vektoriga $\vec{a} \times \vec{b}$,
- 3) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ on parema käe kolmik.

Omadus 2.1

Vektorkorrutise arvutamine koordinaatkuju

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

kus $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud **rööpküliliku pindala** $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$, **kolmnurga pindala** $S_k = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Ülesanne 2.1. Arvutage $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

(a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$

(c) $|\vec{a}| = 3$, $\vec{b} = -2\vec{a}$

(b) $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 5$, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = -21$

(d) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

Ülesanne 2.2. Olgu $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (5, 1, -2)$, $\vec{c} = (0, 0, 0)$. Leidke vektorid $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{c} \times \vec{a}$, $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \times (\vec{a} + 5\vec{b})$.

Ülesanne 2.3. Millisel arvu α väärtusel on vektorid $\vec{p} = \alpha\vec{a} + 5\vec{b}$ ja $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ kollineaarsed, kui $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed?

Omadus 2.2

Vektorkorrutise **antikommutatiivsus**: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Vektorkorrutise **distributiivsus**: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Skalaariga korrutamine: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Ülesanne 2.4. Leidke vektorkorrutise abil kolmnurga ABC pindala, kui see on võimalik.

(a) $A(4, 1, -4)$, $B(6, 3, 7)$, $C(2, 3, 1)$

(c) $A(2, 3, 1)$, $B(4, 5, 1)$, $C(3, 4, 1)$

(b) $A(0, 5, -1)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-3, 4, -5)$

(d) $A(-1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(-3, 1)$

Ülesanne 2.5. Leidke vektoritele $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ ja $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$ ehitatud kolmnurga pindala, kui $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 6$ ja $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

Ülesanne 2.6. Näidake, et vektorid $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j}$ sobivad mingi kuubi servadeks ning leidke selle kuubi kolmandat serva määrav vektor, kui $\vec{i}$ ja $\vec{j}$ on ristuvad ühikvektorid.

Ülesanne 2.7. Vektor $\vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{a} = (2, 3, -1)$ ja $\vec{b} = (1, -1, 3)$ ning moodustab esimese baasivektoriga $\vec{i}$ nürinurga. Leidke vektori $\vec{x}$ koordinaadid teades, et $|\vec{x}| = \sqrt{138}$.

Ülesanne 2.8. On antud vektorid $\vec{a} = (11, 10, 2)$ ja $\vec{b} = (4, 0, 3)$. Leidke ühikvektor $\vec{c}$, mis on risti vektoritega $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ning on suunatud nii, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parema käe kolmik.

2.2 Segakorrutis

Definitsioon 2.2

Vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{E}_3$ **segakorrutiseks** nimetatakse arvu $\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle$.

Omadus 2.3

Segakorrutise omadused.

1. Kolme vektori segakorrutist saab esitusel loomuliku baasi kaudu arvutada valemiga

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3,$$

kus $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

2. Kolme vektori segakorrutise absoluutväärtus võrdub neile vektoritele $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ehitatud **rööptahuka ruumalaga**

$$V_{rt} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Kolmele vektorile ehitatud **tetraeedri ruumala** on

$$V_{tetr} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

3. Kolm nullvektorist erinevat vektorit on **komplanaarsed** (asuavad ühel ja samal tasandil) parajasti siis, kui nende segakorrutis võrdub nulliga ehk

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = 0.$$

4. Kolm nullvektorist erinevat vektorit moodustavad parema käe kolmiku, kui $\vec{a} \vec{b} \vec{c} > 0$, ja vasaku käe kolmiku, kui $\vec{a} \vec{b} \vec{c} < 0$.

Ülesanne 2.9. Vektorite kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik. Arvutage $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

(a) $\vec{a} = (-3, 4, -7)$, $\vec{b} = (1, 2, 5)$, $\vec{c} = (1, -4, 5)$

(b) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 5$, $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$

(c) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 3$ ning vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on paarikaupa risti

Ülesanne 2.10. Tetraeedri tipud on $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$ ja $D(4, 1, 3)$. Leidke selle tetraeedri ruumala ja tipust D tõmmatud kõrgus.

Ülesanne 2.11. Tetraeedri ruumala $V = 5$ ja kolm tippu on $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ ja $C(2, -1, 3)$. Leidke y -teljel asuva neljanda tipu D koordinaadid.

Ülesanne 2.12. Näidake, et punktid $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ ja $D(2, 1, 3)$ asetsevad samal tasandil.

Praktikum 3

Sirge ja tasandi võrrandid

3.1 Tasandi võrrand ruumis

Definitsioon 3.1

Tasandi võrrandiks üldkujul ehk tasandi üldkujuliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

vektorit $\vec{n} = (A, B, C)$ nimetatakse **tasandi normaalvektoriks**.

Vektorkujul $\langle \vec{n}, \vec{AX} \rangle = 0$, kus $\vec{AX} = (x - a_1, y - a_2, z - a_3)$ on tasandil asuv vektor.

Tasandit määravad mittekollineaarset vektorite süsteemi $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$ nimetatakse **tasandi rihiks**, vektoreid $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ **tasandi rihivektoriteks**.

Kui on antud kaks rihivektorit $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ tasandil, siis **tasandi normaalvektoriks** sobib

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

Tasandite π_1 ja π_2 vahelise nurga koosinus leitakse valemiga

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|},$$

kus $\vec{n}_1$ on tasandi π_1 ja $\vec{n}_2$ on tasandi π_2 normaalvektor.

Punkti $P(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{E}_3$ **kaugus tasandist $\pi \subset \mathbb{E}_3$** arvutatakse valemiga

$$d(P, \pi) = \frac{|\langle \vec{AP}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

kus A on suvaline punkt tasandil π ja $\vec{n}$ on tasandi normaalvektor.

Ülesanne 3.1. Koostage tasandi π võrrand, kui

- (a) tasand π on paralleelne x -teljega ning läbib punkte $A(3, -1, 1)$ ja $B(4, -6, -1)$
- (b) tasand π on paralleelne y -teljega ning läbib punkte $C(3, 4, 0)$ ja $D(7, 5, -3)$
- (c) tasand π on paralleelne z -teljega ning läbib punkte $E(-1, -2, -3)$ ja $F(1, 3, 4)$

Ülesanne 3.2. Koostage punkte A , B , ja C läbiva tasandi võrrand, kui

- (a) $A(0, 0, 0)$, $B(1, 4, 0)$, $C(3, -2, 1)$
- (b) $A(-3, 6, -7)$, $B(-1, 7, -6)$, $C(-7, 3, -8)$
- (c) $A(3, -1, 2)$, $B(4, -1, -1)$, $C(2, 0, 2)$

Ülesanne 3.3. Koostage tasandi π võrrand, kui

- (a) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (2, 3, -5)$ ning tema aplikaatlõik on 6
- (b) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (-1, 4, 7)$ ning tema ordinaatlõik on 3
- (c) tasand π on risti vektoriga $\vec{n} = (4, -1, -3)$ ning tema abstsisslõik on -5

Ülesanne 3.4. Kontrollige, kas tasanditel $5x - z + 3 = 0$, $2x - y - 4z + 5 = 0$, $3y + 2z - 1 = 0$ ja $3x + 4y + 5z - 3 = 0$ on ühiseid punkte.

Ülesanne 3.5. Leidke tasand, mis on paralleelne tasandiga $x - 2y + 3z - 7 = 0$ ning läbib punkti $A(1, -2, 1)$.

Ülesanne 3.6. Leidke tasandi $Ax + By + Cz + D = 0$ ja koordinaattasandite vahelised nurgad.

Ülesanne 3.7. Arvutage järgmiste tasandite vahelised nurgad.

- (a) $\pi_1: -2x+4y-z+5=0$, $\pi_2: 7x+3y-2z+1=0$ (c) $\pi_1: 6x-3y+12z-23=0$, $\pi_2: 10x-5y+20z-1=0$
- (b) xz -tasand ja $\pi: 3y-3z+5=0$

Ülesanne 3.8. Leidke tasand, mis läbib tasandite $3x-2y+z-3=0$ ja $x-2z=0$ lõikesirget ning on risti tasandiga $x-2y+z+5=0$.

Ülesanne 3.9. Leidke tasand, mis läbib tasandite $x+5y+z=0$ ja $x-z+4=0$ lõikesirget ning moodustab tasandiga $x-4y-8z+12=0$ nurga $\frac{\pi}{4}$.

Ülesanne 3.10. Arvutage punkti P kaugus tasandist π .

- (a) $P(1,2,1)$ ja $\pi: x+2y+2z-10=0$ (c) P on koordinaatide alguspunkt ja $\pi: 15x-10y+6z-190=0$
- (b) $P(2,8,5)$ ja $\pi: x-2y-2z=1$

3.2 Sirge võrrand ruumis

Definitsioon 3.2

Sirge kanoonilisteks võrranditeks ruumis $\mathbb{E}_3$ nimetatakse võrrandeid

$$\frac{x-a_1}{s_1} = \frac{y-a_2}{s_2} = \frac{z-a_3}{s_3},$$

kus sirge läbib punkti $A(a_1, a_2, a_3)$ ja sirge sihivektor on $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Sirge l ja tasandi π vahelise nurga siinus leitakse valemiga

$$\sin \angle(l, \pi) = \frac{|\langle \vec{s}, \vec{n} \rangle|}{|\vec{s}| |\vec{n}|},$$

kus $\vec{s}$ on sirge l sihivektor ja $\vec{n}$ on tasandi π normaalvektor.

Sirge võrranditeks üldkujul ehk üldkujulisteks võrranditeks nimetatakse süsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

kus sirge sihivektor $\vec{s}$ avaldub: antud kahe tasandi normaalvektori vektorkorrutisena: $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Ülesanne 3.11. Kolmnurga ABC tippudeks on $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, -5)$, $C(0, 4, -5)$. Koostage selle kolmnurga külgede poolt määratud sirgete võrrandid.

Ülesanne 3.12. Koostage punkti $P(-3, 4, -7)$ läbiva sirge s kanoonilised võrrandid.

- (a) sirge s on paralleelne x -teljega (c) sirge s on paralleelne z -teljega
- (b) sirge s sihivektor on $\vec{s} = (3, -2, 4)$ (d) sirge s on paralleelne sirgega $t: \frac{x+5}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{8}$

Ülesanne 3.13. Koostage sirge s kanoonilised võrrandid, kui sirge s läbib punkti $P(2, 3, 4)$ ja on paralleelne sirgega $t: \begin{cases} 3x+7y-2z+4=0 \\ 2x-6y+7z-13=0. \end{cases}$

Ülesanne 3.14. Leidke tasandi $2x-3y+4z-5=0$ ja xz -tasandi lõikesirgel kõik need punktid, mis asuvad tasandist $2x+y-z+3=0$ kaugusel $\sqrt{6}$ ühikut.

Ülesanne 3.15. Leidke sirge ja tasandi vaheline nurk. Juhul, kui sirge ja tasand lõikuvad, leidke nende lõikepunkt.

- (a) $\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$, $3x+5y-z-2=0$ (c) $\begin{cases} 3x+5y-7z+16=0 \\ 2x-y+z-6=0 \end{cases}$, $5x-z-4=0$
- (b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $3x-3y+2z-5=0$

Praktikum 4

Kompleksarvu algebraline kuju

4.1 Kompleksarvu algebraline kuju

Definitsioon 4.1

Kompleksarvuks nimetatakse avaldist

$$z = a + bi, \quad (4.1)$$

kus a ja b on reaalarvud ning i on **imaginaarühik** (kompleksarv i , mille korral kehtib $i^2 = -1$).

Kompleksarvu **reaalosaks** nimetatakse arvu $a = \operatorname{Re} z$, kompleksarvu **imaginaarosaks** nimetatakse arvu bi , kus $b = \operatorname{Im} z$ on **imaginaarosa kordaja**.

Definitsioon 4.2

Kompleksarvu z esitusviisi $z = a + bi$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, nimetatakse kompleksarvu z **algebraliseks** (ka Descartes'i) **kujuks**.

Kompleksarvu $z = a + bi$ **kaaskompleksarvuks** nimetatakse kompleksarvu $\bar{z} = a - bi$.

Kompleksarvu $z = a + bi$ **mooduliks** nimetatakse reaalarvu $|z|$, mis on määratud võrdusega $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ülesanne 4.1. Kujutage komplekstasandil järgmised kompleksarvud.

- | | | | |
|--------------|---------------|-----------------------|----------------------------------|
| (a) $3 - 2i$ | (c) $-1 - i$ | (e) $-7j, j^2 = -1$ | (g) $\overline{ 3 + \sqrt{6}i }$ |
| (b) $1 + i$ | (d) $-3 + 4i$ | (f) $ 3 + \sqrt{6}i $ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 4.2. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral

- | | |
|-----------------------|--------------------------------|
| (a) $2ix + 3 = y - i$ | (b) $x^2 - y^2 + ixy = 1 + ix$ |
|-----------------------|--------------------------------|

Ülesanne 4.3. Leidke kompleksarvu moodul.

- | | | | |
|-------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| (a) -42 | (c) $2i + 2$ | (e) $4 + 3i$ | (g) $6\sqrt{3} - 6i$ |
| (b) $i + 1$ | (d) $1 + i\sqrt{3}$ | (f) $-1 - i\sqrt{3}$ | (h) $1 - i\sqrt{3}$ |

Ülesanne 4.4. Kujutage komplekstasandil kõik kompleksarvud, mis rahuldavad antud tingimusi.

- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|
| (a) $ z = 3$ | (b) $\frac{1}{2} \leq z \leq 3$ | (c) $ z - 1 = 1$ | (d) $\operatorname{Re} z^2 = 4$ |
|---------------|-----------------------------------|-------------------|---------------------------------|

Kuna $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i, \dots$, siis

$i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, kus $k = 0, 1, 2, \dots$

Ülesanne 4.5. Kirjutage algebralisel kujul $z = a + bi$

(a) $z = i^{20}$

(f) $z = (2 + 2i)^8$

(b) $z = i^5 + i + 1$

(c) $z = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$

(g) $z = \frac{1+i}{1-i} - \frac{3-i}{1+i} + 3i$

(d) $z = i^{43} + (-1)^7 - (-i)^{77}$

(h) $z = \frac{(2-i^3)^4}{(i^8-i^6)^3} + i$

(e) $z = i^{2017} - i$

4.2 Tehted kompleksarvudega algebralisel kujul

Olgu antud kompleksarvud $z_1 = a_1 + b_1i$ ja $z_2 = a_2 + b_2i$. Siis nende võrdumine, summa, vahe, korrutis ja jagatis defineeritakse järgnevalt:

Võrdumine. $z_1 = z_2$ parajasti siis, kui $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$.

Summa ja vahe.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \quad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

Korrutis.

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Jagatis.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \text{ kui } z_2 \neq 0.$$

Ülesanne 4.6. Leidke arvude z_1 ja z_2 summa, vahe, korrutis, jagatis, moodulid ja kaaskompleksid.

(a) $z_1 = 3$, $z_2 = -4i$

(e) $z_1 = 2 - 7i$, $z_2 = 3 + 4i$

(b) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$

(f) $z_1 = -4 - i$, $z_2 = -7 - 4i$

(c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -3 + 2i$

(g) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = \frac{1}{1+3i}$

(d) $z_1 = 2 - 5i$, $z_2 = 3 + i$

(h) $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$, $z_2 = i$

Praktikum 5

Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

5.1 Kompleksarvu trigonomeetriline ja eksponentkuju

Definitsioon 5.1

Avaldist

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (5.1)$$

nimetatakse kompleksarvu z **trigonomeetriliseks kujuks**, kus reaalarv r on kompleksarvu z moodul $|z|$ ja reaalarv φ on kompleksarvu z argument, mida tähistatakse $\varphi = \arg z$.

Definitsioon 5.2

Kompleksarvu $z = a + bi$ argumenti φ leidmisel võib kasutada järgmist eeskirja

$\varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a} =$ $= \pi - \arctan \frac{b}{ a }$ $a < 0, b > 0$	$\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ $a > 0, b > 0$
$a < 0, b < 0$ $\varphi = \pi + \arctan \frac{b}{a}$	$a > 0, b < 0$ $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$ $= -\arctan \frac{ b }{a}$

Valem 5.1

Trigonomeetrilisi funktsioone ja eksponentfunktsiooni seob **Euleri valem**

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (5.2)$$

kus φ on reaalarvuline muutuja ja $e \approx 2,71828$ on naturaallogaritm alus.

Definitsioon 5.3

Kompleksarvu z eksponentkujuks nimetatakse esitust

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (5.3)$$

kus r on kompleksarvu z moodul ja φ on argument.

Ülesanne 5.1. Teisendage kompleksarv z algebralisele kujule $z = a + bi$ ning eksponentkujule.

(a) $z = \cos 16\pi + i \sin 16\pi$

(c) $z = 8 (\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$

(b) $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

(d) $z = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{2} - i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$

Ülesanne 5.2. Kirjutage nii trigonomeetrilisel kui ka algebralisel kujul $a + bi$.

(a) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$

(c) e^{-i}

(e) $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(g) $e^{(i+1)i}$

(b) $64e^{i0}$

(d) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

(f) $\frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}$

(h) $\frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}}$

Ülesanne 5.3. Viige kompleksarv z üle trigonomeetrilisele ja eksponentkujule.

- | | | |
|------------------|--|--------------------------|
| (a) $z = 8$ | (e) $z = -\sqrt{3} + i$ | (i) $z = 7 - 2i$ |
| (b) $z = 6i$ | (f) $z = -3 - \sqrt{3}i$ | (j) $z = 1.8 + 0.52i$ |
| (c) $z = 1 + i$ | (g) $z = 2 + 2i$ | (k) $z = 6 - 6i\sqrt{3}$ |
| (d) $z = -1 - i$ | (h) $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | (l) $z = 6 + 6i\sqrt{3}$ |

5.2 Tehted trigonomeetrilisel ja eksponentkujul

Omadus 5.1

Olgu antud kaks kompleksarvu trigonomeetrilisel kujul ja eksponentkujul

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}.$$

Siis kahe kompleksarvu korrutamise ja jagamise kohta kehtivad järgmised reeglid: **korrutamisel** moodulid korrutatakse ja argumendid liidetakse,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

jagamisel moodulid jagatakse ja argumendid lahutatakse,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad r_2 \neq 0.$$

Ülesanne 5.4. Leidke $z_1 \cdot z_2$ ja $\frac{z_1}{z_2}$ kõigil kolmel erineval esitusviisil.

- | | |
|--|--|
| (a) $\begin{cases} z_1 = 4 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) \\ z_2 = 2 \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right) \end{cases}$ | (b) $\begin{cases} z_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \\ z_2 = 3 (\cos \theta + i \sin \theta) \end{cases}$ |
|--|--|

Ülesanne 5.5. Arvutage järgmised avaldised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^4$ | (c) $\frac{(1+i)^2}{2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)}$ |
| (b) $\frac{(5+3i)(5-3i)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)}$ | (d) $\frac{\cos 69.5^\circ + i \sin 69.5^\circ}{\cos(-17.5^\circ) + i \sin(-17.5^\circ)}$ |

Ülesanne 5.6. Leidke kõikvõimalikud reaalarvud x ja y , mille korral $z^2 = \bar{z}^2$, $z = x + iy$.

Ülesanne 5.7. Millise reaalse kordajatega ruutvõrrandi lahenditeks on kompleksarvud $z_1 = 2 + i$ ja $z_2 = 2 - i$?

Ülesanne 5.8. Näidake, et kompleksarv $z = 1 - \sqrt{3}i$ on ruutvõrrandi $x^2 + 4 = 2x$ lahend.

Ülesanne 5.9. Tõestage järgmised väited.

- | | |
|---|---|
| (a) $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ ja $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ | (c) $z \bar{z} = z ^2$ |
| (b) Kui $ z = 1$, siis $\bar{z} = z^{-1}$ | (d) $ z_1 + z_2 ^2 + z_1 - z_2 ^2 = 2(z_1 ^2 + z_2 ^2)$ iga $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ korral |

Ülesanne 5.10. (F) Kaks köit hoiavad sadamas paati nii, et pingejõud on vastavalt $80 + 20i$ kg ja $100 - 50i$ kg. Arvutage kogupinge.

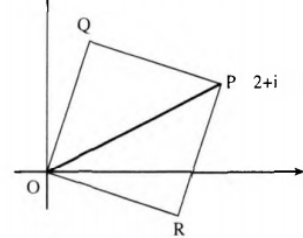
5.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 5.11. (F) Vahelduvvoolu ahelas leitakse kahe paralleelühenduses oleva elemendi näivtakistus (vt. lähemalt konspekti lisas) valemiga

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Arvutage näivtakistus Z , kui $Z_1 = 3 + 5i \, \Omega$ ja $Z_2 = 5 - 6i \, \Omega$.

Ülesanne 5.12. Ruudu diagonaal asub punktide 0 ja $2 + i$ vahel. Leidke ruudu kaks ülejäänud tippu Q ja R . NB! Lahenduse saab läbi viia puhtalt kompleksarve kasutades ja ilma kooli geometriata.



Ülesanne 5.13. (F) Kahe vedruga varustatud süsteem vajub raskuse mõjul

$$d = 6.03(\cos 22.5^\circ + i \sin 22.5^\circ) + 3.26(\cos 76.0^\circ + i \sin 76.0^\circ) \text{ cm}.$$

Teostage liitmine ning esitage vastus trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 5.14. (F) Teatud induktsoonipoolis on pinge

$$V = \frac{8.66(\cos 90.0^\circ + i \sin 90.0^\circ) \cdot 50.0(\cos 135.0^\circ + i \sin 135.0^\circ)}{10.0(\cos 60.0^\circ + i \sin 60.0^\circ)} \text{ volti}.$$

Lihtsustage avaldis ning leidke pinge moodul.

Ülesanne 5.15. (F) Kaks kaablit tõstavad portselani täis kasti. Pingejõude kaablites saab esitada avaldistega $2100 - 1200i \text{ N}$ ja $1200 + 5600i \text{ N}$. Esitage kogupinge trigonomeetrilisel kujul.

Ülesanne 5.16. Kasutades eksponentkuju, tuletage trigonomeetrilised valemid $\cos(\alpha \pm \beta)$ ja $\sin(\alpha \pm \beta)$ kohta.

Ülesanne 5.17. (F) Radari mikrolaine signaali intensiivsus on $37(\cos 65.3^\circ - i \sin 65.3^\circ) \text{ V/m}$. Esitage see eksponentkujul.

Ülesanne 5.18. (F) Lainete liitumisel on kasutusel avaldis

$$E_1 E_2 (e^{i(\alpha - \beta)} + e^{-i(\alpha - \beta)}).$$

Näidake, et see võrdub lihtsama avaldisega $2E_1 E_2 \cos(\alpha - \beta)$.

Praktikum 6

Kompleksarvu astendamise ja juurimise

6.1 Kompleksarvu astendamise ja juurimise

Valem 6.1

Kompleksarvu täisarvulisel astendamisel kehtib **de Moivre'i valem**

$$z^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (6.1)$$

kus $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ja iga kompleksarvu z korral on defineeritud $z^0 = 1$.

EkspONENTKujul $z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ülesanne 6.1. Kasutades de Moivre'i valemit, astendage kompleksarvud.

(a) $(\sqrt{3} - i)^{-12}$

(b) $(3 + \sqrt{3}i)^5$

(c) $[2(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ)]^5$

(d) $[\sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]^{10}$

(e) $2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^{36}$

(f) $[3(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)]^4$

(g) $[0.2(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)]^3$

(h) $\left(6e^{\frac{137\pi}{180}i}\right)^2$

(i) $\left(2e^{\frac{3\pi}{4}i}\right)^8$

(j) $\left(e^{\frac{71\pi}{90}i}\right)^{10}$

(k) z^{273} , $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$

(l) z^{614} , $z = e^{\frac{3i\pi}{307}}$

Definitsioon 6.1

Kompleksarvu z **n -astme juureks** nimetatakse iga kompleksarvu w , mille korral $w^n = z$.

Valem 6.2

Igal kompleksarvul $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$ on **n erinevat n -astme juurt**, mis avalduvad kujul

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.2)$$

EkspONENTKujul

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.3)$$

Ülesanne 6.2. Leidke arvu -1 seitsmenda juure $\sqrt[7]{-1}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.3. Leidke arvu $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.4. Leidke ja kujutage komplekstasandil arvu $\sqrt[4]{-64}$ kõik väärtused.

Ülesanne 6.5. Leidke $\sqrt[5]{z}$, kui $z = 32\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ ja kujutage tulemus kompleksstasandil.

Ülesanne 6.6. Kirjutage kompleksarvud eksponentkujul ja algebralisel kujul. Leidke erinevatel viisidel esitatud kompleksarvude z_1 ja z_4 korral nende summa, korrutis ja jagatis.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad z_1 = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) & \text{(c)} \quad z_3 = 4\left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}\right) \\ \text{(b)} \quad z_2 = \frac{3}{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) & \text{(d)} \quad z_4 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right) \end{array}$$

Ülesanne 6.7. Olgu

$$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_2 = -1 - i, \quad w_1 = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right), \quad w_2 = \sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

Arvutage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z_1^5 + w_2^8 & \text{(d)} \quad \sqrt[3]{z_1 + w_1^2} \text{ kõik väärtused} & \text{(g)} \quad \overline{w_1 + w_2} \\ \text{(b)} \quad z_1^6 z_2 & \text{(e)} \quad \frac{z_1 + w_2}{w_1} & \text{(h)} \quad |z_1^3 + z_2^2| \\ \text{(c)} \quad (z_2 w_1)^5 & \text{(f)} \quad \frac{\sqrt[4]{w_1}}{w_2} \text{ kõik väärtused} & \text{(i)} \quad \left| \frac{\overline{w_1}}{w_2} \right| \end{array}$$

6.2 Algebraliste võrrandite lahendamine

Definitsioon 6.2

Võrrandit $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ nimetatakse n **astme algebraliseks võrrandiks**. Kordajad $a_0, \dots, a_n$ võivad olla nii reaalsed kui komplekssed, kusjuures $a_0 \neq 0$.

Teoreem 6.1

Algebra põhiteoreem. Igal n astme algebralisel võrrandil on kompleksarvude hulgas n lahendit (kui arvestada kordseid lahendeid vastavalt kordsusele).

Ülesanne 6.8. Lahendage võrrandid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad z^4 - 1 = 0 & \text{(f)} \quad z^3 + i = 0 & \text{(l)} \quad x^3 - 3x^2 + 3x - 28 = 0 \\ \text{(b)} \quad z^2 - 1 - i = 0 & \text{(g)} \quad z^3 + 27 = 0 & \text{(m)} \quad x^4 + 6x^2 + 8 = 0 \\ \text{(c)} \quad z^2 - i = 0 & \text{(h)} \quad z^4 - i = 0 & \text{(n)} \quad x^6 - 2x^3 + 5 = 0 \\ \text{(d)} \quad z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0 & \text{(i)} \quad z^4 - \sqrt{3} - i = 0 & \text{(o)} \quad (x+1)^8 = 256(x-1)^8 \\ \text{(e)} \quad z^2 + 2(1 + \sqrt{3}i) = 0 & \text{(j)} \quad z^4 = -4i & \text{(p)} \quad x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0 \\ & \text{(k)} \quad x^2 - 6x + 10 = 0 & \text{(q)} \quad (x^4 + 3x^2 + 2)(x^2 - 4x + 8) = 0 \end{array}$$

Ülesanne 6.9. Lahendage w suhtes järgmine võrrand:

$$w^{\frac{4}{3}} + 2i = 0.$$

Ülesanne 6.10. (IT) Programmeerijal tuleb oma programmis leida reaalarvu a jaoks n erinevat n -astme juurt. Programmi ühe osana tuleb välja selgitada, mitu nendest on reaalarvud ja mitu kompleksarvud. Selgitage, kuidas seda kindlaks teha ilma juuri endid leidmata.

7.1 Funktsionaalsed sõltuvused

Definitsioon 7.1

Olgu antud hulk $X \subset \mathbb{R}$. Kui igale arvule $x \in X$ on vastavusse seatud üks ja ainult üks reaalarv y , siis öeldakse, et hulgal X on defineeritud **funktsioon** f , mida märgitakse $y = f(x)$.

Kui suurus y on võrdeline (proportsionaalne) suurusega $f(x)$, siis seda sõltuvust iseloomustab funktsioon $y = kf(x)$, kus k on mingi konstant (võrdetegur).

Ülesanne 7.1. Kirjutage välja järgmised funktsionaalsed sõltuvused.

- (a) Ümara lati tugevus S on võrdeline tema jämeduse h neljanda astmega
- (b) Delfiini energiakulu E ujudes on proportsionaalne tema liikumiskiiruse v kuubiga
- (c) Teekonna keskmine kiirus v on pöördvõrdeline kulutatud ajaga t
- (d) Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud G on pöördvõrdeline nende kehade vahelise kauguse ruuduga

Ülesanne 7.2. (K) Keemilise elemendi erisoojus s on energia hulk kalorites, mida on vaja 1 grammi elemendi 1 kraadiliseks soojendamiseks.

