

MATEMAATILINE MAAILMAPILT

praktikumiülesannete kogu

2025. a. sügissemester

Sisukord

1	Lausearvutus	3
2	Valemite teisendamine	9
3	Hulga mõiste	14
4	Tehted hulkadega	17
5	Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon	23
6	Funktsioonid	29
7	Hulga võimsus	38
8	Seosed	41

1. Lausearvutus

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
t	t	v	t	t	t	t
t	v	v	v	t	v	v
v	t	t	v	t	t	v
v	v	t	v	v	t	t

Tehete järjekord: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Definitsioon. Lausearvutuse valemid on parajasti need, mida saab koostada järgmiste reeglite abil:

- iga lausemuutuja on lausearvutuse valem;
- tõeväärtused t ja v on valemid;
- kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $\neg \mathcal{F}$ on lausearvutuse valem;
- kui $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid, siis ka $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$, $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ ja $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G}$ on lausearvutuse valemid;
- kui $\mathcal{F}$ on lausearvutuse valem, siis ka $(\mathcal{F})$ on lausearvutuse valem.

Definitsioon. Lausearvutuse valem $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt tõeseks, kui ta on igal väärtustusel tõene. Valem $\mathcal{F}$ nimetatakse samaselt vääraks, kui ta on igal väärtustusel väär.

Definitsioon. Lausearvutuse valem $\mathcal{F}$ nimetatakse kehtestatavaks, kui ta on vähemalt ühel väärtustusel tõene. Valem $\mathcal{F}$ nimetatakse kummutatavaks, kui ta on vähemalt ühe väärtustuse korral väär.

1. Kontrollige, kas järgmised laused võivad