Otsustage järgmise tabeli põhjal, kas erisoojus s on võrdeline või pöördvõrdeline aatommassiga w . Kui seos kehtib, leidke vastav võrdetegur k .

element	Li	Mg	Al	Fe	Ag	Pb	Hg
w	6,9	24,3	27,0	55,8	107,9	207,2	200,6
s	0,92	0,25	0,21	0,11	0,056	0,031	0,033

7.2 Funktsioonide graafikud

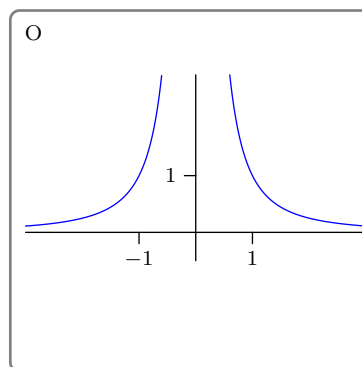
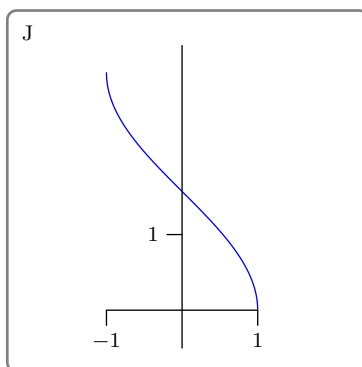
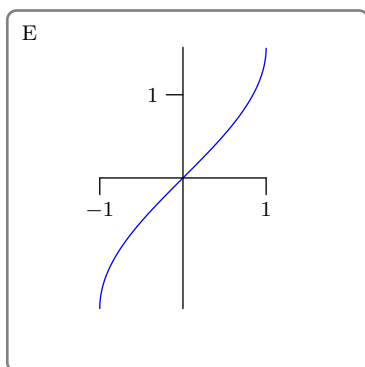
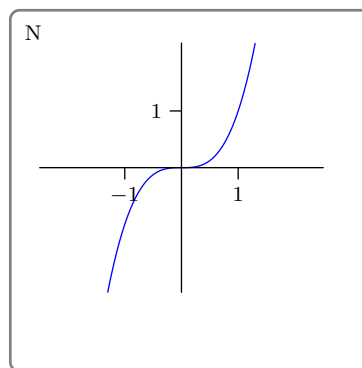
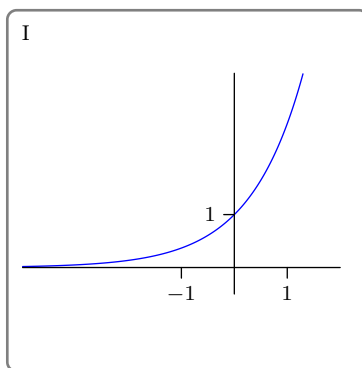
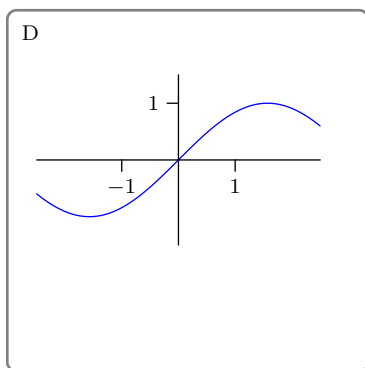
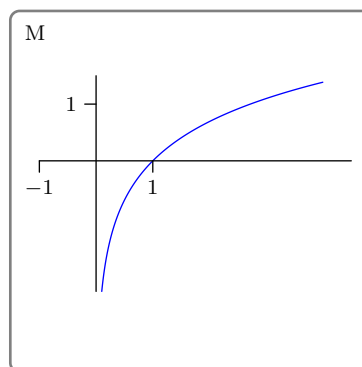
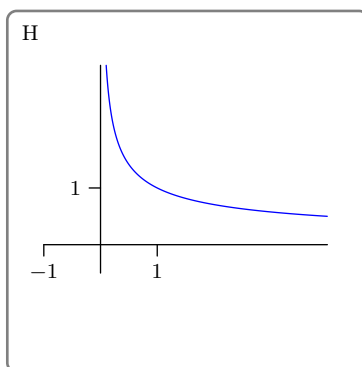
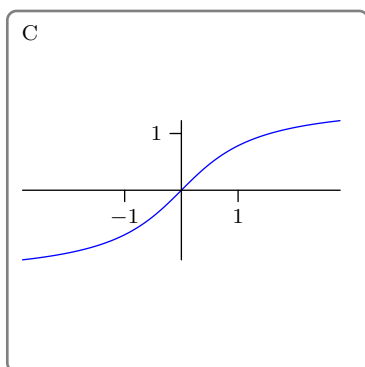
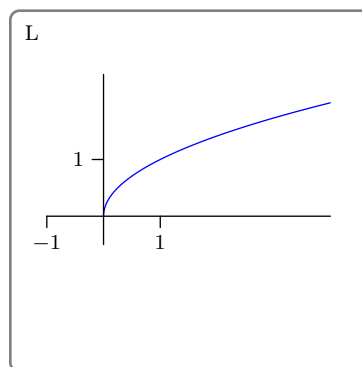
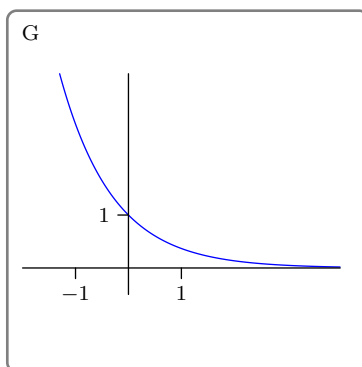
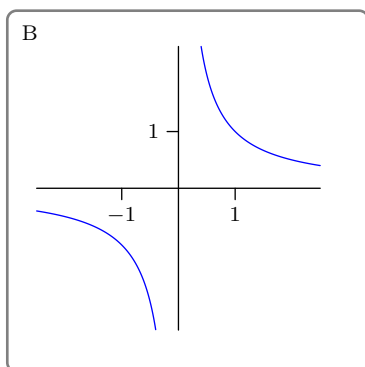
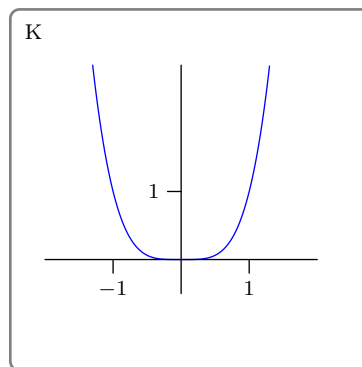
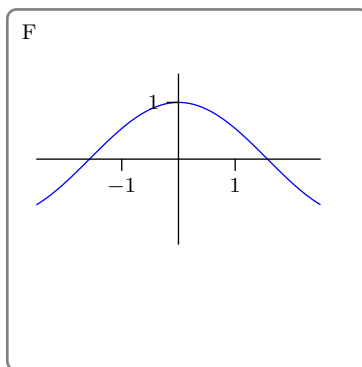
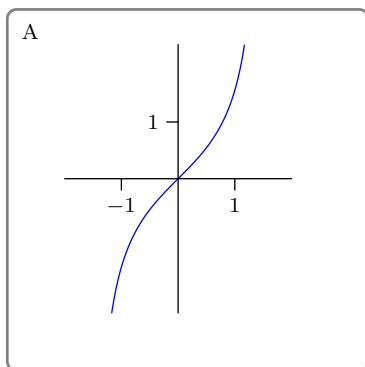
Ülesanne 7.3. Selgitage, kas funktsioonide $f(x) = x + 1$ ja $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ korral kehtib võrdus $f = g$? Skitseerige nende funktsioonide graafikud.

Ülesanne 7.4. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud.

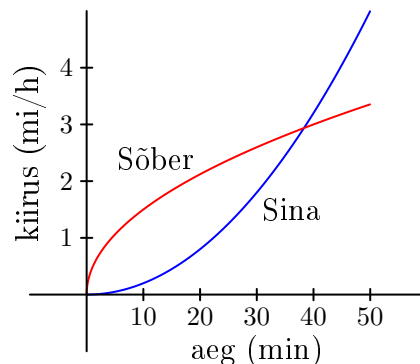
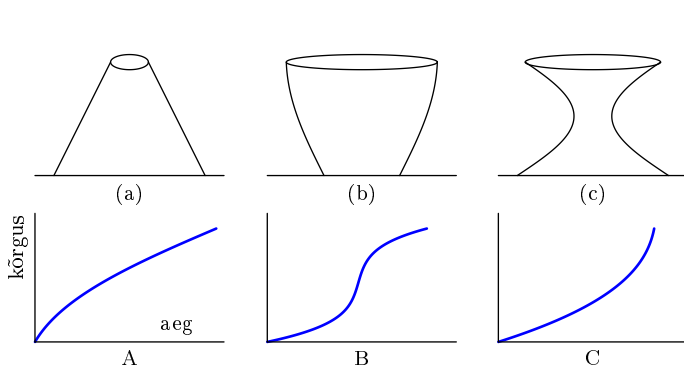
- (a) $f(x) = -x^2 + 1$
- (b) $f(x) = \log(-x)$
- (c) $f(x) = \sin(x - \pi)$
- (d) $f(x) = \arcsin x + \pi/2$
- (e) $f(x) = e^{-2x}$
- (f) $f(x) = \cos x$
- (g) $f(x) = \cos 2x$
- (h) $f(x) = \cos 3x$
- (i) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$
- (j) $f(x) = \sin \frac{x}{4}$
- (k) $f(x) = \tan 2x$
- (l) $f(x) = \tan(x - 2\pi)$

Ülesanne 7.5. (IT) Multiprotsessoriga arvuti suudab töötada S korda kiiremini, kui ühe protsessoriga arvuti. Skitseerige S graafik protsessorite arvu n järgi, kui $S = \frac{5n}{4+n}$.

Ülesanne 7.6. Milliste põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud on kujutatud järgmistel joonistel?



Ülesanne 7.7. Kolmel graafikul on toodud anuma veega täitumise kõrgus, kui veevool on ühtlane. Milline anum vastab millisele graafikule?



Ülesanne 7.8. Graafikul (ülal paremal) on toodud teie ja sõbra liikumise kiirus ajas. Liikumist alustatakse samast punktist ja liigutakse samas sihis.

- (a) Kes liigub kiiremini hetkel $t = 20$? (c) Millal on teie vahemaa suurim?
 (b) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 20$? (d) Kes on liikunud pikema maa, kui $t = 50$?

7.3 Funktsioonid ja nende omadused

Definitsioon 7.2

Kõikide elementide X hulka, mille puhul elemendile $x \in X$ seatakse funktsiooniga f vastavusse $f(x)$, nimetatakse funktsiooni f **määramispiirkonnaks**.

Funktsiooni f kõikide väärtuste hulka $\{y \mid y = f(x), x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f **muutumispiirkonnaks** ehk väärtuste hulgaks ja seda tähistatakse $f(X)$.

Definitsioon 7.3

Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse

1. **paarisfunktsiooniks** määramispiirkonnas X , kui $f(-x) = f(x)$ iga $x \in X$ korral;
2. **paarituks funktsiooniks**, kui $f(-x) = -f(x)$ iga $x \in X$ korral;
3. **perioodiliseks**, kui leidub arv $T > 0$ nii, et $f(x + T) = f(x)$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 7.9. Leidke järgmiste funktsioonide määramis- ja muutumispiirkonnad.

- (a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (d) $f(x) = \frac{1}{\log(1-x)} + \sqrt{x+2}$ (f) $f(x) = \arcsin(2x-1)$
 (b) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ (e) $f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$ (g) $f(x) = \arccos \frac{2}{1+x}$
 (c) $f(x) = \log(x-6)$

Ülesanne 7.10. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on paaris- ja millised on paaritud funktsioonid.

- (a) $f(x) = \frac{3}{x} - x^3$ (b) $f(x) = x(5^{2x} - 5^{-2x})$ (d) $f(x) = \sin x - x \cos x$
 (c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\arctan x}$ (e) $f(x) = \sin x - \cos x$

Ülesanne 7.11. Selgitage, millised järgmistest funktsioonidest on perioodilised, leidke vähim periood T .

- (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = \cos 3x$ (c) $f(x) = x^2$ (d) $f(x) = \tan \frac{x}{2} + 3$

Praktikum 8

Pöördfunktsioon, eksponent- ja logaritmifunktsioon

8.1 Pöördfunktsioon, üksühene funktsioon

Definitsioon 8.1

Funktsiooni $f: X \rightarrow Y$ nimetatakse **üksüheseks** funktsiooniks, kui iga $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral ka funktsiooni väärtused on erinevad hulgas Y , s.t $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Üksühese vastavuse $f: X \rightarrow Y$ **pöördfunktsioon** $f^{-1}: Y \rightarrow X$ määratakse võrdusega $f^{-1}(y) = x$, kus $f(x) = y$ iga $x \in X$ korral.

Ülesanne 8.1. Leidke järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid $f^{-1}: Y \rightarrow X$.

(a) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$

(d) $f(x) = 1 + \log|x - 2|$, $x \in (-\infty, 2)$

(b) $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, 0)$

(e) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{3}$, $x \in [-3, 0]$

(c) $f(x) = 10^x + 1$

(f) $f(x) = 1 + \arccos(1 - x)$

Ülesanne 8.2. Määrake, kas funktsioon f on üksühene.

(a) $f(x) = 3x - 2$

(d) $f(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$

(b) $f(x) = 2^x$

(e) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = x^2$

(f) $f(x) = \sin x$

Ülesanne 8.3. Järgmised parameetrilisel kujul antud funktsioonid kirjutage ilmutatud kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

(a) $x = t + 5$, $y = t + \ln t$

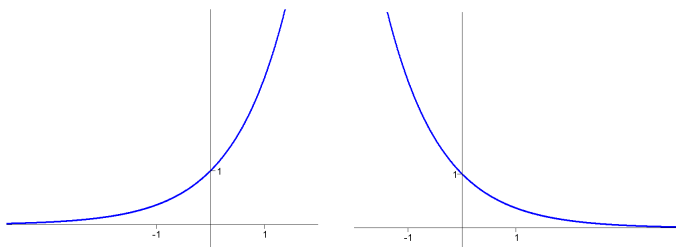
(b) $x = t^5 + t$, $y = e^t$

Ülesanne 8.4. Esitage järgmised ilmutamata kujul antud joonte võrrandid ilmutatud kujul.

(a) $\ln(y - \sin x) = x$

(b) $y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$

8.2 Eksponentfunktsioon



Eksponentfunktsioon on $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Funktsiooni $y = e^x$ korral räägitakse eksponentsiaalsest kasvust ja $y = e^{-x}$ korral eksponentsiaalsest langusest.

Omadus 8.1

Eksponentfunktsioonil on järgmised omadused:

$$\begin{array}{llll}
 (a) & a^0 = 1 & (c) & a^{x+y} = a^x a^y & (e) & a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} & (g) & (ab)^x = a^x b^x \\
 (b) & a^x > 0 & (d) & a^{-x} = \frac{1}{a^x} & (f) & (a^x)^y = a^{xy}
 \end{array}$$

Ülesanne 8.5. Lihtsustage avaldis $\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, kui $f(x) = Ae^{kx}$.

Ülesanne 8.6. Turule investeeritakse 300 eurot intressiga 3 % aastas. Leidke investeeringu suurus 10 aasta pärast.

Ülesanne 8.7. (K) Mõõtesead registreerib jões 1 km eemal kemikaali lekkekohast 620 osakest miljoni (ppm) ning seadme näitajad vähenevad 12,5 % iga kilomeetri kohta lekkekohast eemal. Kui kaugel on seadme näit 100 ppm?

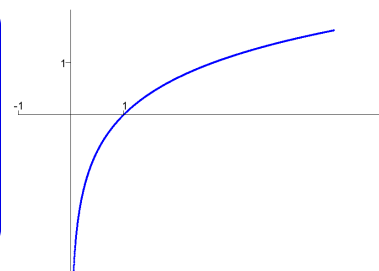
8.3 Logaritmifunktsioon

Definitsioon 8.2

Positiivse arvu x **logaritmiks alusel** a ($a > 0$, $a \neq 1$) nimetatakse arvu c , millega alust a astendades saadakse arv x , s.t.

$$\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x.$$

Logaritm- ja eksponentfunktsioon on teineteise pöördfunktsioonid.


Omadus 8.2

Logaritmifunktsioonil on järgmised omadused:

$$\begin{array}{lll}
 (a) & \log xy = \log |x| + \log |y|, & (c) & \log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y| & (f) & e^{\ln x} = x \\
 & (xy > 0) & (d) & \log x^a = a \log x & (g) & \log 1 = 0 \\
 (b) & \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} & (e) & x = a^{\log_a x}, (x > 0) & (h) & \ln e = 1
 \end{array}$$

Ülesanne 8.8. Lihtsustage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{lll}
 (a) & e^{5 \ln x} & (b) & \ln \frac{1}{e^{3x}} & (c) & e^{(3 \ln 9)/2} \\
 (d) & 4 \ln \sqrt{x} + 6 \ln x^{1/3} & (e) & 16^{\log_2 \sqrt[4]{48} - 1} & (f) & \log \log \sqrt{\sqrt[5]{10}} \\
 (g) & -\log_8 \log_4 \log_2 16 & (h) & e^{2 \ln \cos x} + (\ln e^{\sin x})^2
 \end{array}$$

Ülesanne 8.9. Lihtsustage järgmised avaldised.

$$\begin{array}{ll}
 (a) & 5 \log_5 25 + 8 \log_2 64 - 4 \log_3 27 + \log_2 2 + \log_5 1 \\
 (b) & 3^{1 - \log_3 7} + 5^{\log_5 8 + 1} - 2 \cdot 4^{\log_{2,4} 10 + 1} \\
 (c) & \log_2 12 + \log_2 25/3 + 2 \log_2 4/5 - \log_2 2^7 \\
 (d) & 4 \cdot (81^{1/4 - 1/2 \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8})
 \end{array}$$

Ülesanne 8.10. Vesi kuumutatakse nõus 90 kraadini ja asetatakse ruumi, mille temperatuur on 0 kraadi. Newtoni jahtumisseadusest tuletatakse võrrand $\ln T = \ln 90 - 0,23t$, kus T on vee temperatuur ja t on aeg minutites. Esitage T ajast t sõltuva funktsioonina.

Ülesanne 8.11. (F) Kahe tähe näivheledused m_1 ja m_2 on seotud nende tegelike heledustega b_1 ja b_2 järgmise logaritmilise seose abil:

$$m_1 - m_2 = 2,5 \log_{10} \frac{b_2}{b_1}.$$

Avaldage b_2 .

Siiriuse näivheledus on $-1,4$ ning veel silmaga nähtavate tähtede näivheledus on u. $6,0$. Mitu korda on Siiriuse tegelik heledus suurem, kui veel silmaga nähtavatel tähtedel?



Ülesanne 8.12. (K) Putukamürk DDT keelati USA-s 1972. aastal. Olgu A_0 alghetkel piirkonda pritsitud DDT kogus ning A hetkel t (aastat) veel lagundamata DDT kogus. Neid kahte suurust seob võrrand

$$\log_{10} A = \log_{10} A_0 + 0,1t \log_{10} 0,8.$$

Avaldage A kui aja t -funktsioon.

Ülesanne 8.13. (M) Näidake, et kehtib võrdus $b^{\log_a c} = c^{\log_a b}$.

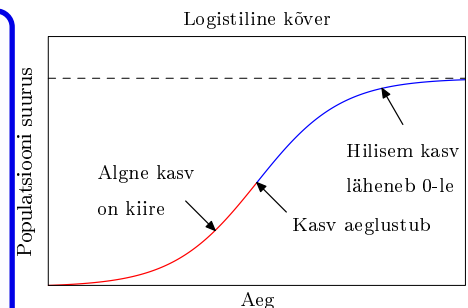
Ülesanne 8.14. (M) Arvutage b^b , kui $a^b = 8$, $b^c = 10$ ja $a^c = 2$.

8.4 Logistiline kõver

Logistiline S-kõver

$$y = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} = \frac{L}{1 + b e^{-kx}}$$

on laialt kasutusel populatsiooni modelleerimisel. Siin L on kõvera maksimaalne väärtus, k iseloomustab kasvu kiirust ja x_0 on keskpunkti asukoht. Logistilist kõverat kasutatakse palju ka statistikas ja IT-s masinõppes, kuna lubab modelleerida 0 ja 1 tüüpi väärtusi.



Joonis: <http://www.math.andyou.com/161>

Ülesanne 8.15. Ülikoolilinnakus on 5000 tudengit. Üks tudeng naaseb puhkuselt linnakusse kaua kestva gripiviirusega. Viiruse levikut modelleeritakse parajasti logistilise mudeliga $y = \frac{5000}{1+4999e^{-0,8t}}$, kus t on aeg päevades ja y näitab nakatunud tudengite arvu. Mitme päeva pärast tuleb õppetöö lõpetada, kui eeskirja järgi tehakse seda olukorras, kus on vähemalt 40 % nakatunuid.

Praktikum 9

Funktsiooni piirväärtus

Definitsioon 9.1

Hulga $X \subset \mathbb{R}$ **kuhjumispunktiks** nimetatakse punkti $a \in \mathbb{R}$, kui punkti a iga ümbrus (vahemikud $(a - \delta, a + \delta)$, kus $\delta > 0$) sisaldab vähemalt ühte temast erinevat hulga X punkti.

Definitsioon 9.2

Olgu a funktsiooni f määramispiirkonna X kuhjumispunkt. Reaalarvu A nimetatakse funktsiooni f **piirväärtuseks** punktis a ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

kui punktile a piisavalt lähedastes määramispiirkonna X punktides x (välja arvatud, võib-olla, punktis a eneses) erinevad vastavad funktsiooni väärtused $f(x)$ arvust A kui tahes vähe.

Teoreem 9.1

Kui eksisteerivad ühepoolsed piirväärtused $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$, siis (nn. kahepoolne) piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ eksisteerib parajasti siis, kui

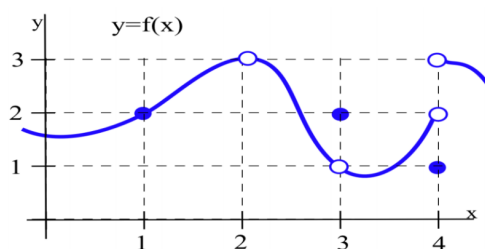
$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A.$$

Kui piirväärtuse arvutamisel tekivad määramatused:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty, \quad \infty^0$$

siis tuleb avaldist, millest leitakse piirväärtust, teisendada nii, et see määramatus saaks kõrvaldatud.

Ülesanne 9.1. Leidke joonise põhjal järgmised piirväärtused.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 4-} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 4+} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

Ülesanne 9.2. Skitseerige järgmiste funktsioonide graafikud ja leidke nende funktsioonide ühepoolsed piirväärtused märgitud punktides a ja b .

(a) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 3, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 0 \\ b = 1 \end{matrix}$

9.1 Piirväärtuse omadused

Teoreem 9.2

Kui on olemas lõplikud piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B,$$

siis kehtivad järgmised tehete seotud omadused:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cA, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \quad \text{kui } B \neq 0.$$

Teoreem 9.3

Kui funktsioon f on tõkestatud punkti a mingis ümbruses ja $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, siis $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = 0$.

Teoreem 9.4

Kui f on elementaarfunktsioon ja punkt a kuulub tema määramispiirkonda, siis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Ülesanne 9.3. Olgu funktsioonidel f ja g üks ja sama määramispiirkond ning olgu $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -5$. Millistele piirväärtuse omadustele tuginedes on tehtud järgmised teisendused?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (2f(x) - g(x))}{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 7)\right)^{2/3}} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0} g(x)}{\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 7\right)^{2/3}} = \frac{7}{4}.$$

Ülesanne 9.4. Kas kehtib võrdus $\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{1/x}$? Põhjendage!

Ülesanne 9.5. Leidke järgmised piirväärtused või põhjendage, miks piirväärtust ei eksisteeri.

(a) $\lim_{x \rightarrow 25} (\sqrt{x} - 5)$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \cos 2x$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{|x|}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 - 7}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 4x}{x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{4+x}{2 + e^{\frac{-1}{\sin x}}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

9.2 Piirväärtuse arvutamine

Ülesanne 9.6. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)^2 - 1}{2x-2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x}{x^3 + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{(2x^2 - 8)x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{3 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

(i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+2}{(x+4)^2}$

(h) $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{x-4}$

Ülesanne 9.7. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3}-1}{\sqrt{x}-1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-x})$

(b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x^{2/3}-16}{\sqrt{x}-8}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4})$

(c) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{y+16}}{y}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - x)$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2+5x}}$

Ülesanne 9.8. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3}{5x^2+7}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x+1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log x - \log 2x)$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-7x+1}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+4}{x^2-x+1}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^2}{(4x+3)^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+x^3}{12x^3+128}$

9.3 Mõned erilised piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

Ülesanne 9.9. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 3x}{\sin 4x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-\sqrt{x})}{x-1}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \tan 5x}{(x-x^3)^2}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{3/x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{3x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{3x-2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x+\ln 2}$

Praktikum 10

Piirväärtus ja pidevus. Tuletis

10.1 Erinevad piirväärtuse leidmise ülesanded

Ülesanne 10.1. Leidke järgmised piirväärtused või põhjendage, miks piirväärtust ei eksisteeri.

- | | | |
|---|--|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{x^2 + x - 2}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x} + x)$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\arcsin 6x}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{1 - \sqrt{x+3}}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$ | (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{(x-1)^2}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x}{(x+1)^2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\tan 5x}$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos x - 1}$ |
| | | (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{2}{x} - 1 \right)$ |

10.2 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 10.2. (B) Loomade õppimisvõime uurimiseks teostas üliõpilane eksperimendi, kus rotil lasti korduvalt läbida labürinti. Mõõtmistulemused näitasid, et n -dal korral läbis rott labürindi ajaga $T(n) = (5n + 17)/n$ minutit. Mis juhtub labürindi läbimiseks kuluva ajaga, kui katsete arv tõkestamatult kasvab?

Ülesanne 10.3. (B) Teatud inimese silma pupilli pindala avaldub seosega $S = \frac{36 + 24y^3}{1 + 4y^3}$ (mm²), kus y on valguse heledus luumenites. Milliste väärtuste vahel võib pupilli pindala teoreetiliselt muutuda?

Ülesanne 10.4. (F) Einsteini erirelatiivsusteooria järgi on liikuva keha mass leitav valemiga $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, kus c on valguse kiirus, $m > 0$ on seisumass ja v on keha liikumise kiirus. Arvutage järgmiste avaldiste väärtused. Mis on vastavate tulemuste füüsikaline sisu?

- | | | | |
|------------|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| (a) $M(0)$ | (b) $M\left(\frac{c}{2}\right)$ | (c) $\lim_{v \rightarrow c-} M(v)$ | (d) $\lim_{v \rightarrow c+} M(v)$ |
|------------|---------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|

Ülesanne 10.5. (F) Punktmassi liikumist aja t järgi kirjeldab seos $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5t$. Leidke punktmassi liikumise kiirus hetkel $t = 2$, s.t leidke piirväärtus $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t}$.

Ülesanne 10.6. On ennustatud, et t aasta pärast on eeslinna populatsioon $p = p(t)$ tuhat inimest, kus $p(t) = 20 - \frac{7}{t+2}$. Keskkonnaameti uuring näitas, et keskmine süsihappegaasi tase on c osakest miljoni osakese kohta, kus $c(p) = \frac{2\sqrt{p^2 + p + 21}}{5}$. Mis juhtub süsihappegaasi tasemega pikas perspektiivis, kui $t \rightarrow \infty$?

Ülesanne 10.7. (K) Analüüsige vesiniku aatomi 3s-orbiidi lainefunktsiooni radiaalse osa $R_{3s}(r)$ väärtusi protsessides $r \rightarrow 0+$ ja $r \rightarrow \infty$. Siin N ja a_0 on konstandid, r on elektroni kaugus tuumast:

$$R_{3s}(r) = N \cdot \left(27 - \frac{18}{a_0} r + \frac{2}{a_0^2} r^2 \right) \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}}.$$

10.3 Pidevad ja katkevad funktsioonid

Definitsioon 10.1

Vaatleme reaalmuutuja funktsioone $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$. Olgu $a \in X$.

Funktsiooni f nimetatakse **pidevaks punktis** a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Selleks, et funktsioon oleks pidev punktis a , peavad olema täidetud kõik järgmised kolm tingimust:

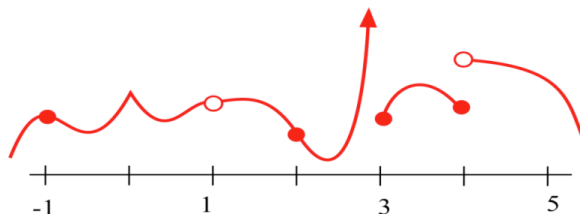
1. funktsioonil on olemas väärtus $f(a)$;
2. funktsioonil on olemas piirväärtus $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ protsessis $x \rightarrow a$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Kui funktsioon f ei ole pidev punktis a , kuid on määratud tema ümbruses, siis öeldakse, et funktsioon f on **katkev punktis** a (punkti a nimetatakse funktsiooni f **katkevuspunktiks**). Katkevuspunkti a räägitakse ka siis, kui funktsioon f ei ole määratud punktis a , kuid eksisteerib $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Teoreem 10.1

Kõik elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

Ülesanne 10.8. Leidke joonise põhjal intervallid, kus funktsioon on pidev ja punktid, kus ta ei ole pidev.



Siin täidetud ringid on graafiku punktid; seest tühjad ringid ei ole graafiku punktid.

Ülesanne 10.9. Joonestage ühe funktsiooni f graafik, mis rahuldab järgmisi tingimusi.

- | | |
|--|--|
| (a) funktsioon f on määratud lõigus $[0, 5]$ | (c) $f(1) = 0$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ | (d) funktsioon f on tõkestatud lõigus $[4, 5]$ |
| | (e) funktsioon f ei ole pidev punktis $x = 3$ |

Ülesanne 10.10. Uurige järgmiste funktsioonide pidevust.

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $f(x) = \frac{ x-3 }{x-3}$ | (b) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$ | (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ |
| (d) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 2 \\ 6, & x = 2 \\ 4x, & x > 2 \end{cases}$ | (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 6x}{2x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ | |

Ülesanne 10.11. Leidke parameetrite a ja b väärtused, mille korral järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$(a) f(x) = \begin{cases} 7x - 2, & x \leq 1 \\ ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} x - a, & x < 1 \\ \cos \pi x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} bx^2, & x \leq 2 \\ 2x + b, & x > 2 \end{cases}$$

$$(e) f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3 + ax^2, & x \leq 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

Ülesanne 10.12. Töötaja leping näeb ette, et tema esialgne palk on 1000 € ning eduka töö korral ootab teda iga poole aasta tagant palgatõus 3%. Joonistage töötaja palga graafik järgmise 5 aasta jaoks ning uurige palgafunktsiooni pidevust.

10.4 Funktsiooni tuletise definitsioon

Definitsioon 10.2

Olgu antud funktsioon $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$. Anname argumentidele $a \in X$ muudu Δx nii, et $a + \Delta x \in X$, vastav funktsiooni muut olgu $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni f **tuletiseks punktis** a ja tähistatakse $f'(a)$.

Niisiis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

kui see piirväärtus eksisteerib ja on reaalarv.

Ülesanne 10.13. Lähtudes definitsioonist, leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

$$(a) f(x) = 6x - 1$$

$$(d) f(x) = \sqrt{3x}$$

$$(b) f(x) = 2x^2 - 5$$

$$(e) f(x) = \cos x$$

$$(c) f(x) = x^3$$

$$(f) f(x) = \frac{1}{x}$$

Kontrolltöö nr. 1 teemad (kontrolltöö toimub loengu ajal)

1. Vektorid ruumis. Sirged ja tasandid ruumis

1. Vektorite skalaarkorrutis. Nurk kahe vektori vahel. Vektorite ristseisu tunnus.
2. Vektorite vektorkorrutis. Vektoritele ehitatud rööpküliliku ja kolmnurga pindala.
3. Vektorite segakorrutis. Vektoritele ehitatud rööptahuka ja tetraeedri ruumala. Kolme vektori komplanaarsus.
4. Tasandi võrrandi koostamine ruumis. Nurk tasandite vahel. Punkti kaugus tasandist.
5. Sirge võrrandi koostamine ruumis. Nurk sirge ja tasandi vahel.

2. Kompleksarvud

1. Kompleksarvu algebraline, trigonomeetiline ja eksponentkuju. Teisendamine ühelt kujult teisele.
2. Tehted kompleksarvudega algebralisel, trigonomeetrilisel ja eksponentkujul.
3. Kompleksarvu astendamine ja juurimine.

3. Funktsioonid

1. Määramispiirkond, muutumispiirkond, paaris- ja paaritu funktsioon, üksühene funktsioon.
2. Põhiliste elementaarfunktsioonide graafikud, elementaarfunktsioonide graafikute skitseerimine.
3. Pöördfunktsiooni leidmine.
4. Eksponent- ja logaritmifunktsioonide omadused.

4. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus

1. Piirväärtuse arvutamine, piirväärtuse omadused, määramatuste $(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty)$ avamine (tegurdamine).

2. Piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

3. Funktsiooni pidevuse uurimine.

Praktikum 11

Tuletis. Liitfunktsiooni tuletis

11.1 Funktsiooni tuletise leidmine

Teoreem 11.1

Tehetega seotud diferentseerimise reeglid

Kui funktsioonidel $u = u(x)$ ja $v = v(x)$ eksisteerivad tuletised punktis x , siis ka funktsioonidel $u + v, u - v, uv, \frac{u}{v}$ (lisatingimusel) eksisteerivad tuletised punktis x , kusjuures

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(cu)' = cu', c = \text{const}$
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ kui } v \neq 0$

Ülesanne 11.1. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $f(x) = 3x^5$ | (d) $f(x) = 2^x - e^x$ | (g) $f(x) = 21x^{-7} - \frac{\arcsin x}{2}$ |
| (b) $f(x) = x + 6x^{\frac{1}{3}}$ | (e) $f(x) = \log_2 x + \sin x$ | (h) $f(x) = -\ln x + \frac{x^3}{6}$ |
| (c) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} + 2e$ | (f) $f(x) = \frac{1}{2x} - 3 \arccos x$ | (i) $f(x) = 3\pi^2 + 6\sqrt[3]{x^4}$ |

Ülesanne 11.2. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised (a, b ja α on konstandid).

- | | |
|--|--|
| (a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$ | (f) $f(x) = -\frac{5x}{x - 6}$ |
| (b) $f(x) = x^a b^x$ | (g) $f(x) = \frac{e^x a^x}{1 + \ln a}$ |
| (c) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ | (h) $f(x) = \frac{x \tan \alpha}{1 + x^2} + x \ln x$ |
| (d) $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$ | (i) $f(x) = \arccos x \arcsin x$ |
| (e) $f(u) = \frac{\sin u}{u} - \ln u \cdot \cos u$ | (j) $f(x) = \frac{1}{\sin x} + a^2 \arctan x$ |

Ülesanne 11.3. Leidke funktsiooni $f(x) = (3x - 1)(3x + 1)(x^2 - 4)$ tuletis

- | | |
|--|---------------------------|
| (a) kasutades korrutise tuletise valemit | (b) korrutades sulud läbi |
|--|---------------------------|

Ülesanne 11.4. Arvutage järgmiste funktsioonide tuletised punktis t .

(a) $f(t) = 15t^3e^t$ ja $t = 1$

(b) $f(t) = \frac{t^2(1-2t)}{3t-7}$ ja $t = -1$

Ülesanne 11.5. (F) Laserite teoorias avaldub kiirgusvõimsus valemiga

$$P = \frac{kf^2}{\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2},$$

kus f on sagedus ning a , k ja ω on teatud konstandid. Leidke $\frac{dP}{df}$.

Ülesanne 11.6. (IT) Arvutisüsteem töötleb N bitti andmeid ajaga t , mis on võrdeline arvuga $N \ln(N)$. Leidke aja muutumise kiirus bittide arvu suhtes $\frac{dt}{dN}$.

Ülesanne 11.7. (K) Termodünaamikas seob temperatuuri T , rõhku p ja gaasi ruumala V valem, kus a , b ja R on konstandid. Leidke $\frac{dT}{dV}$, kui rõhk on konstantne ja

$$T = \left(p + \frac{a}{V^2}\right) \left(\frac{V-b}{R}\right).$$

11.2 Liitfunktsiooni tuletis

Teoreem 11.2

Teoreem liitfunktsiooni diferentseerimisest. Kui $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $x \in X$, $f(X) \subset Y$ ja $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis $y = f(x)$, siis $h = g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on diferentseeruv punktis x ja

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Ülesanne 11.8. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = (4x-3)^5 + (-3x)^2$

(d) $y = x\sqrt{1-x^2}$

(g) $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right)$

(b) $y = 5(3x^6 - 4)^{\frac{2}{3}}$

(e) $y = \ln(x + \ln x)$

(c) $y = (\sin x)^{-1}$

(f) $y = 6\sqrt{x} + 4^{6x}$

(h) $y = \frac{e^{0,5x}}{2x}$

Ülesanne 11.9. Leidke järgmiste funktsioonide tuletised.

(a) $y = \left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^2$

(f) $y = \frac{\cos^2 3x}{1 + 2 \sin^2 2x}$

(b) $y = \sqrt{\frac{2x+1}{4x+1}}$

(g) $y = \ln \tan 2x + \ln \cot 2x$

(c) $y = \ln(4x-3)^3$

(h) $y = 6 \arcsin \sqrt{2-x}$

(d) $y = \cos(-9x+2) + \sin^3 4x^5$

(i) $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}$

(e) $y = \frac{1}{\cos(-7x)} + \frac{1}{\sin(-7x)}$

(j) $y = \arccos x \cdot \ln \arctan x$

Ülesanne 11.10. Tabelis on antud funktsioonide f ja g ning nende tuletiste väärtused kohal $x = 3$. Leidke funktsiooni $u(x) = \sqrt{f(x)^2 + 2 \cdot g(x)^2}$ tuletise väärtus punktis $x = 3$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
3	3	4	6	-5

Ülesanne 11.11. (F) Laine kiirus sügavas vees on arvutatav seaduse $v = k\sqrt{\frac{L}{m} + \frac{a}{L}}$ alusel (a , k ja m on konstandid, L laine pikkus). Leidke L väärtused, mille korral $v'(L) = 0$.

Ülesanne 11.12. (B) Näidaku funktsioon $y = y(t)$ mingi liigi isendite, taime osade, rakkude arvu vms ajahetkel t . Sel juhul tuletist $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ nimetatakse ka absoluutseks kasvukiiruseks hetkel t . Absoluutne kasvukiirus võib erisuurustes organismide vahel palju erineda ja see ei anna meile infot nn efektiivsuse kohta. Olgu kasvukiirus $y'(t) = G(t)$, s.t. ajast sõltuv funktsioon. Sel juhul jagades mõlemat poolt suurusega y saame

$$\frac{y'(t)}{y} = \frac{G(t)}{y}.$$

Jagatist $R(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$ nimetatakse suhteliseks kasvukiiruseks ja see iseloomustab nn materjali efektiivsust toota uut materjali (näiteks metsa kasv). Sookase (*Betula pubescens*) ja mägivahtra (*Acer pseudoplatanus*) seemned istuti maha ja kasvanud taimed kärbiti iga kahe nädala tagant. Esimese 18 nädalaga selgus mõõtetulemustest, et puud kasvasid seaduste

$$W_{kask}(t) = 0,0441 e^{0,3041 t}, \quad W_{vahter}(t) = 0,3837 e^{0,2243 t}$$

alusel, kus t ühikuks olid nädalad ja W ühikuks grammid. Kirjutage välja mõlema liigi suhtelised kasvukiirused $R(t)$. Milline liik taastoodab ennast efektiivsemalt?

Ülesanne 11.13. (K) Kui gaasi ruumala muutub väga kiiresti, siis rõhk P muutub ligikaudu pöördvõrdeliselt ruumala $3/2$ -astmega. On teada mõõtmistulemus, et 300 kPa rõhuga $V = 100 \text{ cm}^3$. Leidke rõhu P muutumise kiirus ruumala V järgi hetkel, mil $V = 100 \text{ cm}^3$.

11.3 Kõrgemat järku tuletis

Kui eksisteerib $(f')'(x)$, siis seda tuletist nimetatakse funktsiooni f teist järku (teiseks) tuletiseks punktis x , seega

$$(f')'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Analoogiliselt defineeritakse n -järku tuletis

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Ülesanne 11.14. Leidke järgmised kõrgemat järku tuletised.

(a) $f(x) = \ln x$, leidke f''

(c) $f(x) = 2x^5 + 6x^2$, leidke $f^{(10)}$

(b) $f(x) = \sin x$, leidke $f^{(13)}$

(d) $f(x) = \tan x$, leidke f''

Ülesanne 11.15. Leidke nõutud kõrgemat järku tuletised, kui funktsioon $u = u(x)$ on vajalik arv kordi diferentseeruv.

(a) $f(x) = u(x^2)$, leidke f''

(c) $f(x) = u(x)^2$, leidke f'''

(b) $f(x) = u(e^x)$, leidke f'''

(d) $f(x) = \frac{u(x^2)}{x}$, leidke f''

Ülesanne 11.16. Arvutage nõutud kõrgemat järku tuletise väärtus.

(a) $f''' \left(\frac{\pi}{4} \right)$, kui $f(x) = \cos^2 x$

(b) $f^{(4)}(2)$, kui $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$

Ülesanne 11.17. Leidke

(a) $\frac{d^2 y}{dx^2}$, kui $y = \frac{\ln x}{x}$

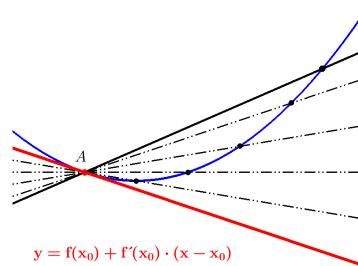
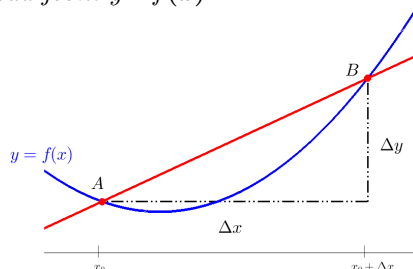
(b) $\frac{d^2 p}{dq^2}$, kui $p = qe^{q^2}$

(c) $\frac{d^3 s}{dt^3}$, kui $s = \frac{t}{2 + 3t}$

11.4 Joone puutuja ja normaal

Definitsioon 11.1

Joone **puutujaks** punktis A nimetatakse sirget, mis on lõikaja AB piirseisuks, kui punkt B läheneb punktile A mööda joont $y = f(x)$.



Funktsiooni f tuletis $f'(x_0)$ on selle joone puutuja tõus punktis $(x_0, f(x_0))$ ja puutuja võrrand avaldub järgmiselt:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (11.1)$$

Definitsioon 11.2

Joone $y = f(x)$ **normaaliks** (ehk ristsirgeks) punktis $(x_0, f(x_0))$ nimetatakse sirget, mis ristub seda punkti läbiva puutujaga. Joone $y = f(x)$ normaali võrrand punktis $(x_0, f(x_0))$ avaldub järgmiselt

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (11.2)$$

Ülesanne 11.18. Leidke funktsiooni graafiku puutuja ja normaal nõutud punktis $(x_0, f(x_0))$.

(a) $y = x^2 + 2x$ punktis $(2, 8)$

(c) $y = 4 - x^2$ punktis $(3, -5)$

(b) $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x$ punktis $(3, -6)$

(d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ punktis $(-1, \frac{1}{2})$

Ülesanne 11.19. Leidke funktsiooni graafiku puutuja või normaal etteantud tõusuga.

(a) $y = x^2 - 2x$ puutuja, tõusuga 2

(c) $y = (2x - 1)^3$ normaal, tõusuga $-\frac{1}{24}$, $x > 0$

(b) $y = \sqrt{2x - 9}$ puutuja, tõusuga 1

(d) $y = \frac{x^4}{2} + 1$ normaal, tõusuga 4

Ülesanne 11.20. Arvutimängus liiguvad lennukid ekraanil vasakult paremale eeskirja $y = 2 + \frac{1}{x}$ järgi. Lennukite relvadeks on raketid, mida tulistatakse ainult liikumise suunas. Sihtmärgid asuvad x -teljel: $x = 1, 2, 3, 4$. Kas punktist $(1, 3)$ lastud rakett tabab ühte sihtmärkidest?

Ülesanne 11.21. Näidake, et joone $y = x + 2x^2 - x^4$ puutuja punktis $(1, 2)$ on selle joone puutujaks ka punktis $(-1, 0)$.

Ülesanne 11.22. Käiaga terariistu teritades lendavad sädemed mööda käia välispinna puutujat. Leidke punktist $(3, 4)$ lenduva sädeme trajektoori (sirge), kui käi on ringjoone $x^2 + y^2 = 25$ kujuga.

Praktikum 12

Diferentsiaal

12.1 L'Hospitali reegel

Teoreem 12.1

L'Hospitali reegel. Kui mingis protsessis $x \rightarrow a$ (siin $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$)

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \text{ või } \lim |f(x)| = \lim |g(x)| = \infty$$

ja eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

siis selles protsessis kehtib võrdus $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Ülesanne 12.1. Leidke l'Hospitali reegli abil järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 9}{5x^2 - x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^{4x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 6x^3 + 5}{x^4 + 5x^3 - 6}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{4}}{x - 1}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin 6x}{\ln \sin 3x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$,

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$

Ülesanne 12.2. Leidke järgmised piirväärtused.

(a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x}{(\pi - x)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \ln x$

(g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2-} (1 - \sin x) \tan x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x}{1 - \cos x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1+} (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin x$

12.2 Funktsiooni diferentsiaal

Definitsioon 12.1

Olgu antud punktis x diferentseeruv funktsioon f . Anname argumendile x muudu Δx . Korrutist $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni f **diferentsiaaliks** punktis x . Tähistame dy või $df(x)$, seega

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \text{ehk} \quad dy = f'(x)dx. \quad (12.1)$$

Ülesanne 12.3. Leidke funktsioonide diferentsiaalid.

(a) $y = x^5 + 4x$

(d) $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{8x}$

(g) $y = 6x\sqrt{1 - 4x}$

(b) $y = 3x^2 + 6$

(e) $y = xe^x$

(h) $y = \frac{x}{5x + 2}$

(c) $T = \frac{2}{r^5} + 3\pi^2$

(f) $R = \sqrt{\frac{6u}{1 + 2u}}$

(i) $y = \frac{3x + 1}{\sqrt{2x - 1}}$

Ülesanne 12.4. Arvutage funktsioonide diferentsiaalid ette antud väärtustel.

(a) $y = 7x^2 + 4x$, $x = 4$, $\Delta x = 0,2$

(d) $f(x) = x\sqrt{1+4x}$, $x = 12$, $\Delta x = 0,06$

(b) $y = (x^2 + 2x)^3$, $x = 7$, $\Delta x = 0,02$

(e) $y = \frac{x}{\sqrt{6x-1}}$, $x = 3,5$, $\Delta x = 0,025$

(c) $y = (x^2 + 1)^2$, $x = 1$

(f) $f(x) = \tan x$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$

12.3 Funktsiooni muudu ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis võime funktsiooni f muudu Δf asemel leida funktsiooni f diferentsiaali df ,

$$\Delta f \approx df \quad \text{ehk} \quad f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 12.5. Avaldage ringi pindala S raadiuse funktsioonina. Leidke selle funktsiooni muut ΔS ning diferentsiaali definitsiooni põhjal funktsiooni diferentsiaal dS . Leidke suurus, mille võrra erinevad funktsiooni muut ja diferentsiaal.

Ülesanne 12.6. Arvutage, kui palju ligikaudu suureneb kera pinna pindala, kui raadiust pikendada 50 sentimeetrilt 51 sentimeetrini.

Ülesanne 12.7. Arvutage ligikaudu, kui palju on vaja värvi, et katta 55 m raadiusega poolkera-kujuline klaasist kuppel 0,5 mm paksuse värvikihiga.

Ülesanne 12.8. Ilmajaam ripub raadiusega 3,5 m kerakujulise õhupalli otsas. Õhupall kattub ühtlase jää kihiga, mille paksus on 1,2 mm. Leidke jää ligikaudne ruumala.

12.4 Funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine

Kui Δx on küllalt väike, siis

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ülesanne 12.9. Arvutage ligikaudsed väärtused.

(a) $\sqrt{1,08}$

(d) $\sin 46^\circ$

(g) $\sqrt[3]{1,02}$

(i) $\arctan 1,05$

(b) $\sqrt{15,93}$

(e) $\log 11$

(h) $\sqrt{\frac{2,92^2 - 5}{2,92^2 + 7}}$

(c) $(3,02)^5$

(f) $e^{0,1}$

Ülesanne 12.10. Esitage ligikaudne valem funktsiooni väärtuse arvutamiseks etteantud punkti a ümbruses ning arvutage saadud valemi põhjal funktsiooni väärtus kohal b .

(a) $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 8}$, $a = 2$, $b = 1.92$

(b) $f(x) = x^2(x+1)^4$, $a = -2$, $b = -1.87$

Ülesanne 12.11. (B) Inimese ellujäämise tõenäosus y põletushaavade korral $x\%$ kehast on ligikaudselt esitatav valemiga $y = \frac{300}{0,0005x^2 + 2} - 50$. Esitage y ligikaudse arvutamise valem kohal $x = 50\%$. Arvutage saadud valemi põhjal inimese ellujäämise tõenäosus y , kui kehal on põletushaavu 45%.

Praktikum 13

Tuletise rakendused. Funktsiooni uurimine

13.1 Tuletis kui protsessi muutumise kiirus

Ülesanne 13.1. Naftatankeris tekib ringikujuline leke, kus vee pinnal olev õliringi raadius r suureneb kiirusega 10 m minutis. Kui kiiresti suureneb reostatud ala (ringi pindala) hetkel, kui $r = 25$ m?

Ülesanne 13.2. Kerakujulisse õhupalli pumbatakse õhku fikseeritud kiirusega 20 cm³/min. Kui kiiresti suureneb kera raadius r , kui enne õhu juurde pumpamist $r = 6$ cm?

Ülesanne 13.3. Silindri kõrgus h suureneb kiirusega 7 m/s ja aluse raadius r suureneb 3 m/s. Kui kiiresti suureneb silindri ruumala, kui $h(0) = 5$ m ja $r(0) = 6$ m?

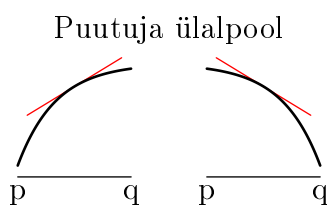
13.2 Kasvamis- ja kahanemispiirkonnad, kumerus- ja nõgususpiirkonnad

Teoreem 13.1

Olgu funktsioon f diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f'(x) > 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kasvav** selles vahemikus, ja kui $f'(x) < 0$ iga argumendi väärtuse $x \in (a, b)$ korral, siis funktsioon f on **kahanev** selles vahemikus.

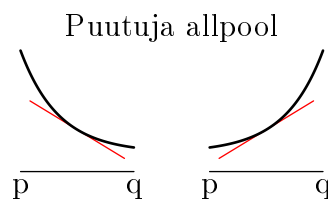
Definitsioon 13.1

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **kumeraks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub ülalpool graafikut.



Definitsioon 13.2

Funktsiooni $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse **nõgusaks** vahemikus (a, b) , kui igas punktis $x \in (a, b)$ funktsiooni graafiku puutuja asub allpool graafikut.

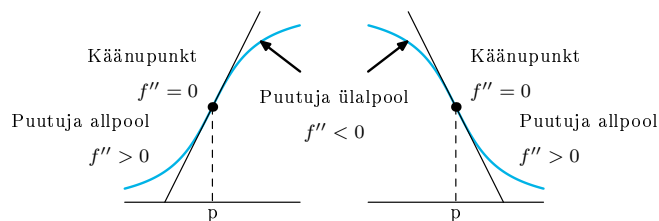


Teoreem 13.2

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv vahemikus (a, b) . Kui $f''(x) < 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **kumer** selles vahemikus. Kui $f''(x) > 0$ iga argumendi $x \in (a, b)$ korral, siis f on **nõgus** selles vahemikus.

Definitsioon 13.3

Olgu funktsioon f diferentseeruv vähemalt vahemikes (a, c) ja (c, b) ning pidev punktis c . Kui funktsioon f on kumer vahemikus (a, c) ja nõgus vahemikus (c, b) (või nõgus vahemikus (a, c) ja kumer vahemikus (c, b)), siis punkti c nimetatakse **käänupunktiks**.



Ülesanne 13.4. Leidke järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemiskiirkonnad.

- (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$ (c) $f(x) = x - \sin x$ (e) $f(x) = \arccos(1 + x)$
 (b) $f(x) = 8x^2 - x^4$ (d) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ (f) $f(x) = xe^{-x}$, kus $x > 0$

Ülesanne 13.5. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute $y = f(x)$ kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

- (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ (c) $f(x) = \arctan x - x$ (f) $f(x) = x^3 - 6x^2$
 (b) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ (d) $f(x) = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ (g) $f(x) = \ln(1 + x^2)$
 (e) $f(x) = e^{-x^2}$ (h) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2$

Ülesanne 13.6. Skitseerige pidevate funktsioonide $y = f(x)$ graafikud, millel on nimetatud omadused.

- (a) $f(0) = -1$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f'(x) < 0$ ja $f''(x) > 0$, kui $x > 0$ (c) $f(0) = 1$; $f'(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral; $f''(x) < 0$, kui $x < 0$; $f''(x) > 0$, kui $x > 0$
 (b) $f(1) = 0$; $f'(x) > 0$ ja $f''(x) < 0$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral (d) $f(-1) = 0$, $f(2) = 2$; $f'(x) < 0$, kui $x < -1$; $f'(x) > 0$, kui $x > -1$; $f''(x) < 0$, kui $0 < x < 2$; $f''(x) > 0$, kui $x < 0$ või $x > 2$

13.3 Ekstreemumid

Definitsioon 13.4

Öeldakse, et funktsioonil $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, on punktis (kohal) $a \in X$ **lokaalne maksimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \leq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonil f on punktis (kohal) a **lokaalne miinimum**, kui leidub selle punkti ümbrus $(a - \delta, a + \delta)$, $\delta > 0$, nii et

$$f(x) \geq f(a), \quad \text{iga } x \in X \cap (a - \delta, a + \delta) \text{ korral.}$$

Definitsioon 13.5

Funktsiooni f määramispiirkonna punkte, kus $f'(x) = 0$ ja punkte, kus funktsioon f ei ole diferentseeruv, nimetatakse funktsiooni f **kriitilisteks punktideks**. Punkte c , kus $f'(c) = 0$, nimetatakse **statsionaarseteks punktideks**.

Lause 13.1

Olgu funktsioon f kaks korda diferentseeruv punktis c . Siis funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne maksimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) < 0,$$

funktsioonil f on argumenti väärtusel c **lokaalne miinimum**, kui

$$f'(c) = 0 \text{ ja } f''(c) > 0.$$

Ülesanne 13.7. Leidke järgmiste funktsioonide lokaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^3 - 3x$

(e) $f(x) = x \ln^2 x$

(b) $f(x) = 8x^2 - x^4$

(f) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2}$

(c) $f(x) = x \ln x$

(g) $f(x) = x - \arctan x$

(d) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 8}$

Funktsiooni **globaalsed ekstreemumid** on funktsiooni suurim ja vähim väärtus mingis piirkonnas.

Globaalsete ekstreemumite leidmine:

1. Leiame kõik lokaalsed ekstreemumid.
2. Arvutame funktsiooni väärtused piirkonna otspunktides (kui tegemist on lõiguga).
3. Saadud funktsiooni väärtustest suurim on globaalne maksimum ja väiksem on globaalne miinimum.

Ülesanne 13.8. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 3, x \in [0, 5]$

(d) $f(x) = \arccos x$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1, x \in [-2, 3]$

(e) $f(x) = e^{-x^2}$

(c) $f(x) = x - \ln x, x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$

(f) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

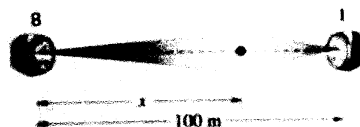
13.4 Optimeerimine

Ülesanne 13.9. Risttahukakujuline karp on tehtud nii, et on võetud 12×8 mõõtmetega papist ristkülik, lõigatud igast nurgast välja $x \times x$ ruut ning keeratud vastavad servad üles. Koostage karbi ruumala arvutamiseks funktsioon, mis sõltub argumentist x . Skitseerige ruumala $V = V(x)$ graafik. Leidke x väärtus nii, et sellise karbi ruumala oleks suurim.

Ülesanne 13.10. Lennukompanii lubab pardale käsipagasi, mille laiuse, kõrguse ja pikkuse summa ei ületa 1,2 meetrit. Kui koti laiuse ja pikkuse suhe on 2,5, siis mis mõõdus koti ruumala oleks suurim?

Ülesanne 13.11. (B) Katsed näitavad, et kui inimene köhib, siis õhu kiirus kõris on $v = kr^2(a-r)$, kus a on kõri raadius normaalasendis ja k on konstant. Leidke r väärtus, mille korral kiirus v on suurim.

Ülesanne 13.12. (F) Valgusallika valgustihedus mingis punktis võrdub valgusallika tugevusega jagatud kauguse (valgusallikast) ruuduga.



Kui 8 ja 1 valgustugevuse ühikuga valgusallikad asuvad üksteisest 100 m kaugusel, siis millises punktis nende vahel on valgustihedus kõige väiksem? Näpunäide: valgustihedused liidetakse.

Ülesanne 13.13. (K) Teatud kemikaali reageerimiskiirus R mg/s sõltub kemikaali hulgast m mg. Leidke kogus m , et reageerimiskiirus R oleks maksimaalne, kui $R = 12\sqrt{m}(27 - m)$.

13.5 Graafiku asümptoodid

Definitsioon 13.6

Sirget $x = a$ nimetatakse funktsiooni f graafiku **püstasümptoodiks**, kui

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = -\infty \quad \text{või} \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = -\infty.$$

Definitsioon 13.7

Sirget

$$y = ax + b, \quad a \neq 0 \quad (13.1)$$

nimetatakse funktsiooni f graafiku parempoolseks (vasakpoolseks) **kaldasümptoodiks**, kui selle sirge ja funktsiooni graafiku vaheline kaugus läheneb lõpmatus protsessis nullile, mis tähendab, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \right). \quad (13.2)$$

Parempoolse (vasakpoolse) **kaldasümptoodi** $y = ax + b$ võrrandi saamiseks leitakse piirväärtused

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad \left(a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \right),$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \left(b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) \right).$$

Kaldasümptoot puudub, kui piirväärtus on lõpmatus.

Ülesanne 13.14. Leidke järgmiste funktsioonide graafikute asümptoodid.

(a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

(d) $f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$

(f) $f(x) = 2x - \frac{\cos x}{x}$

Ülesanne 13.15. Joonestage järgmiste funktsioonide graafikud iseloomustavate andmete põhjal.

(a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1-x^2}{2}}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

(b) $f(x) = \frac{4(x+1)}{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{(1+\ln x)^2}{2}$

(f) $f(x) = \sqrt{|x^2 - 2x|}$

(g) $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

Ülesanne 13.16. (F) Eeldades lihtsustatult, et vihmapiisk on kerakujuline ja langedes piisa raadius väheneb ühest kuni r_0 millimeetrini, siis piisa kiirus avaldub valemiga

$$v = k \left(r - \frac{1}{r^3} \right) \quad \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Skitseerige kiiruse graafik juhul, kui $k = 1$.

Praktikum 14

Määramata integraal

14.1 Määramata integraali mõiste

Definitsioon 14.1

Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f **alg-funktsiooniks** vahemikus (a, b) , kui

$$F'(x) = f(x)$$

iga $x \in (a, b)$ korral.

Definitsioon 14.2

Funktsiooni f kõikide algfunktsioonide üldavaldist $F(x) + C$, kus $C \in \mathbb{R}$ on suvalise konstandi tähis, nimetatakse funktsiooni f **määramata integraaliks**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ülesanne 14.1. Veenduge, et järgmised valemid kehtivad.

(a) $(\int f(x) dx)' = f(x)$

(b) $\int f'(x) dx = f(x) + C$

(c) $\int d f(x) = f(x) + C$

Ülesanne 14.2. Leidke järgmiste funktsioonide algfunktsioonid.

(a) $12x^5 + 6x$

(b) $4\sqrt{x} + 3$

(c) $\frac{5}{2}x^{3/2}$

(d) $3(R^2 + 1)^2(2R)$

Ülesanne 14.3. Miks on nii, et $(x + 5)^3$ on funktsiooni $3(x + 5)^2$ algfunktsiooniks, aga $(2x + 5)^3$ ei ole funktsiooni $3(2x + 5)^2$ algfunktsiooniks?

14.2 Määramata integraali leidmine

Valem 14.1

Integreerimise põhivalemid

(1) $\int 0 dx = C$

(5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

(9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

(2) $\int dx = x + C$

(6) $\int e^x dx = e^x + C$

(10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

(3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1$

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

(4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

(8) $\int \cos x dx = \sin x + C$

(12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Ülesanne 14.4. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{y^3}{3} dy$

(c) $\int 5x\sqrt{x} dx$

(f) $\int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{2}{t^2} \right) dt$

(b) $\int \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

(d) $\int \sqrt{x}(x^2 - 5x) dx$

(g) $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx$

(e) $\int (2x^{-2/3} + 3^{-2}) dx$

$$(h) \int \frac{3x^2 - 4x + 5\sqrt{x}}{x^2} dx \quad (i) \int \frac{x^2 - 2x + \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Ülesanne 14.5. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int (2^x 5^x + e) dx \quad (b) \int (e^x + \ln 2)^2 dx \quad (c) \int \frac{dx}{e^x} \quad (d) \int \frac{2^x}{4^x} dx$$

Ülesanne 14.6. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \quad (c) \int \sqrt{1 + \frac{x^2 + x^4}{1 - x^4}} dx \quad (d) \int \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2 - 2x^2}} dx$$

$$(b) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

Valem 14.2

Trigonomeetriselised seosed

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Ülesanne 14.7. Leidke järgmised integraalid

$$(a) \int (2 \cos^2 x - \cos 2x) dx \quad (c) \int \tan^2 x dx \quad (e) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$(b) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx \quad (d) \int (\sin \alpha + 3 \cos(\pi + x)) dx$$

14.3 Diferentsiaali märgi alla viimine

Valem 14.3

$$(12.1) f'(x) dx = d f(x) \quad (12.4) dx = \frac{1}{a} d(ax + b) \quad (12.6) \frac{dx}{x} = d \ln |x|$$

$$(12.2) dx = d(x + b) \quad (12.5) x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}, \quad (12.7) \cos x dx = d \sin x$$

$$(12.3) dx = \frac{1}{a} d(ax) \quad n \neq -1 \quad (12.8) \sin x dx = -d \cos x$$

Ülesanne 14.8. On antud funktsiooni diferentsiaal. Leidke see funktsioon.

$$(a) 3 dx \quad (c) 2\sqrt{x} dx \quad (e) -\frac{3}{x} dx \quad (g) e^2 x dx$$

$$(b) x dx \quad (d) \frac{dx}{x^3} \quad (f) \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (h) \frac{dx}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

Ülesanne 14.9. Leidke järgmised integraalid.

$$(a) \int \cos(x + 2) dx \quad (c) \int (3x - 2)^7 dx \quad (e) \int e^{-2x+8} dx \quad (g) \int \frac{dx}{\cos^2(2x - 5)}$$

$$(b) \int \sin 3x dx \quad (d) \int \sqrt[3]{7 - 2x} dx \quad (f) \int \frac{dx}{3x + 5} \quad (h) \int \sin^2 x dx$$

14.4 Muutujavahetus

Lause 14.1

Kui $u = \varphi(x)$ on diferentseeruv funktsioon muutumispiirkonnaga U ja f on pidev määramispiirkonnas U , siis kehtib **muutujavahetuse valem**

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(u) du. \quad (14.1)$$

Ülesanne 14.10. Leidke järgmised integraalid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 5}} & \text{(c)} \int x^2 e^{x^3} dx & \text{(e)} \int \frac{\ln x^3}{2x} dx \\ \text{(b)} \int \frac{3\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}} & \text{(d)} \int \frac{2x+7}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{(f)} \int \frac{dx}{x \ln x} \end{array}$$

Ülesanne 14.11. Leidke järgmised integraalid.

$$\text{(a)} \int \cos^2 x \sin x dx \quad \text{(b)} \int \tan x dx \quad \text{(c)} \int \cos^3 x dx \quad \text{(d)} \int \tan^3 x dx$$

Ülesanne 14.12. Leidke järgmised integraalid.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int \frac{e^{3x}}{5 - e^{3x}} dx & \text{(e)} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} & \text{(i)} \int \frac{4z - 4}{\sqrt{z^2 - 2z}} dz \\ \text{(b)} \int \frac{2x}{x^4 + 3} dx & \text{(f)} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{2 + \cos^2 x}} dx & \text{(j)} \int (x^2 + 4x + 4)^{1/3} dx \\ \text{(c)} \int \frac{x^2}{x^2 + 5} dx & \text{(g)} \int x \cos x^2 \sin^2 x^2 dx & \text{(k)} \int (x^2 - x) \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right)^8 dx \\ \text{(d)} \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} & \text{(h)} \int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln \ln x)} & \end{array}$$

Ülesanne 14.13. (IT) Karpe kokkupaneev robot peab avaldama jõudu $F = 6 \int e^{\sin(\pi t)} \cos(\pi t) dt$ N, kus t on aeg sekundites. Milline funktsioon $F = F(t)$ tuleb lisada arvuti programmi, kui $t = 1.5$ s korral peab jõud $F = 0$?

Ülesanne 14.14. (Maj) Ettevõtte andmed näitavad, et x generaatori tootmisel muutub päevase kasumi p (eurodes) kiirus ligikaudu seaduse $\frac{dp}{dx} = \frac{600(30-x)}{\sqrt{60x-x^2}}$ alusel. Leidke x generaatori tootmise kasum p , kui null generaatori tootmisel saadakse 5000 eurot kahjumit.

Ülesanne 14.15. Leidke järgmised integraalid märgitud muutujavahetusega.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int x\sqrt{1-x} dx, \quad t = \sqrt{1-x} & \text{(d)} \int \frac{dx}{\sin 2x}, \quad t = \tan x \\ \text{(b)} \int x^3\sqrt{1-x^2} dx, \quad t = \sqrt{1-x^2} & \text{(e)} \int \tan^3 x dx, \quad t = \cos x \\ \text{(c)} \int \sqrt{1-x^2} dx, \quad x = \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \text{(f)} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}, \quad x = t - \frac{1}{t}, \quad t > 0 \end{array}$$

Ülesanne 14.16. Leidke sobiva muutujavahetusega järgmised integraalid.

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} \quad \text{(c)} \int \frac{3\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx \quad \text{(d)} \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}} dx$$

15.1 Ositi integreerimine

Lause 15.1

Olgu funktsioonid u ja v mingis intervallis X diferentseeruvad ja eksisteerigu integraal

$$\int u'(x)v(x) dx.$$

Siis eksisteerib ka integraal

$$\int u(x)v'(x) dx$$

ja kehtib võrdus

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx. \quad (15.1)$$

Võrdust (15.1) nimetatakse **määramata integraali ositi integreerimise valemiks**.

Kuna $u'(x)dx = du$ ja $v'(x)dx = dv$, siis esitatakse see võrdus sageli kujul

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (15.2)$$

Ülesanne 15.1. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int x e^x dx$

(d) $\int x 3^{-x} dx$

(g) $\int \ln x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(e) $\int \arctan x dx$

(h) $\int \ln(x^2 + 1) dx$

(c) $\int x \sin(2x + 1) dx$

(f) $\int \arcsin x dx$

(i) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx$

Ülesanne 15.2. Leidke järgmised integraalid ositi integreerimise valemi mitmekordsel rakendamisel.

(a) $\int x^2 \sin x dx$

(c) $\int x^3 e^{-2x} dx$

(e) $\int e^{2x} \cos x dx$

(b) $\int x^3 e^x dx$

(d) $\int e^x \sin x dx$

(f) $\int \sin \ln x dx$

Ülesanne 15.3. (K) Et leida teatud tüüpi molekulide keskmine läbimõõt, tuleb leida integraal

$$\int x^3 e^{-x^2/8} dx.$$

Leidke antud integraal.

Ülesanne 15.4. Leidke viga järgmises lahenduskäigus. Et $e^{-x}e^x = 1$, siis $\int dx$ on võimalik integreerida ositi, võttes $u = e^{-x}$ ja $dv = e^x dx$. Siis $du = -e^{-x} dx$ ja $v = e^x$ ning ositi integreerimise valemist saame

$$\int dx = e^{-x}e^x + \int e^{-x}e^x dx \quad \text{ehk} \quad \int dx = 1 + \int dx.$$

Pärast ühesuguste integraalide koondamist saame vastuolu: $0 = 1$.

15.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Definitsioon 15.1

Kui polünoomi $P(x)$ aste on väiksem polünoomi $Q(x)$ astmest, siis ratsionaalfunktsiooni $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse **lihtmurruks**, vastasel korral aga **liigmurruks**.

Valem 15.1

Lihtmurru osamurdudeks lahutamise eeskiri.

Olgu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd. Kui

$$Q(x) = a(x - x_1)^k(x - x_2)^l \dots (x^2 + px + q)^m \dots$$

(kus ruutpolünoomidel ei ole reaalseid nullkohti), siis kehtib võrdus

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k} + \frac{B_1}{x - x_2} + \dots + \frac{B_l}{(x - x_2)^l} + \dots \\ \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_mx + D_m}{(x^2 + px + q)^m} + \dots,$$

kus konstandid $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_l, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m, \dots$ on mingid reaalarvud.

Ülesanne 15.5. Lahutage ratsionaalmurrud osamurdude summaks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x+3}{(x-1)(x+1)} dx$

(e) $\int \frac{dt}{t^3 - t^2}$

(i) $\int \frac{2}{x^4 - x^2} dx$

(b) $\int \frac{x-2}{x(x+1)} dx$

(f) $\int \frac{2}{x^2(x^2-1)} dx$

(j) $\int \frac{(x-2)(x+2)}{x^3(x-1)} dx$

(c) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

(g) $\int \frac{y-9}{2y^2-3y+1} dy$

(k) $\int \frac{x+4}{x(x^2+2x+2)} dx$

(d) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx$

(h) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(l) $\int \frac{16x+32}{x^4-16} dx$

Ülesanne 15.6. Miks ei saa integraali $\int \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} dx$ leidmisel kirjutada

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}?$$

Ülesanne 15.7. Eraldage murru täisosa, lahutage lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int \frac{x^2+3}{x^2+3x} dx$

(b) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$

(c) $\int \frac{x^3+x+2}{(x-1)(x+1)} dx$

(d) $\int \frac{x^3+4x^2}{x^2+3x+2} dx$

Ülesanne 15.8. Leidke järgmised integraalid

(a) $\int \frac{\sin 2x}{(3 - \sin x)^3} dx$

(d) $\int \frac{2r^3}{r^4 + 2r^2 + 1} dr$

(g) $\int \frac{x^2+4x+5}{(x+2)^3} dx$

(b) $\int \frac{2x^3+3x-5}{(x^2+x-2)^2} dx$

(e) $\int \frac{x+1}{x^3-1} dx$

(h) $\int \frac{3x+4}{x^2+2} dx$

(c) $\int \frac{2x^3+x^2+8x+10}{(x^2+1)(x^2+6x+10)} dx$

(f) $\int \frac{x^3+1}{x(x^2-1)} dx$

(i) $\int \frac{x+4}{x^2+2x+2} dx$

Praktikum 16

Diferentsiaalvõrrandid

16.1 Harilikud diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 16.1

Diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles on otsitavaks ühe või mitme muutuja funktsioon ning see võrrand seob otsitavat funktsiooni ja tema tuletisi sõltumatute muutujatega.

Definitsioon 16.2

Harilikuks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav funktsioon on ühe muutuja funktsioon.

Ülesanne 16.1. (B) Olgu mingis levialas küülikute arv hetkel t aastat märgitud funktsiooniga $R = R(t)$. Ühendage vastav diferentsiaalvõrrand vastava kirjeldusega (igale olukorrale vastab ainult üks diferentsiaalvõrrand).

- | | |
|---|----------------------------------|
| (a) Küülikute arv on konstantne | (a) $R = 0$ |
| (b) Igal aastal sünnib 10 uut küülikut | (b) $\frac{dR}{dt} = 10 R$ |
| (c) Keskmiselt toodab iga küülik 10 uut küülikut aastas | (c) $\frac{dR}{dt} = 10$ |
| (d) Igal aastal toodab iga küülik 10 küülikut juurde, kuid 100 saab surma | (d) $\frac{dR}{dt} = 0$ |
| (e) Levialas küülikuid ei ole | (e) $\frac{dR}{dt} = 10 R - 100$ |

16.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend

Definitsioon 16.3

Hariliku diferentsiaalvõrrandi lahendiks intervallis (a, b) nimetatakse selles vahemikus määratud funktsiooni, mis on selles intervallis diferentseeruv ning mille asetamine võrrandisse otsitava funktsiooni asemele muudab võrrandi samasuseks sõltumatu muutuja suhtes selles intervallis.

Ülesanne 16.2. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y' = 2x$ lahendid?

- (a) $y = x^2$ (b) $y = x^2 + 1$ (c) $y = x^2 - 0.5$ (d) $y = (5x)^2$

Ülesanne 16.3. Millised funktsioonid on diferentsiaalvõrrandi $y'' - 3y' + 2y = 0$ lahendid?

- | | | |
|--------------------|------------------|-------------------------|
| (a) $y = e^x$ | (d) $y = 4e^x$ | (g) $y = e^{2x} - 3$ |
| (b) $y = e^{-x}$ | (e) $y = -7e^x$ | (h) $y = e^x + e^{2x}$ |
| (c) $y = e^{0.5x}$ | (f) $y = e^{2x}$ | (i) $y = 2e^x - e^{2x}$ |

Ülesanne 16.4. Näidake, et antud diferentsiaalvõrrandi lahend on vastav funktsioon. Siin C, C_1, C_2, C_3 on suvalised reaalarvud.

(a) $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2, y = (Cx)^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$

(b) $y'' = x + \sin x, y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

(c) $y'' - y' = x, y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$

(d) $y' \tan x - y = 1, y = C \sin x - 1$

(e) $xy' = y \ln \frac{y}{x}, y = x e^{Cx+1}$

(f) $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}$

(g) $(y')^2 - y' - xy' + y = 0, y = Cx + C - C^2$

(h) $y''' + \frac{3}{x}y'' = 0, y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3$

16.3 Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 16.4

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x)dx + g(y)dy = 0.$$

Eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tuleb leida määramata integraalid ja lahendid saadakse (üldjuhul ilmutamata kujul) võrdusega

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C,$$

millest määratakse funktsioonid $y = y(x)$ või $x = x(y)$.

Ülesanne 16.5. Leidke antud eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid. Joonistage mõned integraaljooned.

(a) $dy = 2dx$

(c) $dy = \frac{dx}{x}$

(e) $y' = x^4$

(f) $yy' - x = 5$

(b) $dy = \cos x dx$

(d) $dy = e^x dx$

(g) $yy' = 1$

Ülesanne 16.6. Leidke eraldatud muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$\cos x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

lahend algtingimusel $y(\pi) = 1$.

Praktikum 17

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

17.1 Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 17.1

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0.$$

Eralduvate muutujatega võrrandi lahendamiseks teisendatakse see eraldatud muutujatega võrrandiks

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0.$$

Eraldi tuleb analüüsida punktihulki, kus $f_2(x) = 0$ või $g_1(y) = 0$. Need võivad anda lisalahendeid.

Ülesanne 17.1. Leidke eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandite üldlahendid.

(a) $xy' = x + 1$

(e) $x(yy' - x + 1) = -1$

(i) $x(x + 1)y' + y = y^2$

(b) $y' = \frac{1}{y}$

(f) $(x + 1)dy + (2 - y)dx = 0$

(j) $(1 + x^2)dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(c) $y' = 2\sqrt{y}$

(g) $y(x - 1)y' - 1/(y + 1) = 0$

(k) $\sqrt{1 - x^2}dy - \sqrt{1 - y^2}dx = 0$

(d) $xy' = y + 1$

(h) $xy' = y(y - 1)$

(l) $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$

Definitsioon 17.2

Ülesannet, milles otsitakse võrrandi $y' = f(x, y)$ sellist lahendit $y = y(x)$, mis rahuldab algtingimust $y(x_0) = y_0$, nimetatakse **Cauchy ülesandeks** või ka **algtingimusega ülesandeks**.

Ülesanne 17.2. Leidke algtingimusega ülesande lahend.

(a) $y(x^2 - 1)y' = xy^2 + x$, $y(2) = -1$

(d) $yxdy + (x^2 - 1)dx = 0$, $y(1) = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$, $y(0) = 0$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$, $y(0) = 1$

(c) $y^2y' + 2x = 1$, $y(2) = -1$

17.2 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 17.3. (Maj) Pangaarvel olev raha teenib intresse. Eeldades, et raha hulga R kasvamise kiirus on võrdeline raha hulgaga pangaarvel antud ajamomendil t , väljendage see seos diferentsiaalvõrrandi abil. Leidke selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

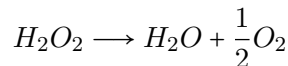
Ülesanne 17.4. (B) Olgu $y(t)$ teatud bakterite arv ajamomendil t . Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k y,$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne. Leidke bakterite arvu $y(t)$ üldavaldis, kui ajahetkel $t = 0$ on meil u. 10^7 bakterit.

Ülesanne 17.5. (B) Katseklaasis oli esialgselt N_0 bakterit. Ühe tunni pärast ($t = 1$) oli bakterite hulk $\frac{3}{2}N_0$. Eeldades, et bakterite kasvamise kiirus on võrdeline bakterite arvuga antud ajahetkel, leidke, kui kaua võtab aega, et bakterite arv kolmekordistuks.

Ülesanne 17.6. (K) Esimest järku reaktsiooni integraalne kiirusevõrrand. Vesinikperoksiidi lagunemine



on esimest järku reaktsioon, st vastav kineetiline võrrand on kujul

$$\text{lagunemise kiirus} = -\frac{d[H_2O_2]}{dt} = k[H_2O_2] \frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{min}},$$

kus $[H_2O_2] = [H_2O_2]_t$ on aine molaarne kontsentratsioon ajahetkel t ning k on kiiruskonstant. Olgu $k = 0,51 \text{ min}^{-1}$ ja aine algkontsentratsioon $[H_2O_2]_0 = 10 \text{ mol} \cdot \text{l}^{-1}$. Leidke H_2O_2 kontsentratsioon aja t funktsioonina ja poolestusaeg $t_{1/2}$ (aeg, mille jooksul kontsentratsioon väheneb pooleni esialgselt).

Ülesanne 17.7. (F) Hubble'i seaduse kohaselt paisub universum kiirusega

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G \rho}{3c^2}} \cdot a,$$

kus a on kaugus kahe vaadeldava objekti vahel ja ρ on universumi energiatihedus. Lahendage erinevatele stsenaariumitele vastavad võrrandid.

- Eeldades, et universum koosneb enamasti ainest, siis $\rho = \frac{k}{a^3}$.
- Kui universum koosneb enamasti kiirgusest, siis $\rho = \frac{k}{a^4}$.
- Kui universum koosneb enamasti tumedast energiast (Einstein), siis $\rho = \text{Const}$.

Ülesanne 17.8. (M) Sotsioloogid kasutavad informatsiooni levimise kohta populatsiooni sees väljendit "sotsiaalne difusioon". Informatsioon ise võib olla kuulujutt, pärimus või uudis uuest tehnilisest leiutisest. Olgu piisavalt suure populatsioonis informatsiooni kuulnud inimeste arv x (hetkel t). Uudise levimise kiirus on võrdeline uudist kuulnud inimeste arvuga korda uudist veel mitte kuulnud inimeste arvuga:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x),$$

kus N on inimeste arv populatsioonis. Olgu t päevade arv, $k = 1/250$ ja kaks inimest on kuulnud kuulujuttu ajahetkel $t = 0$ ning $N = 1000$. Leidke x ajast t sõltuva funktsioonina. Mis hetkeks on mudeli järgi pool elanikkonnast seda kuulujuttu kuulnud?

Ülesanne 17.9. (F) (FKM) Sumbuvate võnkumiste diferentsiaalvõrrandi

$$x''(t) + 2\beta x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

lahendiks on funktsioon kujul $x(t) = A(t)e^{i\omega t}$, kus β, ω, ω_0 on konstandid ja i imaginaarühik.

Leidke lahendis $x(t)$ oleva funktsiooni $A(t)$ kuju ja avaldage ω_0^2 kaudu ω^2 avaldis.

Selleks tuleb asendada lahend koos mõlema tuletisega võrrandisse, saadud võrrandist eraldada reaalk-osa ja imaginaarosa.

Praktikum 18

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

18.1 Esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Definitsioon 18.1

Esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit

$$p_0(x)y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x),$$

kus p_0, p_1 ja f on antud funktsioonid ning lahend $y = y(x)$ on otsitav.

Kui $p_0(x) \neq 0$ iga $x \in (a, b)$ korral, siis saab esimest järku lineaarse võrrandi esitada kujul

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad (18.1)$$

kus p ja f on antud funktsioonid ning lahend y on otsitav.

Ülesanne 18.1. Millised on esimest järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid?

(a) $y = x(y' - x \cos x)$

(c) $y' = 3x^2 + 1$

(e) $y' \ln x + y^2 = xy$

(b) $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

(d) $y' - \sin x = xy^2$

(f) $y'' - xy' = \frac{1}{x}$

18.2 Esimest järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamine

Konstandi varieerimise meetod (Lagrange'i meetod).

1. Lahendame lineaarsele võrrandile (18.1) vastava homogeense võrrandi $y'(x) + p(x)y(x) = 0$. Vastava homogeense võrrandi lahend on

$$y_h = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Võrrandi (18.1) lahenditeks on

$$y = y_h + y_*,$$

kus y_* on võrrandi üks konkreetne lahend.

2. Konkreetse lahendi y_* leiame kujul

$$y_* = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

kus $C(x)$ on otsitav funktsioon. Asetame y_* ja y'_* võrrandisse (18.1) ja leiame $C(x)$.

Ülesanne 18.2. Leidke antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend (erilahend).

(a) $y' - 3\frac{y}{x} = x$

(c) $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

(f) $xy' + x^2 - y = 0$

(b) $\frac{dy}{dx} - y = x^2$

(d) $y' - y \cos x = x^2 e^{\sin x}$

(g) $y' - y = x - 1$

(e) $(1+x^2)y' = 2xy$

(h) $xe^x y' + ye^x = 1$

(i) $y' = \frac{y+1}{x}$

(l) $y' + y = x$

(o) $y' \cos x + y \sin x = 1$

(j) $y' + 2y = 4x$

(m) $x^2 y' + xy = -1$

(p) $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b$

(k) $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

(n) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

(q) $xy' + \frac{y}{x+1} = x, y(1) = 0$

18.3 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 18.3. (F) Newtoni jahtumisseadus. Esimene seadus kehade jahtumise kohta konvektsiooni teel avaldati Isaac Newtoni poolt 28. mail 1701, mis lihtsustatult kõlas “keha soojushulga muutumise kiirus keha pinnahüki kohta on võrdeline keha pinna ja ümbritseva keskkonna temperatuuride vahega.”

Matemaatilisel kirjeldatuna tähendab see järgmist. Olgu vaatluse all keha, mille temperatuur on T . Keha ümbritseva keskkonna temperatuur olgu T_u . Argument on aeg t . Sel juhul võrrand on kujul

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_u), \quad k > 0$$

kus k on mingi konstant. Algtingimus üldkujul on $T(0) = T_0$.

Hetkel, kui kook ahjust võeti, oli tema temperatuur 150°C . Kolm minutit hiljem oli koogi temperatuur 93°C . Kui kaua võtab aega koogi jahtumine temperatuurini 30°C , kui toatemperatuur on 21°C ?

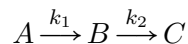
Ülesanne 18.4. (F) Kraadiklaas viiakse soojast 20°C toast õue, kus temperatuur on 5°C . Ühe minuti pärast näitab kraadiklaas 12°C . Kasutades Newtoni jahtumisseadust, vastake järgmistele küsimustele: (a) Palju näitab kraadiklaas kaks minutit pärast õueviimist? (b) Millal näitab kraadiklaas 6°C ?

Ülesanne 18.5. (F) Leidke voolutugevuse $I = I(t)$ avaldis järjestikuses vooluahelas, millesse on lülitatud vooluallikas elektromotoorse jõuga $E(t)$, takistus R ja induktsoonipool induktiivsusega L . Ajamomendil t on pingelangus takistusel $RI(t)$ ja induktsoonipoolil $LI'(t)$, me eeldame, et vooluahel suleti ajamomendil $t = 0$. Kasutades Kirchhoffi seadust saame

$$LI'(t) + RI(t) = E(t).$$

Lahendage võrrand vahelduvvoolu allika korral, mille elektromotoorne jõud $E(t) = a$, kus $a = \text{const.}$

Ülesanne 18.6. (K) Esimest järku keemiliste reaktsioonide protsess on kirjeldatav järgmise skeemiga:



ja modelleeritakse järgmiste võrranditega

$$\frac{d(a-x)}{dt} = -k_1(a-x), \quad \frac{dy}{dt} = k_1(a-x) - k_2y.$$

Aine A kontsentratsioon alghetkel $t = 0$ on a ja ajahetkel t on $a - x$. Aine B tekib ainest A keemilise reaktsiooni käigus ja tema kontsentratsioon alghetkel on 0 ja ajahetkel t on y . Lahendage esimene võrrand, saadud lahend asendage teise võrrandisse, seejärel lahendage saadud lineaarne diferentsiaalvõrrand, kui $k_1 = 0.1$ ja $k_2 = 0.11$.

19.1 Maatriksid

Definitsioon 19.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristikülukukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $m \times n$ maatriksist.

Ülesanne 19.1. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n . Tähistage lühidalt maatriksi tema ütlelemendi kaudu.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(k) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{30} \end{pmatrix}$

(l) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(m) $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(i) $I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(n) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

19.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 19.2

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$ korral.

Maatriksi $A = (a_{ij})$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude üravahetamisel, s.t $A^T = (a_{ji})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ruutmaatriks A on **sümmeetriline**, kui $A^T = A$.

Ülesanne 19.2. Leidke ülesandes 32.1: 1) võrdsed maatriksid, 2) sümmeetrilised maatriksid, 3) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 19.3. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a , b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Definitsioon 19.3

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis maatriksite A ja B **summaks** (**vaheks**) nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t $C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Maatriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse maatriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t $\lambda A = B = (b_{ij})$, kui $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 19.4. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

- | | | | |
|-----------------|--------------------------|---------------|---------------|
| (a) $2A - 3A$ | (d) $-H + 2I^T$ | (g) $A^T - B$ | (j) $F - E$ |
| (b) $3B + 2B^T$ | (e) $A + B$ | (h) $B^T + A$ | (k) $C + D$ |
| (c) $4E^T$ | (f) $C + \frac{1}{2}E^T$ | (i) $E + G$ | (l) $D^T - C$ |

19.3 Maatriksite korrutamine

Definitsioon 19.4

Kui maatriksi A veergude arv n võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i -nda rea elemendid maatriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ maatriks, B on $n \times p$ maatriks, siis C on $m \times p$ maatriks.

Ülesanne 19.5. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Leidke defineeritud korrutised ning esitage vastavad korrutamise valemid.

- | | | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|-------------|------------------|
| (a) AB | (c) $A^T B$ | (e) DC | (g) FE | (i) $B^T C$ | (k) $O^T B$ |
| (b) BA | (d) CD | (f) EF | (h) $F^T E$ | (j) $D^T B$ | (l) $A^T \theta$ |

Ülesanne 19.6. Leidke maatriksite korrutised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ | (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |

Ülesanne 19.7. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

(a) AB

(b) BA

(c) $B^2 - A^2$

(d) $(B - A)^2$

Ülesanne 19.8. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

(a) $A^2 = A$

(b) $B^3 = B$

(c) $C^2 - 4C - 5E = O$

Ülesanne 19.9. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdsus.

19.4 Maatrikstehete omadused

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul **maatrikstehete jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$A + O = A$$

Sel juhul **transponeeritud maatriksite jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis kehtivad järgmised omadused:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$AO = O, OA = O$$

Ülesanne 19.10. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehete.

(a) $\frac{1}{2}EB^T D - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^T E^6 A - \frac{1}{2}BE^4 B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2 AC$

(g) $\frac{3}{2}H^T EAC - \frac{1}{2}H^T AC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^T F I^T - A^T E H$

(j) $I F^T H + H^T E^2 H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^T H$

(l) $AB + F I^T H^T$

(m) $F I^T H^T - E^T H H^T$

(n) $\theta B - A^T O$

(o) $0(CA + AD)$

(p) $0(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 19.11. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 32.1 antud maatriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^T C$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$

(b) $(C^T)^T D = D(C^T)^T C$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(n) $(CD)^T = D^T C^T$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(i) $(BA)^T = A^T B^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(j) $ABA = B^T A^T B^T$

(o) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(k) $(C + D)A^T = CA^T + DA^T$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(l) $B^T(D - C) = B^T D - B^T C$

(p) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$

19.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 19.12. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B₃-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A . Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C . Laost viiakse välja kaks korda sama kogust kaste B . Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T ?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 19.13. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t} .

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P , et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 19.14. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 19.15. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

20.1 Determinandi arvutamine

Definitsioon 20.1

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant.

Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse maatriksi A **determinandi arendamiseks i -nda rea järgi**.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j -nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Kolmandat järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definitsioon 20.2

Ruutmaatriksi A elemendile a_{ij} vastavaks **miinori**ks nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Definitsioon 20.3

Elemendi a_{ij} alamdeterminandiks A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutatist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ülesanne 20.1. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

20.2 Determinantide omadused

Omadus 20.1

1. Matriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda matriksi determinandi väärtust: $|A| = |A^T|$.
2. Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.
5. Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k .
6. Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summaksid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.
7. Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).
8. Sama järku ruutmatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t. $|AB| = |A||B|$.

Ülesanne 20.2. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 20.3. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 20.4. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 20.5. Olgu antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

20.3 Determinantide arendamine

Ülesanne 20.6. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 20.7. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 20.8. Arvutage determinandi väärtus.

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} x^3 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3 + 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^\pi \\ 9999 & -e^\pi & 0 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(1) \begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (m) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

20.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 20.9. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S , kui

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1, 4), B(3, 1), C(2, 6)$

(c) $A(1, 0), B(2, 2), C(4, 3)$

(b) $A(-2, 2), B(1, 5), C(6, -1)$

(d) $A(3, 6), B(10, 1), C(-2, -3)$

Ülesanne 20.10. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V , kui

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $\vec{a} = (4, 0, 0), \vec{b} = (5, 2, 2), \vec{c} = (2, 6, 0)$

(b) $\vec{a} = (2, 0, 0), \vec{b} = (0, 4, 0), \vec{c} = (0, 0, 3)$

(c) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 4, 5), \vec{c} = (6, 0, 7)$

Ülesanne 20.11. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilse seisusse, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ , siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P - \lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^4 x_i$ suhtes.

Ülesanne 20.12. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückeli meetodit, kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

$$(a) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$$

Praktikum 21

Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine

21.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 21.1

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib $AE = A$, $EA = A$, kus E on n -järku ühikmaatriks.

Definitsioon 21.2

Ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit A^{-1} , millega antud maatriksit A korrutades saadakse ühikmaatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Maatriksi korrutamine pöördmaatriksiga on kommutatiivne $AA^{-1} = A^{-1}A$.

Omadus 21.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ülesanne 21.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

(a) $B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 21.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 21.3. Olgu A n -järku ruutmaatriks ja E n -järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 21.4. Olgu A , B ja C pööratavad n -järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 21.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

21.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 21.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Definitsioon 21.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1}

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Ülesanne 21.6. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 21.7. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 21.8. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 21.9. Leidke pöördmaatriksid.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 21.10. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

21.3 Maatriksvõrrandite lahendamine

Olgu maatriksid A, B ja X selliste mõõtmetega, et maatriksvõrrandi lahendamiseks tehtav tehe on teostatav. Olgu maatriksid A ja B teada ning ruutmaatriks A olgu regulaarne. Maatriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Maatriksvõrrandi $AX = B$ korral otsitava X saame

$$X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandi $XA = B$ korral otsitava X saame

$$X = BA^{-1}.$$

Ülesanne 21.11. Lahendage võrrandisüsteemid maatrikskujul.

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 21.12. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(b) X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (g) X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 21.13. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad XR = PQ, \text{ kui } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad KXL = M, \text{ kui } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

21.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 21.14. (F) Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 21.15. (IT) Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. <https://goo.gl/z0Xm14>).

Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dekodeerige järgmised sõnumid.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 21.16. (K) Uue sulami tegemiseks segatakse kokku neli erinevat sulamit, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe).

Esimene sulam sisaldab 80% Cu ja 20% Ni, teine sulam sisaldab 60% Cu, 20% Ni ja 20% Zn.

Kolmas sulam sisaldab 30% Cu, 60% Ni ja 10% Fe, neljas sulam sisaldab 20% Ni, 40% Zn ja 40% Fe. Kui palju on igat sulamit vaja, et lõppsulamis oleks 56 g vaske, 28 g niklit, 10 g tsinki ja 6 g rauda? Koostage ning lahendage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = B$.

Kontrolltöö 2 teemad (kontrolltöö toimub loengu ajal)

1. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal, rakendused

1. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal.
2. Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
3. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
4. L'Hospitali reegel. Funktsiooni diferentsiaali leidmine. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.
5. Funktsiooni uurimine ja graafiku skitseerimine. Kasvamise ja kahanemise piirkonnad, lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

2. Määramata integraal

1. Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
2. Muutujavahetus.
3. Ositi integreerimine.

3. Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid.
2. Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid.

4. Riemanni integraal

1. Riemanni summad, trapetsvalem.
2. Newton-Leibnizi valem.
3. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
4. Sümmeetrilised rajad.

Praktikum 22

Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid

22.1 Maatriksi astak

Definitsioon 22.1

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse maatriksi A **k -järku miinoriks**.

Ülesanne 22.1. Millised alljärgnevatest on (4×4) -maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Definitsioon 22.2

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse $\text{rank } A$ või $r(A)$.

Maatriksi astaku leidmiseks kasutame ridade elementaarteisendusi eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks. Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Ülesanne 22.2. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

22.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \quad (22.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Lineaarvõrrandisüsteem on esitatav maatrikskujul $Ax = b$.

Teoreem 22.1

Kronecker-Capelli teoreem. Lineaarvõrrandisüsteem $Ax = b$ on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem $Ax = b$ on lahenduv parajasti siis, kui $\text{rank } A = \text{rank } L$.

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A|b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend
 $r = n = m$ korral on Crameri peajuht;
 $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).
2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)
 $r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust;
 $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

Ülesanne 22.3. Lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(g) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$

22.3 Crameri valemid

Lause 22.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga** (s.t tundmatute arv n on võrdne võrrandite arvuga m ja $|A| \neq 0$), siis on sellel süsteemil **täpselt üks lahend**.

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga b .

Ülesanne 22.4. Lahendage võrrandisüsteemid Crameri valemite abil.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + -5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z = 4 \end{cases}$

Praktikum 23

Riemanni summad ja numbriline integreerimine

23.1 Riemanni summad

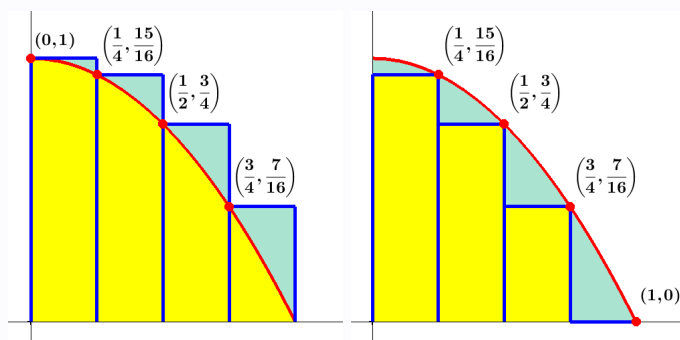
Definitsioon 23.1

Olgu lõigus $[a, b]$ antud funktsioon $y = f(x)$. Vaatleme selles lõigus jaotust $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$. Tähistame iga osalõigu pikkuse $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Valime igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ suvaliselt ühe punkti $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Summat

$$S_n = f(c_1) \Delta x_1 + \dots + f(c_n) \Delta x_n \quad (23.1)$$

nimetatakse funktsiooni f **Riemanni summaks** lõigus $[a, b]$.

Pindala leidmine lõplikke summade abil. Funktsiooni $y = 1 - x^2$ graafiku ja x -telje vahelise ala pindala leidmiseks ligikaudselt leiame vasakpoolsete ja parempoolsete ristkülikute pindalade summana (joonisel).



Ristkülikute alusteks on vastavad osalõigud (pikkustega Δx_i) ja kõrgusteks on funktsiooni väärtused osalõikude vasakpoolses (parempoolses) otspunktis (punktides c_i).

Ülesanne 23.1. Järgnev tabel näitab mudelrongi kiirust esimese 10 sekundi jooksul.

Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)	Aeg (sek)	Kiirus (cm/sek)
0	0	6	28
1	30	7	15
2	56	8	5
3	25	9	15
4	38	10	0
5	33		

Leidke rongi poolt läbitud teepikkus, moodustades 10 osalõiku pikkusega 1 ning summeerides kord vasak-, kord parempoolsete ristkülikute pindalad.

Ülesanne 23.2. Leidke järgmiste joontega ja x -teljega määratud kujundite pindalad ligikaudselt, jagades toodud osalõigud n võrdseks osaks ning summeerides tekkinud ristkülikud. Ristkülikuid saab tekitada erinevat moodi. Valige ise sobiv meetod ja proovige erinevaid võimalusi.

(a) $y = 3x$, $x \in [0, 3]$, $n = 3$ ja $n = 10$

(c) $y = 4x - x^2$, $x \in [1, 4]$, $n = 6$ ja $n = 10$

(b) $y = x^2$, $x \in [0, 2]$, $n = 5$ ja $n = 10$

(d) $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 4]$, $n = 3$ ja $n = 12$

Ülesanne 23.3. Visandage integraalimärgi all olevast funktsioonist graafik ning arvutage integraali väärtus, kasutades tuntud geomeetriliste kujundite pindala leidmise valemeid.

(a) $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$ (b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ (c) $\int_{-1}^1 (1-|x|) dx$ (d) $\int_{-1}^1 \left(1 + \sqrt{1-x^2}\right) dx$

23.2 Numbriline integreerimine

Trapetsvalem.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)),$$

kus $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$.

Simpsoni valem.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots \\ + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)). \end{aligned}$$

Valemit saab kasutada vaid paarisarvulise n korral.

Ülesanne 23.4. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused trapetsvalemiga märgitud osalõikude arvu n korral.

(a) $\int_0^1 (1-x^2) dx$, $n = 3$ (b) $\int_1^4 (1+\sqrt{x}) dx$, $n = 6$ (c) $\int_3^8 \sqrt{1+x} dx$, $n = 5$

Ülesanne 23.5. Kahe alajaama vaheline vahemaa on täpselt 100 m. Alajaamade ühendamiseks vajaminev telefonikaabli pikkus L (arvestades lõtku) arvutatakse valemiga

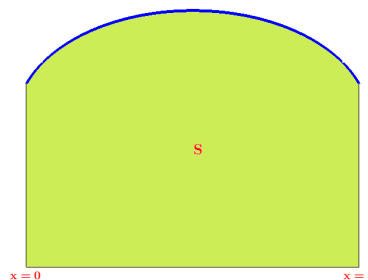
$$L = 2 \int_0^{50} \sqrt{6.4 \cdot 10^{-7} x^2 + 1} dx.$$

Kasutades 10 osalõiku ($n = 10$), arvutage trapetsvalemiga kaabli pikkus L .

Ülesanne 23.6. Arvutage toodud integraalide ligikaudsed väärtused Simpsoni valemiga märgitud osalõikude arvu n korral.

(a) $\int_0^2 (1+x^3) dx$, $n = 2$ (b) $\int_0^8 x^{1/3} dx$, $n = 4$ (c) $\int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx$, $n = 4$

Ülesanne 23.7. Raudteetunneli ristlõige on kujuga, mis tekib ülalt kaarega $y = 4 + \sqrt{1+8x-2x^2}$, alt x -teljega ja külgedelt sirgetega $x = 0$ ja $x = 4$ piiratud alast. Kui tunnel on 100 m pikkune ja kõik muud ühikud on samuti meetrites, siis kui mitu kuupmeetrit tulvavett on võimalik vajaduse korral tunnelisse lasta (eeldame, et tunnelit saab mõlemalt poolt sulgeda)? Arvutage ruumala trapetsvalemiga ja Simpsoni valemiga $n = 8$ jaoks. Kumb tulemus võiks olla täpsem?



Ülesanne 23.8. Lennuki üks tagumistest tiibadest (stabilisaator) on kujuga, mida piirab x -telg ja funktsiooni $y = f(x)$ graafik, kus

$$f(x) = (3x^2 - x^3)^{0.6}.$$

Koostage pindala arvutamiseks integraal. Arvutage lennuki tiiva pindala trapetsvalemiga ja Simpsoni valemiga $n = 6$ osalõigu korral.

Ülesanne 23.9. (F) Uue lennuki tootmiseks on igasse lennuki tiiba vaja konstrueerida kütusemahuti (joonisel näidatud alas), millesse mahub 22240 N kütust tihedusega 6600 N/m³.



Leidke Simpsoni valemiga, kui sügav peab olema kütusemahuti, kui

$$y_0 = 0.457, \quad y_1 = 0.488, \quad y_2 = 0.549, \quad y_3 = 0.579, \quad y_4 = 0.610, \quad y_5 = y_6 = 0.640.$$

Ühikud on meetrites ja lõigu pikkus on siin 0.3048 m.

Ülesanne 23.10. (K) Gaasi paisumisel 2 cm³-st 10 cm³-ni tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$A = \int_2^{10} 500 V^{-1.4} dV$$

Arvutage töö A Simpsoni valemiga 6 osalõigu korral.

Ülesanne 23.11. (IT) Robotkäsi on disainitud liikuma trajektoiril

$$\begin{cases} x(t) = \frac{20}{3} + 0.3t + 3.9t^2 - 2.3t^3 \\ y(t) = \frac{10}{3} + 0.3t + 0.9t^2 - 2.7t^3 \end{cases}$$

Robotkäe poolt esimese 2 sekundiga läbitud teepikkus arvutatakse valemiga

$$s = \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Arvutage läbitud teepikkus s Simpsoni valemiga 6 osalõigu korral. Kirjutage programm üldise ajavahemiku $[t_1, t_2] \subset [0, 2]$ jaoks, kasutades n osalõiku (n on suvaline paarisarv).

Praktikum 24

Määratud integraali arvutamine

24.1 Newton-Leibnizi valem

Teoreem 24.1

Newton-Leibnizi valem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$, siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (24.1)$$

kus F on funktsiooni f suvaline algfunktsioon lõigus $[a, b]$.

Ülesanne 24.1. Arvutage integraalid kasutades Newton-Leibnizi valemit.

(a) $\int_{-3}^2 (2x^2 + 1) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

(b) $\int_{-5}^{-1} \frac{(x+5) dx}{x^2}$

24.2 Määratud integraali omadused

Omadus 24.1

Integraali aditiivsus rajade suhtes. Olgu $c \in (a, b)$. Siis kehtib võrdus

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (24.2)$$

Ülesanne 24.2. Integreerige, kasutades määratud integraali aditiivsuse omadust.

(a) $\int_{-1}^2 |x| dx$

(c) $\int_{-1}^3 |x(x-2)| dx$

(e) $\int_{-1}^2 x \sqrt{(x^2-1)^2} dx$

(b) $\int_0^4 |2-x| dx$

(d) $\int_{-\pi}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} dt$

(f) $\int_{-5}^3 |x^2 + 2x - 3| dx$

Omadus 24.2

Integraali lineaarsus integreeritava funktsiooni suhtes

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \text{kus } \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (24.3)$$

Teoreem 24.2

Määratud integraal sümmeetriliselt paiknevate rajade korral. Olgu funktsioon f pidev lõigus $[-a, a]$.

Kui f on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (24.4)$$

kui f on paaritu funktsioon, siis

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (24.5)$$

Ülesanne 24.3. Leidke integraalid sümmeetriliselt paiknevate rajade korral.

(a) $\int_{-1}^1 (8x^{2021} + \sin x) dx$

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} (x^4 - \cos x) dx$

(c) $\int_{-1}^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2} dx$

24.3 Muutujavahetus määratud integraalis

Teoreem 24.3

Kui g' on pidev lõigus $[a, b]$ ja f on pidev funktsiooni g muutumispiirkonnas, siis muutujavahetusel $u = g(x)$ kehtib võrdus

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Ülesanne 24.4. Arvutage integraalid muutujavahetuse või diferentsiaali märgi alla viimise teel.

(a) $\int_{-1}^0 (x+2)^5 dx$

(d) $\int_{-1}^1 x^3(2x^4 - 5)^6 dx$

(g) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3x+4}$

(e) $\int_{0,1}^e \frac{|\ln 5x| dx}{x}$

(h) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

(c) $\int_0^3 x\sqrt{x^2+1} dx$

(f) $\int_{-\pi/4}^{\pi} \sin 2x \cos^2 2x dx$

(i) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin^3 2x}{(\cos x)^3} dx$

Ülesanne 24.5. Arvutage integraalid märgitud muutujavahetusega.

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}, t = x+1$

(c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, x = \sin t$

(b) $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}, t = \sqrt{1+3x}$

(d) $\int_0^2 \frac{6x}{(1+2x)} dx, t = 1+2x$

Ülesanne 24.6. Integreerige, võttes integreerimisloiguks funktsiooni määramispiirkonna.

(a) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } -1 \leq x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{kui } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos^{-2} x, & \text{kui } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin^{-2} x, & \text{kui } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Kontrolltöö 2 teemad (kontrolltöö toimub loengu ajal)

1. Funktsiooni tuletis, diferentsiaal, rakendused

1. Tuletise leidmine definitsiooni põhjal.
2. Tehetega seotud diferentseerimise reeglid. Liitfunktsiooni tuletise leidmine.
3. Joone puutuja ja normaali võrrandite leidmine.
4. L'Hospitali reegel. Funktsiooni diferentsiaali leidmine. Funktsiooni muudu või funktsiooni väärtuse ligikaudne arvutamine diferentsiaali abil.
5. Funktsiooni uurimine ja graafiku skitseerimine. Kasvamise ja kahanemise piirkonnad, lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid, kumeruse ja nõgususe piirkonnad, käänupunkt.

2. Määramata integraal

1. Integraalid põhilistest elementaarfunktsioonidest (integraalide tabel).
2. Muutujavahetus.
3. Ositi integreerimine.

3. Esimest järku diferentsiaalvõrrandid

1. Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid.
2. Lineaarsed esimest järku diferentsiaalvõrrandid.

4. Riemanni integraal

1. Riemanni summad, trapetsvalem.
2. Newton-Leibnizi valem.
3. Absoluutväärtust sisaldavad avaldised.
4. Sümmeetrilised rajad.

Praktikum 25

Määratud integraali ositi integreerimine

25.1 Ositi integreerimine

Valem 25.1

Kehtib ositi integreerimise valem

$$\int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du.$$

Ülesanne 25.1. Arvutage integraalid ositi integreerimise teel.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx$

(c) $\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$

(e) $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$

(b) $\int_1^e \ln x \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} x^3 \cos \frac{x}{2} \, dx$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx$

25.2 Ratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui ratsionaalfunktsioon $\frac{P(x)}{Q(x)}$ on liigmurd, siis võime polünoomi $P(x)$ jagamisel polünoomiga $Q(x)$ eraldada täisosa polünoomi $T(x)$, nii et kehtib

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Ülesanne 25.2. Eraldage liigmurru täisosa, lahutage saadud lihtmurd osamurdudeks ja integreerige.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{x^2 + 1} \, dx$

(c) $\int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} \, dx$

(e) $\int_0^2 \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 3x + 2} \, dx$

(b) $\int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3x} \, dx$

(d) $\int_2^3 \frac{x^3 + x + 2}{(x-1)(x+1)} \, dx$

(f) $\int_2^3 \frac{x^3 + 1}{x(x^2 - 1)} \, dx$

Ülesanne 25.3. Arvutage integraalid

(a) $\int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} \, dx$

(d) $\int_0^{\pi} e^{-x} \cos 2x \, dx$

(f) $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4} \, dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \, dx$

(g) $\int_1^3 x^x (1 + \ln x) \, dx$

(c) $\int_{-1}^0 (x+4) \sqrt{x^2 + 8x + 7} \, dx$

(e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/3} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} \, dx$

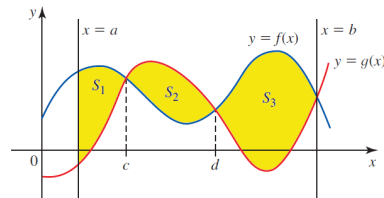
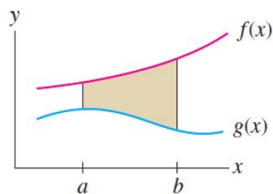
(h) $\int_0^1 x^2 \arctan x \, dx$

26.1 Kõvertrapetsi pindala

Kui f ja g on integreeruvad lõigus $[a, b]$ ning iga kujundi pindala loeme positiivseks (mittenegatiivseks), siis sõltumata f ja g märgist kehtib alati

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Kui funktsioonide f ja g graafikud lõikuvad, siis leitakse lõikepunktid ja arvutatakse kogu pindala osade kaupa.



Ülesanne 26.1. Koostage järgmiste joontega piiratud tasandiliste kujundite pindala arvutamiseks õiged integraalid (või nende summad). Joonise tegemine võib olla abiks.

- | | | |
|---------------------------------|---------------------------------------|--|
| (a) $y = x^2, x + y = 2$ | (c) $y = x^2, y = x^3$ | (e) $y = 4 - x^2, y = -x + 2$ |
| (b) $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0$ | (d) $y = \frac{x^2}{4}, y = 1, y = x$ | (f) $y = \frac{x^3}{3} - x, y = \frac{x}{3}$ |

Ülesanne 26.2. Leidke järgmiste joontega piiratud kujundite pindalad.

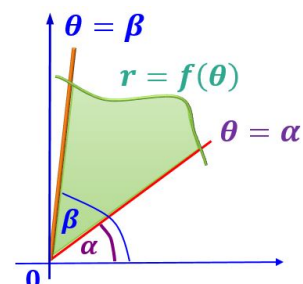
- | | |
|--|--|
| (a) $y = 4x, y = 0, x = 1$ | (g) $y = \frac{3}{x^2}, y = 0, x = 2, x = 3$ |
| (b) $y = x, y = 3 - x, x = 0$ | (h) $y = \sqrt{x - 1}, y = 3 - x, y = 0$ |
| (c) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, x = 0, y = 4 (x > 0)$ | (i) $y = \frac{1}{2}x^5, x = -1, x = 2, y = 0$ |
| (d) $y = 8 - 2x^2, y = 0$ | (j) $y = x^2, y = x^{1/3}$ |
| (e) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$ | (k) $y = \pm\sqrt{x^4(1 - x^3)}$ |
| (f) $y = x^2, y = x^3$ | |

26.2 Kõversektori pindala

Definitsioon 26.1

Läbige nullpunkti kaks sirget, mis moodustavad x -telje positiivse suunaga vastavalt nurgad α ja β .

Kõversektoriks nimetatakse tasandilist kujundit, mis on piiratud nimetatud sirgetega ning pideva mittenegatiivse funktsiooni $r = f(\theta)$ graafikuga, kus nurki mõõdetakse radiaanides.



Lause 26.1

Pideva funktsiooniga $r = f(\theta)$ määratud **kõversektori pindala** avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

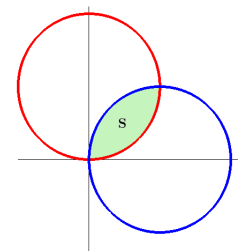
Kahe kõveraga piiratud **kõversektori pindala**, kui $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ avaldub kujul

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)) d\theta.$$

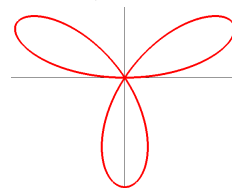
Ülesanne 26.3. Leidke joontega $r = 2 \sin \theta$ (ringjoon), $\theta = \frac{\pi}{4}$ ja $\theta = \frac{\pi}{2}$ piiratud kujundi pindala.

Ülesanne 26.4. Leidke kardiodi $r = 2(1 + \cos \varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ pindala.

Ülesanne 26.5. Leidke kahe ühikringi $r = 2 \sin \theta$ ja $r = 2 \cos \theta$ poolt piiratud kujundi pindala S .



Ülesanne 26.6. Leidke kolmelehelise roosi $r = 2 \sin 3\varphi$ pindala. Nurk $\varphi \in [0, \frac{\pi}{3}]$ joonistab välja ühe õie. Kas sama tulemuse saaksime, kui võrrandiks oleks $r = 2 |\sin 3\varphi|$?



Ülesanne 26.7. Pindala, mis jääb kardiodi $r = \cos \theta + 1$ sisse, kuid ringist $r = \cos \theta$ välja, ei võrdu avaldisega

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta) d\theta = \pi.$$

Miks? Põhjendage oma vastust. Leidke tegelik pindala.

26.3 Pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral

Olgu funktsioon (täpsemalt, tema graafik) antud parameetriliselt $x = x(t)$, $y = y(t)$, kus $t \in [\alpha, \beta]$, kus x on diferentseeruv funktsioon. **Parameetriliselt antud kõvertrapetsi pindala** avaldub võrdusega

$$S = \int_a^b y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt.$$

Ülesanne 26.8. Leidke joone $x = 1 + e^t$, $y = t - t^2$ ja x -telje vahele jääva ala pindala.

Ülesanne 26.9. Leidke ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala funktsiooni parameetrilise esituse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ korral. Leidke esimeses veerandis asuva ellipsi osa pindala ja korrutage neljaga, rajad on $t = \frac{\pi}{2}$ ja $t = 0$.

Ülesanne 26.10. Leidke tsükloidi $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ja x -telje vahelise kujundi pindala.

Praktikum 27

Joone pikkuse ja keha ruumala arvutamine

27.1 Joone pikkus

Lause 27.1

Lõigus $[a, b]$ pideva ja vahemikus (a, b) diferentseeruva funktsiooni f graafiku kui joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Lause 27.2

Kui funktsiooni graafik on esitatud parameetriselt $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, kus x ja y on diferentseeruvad lõigus $[\alpha, \beta]$, siis selle joone pikkus avaldub valemiga

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Ülesanne 27.1. Leidke järgmiste joonte pikkused.

(a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + 1$, $x \in [0, 2]$

(c) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$

(b) $x = y^{3/2}$, $0 \leq y \leq 4$

(d) $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$, $2 \leq y \leq 3$

Ülesanne 27.2. Kasutage sirglõigu $y = 3 - 2x$, kus $0 \leq x \leq 2$, pikkuse leidmiseks joone pikkuse valemit. Kontrollige oma vastust, leides sirglõigu pikkuse, kui täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkuse.

Ülesanne 27.3. Leidke ringjoone $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $t \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{2}\pi]$ pikkus.

Ülesanne 27.4. Leidke astroidi $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ pikkus.

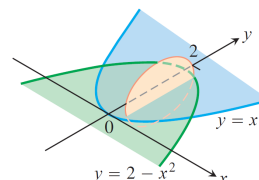
27.2 Keha ruumala ristlõikepindala kaudu

Lause 27.3

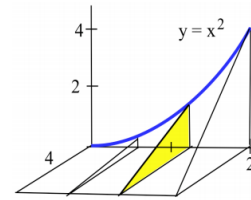
Olgu keha piiratud tasanditega, mis on risti x -teljega punktides $x = a$ ja $x = b$. Kui igas punktis $x \in [a, b]$ on keha ristlõikepindala $S(x)$ ja S on pidev funktsioon lõigus $[a, b]$, siis **keha ruumala** avaldub valemiga

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

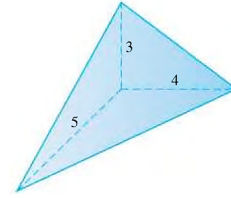
Ülesanne 27.5. Keha asetseb x -teljega ristuvate tasandite $x = -1$ ja $x = 1$ vahel. Ristlõiked on risti x -teljega ning moodustavad ringid, mille diameetrite otspunktid asuvad paraboolidel $y = x^2$ ja $y = 2 - x^2$. Leidke keha ruumala.



Ülesanne 27.6. Leidke ruumala kujundile, millel on kolmnurksed ristlõiked ja mille kõrgus jälgib joone $y = x^2$ kuju. Kolmnurkade alused on pikkusega 4 ja vaatlеме lõiku $x \in [0, 2]$.



Ülesanne 27.7. Joonisel on kujutatud kolmnurksete külgedega püramiid, mille kolm külge on omavahel risti ning mille servade pikkused on 3, 4 ja 5. Leidke püramiidi ruumala.



27.3 Pöördkeha ruumala

Pöördkeha ruumala. Olgu f pidev mittenegatiivne funktsioon lõigus $[a, b]$. Siis **ümber x -telje** pöörleva joonega $y = f(x)$ piiratud keha ruumala avaldub valemiga

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Analoogiliselt lõigus $y \in [c, d]$ **ümber y -telje** pöörleva joonega $x = f(y)$ piiratud keha ruumala avaldub

$$V = \pi \int_c^d f^2(y) dy.$$

Ülesanne 27.8. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber x -telje.

(a) $y = 2x, y = 0, x = 3$

(d) $y = x^4, x = 0, y = 1$

(b) $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 2$

(e) $y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, y = 0$

(c) $y = x^2 + 1, y = x + 1$

(f) $xy = 2, y = 0, x = 1, x = 3$

Ülesanne 27.9. Leidke pöördkoonuse ruumala. Koonus tekib sirge $y = ax$ ($a > 0$) pöörlemisel ümber x -telje ja on kõrgusega $h > 0$.

Ülesanne 27.10. Leidke ruumalad, mis tekivad järgmiste joontega piiratud kujundite pöörlemisel ümber y -telje.

(a) $y = 2x^{1/3}, x = 0, y = 2$

(d) $y^2 = x, y = 5, x = 0$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 1}, y = 0, x = 3$

(e) $y = \sqrt{4 - x^2}, I$ veerand

(c) $y = 3\sqrt{x}, x = 0, y = 3$

(f) $y = 8 - x^3, x = 0, y = 0$

Ülesanne 27.11. Kerakujulisest kõrvitsast raadiusega 22 cm valmistati kaanega anum, lõigates ära poole raadiuse kõrgune osa ning uuristades ülejäänu tühjaks. Mitu liitrit vedelikku mahub saadud anumasse, kui kõrvitsa koore paksus oli 2 cm?

Ülesanne 27.12. Poolkerakujuline kauss raadiusega R täidetakse veega kõrguseni h . Leidke kausis oleva vee ruumala.

Praktikum 28

Määratud integraali füüsikalised rakendused

28.1 Teepikkuse arvutamine

Valem 28.1

Olgu $v = v(t)$ keha liikumise kiirus ajahetkel t ja $s = s(t)$ keha poolt läbitud teepikkus hetkel t ja Δs nihe (kaugus algpunktist). Ajahetkede t_1 ja t_2 vahel keha poolt läbitud **teepikkus ja nihe** avalduvad valemiga

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt, \quad \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (28.1)$$

Ülesanne 28.1. Lennuk lendab tugevnevas vastutuules kiirusega $v = 50(12-t)$ km/h. Kui kaugele jõuab lennuk oma algpunktist kahe tunniga?

Ülesanne 28.2. Rongi kiirus v (m/s) alates pidurdamise algusest on antud valemiga

$$v(t) = \sqrt{400 - 20t}.$$

Leidke rongi pidurdusteed (pidurdamise algusest seiskumiseni).

Ülesanne 28.3. Ralliauto kiiruslegend ütleb, et kõigepealt tuleb liikuda 6 minutit kiirusega $v(t) = 2000t - 1000t^2$ km/h, seejärel hoida saavutatud kiirust 12 minutit ning siis aeglustada kiirusega $190 - 900t$ km/h (siin aega on hakatud lugema pidurduse algusest). Kui kaugele on ralliauto esimese 24 minutiga jõudnud?

Ülesanne 28.4. Eelmisel õhtul jõulupeolt tulnud tudeng näeb jõuluvana, kes liigub sirgel rajal kiirusega $v(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$ m/s 40 meetri kaugusel oleva postkasti poole. Kui pika vahemaa läbib jõuluvana 6 sekundi jooksul? Kas ta jõuab selle ajaga postkastini?

Ülesanne 28.5. Postiljon seisab postkasti juures ning märkab suurt koera, mille peale hakkab ta jooksmas kiirusega

$$\begin{cases} v = at + v_0, & 0 \leq t \leq 4, \\ v = \text{const}, & 4 < t \leq 10. \end{cases}$$

(a) Avaldage postiljoni poolt läbitud teepikkus s ja kiirus v esimese nelja sekundi jaoks kiirenduse a kaudu.

(b) Leidke kiirendus a kui on teada, et 10 sekundi jooksul läbis postiljon 56 meetrit.

Ülesanne 28.6. Langevarjurid A ja B asuvad 1950 m kõrgusel lendavas helikopteris. Langevarjur A hüppab esimesena, avades langevarju 4 sekundit pärast hüpet. Seejärel tõuseb helikopter 2130 m kõrguseni. Langevarjur B hüppab 45 sekundit A-st hiljem, avades langevarju 13 sekundit pärast hüpet. Mõlemad hüppajad langevad avatud langevarjudega ühtlasel kiirusel 5 m/s. Jätame lihtsuse mõttes õhutakistuse arvestamata.

(a) Millisel kõrgusel avaneb A langevari?

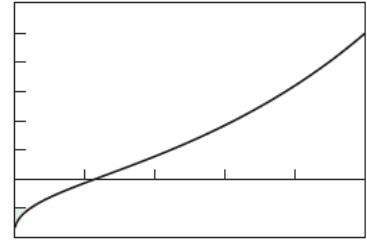
(c) Kumb langevarjur maandub esimesena?

(b) Millisel kõrgusel avaneb B langevari?

Ülesanne 28.7. Osake alustab liikumist punktist $s(0) = 9$ ja liigub kiirusega

$$v(t) = t^2 - \frac{8}{(t+1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 5.$$

Leidke läbitud teepikkus ja kui kaugele algpunktist osake liikus.



28.2 Kiirus ja kiirendus

Ülesanne 28.8. Võõrkeha sattumisel verre luuakse konkreetses mudelis organismi kaitseks antikehi kiirusega $r(t) = \frac{t}{t^2+1}$ tuhat antikeha minutis. Leidke antikehade arv 5 minutit pärast võõrkeha sattumist verre, kui alghetkel antikehi ei ole.

Ülesanne 28.9. (F) Õhupall tõuseb õhku kiirusega 4 m/s.

Leidke õhupallilt alla visatud liivakoti kiirus 1.5 sekundi pärast selle lahti laskmist.

Ülesanne 28.10. Auto (aeglustav) kiirendus avarii korral on 250 m/s^2 (maksimaalne lubatud kiirendus, et inimene võiks ellu jääda). Kui auto sõidab kiirusega 96 km/h, siis millise vahemaa vältel peab avanema õhkpadi, et viimasest midagi ka kasu oleks?

Ülesanne 28.11. Maantee ehitamiseks tuleb planeerida kõrvalteelt peateele sõitmiseks kiirendusrada. Leidke minimaalne kiirendusraja pikkus, kui kiirendusrajale sõidetakse kiirusega 25 km/h ja 12 sekundiga tuleb raja lõpus saavutada kiirus 95 km/h.

Ülesanne 28.12. (IT) Arvuti riistvara usaldatavuse R (protsentides) muutumise kiirus avaldub valemiga

$$\frac{dR}{dt} = -2.5(0.05t + 1)^{-1.5},$$

kus t on aeg tundides. Leidke R kahe ööpäeva jaoks, kui $R(0) = 100$.

Ülesanne 28.13. (Maj) Kui eeldada, et $K(t)$ tähistab firma kapitali ning $I(t)$ investeeringute muutumise kiirust, siis kehtib valem

$$\Delta K = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt.$$

Leidke firma kapitali muut ΔK ajaperioodil $1 \leq t \leq 8$, teades et, investeeringute muutumise kiirus allub seaduspärasusele $I(t) = 1 + 3\sqrt[3]{t^2}$.

Ülesanne 28.14. Raudteejaamast väljuv elektrirong liigub esimese tunni jooksul kiirusega $v(t) = 90t^2 - 20t^3$ km/h, kus t on rongi liikumise aeg tundides. Arvutage elektrienergia kulu W (kWh) esimese sõidutunni jooksul, kui

$$W(T) = \int_0^T (a(t) + 2)v(t) dt.$$

28.3 Töö

Lause 28.1

Mööda x -telge punktist $x = a$ punkti $x = b$ liikuvale kehale mõjuva jõu $F(x)$ poolt tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (28.2)$$

Ülesanne 28.15. (F) Vedru, mille pikkus vabas olekus on 1 meeter, venib 24 N jõu mõjul vertikaalselt 1.8 meetri pikkuseks.

a) Leidke töö, mida on vaja teha, et venitada vedru vertikaalselt 2 meetrit pikemaks.

b) Leidke, kui pikaks venitab vedru 45 N suurune jõud.

Ülesanne 28.16. (F) Kui osake massiga m asub punktis $(x, 0)$, tõmmatakse teda nullpunkti poole jõuga, mille moodul on k/x^2 . Kui osake alustab asendist $x = b$ ja talle ei mõju ükski teine jõud, siis leidke tehtud töö hetkel, mil osake jõuab asendisse $x = a$, $0 < a < b$.

Ülesanne 28.17. (F) Mägironija sikutab üles 50 m pikkust rippuvat köit. Kui palju tööd selleks kulub, kui köis kaalub 0.624 N/m?

Ülesanne 28.18. (F) Lift massiga 680 kg on kinnitatud trosside otsa, mille mass ühe meetri kohta on 18 kg. Leidke, kui palju tehakse tööd, tõstes lifti keldrikorrukselt teisele korrusele (kokku 7 m).

Ülesanne 28.19. (K) Ideaalse gaasi kokku surumisel või paisumisel tehtav töö arvutatakse integraaliga

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV,$$

kus $P = \frac{nRT}{V}$ on rõhk ja V on gaasi ruumala. Liikuva kolviga silindri läbimõõt on 20 cm ja pikkus 80 cm. Silindris on gaas 10 000 g/cm² rõhu all. Arvutage töö, mis kulub konstantsel temperatuuril T selle gaasi kokkusurumiseks kuni ruumala kahekordse vähenemiseni. Siin n ja R on konstandid.

28.4 Vedelike pumpamisel tehtav töö

Anumate tühjendamiseks tehtav töö. Olgu anuma ristlõike pindala kõrgusel y võrdne pideva funktsiooni väärtusega $S(y)$. Olgu vedeliku tihedus ρ , siis erikaal on $\gamma = \rho g$. Kui anuma sisu asub kõrguste a ja b vahel, siis selle vedeliku pumpamiseks kõrgusele $h > b$ tehtav töö avaldub võrdusega

$$A = \gamma \int_a^b S(y)(h - y) dy.$$

Ülesanne 28.20. (F) Vertikaalselt paigutatud silindrikujulise anuma kõrgus on 9 m ja diameeter on 6 m. Anum on ääreni täidetud petrooleumiga, mis kaalub 8048.6 N/m³. Kui palju tööd kulub petrooleumi pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 28.21. (F) Joone $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ kaare pööramisel ümber y -telje moodustub anum, mis täidetakse Surnumerest pärit mereveega (kaaludes ligikaudu 11 475.6 N/m³). Kui palju tööd kulub merevee pumpamiseks anuma ülemise ääreni?

Ülesanne 28.22. (F) Silindrikujuline anum lebab horisontaalselt, selle kõrgus on 4 m ja raadius on 2 m ning see on täidetud diiselkütusega kaaluga 8331.6 N/m³. Kui palju tööd kulub kogu kütuse pumpamiseks 6 m kõrgusele üle anuma ääre?

Praktikum 29

Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

29.1 Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine

Paarisarvulise astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel kasutame võrduseid

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}. \quad (29.1)$$

Paaritu astmega siinus- või koosinusfunktsiooni integreerimisel teisendame

$$\int \sin^{2k+1} x \, dx = \int \sin^{2k} x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \sin x \, dx.$$

Ülesanne 29.1. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 2x \, dx$

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin^2 x \, dx$

(b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

(e) $\int_0^1 8 \cos^4 2\pi x \, dx$

(h) $\int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^6 x \, dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \, dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} \, dx$

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^4 x} \, dx$

Kui integreeritav funktsioon on ratsionaalfunktsioon trigonomeetrilistest funktsioonidest kujul $R(\sin x, \cos x)$, siis universaalne muutujavahetus on

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \text{kui } x \in (-\pi, \pi). \quad (29.2)$$

Sel juhul

$$x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (29.3)$$

ja

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \quad (29.4)$$

Ülesanne 29.2. Leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$

(g) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}$

(b) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$

(e) $\int \frac{dx}{3+5\sin x}$

(h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

(c) $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

(f) $\int \frac{dx}{2-\cos x}$

(i) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$

Ülesanne 29.3. Proovides asendusi $t = \sin x$, $t = \cos x$ või $t = \tan x$, leidke järgmised integraalid.

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$

(c) $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x} dx$

(e) $\int \tan^3 x dx$

(b) $\int \frac{\cos^3 x}{3 + \sin x} dx$

(d) $\int \frac{\sin^3 x}{(1 - \cos x)^2} dx$

(f) $\int \frac{1 + 9 \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} dx$

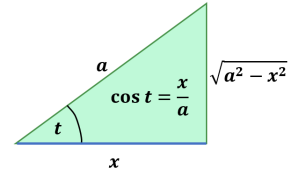
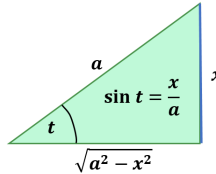
29.2 Irratsionaalfunktsioonide integreerimine

Kui integraali märgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad |x| \leq a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \sin t \quad \text{või} \quad x = a \cos t.$$

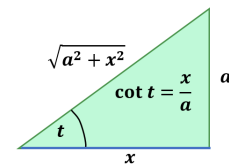
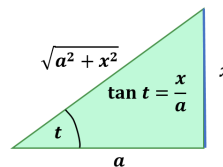


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{a^2 + x^2},$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = a \tan t \quad \text{või} \quad x = a \cot t.$$

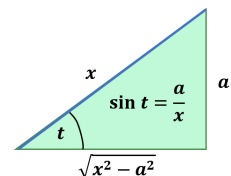
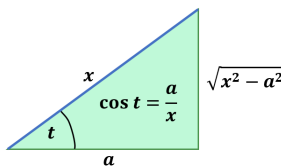


Kui integraalimärgi all on avaldis

$$\sqrt{x^2 - a^2}, \quad \text{kusjuures } x > a \text{ või } x < -a,$$

siis võib sobida muutujavahetus

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad \text{või} \quad x = \frac{a}{\sin t}.$$



Ülesanne 29.4. Leidke järgmised integraalid (määramata integraalis eeldame, et ruutjuure all olevad funktsioonid on positiivsed).

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$

(f) $\int \frac{3 dz}{z^2 \sqrt{z^2 + 9}}$

(k) $\int_0^4 \frac{9}{(t^2 + 9)^{3/2}} dt$

(b) $\int \sqrt{1 - x^2} dx$

(g) $\int \frac{6 dx}{x \sqrt{4 - x^2}}$

(l) $\int_4^5 \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x^2} dx$

(c) $\int x \sqrt{16 - x^2} dx$

(h) $\int \frac{6 dx}{(4 - x^2)^{3/2}}$

(m) $\int \frac{6 dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

(d) $\int \frac{2 dx}{\sqrt{x^2 - 36}}$

(i) $\int \frac{4x^3 dx}{\sqrt{9 + x^2}}$

(n) $\int_{2.5}^3 \frac{dy}{y \sqrt{4y^2 - 9}}$

(e) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

(j) $\int_0^{0.5} \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

Praktikum 30

Päratud integraalid lõpmatute rajadega

30.1 Lõpmatute rajadega integraalid

Definitsioon 30.1

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$ iga $b \in (a, \infty)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $[a, \infty)$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (30.1)$$

Definitsioon 30.2

Eksisteerigu $\int_a^b f(x) dx$, iga $a \in (-\infty, b)$ korral.

Päratu integraal piirkonnas $(-\infty, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (30.2)$$

Definitsioon 30.3

Kui eksisteerib lõplik piirväärtus (30.1) (või (30.2)), siis nimetame vastavat päratut integraali **koonduvaks**, vastasel korral **hajuvaks**.

Definitsioon 30.4

Kui mõlemad rajad on tõkestamata, siis päratu integraal defineeritakse järgmiselt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad \text{kus } c \in \mathbb{R} \text{ on suvaline.}$$

Ülesanne 30.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

(a) $\int_0^\infty (x^2 + 1) dx$

(g) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{(x^2 + 4)^{3/2}}$

(m) $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$

(b) $\int_0^\infty \frac{dx}{x+1}$

(h) $\int_0^\infty e^{-x/2} dx$

(n) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{\ln|x|}{x} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1.001}}$

(i) $\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx$

(o) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{x^2 + 1}$

(d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$

(j) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$

(p) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$

(e) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^5} dx$

(k) $\int_{-\infty}^0 \cos^2 x dx$

(q) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+\arctan x)}$

(f) $\int_1^\infty \frac{x^3 + 1}{x^4} dx$

(l) $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$

(r) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$

Praktikum 31

Päratud integraalid tõkestamata funktsioonist

31.1 Integraal tõkestamata funktsioonist

Definitsioon 31.1

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti b ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(b - \delta, b)$) ja eksisteerigu

$$\int_a^c f(x) dx$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigul $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx. \quad (31.1)$$

Definitsioon 31.2

Olgu funktsioon f tõkestamata punkti a ümbruses (iga $\delta > 0$ korral on f tõkestamata vahemikus $(a, a + \delta)$) ja eksisteerigu

$$\int_c^b f(x) dx,$$

iga $c \in (a, b)$ korral. Siis päratu integraal lõigul $[a, b]$ defineeritakse võrdusega

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx. \quad (31.2)$$

Definitsioon 31.3

Kui funktsioon f on tõkestamata punkti $c \in (a, b)$ ümbruses, kuid pidev piirkonnas $[a, c) \cup (c, b]$, siis defineerime päratu integraali

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ülesanne 31.1. Leidke päratud integraalid (kui need koonduvad).

- | | | | |
|--|--|---|--|
| (a) $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}$ | (f) $\int_{-4}^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$ | (k) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.999}}$ | (p) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} dx$ |
| (b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | (g) $\int_{-2}^2 \frac{x^2+1}{x^3-8} dx$ | (l) $\int_{-1}^1 \frac{\ln x}{x} dx$ | (q) $\int_0^1 \frac{4x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ |
| (c) $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ | (h) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{4/5}}$ | (m) $\int_1^e \frac{\ln^n x}{x} dx, n \in \mathbb{N}$ | (r) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ |
| (d) $\int_{-8}^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ | (i) $\int_0^2 \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ | (n) $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^n x}, n \in \mathbb{N}$ | (s) $\int_0^\pi \tan x dx$ |
| (e) $\int_1^2 \frac{2 dx}{\sqrt{2-x}}$ | (j) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{ x }}$ | (o) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ | (t) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$ |

31.2 Päratute integraalide rakendusi

Definitsioon 31.4

Kui X on pidev juhuslik suurus, siis **tõenäosus**, et X satub lõiku $[a, b]$, defineeritakse integraaliga

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx, \quad (31.3)$$

kus funktsioon f on pideva juhusliku suuruse X **tihedusfunktsioon** või lihtsalt tihedus.

Definitsioon 31.5

Pideva juhusliku suuruse X **keskväärtuseks** nimetatakse arvu

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx. \quad (31.4)$$

Pideva juhusliku suuruse X **dispersiooniks** nimetatakse arvu

$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx. \quad (31.5)$$

Ülesanne 31.2. (F) Signaalitöötles kasutatakse ajast sõltuva signaali $f(t)$ jaoks Fourier' teisendust

$$F(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi\sigma t} dt,$$

kus σ on sagedus hertsides. Niimoodi seatakse signaalile f vastavusse tema spekter, kus iga sageduse σ Hz jaoks vastab võnkumise amplituud $|F(\sigma)|$ ja faas $\arg(F(\sigma))$. Olgu signaaliks

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} & , \text{ kui } t \in [0, \infty) \\ 0 & , \text{ kui } t \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

Leidke selle signaali Fourier' teisendus $F(\sigma)$ suvalise reaalarvulise sageduse σ jaoks.

Ülesanne 31.3. (F) Füüsikas kasutatakse diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks Laplace'i teisendust

$$L(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt} dt.$$

Leidke funktsioonide $f(t) = \sin t$ ja $f(t) = \cos t$ Laplace'i teisendused.

Ülesanne 31.4. (F) Lambipirni eluiga on eksponentjaotusega, keskmise elueaga 1000 töötundi:

$$p(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000}, \quad t \geq 0.$$

Milline on tõenäosus, et lambipirni eluiga on suurem kui 2000 töötundi?

Ülesanne 31.5. (IT) Juhuslikult lõigust $[-1, 1]$ arvu valimisele vastab ühtlane jaotus

$$p(t) = \begin{cases} 0.5, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Leidke ühtlase jaotuse keskväärtus ja tõenäosus, et valides $n \in \{10, 15, 20\}$ juhuslikku arvu lõigust $[-1, 1]$, nende arvude keskväärtus $\bar{x}$ kuulub lõiku $[-0.5, 0.5]$? Vihje: keskväärtuse tõenäosus jaotub normaaljaotusega, mille keskväärtus on leitud μ ning standardhälve on $\sigma_0 = \sigma/\sqrt{n}$:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x-\mu)^2/\sigma_0^2}.$$

Ülesanne 31.6. IQ testide tulemused on tavaliselt jaotunud normaaljaotusega

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

kus keskväärtus $\mu = 100$ ja standardhälve $\sigma = 15$. Leidke (arvuti abiga), mitmel protsendil elanikkonnast on mudeli järgi IQ vahemikus 85 kuni 115. Mitmel protsendil elanikkonnast on IQ suurem kui 140?

32.1 Maatriksid

Definitsioon 32.1

Maatriksiks nimetatakse ümarsulgude vahele paigutatud m reast ja n veerust koosnevat ristikülukukujulist arvude tabelit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kus arve a_{ij} nimetatakse maatriksi elementideks, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$. Sellisel juhul räägitakse $m \times n$ maatriksist.

Ülesanne 32.1. Leidke maatriksi ridade arv m ja veergude arv n . Tähistage lühidalt maatriksi tema üldelemendi kaudu.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(k) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

(g) $G = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{30} \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{30} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{30} \end{pmatrix}$

(l) $P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(h) $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(m) $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

(i) $I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(n) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(j) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

32.2 Tehted maatriksitega

Definitsioon 32.2

Maatrikseid A ja B nimetatakse **võrdseteks**, kui neil on võrdne ridade arv, võrdne veergude arv ja kõik vastavatel kohtadel olevad elemendid on võrdsed, s.t

$A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$ korral.

Maatriksi $A = (a_{ij})$ **transponeeritud maatriksiks** nimetatakse maatriksit A^T , mis saadakse maatriksi A ridade ja veergude üravahetamisel, s.t $A^T = (a_{ji})$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ruutmaatriks A on **sümmeetriline**, kui $A^T = A$.

Ülesanne 32.2. Leidke ülesandes 32.1: 1) võrdsed maatriksid, 2) sümmeetrilised maatriksid, 3) antud maatriksite transponeeritud maatriksid.

Ülesanne 32.3. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & b & -1 \\ -2 & c & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Leidke a , b ja c väärtused nii, et kehtiks võrdus $A = B^T$.

Definitsioon 32.3

Kui maatriksid A ja B on mõlemad $m \times n$ maatriksid, siis maatriksite A ja B **summaks** (**vaheks**) nimetatakse $m \times n$ maatriksit C , mille elementideks on vastavate elementide summad (vahed), s.t $C = A \pm B$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, kus $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Maatriksi A **korrutiseks skalaariga** ehk arvuga λ nimetatakse maatriksit $\lambda A = B$, mille elemendid saadakse maatriksi A kõigi elementide korrutamisel arvuga λ , s.t $\lambda A = B = (b_{ij})$, kui $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$ ja $j = 1, \dots, n$.

Ülesanne 32.4. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehted.

- | | | | |
|-----------------|--------------------------|---------------|---------------|
| (a) $2A - 3A$ | (d) $-H + 2I^T$ | (g) $A^T - B$ | (j) $F - E$ |
| (b) $3B + 2B^T$ | (e) $A + B$ | (h) $B^T + A$ | (k) $C + D$ |
| (c) $4E^T$ | (f) $C + \frac{1}{2}E^T$ | (i) $E + G$ | (l) $D^T - C$ |

32.3 Maatriksite korrutamine

Definitsioon 32.4

Kui maatriksi A veergude arv n võrdub maatriksi B ridade arvuga, siis maatriksite A ja B **korrutiseks** AB nimetatakse maatriksit C , mille i -nda rea ja j -nda veeru elemendi c_{ij} saamiseks korrutatakse maatriksi A i -nda rea elemendid maatriksi B j -nda veeru vastavate elementidega ning saadud korrutised liidetakse, s.t

$$C = AB, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

kus $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, A on $m \times n$ maatriks, B on $n \times p$ maatriks, siis C on $m \times p$ maatriks.

Ülesanne 32.5. Millised alljärgnevatest korrutistest on defineeritud ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Leidke defineeritud korrutised ning esitage vastavad korrutamise valemid.

- | | | | | | |
|----------|-------------|----------|-------------|-------------|------------------|
| (a) AB | (c) $A^T B$ | (e) DC | (g) FE | (i) $B^T C$ | (k) $O^T B$ |
| (b) BA | (d) CD | (f) EF | (h) $F^T E$ | (j) $D^T B$ | (l) $A^T \theta$ |

Ülesanne 32.6. Leidke maatriksite korrutised.

- | | |
|--|---|
| (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |
| (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ | (e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| (c) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}^T$ | (f) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ |

Ülesanne 32.7. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Leidke

(a) AB

(b) BA

(c) $B^2 - A^2$

(d) $(B - A)^2$

Ülesanne 32.8. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Näidake, et kehtivad järgmised võrdused.

(a) $A^2 = A$

(b) $B^3 = B$

(c) $C^2 - 4C - 5E = O$

Ülesanne 32.9. Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

näidake, et võrdusest $AB = AC$ ei järeldu maatriksite B ja C võrdsus.

32.4 Maatrikstehete omadused

Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O kõik samade mõõtmetega maatriksid ning $\lambda \in \mathbb{R}$. Sel juhul **maatrikstehete jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$A + O = A$$

Sel juhul **transponeeritud maatriksite jaoks** kehtivad järgmised omadused:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T$$

Maatriksite korrutamise omadused. Olgu maatriksid A, B, C ja nullmaatriks O selliste mõõtmetega, et allpool toodud iga üksik tehe on teostatav ning olgu $\lambda \in \mathbb{R}$. Siis kehtivad järgmised omadused:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$AO = O, OA = O$$

Ülesanne 32.10. Millised alljärgnevatest tehetest on sooritatavad ülesandes 32.1 antud maatriksite korral? Teostage lubatud tehete.

(a) $\frac{1}{2}EB^T D - 2A$

(b) $AEB + 4E^T$

(c) $CA^T - DA^T$

(d) $A^T E^6 A - \frac{1}{2}BE^4 B^T + D^2$

(e) $CBA - CDA$

(f) $2BEAC - BE^2 AC$

(g) $\frac{3}{2}H^T EAC - \frac{1}{2}H^T AC$

(h) $2CBEH + DBH$

(i) $A^T F I^T - A^T E H$

(j) $I F^T H + H^T E^2 H$

(k) $(\frac{1}{2}I)I^T - (9H)^T H$

(l) $AB + F I^T H^T$

(m) $F I^T H^T - E^T H H^T$

(n) $\theta B - A^T O$

(o) $0(CA + AD)$

(p) $0(DB + 10CA^T)$

Ülesanne 32.11. Kontrollige järgnevate võrduste kehtivust ülesandes 32.1 antud maatriksite korral.

(a) $C(D^T)^T = (D^T)^T C$

(g) $(2D)^T - D = 2D^T - D$

(m) $(CD)^T = C^T D^T$

(b) $(C^T)^T D = D(C^T)^T C$

(h) $3B^T - A = (3B - A^T)^T$

(n) $(CD)^T = D^T C^T$

(c) $C^T + D^T = (C + D)^T$

(i) $(BA)^T = A^T B^T$

(d) $(C^T + D)^T = D^T + C$

(j) $ABA = B^T A^T B^T$

(o) $2A(D - C)^T = A(2D)^T - 2AC^T$

(e) $(D^T - C^T)^T = D - C$

(k) $(C + D)A^T = CA^T + DA^T$

(f) $(A^T - B)^T = A - B^T$

(l) $B^T(D - C) = B^T D - B^T C$

(p) $(2I)^T H^T = 2H^T I^T$

32.5 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 32.12. Maatriksite kasutamine andmete hoidmiseks. Ravimifirma hoiab laos C-vitamiini järgmistes kogustes: 25 kasti 100 mg pudelites, 10 kasti 250 mg pudelites ja 32 kasti 500 mg pudelites. Lisaks B₃-vitamiini kogustes: 30 kasti 100 mg pudelites, 18 kasti 250 mg pudelites ja 40 kasti 500 mg pudelites. Neid koguseid kirjeldatakse maatriksiga A . Ühe vastava kasti müügihinda hoitakse maatriksis C . Laost viiakse välja kaks korda sama kogust kaste B . Leidke maatriks, mis kirjeldab allesjäänud vitamiinide kogust. Millist infot annab maatriks BC^T ?

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 10 & 32 \\ 30 & 18 & 40 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ülesanne 32.13. (B) Olgu ajahetkel t maatriksi

$$N_t = \begin{pmatrix} N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} \end{pmatrix}^T$$

igas reas toodud ühe ökosüsteemi kolme liigi isendite arv vastavalt N_{1t}, N_{2t}, N_{3t} .

Teisendusmaatriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{t}{20} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t}{10} \end{pmatrix}$$

seob liigi isendite arvu ajahetkel t ja $t+1$ valemiga $N_{t+1} = P \cdot N_t$. Teostage viimane tehe ja analüüsige kolme liigi isendite arvukuse mõju üksteise suhtes. Millise struktuuriga peaks olema maatriks P , et isendite arv oleks üksteisest sõltumatu?

Ülesanne 32.14. (F) Satelliidi teekonda ümber Maa võib tasandil kujutada võrrandiga

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.76 & -1 \\ 1 & 2.81 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (7.76 \cdot 10^7),$$

kus ühikuteks on miilid. Millist joont on kujutatud?

Ülesanne 32.15. (IT) Roboti liikumise programmeerimiseks kasutatakse korrutist

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ & 0 \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teostage toodud korrutamine ning kujutage graafikul algset vektorit $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ ning lõpptulemust.

33.1 Determinandi arvutamine

Definitsioon 33.1

Esimest järku ruutmaatriksi $A = (a_{11})$ determinant on $|A| = a_{11}$.

Kõrgemat järku ruutmaatriksi $A = (a_{ij})$ **determinandiks** nimetatakse summat

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2,$$

kus M_{ij} on elemendile a_{ij} vastav miinor ehk $(n-1)$ -järku determinant.

Antud valemi kasutamist determinandi arvutamisel nimetatakse maatriksi A **determinandi arendamiseks i -nda rea järgi**.

Determinandi väärtus ei muutu, kui maatriksi A determinanti arendada mingi j -nda veeru järgi. Tähistatakse ka $\det A$, $\det(a_{ij})$ või D_A .

Kolmandat järku ruutmaatriksi determinandiks nimetatakse avaldist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Definitsioon 33.2

Ruutmaatriksi A elemendile a_{ij} vastavaks **miinoriks** nimetatakse determinanti M_{ij} , mis saadakse, kui maatriksi A determinandis jätta välja elementi a_{ij} läbiv rida ja veerg.

Definitsioon 33.3

Elemendi a_{ij} alamdeterminandiks A_{ij} nimetatakse sellele elemendile vastava miinori M_{ij} korrutist teguriga $(-1)^{i+j}$, s.t

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ülesanne 33.1. Kirjutage välja: 1) maatriksi A teise rea elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid, 2) maatriksi B esimese veeru elementidele vastavad miinorid ja alamdeterminandid. Arvutage iga maatriksi determinant.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $G = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $J = \begin{pmatrix} -5 \end{pmatrix}$.

33.2 Determinantide omadused

Omadus 33.1

1. Matriksi transponeerimine (ridade ja veergude vahetamine) ei muuda matriksi determinandi väärtust: $|A| = |A^T|$.
2. Kahe rea (või veeru) vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.
3. Kahe võrdse või võrdelise rea (või veeru) korral on determinandi väärtus null.
4. Kui determinandi mingi rea (või veeru) kõik elemendid on nullid, siis determinandi väärtus võrdub nulliga.
5. Mingi rea (või veeru) kõigi elementide korrutamisel arvuga k , korrutub determinandi väärtus arvuga k .
6. Kui determinandi mingis reas (või veerus) olevad elemendid kujutavad endast kahe liidetava summasid, siis see determinant võrdub kahe sama järku determinandi summaga, millest esimeses on vastavas reas (veerus) esimesed liidetavad, teises teised liidetavad, kõik ülejäänud read (veerud) on aga samasugused nagu lähtedeterminandis.
7. Determinandi väärtus ei muutu, kui mingile reale (või veerule) liita mistahes arvuga korrutatud teine rida (või veerg).
8. Sama järku ruutmatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega, s.t $|AB| = |A||B|$.

Ülesanne 33.2. Kasutades determinantide omadusi, selgitage, kas võrdus kehtib.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 33.3. Kasutades determinantide omadusi, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} -12 & -24 & -24 & 15 \\ 12 & 32 & 32 & -35 \\ -22 & 18 & 18 & 18 \\ 44 & 0 & 0 & -26 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 33.4. Kasutades determinantide omadusi ja teadmist, et $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 40$, arvutage järgmised determinandid.

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 33.5. Olgu antud matriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $|B|$, kui $|A| = -3$.

33.3 Determinantide arendamine

Ülesanne 33.6. Leidke determinantide väärtused: 1) arendades teise rea järgi, 2) arendades kolmanda veeru järgi, 3) arendades vabalt valitud rea või veeru järgi, mis on eelnevalt teisendatud nii, et selles reas või veerus oleks vaid üks nullist erinev element.

$$(a) \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 33.7. Arvutage determinant kasutades arendamist rea või veeru järgi.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}$$

Ülesanne 33.8. Arvutage determinandi väärtus.

$$(a) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(e) \begin{vmatrix} \sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & \sin t & 0 \\ e^t & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(f) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \sqrt{7} \\ 1 & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{8} \end{vmatrix}$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 9 & 12 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(j) \begin{vmatrix} x^3 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3 + 1 \end{vmatrix}$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 999 & -9999 \\ -999 & 0 & e^\pi \\ 9999 & -e^\pi & 0 \end{vmatrix}$$

$$(k) \begin{vmatrix} e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 1 \\ e^t & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(l) \begin{vmatrix} 15 & 0,2 & 0,1 & 4 \\ \pi & 2\pi & \pi & -\pi \\ 3 & \sqrt{12} & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (m) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

33.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 33.9. Leidke järgmiste koordinaatidega antud kolmnurkade pindalad S , kui

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

(a) $A(-1, 4), B(3, 1), C(2, 6)$

(c) $A(1, 0), B(2, 2), C(4, 3)$

(b) $A(-2, 2), B(1, 5), C(6, -1)$

(d) $A(3, 6), B(10, 1), C(-2, -3)$

Ülesanne 33.10. Leidke järgmistele vektoritele ehitatud rööptahukate ruumalad V , kui

$$V = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

(a) $\vec{a} = (4, 0, 0), \vec{b} = (5, 2, 2), \vec{c} = (2, 6, 0)$

(b) $\vec{a} = (2, 0, 0), \vec{b} = (0, 4, 0), \vec{c} = (0, 0, 3)$

(c) $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (0, 4, 5), \vec{c} = (6, 0, 7)$

Ülesanne 33.11. (B) Olgu meil mingis liigis neli erinevat vanuseklassi. Kui liik on jõudnud stabiilsesse seisusse, siis tema arvukus erinevates vanuseklassides ei tohiks enam oluliselt muutuda. Vastavas teoorias tuleb lahendada näiteks võrrand

$$|P - \lambda E| = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

kus teisendusmaatriks P kirjeldab nelja erineva vanuseklassi arengut pikemal ajaperioodil (ellujäämistõenäosuste ja järeltulijate kohta), E on ühikmaatriks ja positiivne reaalne λ on stabiilse liigi jaoks vajalik juurdekasvu kiirus (isendit ajaühikus). Kui see juurdekasvu kiirus ei võrdu arvuga λ , siis liik ei ole stabiilse arvukusega erinevate vanuseklasside suhtes. Leidke λ väärtus. Leitud λ korral lahendage maatriksvõrrand $(P - \lambda E)x = 0$, kus lahend $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ näitab stabiilse oleku jaoks iga vastava vanuseklassi proportsioone kogu liigi populatsiooni $N = \sum_{i=1}^4 x_i$ suhtes.

Ülesanne 33.12. (K) Füüsikalises keemias kasutatakse molekulaarorbitaalide energiatasemete leidmiseks Hückeli meetodit, kus tuleb leida järgmist tüüpi determinandid. Leidke need.

$$(a) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta \\ \beta & \alpha - E \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha - E & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - E & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha - E \end{vmatrix}$$

Praktikum 34

Pöördmaatriks. Maatriksvõrrandite lahendamine

34.1 Pöördmaatriks

Definitsioon 34.1

Ruutmaatriksit E nimetatakse (n -järku) **ühikmaatriksiks**, kui tema peadiagonaali elemendid võrduvad ühega ja kõik ülejäänud elemendid võrduvad nulliga.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Suvalise n -järku ruutmaatriksi A korral kehtib $AE = A$, $EA = A$, kus E on n -järku ühikmaatriks.

Definitsioon 34.2

Ruutmaatriksi A pöördmaatriksiks nimetatakse sellist maatriksit A^{-1} , millega antud maatriksit A korrutades saadakse ühikmaatriks E , s.t

$$AA^{-1} = E.$$

Maatriksi korrutamine pöördmaatriksiga on kommutatiivne $AA^{-1} = A^{-1}A$.

Omadus 34.1

Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, millel leiduvad pöördmaatriksid. Siis kehtib võrdus

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ülesanne 34.1. Milline järgmistest on maatriksi $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

(a) $B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $D = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

Ülesanne 34.2. Näidake ilma determinanti leidmata, et maatriksil $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ puudub pöördmaatriks.

Ülesanne 34.3. Olgu A n -järku ruutmaatriks ja E n -järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis $(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}$?

Ülesanne 34.4. Olgu A , B ja C pööratavad n -järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis $(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}$.

Ülesanne 34.5. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui $A^2 - 4A + E = O$.

34.2 Pöördmaatriksi leidmine

Definitsioon 34.3

Kui ruutmaatriks $A = (a_{ij})$ on regulaarne, so kui $|A| \neq 0$, siis maatriksil A on olemas pöördmaatriks A^{-1} , mis on leitav valemiga

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kus $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ on maatriksi A determinandi $|A|$ elemendile a_{ij} vastav alamdeterminant.

Definitsioon 34.4

Maatriksi **ridade elementaarteisendusteks** nimetatakse üleminekut maatriksilt uuele maatriksile järgmiste reeglite abil:

1. Maatriksi kahe rea äravahetamine.
2. Maatriksi rea korrutamine nullist erineva arvuga.
3. Maatriksi reale mingi arvuga korrutatud mingi teise rea liitmine.

Kui maatriksil A leidub pöördmaatriks A^{-1} , siis saab selle leida Gauss-Jordani meetodiga, teisendades maatriksi A ridade elementaarteisenduste abil ühikmaatriksiks E ja ühikmaatriksi pöördmaatriksiks A^{-1}

$$(A|E) \rightarrow (E|A^{-1}).$$

Ülesanne 34.6. Millise k korral ei leidu antud maatriksil pöördmaatriksit?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & k \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

Ülesanne 34.7. Leidke järgmiste maatriksite pöördmaatriksid valemi abil.

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ülesanne 34.8. Leidke pöördmaatriks nii valemi abil kui ka elementaarteisenduste abil. Kontrollige saadud tulemust.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(f) $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Ülesanne 34.9. Leidke pöördmaatriksid.

$$(a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 34.10. Leidke seos $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ja tema pöördmaatriksi elementide vahel.

34.3 Maatriksvõrrandite lahendamine

Olgu maatriksid A, B ja X selliste mõõtmetega, et maatriksvõrrandi lahendamiseks tehtav tehe on teostatav. Olgu maatriksid A ja B teada ning ruutmaatriks A olgu regulaarne. Maatriks X on tundmatu, mis tuleb leida.

Maatriksvõrrandi $AX = B$ korral otsitava X saame

$$X = A^{-1}B.$$

Maatriksvõrrandi $XA = B$ korral otsitava X saame

$$X = BA^{-1}.$$

Ülesanne 34.11. Lahendage võrrandisüsteemid maatrikskujul.

$$(a) \begin{cases} 4x + 2y + 6z + 3 = 0 \\ x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ x - y + 3z + 1.5 = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - y - z - 2u - 3 = 0 \\ 2x - 3y + u - 4 = 0 \\ x - 2y - 2z - u - 2 = 0 \\ 2x + y + 4z + u - 4 = 0 \end{cases}$$

Ülesanne 34.12. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (e) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 7 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

$$(b) X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (f) X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -10 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (g) X \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 24 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(d) X \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad (h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -13 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 34.13. Lahendage maatriksvõrrandid.

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad XR = PQ, \text{ kui } R = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad KXL = M, \text{ kui } K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

34.4 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 34.14. (F) Teatud elektriskeemis on Kirchoff'i seaduse põhjal võimalik voolutugevused amprites leida võrrandiga

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Leidke voolutugevuste vektor, korrutades võrrandit (vasakult) vastava pöördmaatriksiga.

Ülesanne 34.15. (IT) Teile saadeti kodeeritud sõnum. On teada, et igale 32 tähega tähestiku tähele on seatud vastavusse number nii, et tühik = 1, A=2, B=3, ..., Y=33 (vt. nt. <https://google.gl/z0Xm14>).

Lisaks on teada, et seda sõnumit korrutati vasakult maatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dekodeerige järgmised sõnumid.

$$(a) \quad M = \begin{pmatrix} 33 & 87 & 52 & 89 & 108 & 97 & 26 \\ 26 & 54 & 21 & 69 & 84 & 88 & 5 \\ 67 & 229 & 177 & 180 & 220 & 149 & 111 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad M = \begin{pmatrix} 142 & 66 & 90 & 21 & 91 & 112 & 50 & 39 & 84 \\ 124 & 34 & 90 & 10 & 95 & 118 & 45 & 24 & 89 \\ 240 & 200 & 109 & 66 & 95 & 116 & 81 & 101 & 84 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad M = \begin{pmatrix} 120 & 65 & 28 & 87 & 42 & 66 & 111 & 54 & 38 & 78 & 27 & 60 & 74 \\ 137 & 33 & 18 & 69 & 30 & 53 & 118 & 49 & 26 & 44 & 18 & 61 & 44 \\ 83 & 198 & 70 & 173 & 96 & 131 & 112 & 83 & 92 & 219 & 65 & 71 & 200 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad M = \begin{pmatrix} 86 & 100 & 59 & 89 & 29 & 34 & 20 & 27 & 96 & 32 & 44 & 84 & 101 & 82 \\ 81 & 107 & 29 & 94 & 10 & 21 & 13 & 15 & 98 & 9 & 24 & 74 & 91 & 65 \\ 126 & 96 & 180 & 89 & 107 & 88 & 51 & 76 & 112 & 126 & 125 & 140 & 160 & 160 \end{pmatrix}$$

Ülesanne 34.16. (K) Uue sulami tegemiseks segatakse kokku neli erinevat sulamit, mis sisaldavad muuhulgas vaske (Cu), niklit (Ni), tsinki (Zn) ja rauda (Fe).

Esimene sulam sisaldab 80% Cu ja 20% Ni, teine sulam sisaldab 60% Cu, 20% Ni ja 20% Zn.

Kolmas sulam sisaldab 30% Cu, 60% Ni ja 10% Fe, neljas sulam sisaldab 20% Ni, 40% Zn ja 40% Fe. Kui palju on igat sulamit vaja, et lõppsulamis oleks 56 g vaske, 28 g niklit, 10 g tsinki ja 6 g rauda? Koostage ning lahendage lineaarvõrrandisüsteem maatrikskujul $Ax = B$.

Kontrolltöö nr. 3 teemad (kontrolltöö toimub loengu ajal)

1. Määratud integraal

1. Muutujavahetus.
2. Ositi integreerimine.
3. Ratsionaalfunktsioonide integreerimine.

2. Määratud integraali rakendused

1. Tasandilise kujundi pindala leidmine (kõvertrapets, kõversektor, pindala funktsiooni parameetrilise esituse korral).
2. Joone pikkuse arvutamine.
3. Keha ruumala leidmine ristlõigete pindalade kaudu. Pöördkeha ruumala joone pöörlemisel ümber x - ja y -telje.
4. Keha poolt läbitud teepikkuse leidmine, kauguse leidmine alguspunktist (sirgjoonelistel liikumisel). Kiiruse ja kiirenduse leidmine.
5. Töö arvutamine (muutuva jõu poolt tehtav töö, vedelike pumpamisel anumate tühjendamiseks tehtav töö).

3. Trigonomeetriliste ja irratsionaalfunktsioonide integreerimine. Päratud integraalid

1. Trigonomeetriliste funktsioonide integreerimine.
2. Lõpmatute rajadega päratud integraalid.
3. Integraal tõkestamata funktsioonist.

4. Maatriksid ja determinandid

1. Maatriksite liigid. Ühikmaatriks, nullmaatriks. Regulaarne, singulaarne maatriks.
2. Tehted maatriksitega. Maatriksite korrutamine. Maatrikstehete omadused. Transponeeritud maatriksite omadused.
3. Determinantide omadused, nende kasutamine determinandi arvutamisel.
4. Determinantide arendamine rea või veeru järgi.
5. Pöördmaatriks.
6. Maatriksvõrrandite lahendamine.

Praktikum 35

Maatriksi astak. Lineaarvõrrandisüsteemid

35.1 Maatriksi astak

Definitsioon 35.1

Valime maatriksis A suvaliselt k rida ja k veergu, kus $k \leq m$ ja $k \leq n$. Moodustame nendes ridades ja veergudes olevatest elementidest maatriksi, säilitades ridade ja veergude järjestuse. Selle maatriksi determinanti nimetatakse maatriksi A **k -järku miinoriks**.

Ülesanne 35.1. Millised alljärgnevatest on (4×4) -maatriksi $A = (a_{ij})$ miinorid? Milline neist on maatriksi A esimese rea ja teise veeru elemendile vastav miinor?

(a) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} b_{14} \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a_{44} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} c_{42} \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} a_{21} \end{pmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} b_{23} & b_{21} \\ b_{33} & b_{31} \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$

(k) $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$

(l) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$

Definitsioon 35.2

Maatriksi A **astakuks** nimetatakse selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeimat järku, seejuures nullmaatriksi astakuks loetakse arv 0. Tähistatakse rank A või $r(A)$.

Maatriksi astaku leidmiseks kasutame ridade elementaarteisendusi eesmärgiga teisendada maatriksis kõik elemendid ühele poole peadiagonaali nullideks. Elementaarteisendusi kasutades maatriksi astak ei muutu.

Ülesanne 35.2. Leidke maatriksi astak.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

35.2 Süsteemi üldlahend ja erilahend

Vaatleme lineaarvõrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ & \dots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \quad (35.1)$$

milles on m võrrandit ja n tundmatut $x_1, \dots, x_n$.

Lineaarvõrrandisüsteem on esitatav maatrikskujul $Ax = b$.

Teoreem 35.1

Kronecker-Capelli teoreem. Lineaarvõrrandisüsteem $Ax = b$ on lahenduv (s.t omab vähemalt ühte lahendit) siis ja ainult siis, kui süsteemi maatriksi A astak $\text{rank } A$ võrdub laiendatud maatriksi $L = (A|b)$ astakuga $\text{rank } L$. Teisiti öeldes, süsteem $Ax = b$ on lahenduv parajasti siis, kui $\text{rank } A = \text{rank } L$.

Lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = b$ leidub lahend, kui kehtib $\text{rank } A = \text{rank } L = r$, kus $L = (A|b)$. Lahendite arv sõltub tundmatute arvust n , astakust r ja võrrandite arvust m .

1. $r = n$ korral on süsteemil täpselt üks lahend
 $r = n = m$ korral on Crameri peajuht;
 $r = n < m$ korral $m - n$ võrrandit üleliigsed (võrrandeid tundmatutest rohkem).
2. $r < n$ korral on süsteemil lõpmata palju lahendeid, $n - r$ vaba parameetrit (tundmatut)
 $r < m \leq n$ korral on astak väiksem võrrandite ja tundmatute arvust;
 $r = m < n$ korral on võrrandeid tundmatutest vähem.

Ülesanne 35.3. Lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ laiendatud maatriks $L = (A|b)$ on elementaarteisendustega viidud allpool antud kujule. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas süsteem on lahenduv. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend.

(a) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right)$

(e) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(h) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(b) $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$

(f) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(c) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

(g) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right)$

(d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$

35.3 Crameri valemid

Lause 35.1

Kui lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$ korral on tegemist **Crameri peajuhuga** (s.t tundmatute arv n on võrdne võrrandite arvuga m ja $|A| \neq 0$), siis on sellel süsteemil **täpselt üks lahend**.

Igat lineaarvõrrandisüsteemi $Ax = b$, mille korral on tegemist Crameri peajuhuga, on võimalik lahendada **Crameri valemite** abil

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

kus A on süsteemi maatriks ning A_i on maatriks, mis saadakse maatriksist A tema i -nda veeru asendamisel vabaliikmete veeruga b .

Ülesanne 35.4. Lahendage võrrandisüsteemid Crameri valemite abil.

(a) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -8 \\ x + 2y + z = 3 \\ 5x + y - z = 5 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2u = 3 \\ x + -5z + u = 0 \\ 3y - 2z + u = 4 \\ y - 4z = 4 \end{cases}$

Praktikum 36

Lineaarvõrrandisüsteemid. Gaussi meetod

36.1 Gaussi elimineerimismeetod

Gaussi elimineerimismeetod. 1. Võrrandisüsteem $Ax = b$ esitatakse laiendatud maatriksina $(A|b)$.
2. Laiendatud maatriks $(A|b)$ teisendatakse **ridade elementaarteisenduste** abil kolmnurksele kujule, s.t maatriksi A peadiagonaalil allpool (või ülalpool) olevad elemendid teisendatakse nullideks. Viimasest võrrandist saab avaldada tundmatu x_n . Asendades selle eelviimasesse võrrandisse, saab avaldada x_{n-1} jne.
Kui ridade teisendamisega saadakse nullid mõlemale poole peadiagonaali, siis räägitakse nn Gaussi täielikust elimineerimismeetodist või **Gauss-Jordani elimineerimismeetodist**.

Ülesanne 36.1. Kontrollige Kronecker-Capelli teoreemi põhjal, kas antud süsteem on lahenduv või mitte. Lahenduvuse korral leidke süsteemi lahend. Kui süsteemil on lõpmata palju lahendeid, siis leidke üldlahend ja üks erilahend.

$$(a) \begin{cases} x - y + 2z + 2v = 0 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ 3y + v = -1 \\ 3z - 2v = -2 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - 2z = -5 \\ 3x - y + z = 4 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + z + 2u - v = 4 \\ y + z + u + v = 3 \\ x - 2y - z + u - 3v = 0 \\ 2x + y + 3z + 2u - v = 5 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 4y + z = 13 \\ 3x + 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(i) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(j) \begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \end{cases}$$

Homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil $Ax = 0$ on alati lahend olemas. Selleks on null-lahend $x = 0$ (nullvektor), mida nimetatakse **triviaalseks lahendiks**. Null-lahend aga ei pruugi olla ainuke lahend. Kui võrrandisüsteemi maatriksi A determinant $|A| = 0$ (juhul $n = m$), siis maatriksi A astak r on väiksem kui tundmatute arv n . Sellisel juhul on süsteemil lõpmata palju lahendeid ning vabu tundmatuid on $n - r$.

Ülesanne 36.2. Tehke kindlaks, kas homogeenidel võrrandisüsteemil on triviaalne lahend või lõpmata palju lahendeid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 5y - 2z = 0 \\ x + 3y + 4z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \\ 5x + y + 6z = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} x - 3y - 26z + 22v = 0 \\ 3x + 8y + 24z - 19v = 0 \\ x + 2y + 4z - 3v = 0 \\ 3x + 5y + 6z - 4v = 0 \end{cases} & \text{(c)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_4 = 0 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ülesanne 36.3. Leidke milliste parameetrite $a, b \in \mathbb{R}$ väärtuste korral süsteemil: 1) on üks lahend, 2) on lõpmata palju lahendeid, 3) lahendid puuduvad. Leidke võimalikud lahendid.

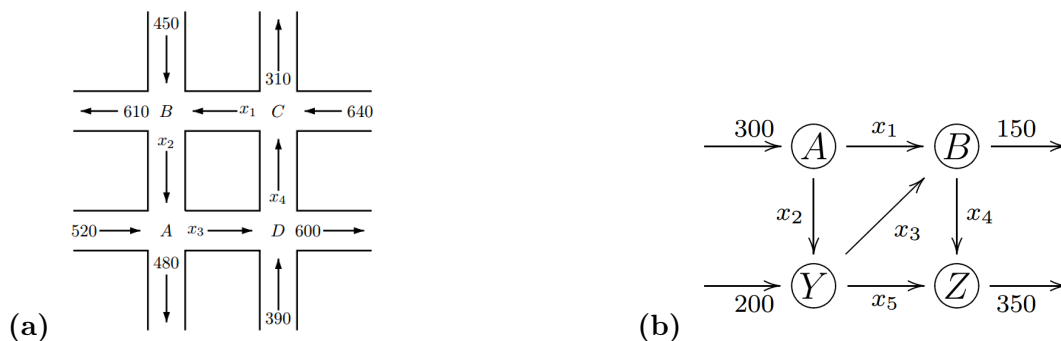
$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} 4x - y + z = 2 \\ -x + y + 2z = -2 \\ 2x + y + az = 1 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} 2x + y + az = 5 \\ -x + y + 2z = -4 \\ 3x + 6y + z = 3 \end{cases} & \text{(g)} \quad & \begin{cases} 6x + 2y + 3w = 16 \\ 3x + y + 2z + aw = 14 \\ x - y - z + 3w = 1 \\ -x + y + 2z - w = 2 \end{cases} \\
 \text{(b)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 = 5 \end{cases} & \text{(e)} \quad & \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x + y + 2z - w = 4 \\ ay + z + 2w = 0 \\ -x + 2y + z + w = -4 \end{cases} & \text{(h)} \quad & \begin{cases} ax + 3y - z = -2 \\ x - y + 2z = 4 \\ -x + y + 7z = 14 \end{cases} \\
 \text{(c)} \quad & \begin{cases} 2x - ay + z = 0 \\ 4x - 2y + az = 0 \\ 6x - 4y + 3z = 0 \end{cases} & \text{(f)} \quad & \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -1 \\ 2x + 2y + az = -1 \end{cases} & \text{(i)} \quad & \begin{cases} 2x + 3y + 2w = 3 \\ x + y + az - 2w = -6 \\ -y + 2z = 9 \\ x + 3z + w = 6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ülesanne 36.4. Leidke millise parameetri $a \in \mathbb{R}$ väärtuste korral on süsteemil: 1) ainult triviaalne lahend, 2) mittetriviaalsed lahendid. Leidke mittetriviaalne lahend.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - 9y + z = 0 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ -8x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + az = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

36.2 Rakenduslikud ülesanded

Ülesanne 36.5. Joonisel on toodud tänavaliikluse keskmised sõidukite arvud (ühes tunnis). Leidke arvud x_1, x_2, x_3, x_4 ja x_5 .



Ülesanne 36.6. (B) Mäletseja päevategevuse võib jagada jämedalt kolmeks tegevuseks: söömine, liikumine (uude söögikohta või kiskja eest põgenemine) ja puhkamine. Olgu söömisest saadav puhasenergia 200 kalorit tunnis. Liikumisel kaotatakse 150 cal/h ja puhkamisel 50 cal/h. Kuidas tuleks ööpäev jaotada nende kolme tegevuse vahel, et energiat kuluks sama palju, kui energiat saadakse? Kas selline jaotus on ühene? Kui loom peab ööpäevas puhkama vähemalt 6 tundi, kuidas peaks siis tegevused olema jaotunud? Kui ülesöömise vastu peaks loom liikuma ja sööma sama pikalt, kuidas on jaotus siis?

Praktikum 1

Vastus 1.1. (a) 8 (b) 8 (c) 3

Vastus 1.2. (a) $x = \pm 3$ (b) $x = -2$ ja $x = 5$ (c) $x = -5$ ja $x = -1$ (d) $x = -\frac{1}{3}$ ja $x = \frac{17}{3}$
(e) $-2 < x < 2$ (f) $-\infty < x < 0$ või $2 < x < \infty$ (g) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

Vastus 1.5. (a) -24 (b) $3/2$ (c) 30 (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) -3 (f) 3

Vastus 1.6. (a) 2 (b) -3 (c) 17 (d) 0

Vastus 1.7. (a) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - 3$ (b) 9

Vastus 1.8. 10

Vastus 1.9. $A(14, 0)$, $B(0, 14/3)$

Vastus 1.10. sirge $18x - 8y - 53 = 0$

Vastus 1.11. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{6}$

Vastus 1.12. $\sqrt{37}$

Vastus 1.13. (a) $\arccos(\sqrt{2}/10)$ (b) $\arccos(44/\sqrt{2170})$ (c) $\arccos(-2/\sqrt{21})$ (d) $\arccos(19/5\sqrt{58})$

Vastus 1.14. (a) nürinurga (b) kollineaarsed (c) risti (d) teravnurga

Vastus 1.16. $\pi/3$

Vastus 1.17. $\pi/4$

Praktikum 2

Vastus 2.1. (a) $6\sqrt{3}$ (b) 28 (c) 0 (d) 0

Vastus 2.2. $(5; 9; 17)$, $\vec{0}$, $17(5; 9; 17)$

Vastus 2.3. -15

Vastus 2.4. (a) $2\sqrt{77}$ (b) $5\sqrt{3}$

Vastus 2.5. $72\sqrt{2}$

Vastus 2.6. $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{c} = \pm(\sqrt{5}/5)(\vec{a} \times \vec{b})$

Vastus 2.7. $(-8, 7, 5)$

Vastus 2.8. $(\sqrt{5}/25)(6, -5, -8)$

Vastus 2.9. (a) -48 (b) -30 (c) -24

Vastus 2.10. $V = 3, h_D = 6/\sqrt{59}$

Vastus 2.11. $D(0, 8, 0), D(0, -7, 0)$

Praktikum 3

Vastus 3.1. (a) $2y - 5z + 7 = 0$ (b) $3x + 4z - 9 = 0$ (c) $5x - 2y + 1 = 0$

Vastus 3.2. (a) $4x - y - 14z = 0$ (b) $x - y - z + 2 = 0$ (c) $3x + 3y + z - 8 = 0$

Vastus 3.3. (a) $2x + 3y - 5z + 30 = 0$ (b) $x - 4y - 7z + 12 = 0$ (c) $4x - y - 3z + 20 = 0$

Vastus 3.4. $L(-4/11; -5/11; 13/11)$

Vastus 3.5. $x - 2y + 3z - 8 = 0$

Vastus 3.6. xy -tasand: $\arccos(|C|/|\vec{n}|)$, xz -tasand: $\arccos(|B|/|\vec{n}|)$, yz -tasand: $\arccos(|A|/|\vec{n}|)$, $\vec{n} = (A; B; C)$

Vastus 3.7. (a) $\pi_1 \perp \pi_2$ (b) $\varphi = \pi/4$ (c) $\pi_1 \parallel \pi_2$

Vastus 3.8. $11x - 2y - 15z - 3 = 0$

Vastus 3.9. $x + 20y + 7z - 12 = 0$, $x - z + 4 = 0$

Vastus 3.10. (a) 1 (c) 10 (b) $\frac{25}{3}$

Vastus 3.11. $AB: \begin{cases} x - 2 = 0 \\ 8y + 3z - 17 = 0 \end{cases}$, $AC: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-8}$, $BC: \begin{cases} y - 4 = 0 \\ z + 5 = 0 \end{cases}$

Vastus 3.12. (a) $\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{0}$ ehk $\begin{cases} y - 4 = 0 \\ z + 7 = 0 \end{cases}$ (b) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+7}{4}$ (c) $\frac{x+3}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+7}{1}$ ehk $\begin{cases} x + 3 = 0 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$ (d) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+7}{8}$

Vastus 3.13. $\frac{x-2}{37} = \frac{y-3}{-25} = \frac{z-4}{-32}$

Vastus 3.14. $P_1(17/10; 0; 2/5)$, $P_2(-31/10; 0; 14/5)$

Vastus 3.15. (a) $\arcsin(\sqrt{26/35})$, $L(0; 0; -2)$ (b) paralleelsed, ei lõiku (c) $\arcsin(3/(2\sqrt{3003}))$, $L(2; 4; 6)$

Praktikum 4

Vastus 4.2. (a) $x = -\frac{1}{2}$, $y = 3$ (b) $x = \pm\sqrt{2}$, $y = 1$

Vastus 4.3. (a) 42 (b) $\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{2}$ (d) 2 (e) 5 (f) 2 (g) 12 (h) 2

Vastus 4.5. (a) 1 (b) $1 + 2i$ (c) 0 (d) -1 (e) 0 (f) 4096 (g) $-1 + 6i$ (h) $-\frac{7}{8} + 4i$

Vastus 4.6. (a) $z_1 + z_2 = 3 - 4i$, $z_1 - z_2 = 3 + 4i$, $z_1 \cdot z_2 = -12i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{4}i$, $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$, $\overline{z_1} = 3$, $\overline{z_2} = 4i$.

(b) $z_1 + z_2 = 2$, $z_1 - z_2 = -2i$, $z_1 \cdot z_2 = 2$, $\frac{z_1}{z_2} = -i$, $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$, $\overline{z_1} = z_2 = 1 + i$, $\overline{z_2} = z_1 = 1 - i$.

(c) $z_1 + z_2 = -2 + 3i$, $z_1 - z_2 = 4 - i$, $z_1 \cdot z_2 = -5 - i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1 - 5i}{13}$, $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{13}$, $\overline{z_1} = 1 - i$, $\overline{z_2} = -3 - 2i$.

(d) $z_1 + z_2 = 5 - 4i$, $z_1 - z_2 = -1 - 6i$, $z_1 \cdot z_2 = 11 - 13i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{10} - \frac{17i}{10}$, $|z_1| = \sqrt{29}$, $|z_2| = \sqrt{10}$, $\overline{z_1} = 2 + 5i$, $\overline{z_2} = 3 - i$.

(e) $z_1 + z_2 = 5 - 3i$, $z_1 - z_2 = -1 - 11i$, $z_1 \cdot z_2 = 34 - 13i$, $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{22}{25} - \frac{29i}{25}$, $|z_1| = \sqrt{53}$, $|z_2| = 5$, $\overline{z_1} = 2 + 7i$, $\overline{z_2} = 3 - 4i$.

(f) $z_1 + z_2 = -11 - 5i$, $z_1 - z_2 = 3 + 3i$, $z_1 \cdot z_2 = 24 + 23i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{32}{65} - \frac{9i}{65}$, $|z_1| = \sqrt{17}$, $|z_2| = \sqrt{65}$, $\overline{z_1} = -4 + i$, $\overline{z_2} = -7 + 4i$.

(g) $z_1 + z_2 = \frac{11}{10} + \frac{27i}{10}$, $z_1 - z_2 = \frac{9}{10} + \frac{33i}{10}$, $z_1 \cdot z_2 = 1$, $\frac{z_1}{z_2} = -8 + 6i$, $|z_1| = \sqrt{10}$, $|z_2| = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\overline{z_1} = 1 - 3i$, $\overline{z_2} = \frac{1}{10} + \frac{3i}{10}$.

(h) $z_1 + z_2 = 2i$, $z_1 - z_2 = 0$, $z_1 \cdot z_2 = -1$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\overline{z_1} = -i$, $\overline{z_2} = -i$.

Praktikum 5

Vastus 5.1. (a) $z = 1 + 0i = 1$, $z = e^{i0} = 1$ (b) $z = 2\sqrt{3} + 2i$, $z = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ (c) $z = -4\sqrt{3} - 4i$, $z = 8e^{i\frac{7\pi}{6}}$ (d) $z = 0 - 3i$, $z = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Vastus 5.2. (a) $\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i$ (b) $64(\cos 0 + i\sin 0) = 64$ (c) $\cos(-1) + i\sin(-1) \approx 0.54 - 0.84i$

(d) $2(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}) = 1 + \sqrt{3}i$ (e) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}i$ (f) $2(\cos \pi + i\sin \pi) = -2$

(g) $\frac{1}{e}(\cos 1 + i\sin 1) \approx 0.199 + 0.31i$ (h) $\tan 1(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = i \tan 1$

Vastus 5.3. (a) $z = 8(\cos 0 + i\sin 0)$ (b) $z = 6\left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}\right)$ (e) $z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6}\right)$ (f) $z = \sqrt{12}\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i\sin \frac{7\pi}{6}\right)$

(i) $z = \sqrt{53}(\cos(-15.95^\circ) + i\sin(-15.95^\circ))$ (k) $z = 12\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i\sin \frac{5\pi}{3}\right)$

Vastus 5.4. (a) $z_1 \cdot z_2 = 8e^{i\frac{7\pi}{6}} = 8(\cos \frac{7\pi}{6} + i\sin \frac{7\pi}{6}) \approx -6.928 - 4i$, $\frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}) = 2i$

(b) $z_1 \cdot z_2 = 3e^{i3\theta} = 3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 3\cos 3\theta + 3i\sin 3\theta$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{3}e^{i\theta} = \frac{1}{3}(\cos \theta + i\sin \theta) = \frac{1}{3}\cos \theta + i\frac{1}{3}\sin \theta$

Vastus 5.5. (a) 1 (b) $-17 + 17i$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ (d) $\cos 87^\circ + i\sin 87^\circ \approx 0.052 + 0.999i$

Vastus 5.6. $x = 0 \vee y = 0$

Vastus 5.7. $z^2 - 4z + 5 = 0$

Vastus 5.10. $180 - 30i$

Vastus 5.11. $\frac{353}{65} + \frac{101i}{65}$

Vastus 5.12. $Q = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ ja $R = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$. Viige punkt $2 + i$ ringjoonele raadiusega $r = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ja korrutage/jagage saadud punkt ühikringi elemendiga $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Vastus 5.13. $d = 6.36 + 5.47i = 8.39(\cos 40.70^\circ + i\sin 40.70^\circ)$

Vastus 5.14. $V = 43.3(\cos 165^\circ + i\sin 165^\circ)$, $|V| = 43.3$ volti.

Praktikum 6

Vastus 6.1. (a) $z = \frac{1}{4096}$ (b) $288\sqrt{3}(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -432 + 144\sqrt{3}i$ (c) $32(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$

(d) $32(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -16\sqrt{3} + 16i$ (e) -2 (f) $81(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$

(g) $\frac{1}{125}(\cos 105^\circ + i\sin 105^\circ)$ (h) $36e^{\frac{137\pi}{90}i}$ (i) 256

(j) $e^{\frac{17\pi}{9}i}$ (k) $e^{\frac{2\pi}{3}i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (l) 1.

Vastus 6.2. $e^{i\frac{\pi}{7}}, e^{i\frac{3\pi}{7}}, e^{i\frac{5\pi}{7}}, e^{i\pi}, e^{i\frac{9\pi}{7}}, e^{i\frac{11\pi}{7}}, e^{i\frac{13\pi}{7}}$.

Vastus 6.3. $(1 + i\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} = \left(2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{5}} = \left\{\sqrt[5]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right) \mid k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\right\}$.

Vastus 6.4. $\sqrt[4]{-64} \in \{2 + 2i, 2 - 2i, -2 + 2i, -2 - 2i\}$.

Vastus 6.5. $\sqrt[5]{z} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2\pi k}{5}\right)\right)$, $k = 0, 1, \dots, 4$.

Vastus 6.8. (a) $z \in \{1, i, -1, -i\}$ (c) $z \in \{\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ, \cos(-135^\circ) + i\sin(-135^\circ)\}$ (m) $z \in \{2i, -2i, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i\}$

Praktikum 7

Vastus 7.3. Ei kehti.

Vastus 7.9. (a) $X = [-4, \infty)$, $Y = [0, \infty)$ (b) $X = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, $Y = [0, \infty)$

(c) $X = (6, \infty)$, $Y = \mathbb{R}$ (d) $X = [-2, 1) \setminus \{0\}$, $Y = \mathbb{R} \setminus [\sqrt{3}, \frac{1}{\log 3})$

(e) $X = (-\infty, 1) \cup (1, 2)$, $Y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (f) $X = [0, 1]$, $Y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(g) $X = (-\infty, -3] \cup [1, \infty)$, $Y = [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

Vastus 7.10. (a) Paaritu (b) Paaris (c) Paaris (d) Paaritu (e) Pole paaris ega paaritu

Vastus 7.11. (a) $T = \pi$ (b) $T = \frac{2\pi}{3}$ (c) Ei ole perioodiline funktsioon (d) $T = 2\pi$

Praktikum 8

Vastus 8.1. (a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, \infty)$ (b) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$, $x \in (0, \infty)$ (c) $f^{-1}(x) = \log(x-1)$, $x \in (1, \infty)$

(d) $f^{-1}(x) = 2 - 10^{x-1}$, $x \in (-\infty, \infty)$ (e) $f^{-1}(x) = 3 \sin 2x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ (f) $f^{-1}(x) = 1 - \cos(x-1)$, $x \in [1, 1+\pi]$

Vastus 8.3. (a) $y = x - 5 + \ln(x - 5)$ (b) $x = \ln^5 y + \ln y$

Vastus 8.4. (a) $y = e^x + \sin(x)$ (b) $y = x \pm 2$

Vastus 8.2. (a) Üks-ühene (b) Üks-ühene (c) Ei ole üks-ühene (d) Üks-ühene (e) Üks-ühene (f) Ei ole üks-ühene

Vastus 8.9. (a) 47 (b) 115/7 (c) -1 (d) 19

Vastus 8.11. Siiriuse tegelik heledus on ligikaudu 912 korda suurem kui veel silmaga nähtavatel tähtedel.

Vastus 8.12. $A = A_0 \cdot 0,8^{0,1t}$

Vastus 8.14. $b^b = 1000$

Praktikum 9

Vastus 9.1. (a) 3 (b) 3 (c) 3 (d) 3 (e) 2 (f) ei eksisteeri

Vastus 9.2. (a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ei eksisteeri, sest $f(x)$ pole määratud, kui $x < 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$.

Vastus 9.4. Võrdus ei kehti, sest $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = \infty$, aga $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{1/x} = 0$.

Vastus 9.5. (a) 0 (b) 3 (c) $-\frac{1}{\pi}$ (d) 0 (e) 0 (f) 4 (g) $-\infty$ (h) -1 (i) ei eksisteeri (j) 2

Vastus 9.6. (a) 2 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{1}{3}$ (d) -4 (e) $\frac{3}{8}$ (f) $-\frac{1}{3}$ (g) $-\frac{1}{2}$ (h) $-\frac{1}{3}$ (i) $-\frac{1}{2}$ (j) ei eksisteeri (k) $-\infty$ (l) ei eksisteeri

Vastus 9.7. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{32}$ (c) $-\frac{1}{8}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{8}{3}$ (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) 0 (i) $-\frac{2}{5}$

Vastus 9.8. (a) 3 (b) ∞ (c) 2 (d) -1 (e) $-\log 2$ (f) $-\frac{1}{8}$ (g) $\frac{2}{5}$ (h) 0 (i) ∞

Vastus 9.9. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 4 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 1 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 1 (g) $-\frac{1}{2}$ (h) 10 (i) 0 (j) 1 (k) $\frac{3}{4}$ (l) e^{-1} (m) e^{-3} (n) e^9 (o) e^{-1}

Praktikum 10

Vastus 10.1. (a) $-\frac{1}{12}$ (b) -2 (c) 1 (d) 2 (e) 0 (f) $\frac{3}{5}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) ∞ (i) $-\infty$ (j) ei eksisteeri

Vastus 10.2. Aeg läheneb viiele minutile.

Vastus 10.3. Pindala võib muutuda väärtuste 6 (mm²) ja 36 (mm²) vahel.

Vastus 10.4. $M(0) = m$ ehk kui keha seisab paigal, siis keha mass on võrdne seisumassiga; $M(\frac{c}{2}) = \frac{2m}{\sqrt{3}} \sim 1,15m$ ehk poole valguse kiirusega liikuva keha mass on 1,15 korda suurem kui seisumass; $\lim_{v \rightarrow c^-} M(v) = \infty$ ehk keha kiiruse lähenemisel valguse kiirusele tema mass kasvab tõkestamatult; $\lim_{v \rightarrow c^+} M(v)$ ei eksisteeri, sest pole teada valguse kiirusest suuremat kiirust ja $M(v)$ pole defineeritud, kui $v \geq c$.

Vastus 10.5. Punktmassi liikumise kiirus on 5.

Vastus 10.6. Kui $t \rightarrow \infty$, siis süsihappegaasi tase läheneb 8,4 osakesele miljoni osakese kohta.

Vastus 10.7. $\lim_{r \rightarrow 0^+} R_{3s}(r) = 27N$ ja $\lim_{r \rightarrow \infty} R_{3s}(r) = 0$.

Vastus 10.8. Funktsioon on katkev punktides $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$, mujal on ta pidev

Vastus 10.10. (a) Funktsioon f on katkev punktis $x = 3$, mujal reaalteljel on ta pidev

(b) Funktsioon f on pidev kogu oma määramispiirkonnas $\mathbb{R} \setminus (0, 2]$

(c) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

(d) Funktsioon f on katkev punktis $x = 2$, mujal reaalteljel on ta pidev

(e) Funktsioon f on pidev kogu reaalteljel

Vastus 10.11. (a) $a = 5$ (b) $b = \frac{4}{3}$ (c) $a = -1$ (d) $a = 2$ (e) $a = -1$, $b = 1$

Vastus 10.13. (a) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6(x+h)-1) - (6x-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$

(b) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2(x+h)^2 - 5) - (2x^2 - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4xh + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h) = 4x$

(c) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

(d) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)} - \sqrt{3x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h \cdot (\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{3(x+h)} + \sqrt{3x}} = \frac{3}{2\sqrt{3x}}$

$$\text{(e)} \quad f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \left(-2 \sin \frac{t+x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{t-x}{2}}{t-x} \right) = -2 \cdot \sin \frac{x+x}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\sin x$$

$$\text{(f)} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{xh(x+h)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Praktikum 11

Vastus 11.1. (a) $f'(x) = 15x^4$ (b) $f'(x) = 1 + 2x^{-\frac{2}{3}}$ (c) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 (d) $f'(x) = 2^x \ln 2 - e^x$ (e) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \cos x$ (f) $f'(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$
 (g) $f'(x) = -147x^{-8} - \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (h) $f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ (i) $f'(x) = 8x^{\frac{1}{3}}$

Vastus 11.2. (a) $f'(x) = -\frac{6x}{(x^2-1)^2}$ (b) $f'(x) = x^{a-1}b^x(a+x \ln b)$ (c) $f'(x) = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$
 (d) $f'(t) = t^2 \sin t$ (e) $f'(u) = \sin u(\ln u - \frac{1}{u^2})$ (f) $f'(x) = \frac{30}{(x-6)^2}$
 (g) $f'(x) = e^x a^x$ (h) $f'(x) = \frac{\tan \alpha(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \ln x + 1$ (i) $f'(x) = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
 (j) $f'(x) = \frac{a^2}{x^2+1} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Vastus 11.3. (a) $f'(x) = 36x^3 - 74x$ (b) $f(x) = (3x-1)(3x+1)(x^2-4) = 9x^4 - 37x^2 + 4$

Vastus 11.4. (a) $f'(1) = 60e$ (b) $f'(-1) = \frac{71}{100}$

Vastus 11.5. $\frac{dP}{df} = \frac{2kf(\omega^2 - \omega f + a^2)}{(\omega^2 - 2\omega f + f^2 + a^2)^2}$

Vastus 11.6. $\frac{dt}{dN} = \alpha(\ln N + 1)$, kus α on vördetegur

Vastus 11.7. $\frac{dT}{dV} = \frac{2ab - aV + pV^3}{RV^3}$.

Vastus 11.8. (a) $20(4x-3)^4 + 18x$ (b) $\frac{60x^5}{\sqrt[3]{3x^6-4}}$ (c) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
 (d) $\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\frac{x+1}{x^2+x \ln x}$ (f) $\frac{6\sqrt{x} \ln 6}{2\sqrt{x}} + 6 \cdot 4^{6x} \ln 4$
 (g) $-\frac{1}{4\left(\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$ (h) $\frac{0.25e^{0.5x}(x-2)}{x^2}$

Vastus 11.9. (a) $-\frac{14(2x+1)}{(3x-2)^3}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2x+1}(4x+1)^{3/2}}$ (c) $\frac{12}{4x-3}$
 (d) $60x^4(\sin 4x^5)^2 \cos 4x^5 + 9 \sin(2-9x)$ (e) $\frac{7 \tan 7x}{\cos 7x} + \frac{7 \cot 7x}{\sin 7x}$ (f) $-\frac{3 \sin 6x}{1+2(\sin 2x)^2} - \frac{4 \sin 4x(\cos 3x)^2}{(1+2(\sin 2x)^2)^2}$
 (g) 0 (h) $-\frac{3}{\sqrt{2-x}\sqrt{x-1}}$ (i) $-\frac{1}{x^2+1}$ (j) $\frac{\arccos x}{(x^2+1) \arctan x} - \frac{\ln \arctan x}{\sqrt{1-x^2}}$

Vastus 11.10. $u'(3) = \frac{2f(3)f'(3) + 4g(3)g'(3)}{2\sqrt{f(3)^2 + 2g(3)^2}} = -\frac{22}{\sqrt{41}}$

Vastus 11.11. $L = \sqrt{a \cdot m}$

Vastus 11.12. $R_{\text{kask}}(t) = 0,3041$, $R_{\text{vahter}}(t) = 0,2243$, järelikult sookask taastoodab ennast efektiivsemalt.

Vastus 11.13. $P'(V) = -4.5 \text{ kPa/cm}^3$

Vastus 11.14. (a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $\cos x$ (c) 0 (d) $\frac{2 \tan x}{(\cos x)^2}$

Vastus 11.15. (a) $f''(x) = 4x^2 u''(x^2) + 2u'(x^2)$ (b) $f'''(x) = e^{3x} u'''(e^x) + 3e^{2x} u''(e^x) + e^x u'(e^x)$
 (c) $f'''(x) = 6u'(x)u''(x) + 2u(x)u'''(x)$ (d) $f''(x) = 4xu''(x^2) + \frac{2x^2 u'(x^2) - 2u(x^2)}{x^3}$

Vastus 11.16. (a) 4 (b) $-\frac{93}{4}$

Vastus 11.17. (a) $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ (b) $(4q^3 + 6q)e^{q^2}$ (c) $\frac{108}{(3t+2)^4}$

Vastus 11.18. (a) $y = 6x - 4$, $y = -\frac{1}{6}x + 8\frac{1}{3}$ (b) $y = 4x - 18$, $y = -\frac{1}{4}x - 5\frac{1}{4}$ (c) $y = -6x + 13$, $y = \frac{1}{6}x - 5\frac{1}{2}$ (d) $y = \frac{1}{2}x + 1$,
 $y = -2x - 1\frac{1}{2}$

Vastus 11.19. (a) $y = 2x - 4$ (b) $y = x - 4$ (c) $y = -\frac{1}{24}x + \frac{129}{16}$ (d) $y = 4x + \frac{97}{32}$

Vastus 11.20. (b) $y = -x + 4$

Praktikum 12

Vastus 12.1. (a) ∞ (b) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{5}{3}$ (e) 0 (f) 0 (g) $\frac{1}{2}$ (h) $\frac{1}{2}$ (i) 2 (j) 0 (k) 1 (l) ∞

Vastus 12.2. (a) ∞ (b) 0 (c) 0 (d) 0 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 0 (g) 0 (h) $\frac{2}{\pi}$ (i) ei leidu

Vastus 12.3. (a) $dy = (5x^4 + 4)dx$ (b) $dy = 6x dx$ (c) $dT = -\frac{10}{r^6} dr$
 (d) $dy = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{8x^2} \right) dx$ (e) $dy = (e^x + xe^x) dx$ (f) $dR = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{u}(1+2u)^{3/2}} du$
 (g) $dy = \frac{6(1-6x)}{\sqrt{1-4x}} dx$ (h) $dy = \frac{2}{(5x+2)^2} dx$ (i) $dy = \frac{3x-4}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} dx$

Vastus 12.4. (a) $dy = 12$ (b) $dy = 3810,24$ (d) $df(x) = 0,6257$ (f) $df(x) = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Vastus 12.6. $\Delta S \approx dS = 400\pi$

Vastus 12.8. $\Delta V \approx dV \approx 185 \text{ L}$

Vastus 12.9. (a) 1,04 (b) 3,99 (c) 251,1 (d) 0,72 NB! Argumendi muut peaks olema radiaanides. (e) 1,04 (i) 0,81

Vastus 12.10. (a) $f(x) \approx \frac{11}{3}x - \frac{4}{3}$

Vastus 12.11. $f(x) \approx -\frac{240}{169}x + \frac{550}{13}$

Praktikum 13

Vastus 13.1. 500π

Vastus 13.2. $\frac{5}{36\pi}$ cm/min.

Vastus 13.4. (a) kasvav $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ ning kahanev $[0, 2]$ (b) kasvav $(-\infty, -2]$ ja $[0, 2]$ ning kahanev $[-2, 0]$ ja $[2, \infty)$
 (c) kasvav kogu reaalteljel (d) kahanev $(0, 1)$ ja $(1, e]$ ning kasvav $[e, \infty)$
 (e) kahanev kogu määramispiirkonnas $[-2, 0]$ (f) kasvav $(0, 1]$ ning kahanev $[1, \infty)$

Vastus 13.5. (a) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, 12)$
 (b) $(-\infty, 4)$ on graafik kumer ja $(4, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunktid puuduvad
 (c) $(-\infty, 0]$ on graafik nõgus ja $[0, \infty)$ on graafik kumer, käänupunkt on $(0, 0)$
 (d) $(0, \frac{1}{e})$ on graafik kumer ja $[\frac{1}{e}, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(\frac{1}{e}, -\frac{3}{2e^2})$
 (e) $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$ ja $(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-\frac{1}{2}})$
 (f) $(-\infty, 2]$ on graafik kumer ja $[2, \infty)$ on graafik nõgus, käänupunkt on $(2, -16)$
 (g) $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on graafik kumer ning $[-1, 1]$ on graafik nõgus, käänupunktid on $(-1, \ln 2)$ ja $(1, \ln 2)$
 (h) $(-\infty, -2]$ ja $[1, \infty)$ on graafik nõgus ning $[-2, 1]$ on graafik kumer, käänupunktid on $(-2, -48)$ ja $(1, -9)$

Vastus 13.6. (a) Sobib näiteks $f(x) = -\arctan x - 1$. (b) Sobib näiteks $f(x) = 1 - e^{1-x}$. (c) Sobib näiteks $f(x) = 1 - \arctan x$.
 (d) Sobib näiteks $f(x) = \frac{2}{27} \cdot (x^4 - 4x^3 + 16x + 11)$.

Vastus 13.7. (a) $f(-1) = 2$ on lokaalne maksimum, $f(1) = -2$ on lokaalne miinimum
 (b) $f(-2) = 16$ ja $f(2) = 16$ lokaalne maksimum ning $f(0) = 0$ on lokaalne miinimum
 (c) $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ lokaalne miinimum
 (d) $f(0) = 0$ on lokaalne miinimum ja $f(2) = \frac{4}{e^2}$ on lokaalne maksimum
 (e) punktis $(1, 0)$ on lokaalne miinimum ja punktis $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$ lokaalne maksimum
 (f) $f(-1) = 1$ lokaalne maksimum ja $f(0) = -3/2$ lokaalne miinimum (NB! punktis 0 tuletist ei eksisteeri!)
 (g) lokaalsed ekstreemumid puuduvad
 (h) $f(0) = 2$ lokaalne maksimum ja $f(2) = 2^{2/3}$ lokaalne miinimum

Vastus 13.8. (a) globaalne maksimum $f(5) = 18$ ja globaalne miinimum $f(1) = 2$
 (b) globaalne maksimum $f(3) = 19$ ja globaalne miinimum $f(-2) = -1$ ja $f(1) = -1$
 (c) globaalne miinimum $f(1) = 1$ ja globaalne maksimum $f(e) = e - 1$
 (d) globaalne miinimum $f(1) = 0$ ja globaalne maksimum $f(-1) = \pi$
 (e) globaalne maksimum $f(0) = 1$
 (f) $f(1) = 1/2$ globaalne maksimum ja $f(-1) = -1/2$ globaalne miinimum

Vastus 13.9. $V(x) = 4x(6-x)(4-x)$, maksimum on punktis $x \approx 1.57$

Vastus 13.10. Ruumala tuleb 52 liitrit, mõõtudega $57.14 \times 40 \times 22.86$ cm

Vastus 13.11. $r = \frac{2a}{3}$

Vastus 13.12. Valgusallikas peab asuma $2/3$ vahemaad ehk 66.7 meetrit vasakust allikast kaugemal

Vastus 13.13. $m = 9$ mg

Vastus 13.14. (a) $x = 2, y = 0$ (b) $x = -2, x = 2, y = 1$ (c) $x = 1$, kaldasümptoot ei ole (d) $x = -1, y = 2x - 2$ (e) $x = 0, y = 0, y = 1$ (f) $x = 0, y = 2x$

Vastus 13.15. (a) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f kasvav ning intervallides $[-1, 0)$

ja $(0, 1]$ on f kahanev, intervallis $(0, \infty)$ on f graafik nõgus ja intervallis $(-\infty, 0)$ graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$ ja kaldasümptoodid puuduvad

(b) määramispiirkond on $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, intervallides $(-\infty, -2]$ ja $(0, \infty)$ on f kahanev ning intervallis $[-2, 0)$ on f kasvav, intervallis $(-\infty, -3]$ on f graafik kumer ning intervallides $[-3, 0)$ ja $(0, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, rõhtasümptoot on $y = 0$

(c) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kasvav ja intervallis $[0, \infty)$ on f kahanev, intervallis $[-1, 1]$ on f graafik kumer ning intervallides $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoote ei ole, rõhtasümptoot on $y = 0$

(d) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, \frac{1}{e}]$ on f kahanev ja intervallis $[\frac{1}{e}, \infty)$ on f kasvav, intervallis $(0, 1]$ on f graafik nõgus ja intervallis $[1, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptoot on $x = 0$, kaldasümptoodid puuduvad

(e) määramispiirkond on $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, intervallis $(-\infty, 0]$ on f kahanev ja intervallis $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptoodid puuduvad, kaldasümptoodid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(f) määramispiirkond on $\mathbb{R}$, intervallides $(-\infty, 0]$ ja $[1, 2]$ on f kahanev ning intervallides $[0, 1]$ ja $[2, \infty)$ on f kasvav, intervallides $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$ ja $[2, \infty)$ on f graafik kumer, püstasümptoodid puuduvad, kaldasümptoodid on $y = x - 1$ ja $y = -x + 1$

(g) määramispiirkond on $(0, \infty)$, intervallis $(0, 1]$ on f kasvav ning intervallis $[1, \infty)$ on f kahanev, intervallis $(0, \sqrt{e})$ on f graafik kumer ning intervallis $(\sqrt{e}, \infty)$ on f graafik nõgus, püstasümptoot on $x = 0$, rõhtasümptoot on $y = 0$

Vastus 13.16. v määramispiirkond on $[r_0, 1]$, v kasvav, kumer

Praktikum 14

Vastus 14.2. (a) $2x^6 + 3x^2 + C$ (b) $\frac{8}{3}x^{3/2} + 3x + C$ (c) $x^{5/2} + C$ (d) $(R^2 + 1)^3 + C$

Vastus 14.4. (a) $\frac{y^4}{12} + C$ (b) $8\sqrt{x} + C$ (c) $2x^{5/2} + C$ (d) $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2x^{5/2} + C$ (e) $6x^{1/3} + \frac{x}{9} + C$
 (f) $\frac{t^3}{6} + \frac{2}{t} + C$ (g) $-\frac{1}{3x^3} + \frac{2}{3x\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{4} + C$ (h) $3x - 4\ln|x| - 10x^{-1/2} + C$ (i) $\frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} - \frac{6x\sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{15\sqrt[15]{x^{13}}}{13} + C$

Vastus 14.5. (a) $\frac{10^x}{\ln 10} + ex + C$ (b) $\frac{e^{2x}}{2} + (2\ln 2)e^x + (\ln^2 2)x + C$ (c) $-\frac{1}{e^x} + C$ (d) $-\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

Vastus 14.6. (a) $x - \arctan x + C$ (b) $\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C$ (c) $\arcsin x + C$ (d) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2} \arcsin x + C$

Vastus 14.7. (a) $x + C$ (b) $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x + C$ (c) $\tan x - x + C$ (d) $x \sin \alpha - 3 \sin x + C$ (siin kasutati omadust $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$)
 (e) $-2 \cot 2x + C$

Vastus 14.8. (a) $3x + C$ (b) $\frac{x^2}{2} + C$ (c) $\frac{4}{3}x^{3/2} + C$ (d) $-d\frac{1}{2x^2} + C$
 (e) $-3\ln|x| + C$ (f) $\tan x + C$ (g) $\frac{1}{2}e^2x^2 + C$ (h) $\frac{1}{3} \arcsin 3x + C$

Vastus 14.9. (a) $\sin(x + 2) + C$ (b) $-\frac{1}{3} \cos 3x + C$ (c) $\frac{1}{24}(3x - 2)^8 + C$ (d) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(7 - 2x)^4} + C$
 (e) $-\frac{1}{2}e^{-2x+8} + C$ (f) $\frac{1}{3} \ln|3x + 5| + C$ (g) $\frac{1}{2} \tan(2x - 5) + C$ (h) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Vastus 14.10. (a) $\sqrt{x^2 + 5} + C$ (b) $\frac{2 \cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3} + C$ (c) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$ (d) $7 \arcsin x - 2\sqrt{1 - x^2} + C$ (e) $\frac{3}{4} \ln^2 x + C$ (f) $\ln|\ln x| + C$

Vastus 14.11. (a) $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ (b) $-\ln|\cos x| + C$ (c) $\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ (d) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$

Vastus 14.12. (a) $-\frac{1}{3} \ln|5 - e^{3x}| + C$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$ (c) $x - \sqrt{5} \arctan \frac{x}{\sqrt{5}} + C$ (d) $\arcsin \frac{x}{2} + C$
 (e) $\arctan(x + 1) + C$ (f) $-2\sqrt{2 + \cos^2 x} + C$ (g) $\frac{1}{6} \sin^3 x^2 + C$ (h) $\ln|\ln \ln x| + C$
 (i) $4\sqrt{z^2 - 2z} + C$ (j) $\frac{3}{5}(x + 2)^{5/3} + C$ (k) $\frac{1}{27}(x^3 - \frac{3}{2}x^2)^9 + C$

Vastus 14.13. $F(t) = \frac{6}{\pi} e^{\sin(\pi t)} - \frac{6}{e\pi}$

Vastus 14.14. $p(x) = 600\sqrt{60x - x^2} - 5000$

Vastus 14.15. (a) $-\frac{2}{15}(1 - x)^{3/2}(3x + 2) + C$ (b) $-\frac{1}{15}(1 - x^2)^{3/2}(3x^2 + 2) + C$ (c) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{2} + C$
 (d) $\frac{1}{2} \ln|\tan x| + C$ (e) $\frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|\cos x| + C$ (f) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$

Vastus 14.16. (a) $2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C, t = \sqrt{x}$ või $t = 1 + \sqrt{x}$ (b) $2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C, t = \sqrt{e^x - 1}$
 (c) $4\left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(1 + \sqrt[4]{x^3})\right] + C, t = \sqrt[4]{x^3}$ (d) $\frac{4}{21}(1 + e^x)^{3/4}(3e^x - 4) + C, t = \sqrt[4]{1 + e^x}$

Praktikum 15

Vastus 15.1. (a) $e^x(x-1) + C$ (b) $x \sin x + \cos x + C$ (c) $\frac{1}{4} \sin(2x+1) - \frac{x}{2} \cos(2x+1) + C$
 (d) $-\frac{1+x \ln 3}{3^x \ln^2 3} + C$ (e) $x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (f) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
 (g) $x \ln x - x + C$ (h) $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctan x + C$ (i) $\frac{x \ln x}{x+1} - \ln(x+1) + C$ (alternatiivne kuju $\ln \left| \frac{x}{x+1} \right| - \frac{\ln x}{x+1} + C$)

Vastus 15.2. (a) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$ (b) $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$ (c) $-\frac{1}{8e^{2x}}(4x^3 + 6x^2 + 6x + 3) + C$
 (d) $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$ (e) $\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x - 2 \cos x) + C$ (f) $\frac{1}{2}x(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$

Vastus 15.3. $-(4x^2 + 32)e^{-x^2/8} + C$

Vastus 15.4. $\int dx - \int dx = C$

Vastus 15.5. (a) $2 \ln|1-x| - \ln|x+1| + C$ (b) $3 \ln|x+1| - 2 \ln|x| + C$ (c) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$
 (d) $2 \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + \frac{3}{x-2} + C$ (e) $\ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + \frac{1}{t} + C$ (f) $\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{2}{x} + C$
 (g) $\frac{17}{2} \ln|2y-1| - 8 \ln|y-1| + C$ (h) $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| + C$ (i) $\frac{2}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{1+x} \right| + C$
 (j) $-\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} + 3 \ln \left| \frac{x}{1-x} \right| + C$ (k) $\ln \frac{x^2}{x^2+2x+2} - \arctan(x+1) + C$ (l) $\ln \frac{(x-2)^2}{x^2+4} - 2 \arctan \frac{x}{2} + C$

Vastus 15.6. Tegemist on liigmurruga

Vastus 15.7. (a) $x + \ln|x| - 4 \ln|x+3| + C$ (b) $x + \frac{1}{x} + 2 \ln|1-x| - \ln|x| + C$ (c) $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x-1| + C$ (d) $\frac{x^2}{2} + x + 3 \ln|x+1| - 8 \ln|x+2| + C$

Vastus 15.8. (a) $\frac{2 \sin x - 3}{(3 - \sin x)^2} + C$ (b) $\frac{3}{x+2} + \ln|x^2 + x - 2| + C$ (c) $\ln(x^2 + 6x + 10) + \arctan x - 6 \arctan(x+3) + C$
 (d) $\frac{1}{r^2+1} + \ln(r^2+1) + C$ (e) $\frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln(x^2+x+1) + C$ (f) $x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C$ (g) $\ln|x+2| - \frac{1}{2(x+2)^2} + C$
 (h) $\frac{3}{2} \ln(x^2+2) + 2\sqrt{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ (i) $\frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

Praktikum 16

Vastus 16.2. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (b) ja (c).

Vastus 16.3. Diferentsiaalvõrrandi lahendid on (a), (d), (e), (f), (h) ja (i).

Vastus 16.5. (a) $y = 2x + C$ (b) $y = \sin x + C$ (c) $y = \ln|x| + C$ (d) $y = e^x + C$
 (e) $y = \frac{1}{5}x^5 + C$ (f) $y^2 = x^2 + 10x + C$

Praktikum 17

Vastus 17.1.

(a) $y = \ln|x| + x + C$ (b) $y^2 = 2x + C$

(c) $\sqrt{y} = x + C, y = 0$ (d) $y = Cx - 1$ (e) $y^2 = x^2 - 2x - 2\ln|x| + C$ (f) $y - 2 = C(x + 1)$ (g) $\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \ln|x - 1| + C$

(h) $y = \frac{1}{1 + Cx}$ (i) $(y - 1)(x + 1) = Cxy$ (j) $\arcsin y - \arctan x = C$ (k) $\arcsin y - \arcsin x = C$ (l) $\frac{t+x}{tx} - \ln\left|\frac{x}{t}\right| = C$

Vastus 17.2. (a) $1 + y^2 = C(x^2 - 1); C = 2/3$ (b) $e^x + e^{-y} = C; C = 2$ (c) $y = (C + 3x(1 - x))^{1/3}; C = 5$

(d) $x^2 + y^2 = \ln Cx^2; C = e$ (e) $y = \frac{1+x}{1-x}$

Vastus 17.4. $10^7 e^{kt}$

Vastus 17.6. $[H_2O_2]_t = 10e^{-0,51t} \frac{\text{mol}}{1 \cdot \text{min}}, t_{1/2} = \frac{\ln 2}{0,51} \approx 1,36 \text{ min}$

Vastus 17.8. $x(t) = \frac{1000e^{4t}}{499 + e^{4t}}$ inimest; $t_{1/2} = \frac{\ln 499}{4} \approx 1,6$ päeva

Praktikum 18

Vastus 18.2. (a) $y = Cx^3 - x^2$ (b) $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2$ (c) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$ (d) $y = e^{\sin x} \left(\frac{x^3}{3} + C \right)$

(h) $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{xe^x}$ (i) $y = Cx - 1$ (j) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$ (k) $y = \frac{1}{2}(x + 1)^4 + C(x + 1)^2$

(l) $y = x - 1 + Ce^{-x}$ (p) $y = \frac{1}{x}(e^x + C), C = ba - e^a$ (q) $y = \frac{x+1}{x}(x - \ln|x+1| + C), C = \ln 2 - 1$

Vastus 18.6. $z = \frac{ak_1k_2}{k_2 - k_1} \left[\frac{e^{-k_1t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_1} - \frac{e^{-k_2t} - e^{-k_3t}}{k_3 - k_2} \right]$

Praktikum 19

Vastus 23.1. 245 cm ja 245 cm

Vastus 23.2. (a) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 9, parempoolsed 18 ja keskmised 13.5. Kui $n = 10$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 12.15, parempoolsed 14.85 ja keskmised 13.5.

(d) Kui $n = 3$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.146, parempoolsed 5.146 ja keskmised 4.677. Kui $n = 12$, siis vasakpoolsed ristkülikud annavad 4.540, parempoolsed 4.790 ja keskmised 4.667.

Vastus 23.3. (a) 21 (b) $\frac{9}{2}\pi$ (c) 1 (d) $\frac{\pi}{2}$

Vastus 23.4. (a) 0.648 (b) 7.661 (c) 12.660

Vastus 23.5. 100.027

Vastus 23.6. (a) 6.0 (b) 11.655 (c) 3.392

Vastus 23.7. Trapetsvalemiga 2568.25 ja Simpsoni valemiga 2581.29, täpsem on Simpsoni valem

Vastus 23.8. Trapetsvalemiga 4.322 ja Simpsoni valemiga 4.478

Vastus 23.9. 3.238 m

Vastus 23.10. 452.130

Vastus 23.11. 19.398

Praktikum 20

Vastus 24.1. (a) $85/3$ (b) $4 - \ln 5$ (c) $2 - \pi/2$ (d) $\pi/2 - 1$

Vastus 24.2. (a) 2,5 (b) 4 (c) 4 (d) 3 (e) $9/4$ (f) 32

Vastus 24.3. (a) 0 (b) $\frac{2\pi^5}{5}$ (c) 0

Vastus 24.4. (a) 10,5 (b) $\frac{1}{3} \ln 7$ (c) $\frac{1}{3}(10\sqrt{10} - 1)$ (d) 0 (e) $\frac{\ln^2 2 + \ln^2 5e}{2}$ (f) $-1/6$ (g) $\pi/4$ (h) $2 \ln 2 - 1$ (i) 0

Vastus 24.5. (a) $1/24$ (b) 4 (c) $\pi/2$ (d) $6 - \frac{3}{2} \ln 5$

Vastus 24.6. (a) $5/3$ (b) 2

Praktikum 21

Vastus 25.1. (a) 2π (b) 1 (c) $\sqrt{3} - \pi/3$ (d) $2(48 - 24\pi + \pi^3)$ (e) $0,5(1 + e^\pi)$ (h) $(-2 + \pi + 2\ln 2)/12$

Vastus 25.2. (a) $8 - \pi$ (b) $1 + \ln\left(\frac{512}{625}\right)$ (c) $\frac{7}{4} + \ln\left(\frac{9}{2}\right)$

Vastus 25.3. (a) $1 - \frac{5}{4}\ln 3$ (b) $2(\sqrt{2} - 1)$ (c) $7\sqrt{7}/3$
 (f) $-\pi/2$ (d) $\frac{1}{5}(1 - e^{-\pi})$ (e) $(8 - \sqrt{2})/6$ (f) $(3\pi + 4\ln 2)/8$ (g) 26

Praktikum 22

Vastus 26.1. (a) $S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx$ (b) $S = \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ (c) $S = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx$
 (d) Üks võimalikest pindaladest on $S = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (e) $S = \int_{-1}^2 (2 + x - x^2) dx$ (f) $S = \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}x\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{4}{3}x - \frac{x^3}{3}\right) dx$

Vastus 26.2. (a) 2 (b) $9/4$ (c) $8/3$ (d) $64/3$ (e) $e-1$ (f) $1/12$

Vastus 26.3. $\pi/4 + 1/2$

Vastus 26.5. $\pi/2 - 1$

Vastus 26.6. π

Vastus 26.7. $5/4\pi$

Vastus 26.8. $3 - e$

Vastus 26.9. $ab\pi$

Vastus 26.10. 108π

Praktikum 23

Vastus 27.1. (a) $2\sqrt{6} - 8/3$ (b) $(80\sqrt{10} - 8)/27$

Vastus 27.2. $2\sqrt{5}$

Vastus 27.3. $\frac{5}{4}\pi r$

Vastus 27.4. $6a$

Vastus 27.7. 10

Vastus 27.8. (a) 36π (b) 8π (c) $7/15\pi$

Vastus 27.10. (a) $2/7\pi$

Praktikum 24

Vastus 28.1. 1100 km

Vastus 28.7. Osake liikus 35 pikkusühikut paremale ja läbis kokku u. 42.6 pikkusühikut.

Vastus 28.9. -10.71 m/s.

Vastus 28.10. 1.4 m

Vastus 28.11. 200 m. Mõistlik on modelleerida läbi keskmise kiirenduse.

Vastus 28.12. $100\sqrt{\frac{5}{17}}$

Vastus 28.15. $k = 30$ N/m, $A = 60$ J, $x = 1.5$ m.

Vastus 28.16. $\frac{k(b-a)}{ab}$

Vastus 28.18. 51021.81 J

Vastus 28.20. $9.2 \cdot 10^6$ J

Vastus 28.21. 384551 J

Praktikum 25

Vastus 29.1. (a) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x\right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$, (b) $\left(-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x\right) \Big|_0^\pi = \frac{4}{15}$, (c) $\left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{16}$,
 (d) $\left(\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{15}$, (e) $\left(3x + \frac{1}{\pi} \sin 4\pi x + \frac{1}{8\pi} \sin 8\pi x\right) \Big|_0^1 = 3$, (f) $\frac{2}{\cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} - 2$, (g) $\left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32}$, (h) $\left(\frac{5}{128}x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{192} \sin 6x - \frac{1}{1024} \sin 8x\right) \Big|_0^\pi = \frac{5\pi}{128}$, (i) $\frac{3}{4}$

Vastus 29.2. (a) $\ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right) + C$ (e) $-\frac{1}{4} \left(\ln \left| \frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{9}{4} \right| - \ln \left| \frac{3}{4} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right| \right) + C$
 (g) $\frac{2}{3} \arctan \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{3} \right) + C$ (i) $\ln \left| \tan \frac{x}{2} - 1 \right| + C$

Vastus 29.3. (a) $\frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln |\cos x + 2| + C$ (c) $-\frac{\cos x}{2} + \frac{3}{2^{\frac{5}{2}}} (\ln |2 \cos x - \sqrt{2}| - \ln |2 \cos x + \sqrt{2}|) + C$ (e) $\frac{\tan^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C$

Vastus 29.4. (a) $\arcsin \frac{x}{4} + C$ (b) $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$ (c) $-\frac{1}{3} (16-x^2)^{3/2}$
 (d) $2 \ln \left| \frac{x}{6} + \frac{\sqrt{x^2-36}}{6} \right| + C$ (e) $\sqrt{x^2-25} - 5 \arccos \frac{5}{x} + C$ (f) $-\frac{1}{3 \sin(\arctan \frac{z}{3})} + C$
 (g) $3 \ln \left| \tan \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} \right) \right| + C$ (h) $\frac{3x}{2\sqrt{4-x^2}} + C$ (i) $4 \left(\frac{(\sqrt{x^2+9})^3}{3} - 9\sqrt{x^2+9} \right) + C$
 (j) $-\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$ (k) $\frac{4}{5}$ (l) $\ln 2 - \frac{3}{5}$
 (m) $6 \ln |x+1+\sqrt{x^2+2x+2}| + C$ (n) $\frac{1}{3} \left(\arccos \frac{1}{2} - \arccos \frac{3}{5} \right)$

Praktikum 26

Vastus 30.1. (a) integraal hajub (b) integraal hajub (c) 1000
 (d) Kui $\alpha \leq 1$, siis integraal hajub. Kui $\alpha > 1$, siis vastus on $\frac{1}{\alpha-1}$.
 (e) $\frac{5}{4}$ (f) integraal hajub (g) 0 (h) 2
 (i) 1 (j) $\frac{1}{2}$ (k) integraal hajub (l) $\frac{1}{2}$
 (m) Kui $n > 1$, siis algfunktsioon on $\frac{\ln^{1-n} x}{1-n}$ ja vastus $-\frac{\ln^{1-n} 2}{1-n}$ Kui $n = 1$, siis integraal hajub
 (n) integraal hajub (o) integraal hajub (p) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (q) $\ln(1 + \frac{\pi}{2})$ (r) $\frac{\pi}{2}$

Praktikum 27

Vastus 31.1. (a) integraal hajub (b) 2 (c) integraal hajub (d) -4.5 (e) 4 (f) $4\sqrt{2}$ (g) integraal hajub (h) $5(\sqrt[5]{2}-1)$ (i) $2+\pi/2$ (j) 6 (k) 1000 (l) integraal hajub (m) $\frac{1}{n+1}$ (n) integraal hajub (o) π (p) $\sqrt{3}$ (q) π (r) integraal hajub (s) integraal hajub (t) 2

Vastus 31.2. $F(\sigma) = \frac{1}{1+\pi^2\sigma^2}(1-(\pi\sigma)i)$. Lisaks igale sagedusele $\sigma \in \mathbb{R}$ vastab amplituud $|F(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2\sigma^2}}$.

Vastus 31.3. Siinusfunktsiooni Laplace'i teisendus on $\frac{1}{1+x^2}$ ja koosinusfunktsiooni oma $\frac{x}{1+x^2}$. Mõlemad on määratud vaid positiivsete argumentide korral.

Vastus 31.4. Umbes 13.5%.

Vastus 31.5. $\mu = 0$ ja $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 10 arvu korral satub ca iga 162., 15 arvu korral ca iga 1256. ja 20 arvu korral ca iga 9259. keskvaartus lõigust välja.

Vastus 31.6. Vahemikus 85-115: umbes 68%. Üle 140: umbes 0.4%.

Praktikum 28

Vastus 32.3. $a = 0, b = 6, c = 4$

Vastus 32.4. (g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$ (k) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ (l) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Vastus 32.5. (a) $\begin{pmatrix} -5 & 14 & 33 \\ -2 & 16 & 34 \\ -3 & 22 & 47 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 19 & 37 \\ 25 & 39 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$ (f) F (h) F^T

Vastus 32.6. (a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ -1 & 8 & 15 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 12 \\ -11 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vastus 32.7. (a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 32.15. $\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} & \sqrt{3}+2 & 0 \end{pmatrix}^T$

Praktikum 29

Vastus 33.1. (b) 40 (c) 6 (d) 100

Vastus 33.2. (a) jah (b) ei (c) jah (d) jah (e) ei (f) ei

Vastus 33.3. (a) -60 (b) 0 (c) 0

Vastus 33.4. (a) -40 (b) 80 (c) 40

Vastus 33.5. -6

Vastus 33.6. (a) -128 (b) -15

Vastus 33.7. (a) 100 (b) -30 (c) 18 (d) 90 (e) 17 (f) -34 (g) -1/2 (h) 1

Vastus 33.8. (a) 7 (b) -83 (c) 45 (d) 0 (e) $-e^t \sin t$ (f) 3 (g) 0 (h) 0 (i) 4 (j) $x^6(x^3 + 3)$ (k) $\cos t + e^{-2t}$ (l) 0

Vastus 33.9. (b) $33/2$ (c) $3/2$

Vastus 33.10. (a) 48 (b) 24 (c) 16

Vastus 33.12. (b) $x^3 - 2x$

Praktikum 30

Vastus 34.1. $A^{-1} = C$.

Vastus 34.4. E

Vastus 34.6. (a) $k = 9$ (c) $k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1$

Vastus 34.7. a $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ b $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c $C^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 20 & -20 & -5 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Vastus 34.8. a $B^{-1} = B$ c $F^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ d $H^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 6 \\ 9 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $I^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 & -8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \\ 7 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

Vastus 34.9. (a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Vastus 34.10. Pöördmaatriks on $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$

Vastus 34.11. a $x = 1, y = -0,5, z = -1$ b $x = 1, y = -1, z = 1, u = -1$

Vastus 34.12. (a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -17 & 5 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & 10 & -18 \\ 17 & 16 & -39 \\ 13 & 15 & -32 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -16 & 21 & 7 \end{pmatrix}$

Vastus 34.13. (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Vastus 34.14. $I = \frac{3}{17} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \end{pmatrix}^T$

Vastus 34.15. Vastusteks on M. Kolk poolt leitud aforismikillud: (a) jänes šampust ei joo

Vastus 34.16. 40 g I lahust, 30 g teist, 20 g III ja 10 g IV

Praktikum 31

Vastus 35.1. c) ja l)

Vastus 35.2. a 3 b 3 c 2

Vastus 35.4. b $x = 1/3, y = 2, z = -4/3$ c $x = 1/2, y = 2, z = -1/2, u = -3$

Vastus 35.3. (a) $x = 2, y = -1, 5$ (b) Lahend puudub (c) $x = -1 - 2C, y = C$

(d) Lahend puudub (e) $x = 8 + 6C, y = -1 - 2C, z = C$ (f) $x = 0, y = -3, z = 2$

(g) $x = 2 - 4C_1 - 3C_2, y = C_1, z = 2C_2, u = 4 - 2C_2, v = C_2$ (h) $x = 5 - 2C_1 - 3C_2, y = C_1; z = C_2$

(i) $x = -2 - 2C_1 + C_2; y = 1 - 9C_1 - 2C_2, z = C_1, u = C_2$

Praktikum 32

Vastus 36.1. (a) $x = 1, y = -1/3, z = -2/3, v = 0$ (b) $x = 1/4, y = -5/4, z = 2$ (c) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$

(d) Lahend puudub (e) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, -1, 2)$

Vastus 36.2. (a) $x = -C, y = -C, z = C$ (b) $x = 8C_1 - 7C_2, y = -6C_1 + 5C_2, z = C_1, v = C_2$

(g) $x = C_2 - C_1, y = 1 - C_1 - C_2, z = C_1, u = 2, v = C_2$ (i) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 5/3, x_4 = -4/3$

(h) Lahend puudub (j) $x_1 = 1 - C_2, x_2 = -C_1, x_3 = C_1, x_4 = 2 + 2C_2, x_5 = C_2$

(k) Lahend puudub (c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Vastus 36.3. (c) 1) $a \neq 2$ ja $a \neq 4/3$, 2) $a = 2, a = 4/3$, 3) lahendid on alati olemas

Vastus 36.4. a 1) $a \neq -1, 2$ a) $a = -1$, lahendid $x = -C, y = 0, z = C$

Vastus 36.5. a $x_1 = 330 + C, x_2 = 170 + C, x_3 = 210 + C, x_4 = C$, kus $C \geq 0$

b $x_1 = 500 - a - b, x_2 = a + b - 200, x_3 = a, x_4 = 350 - b, x_5 = b$, kus üldiselt $200 \leq a + b \leq 500$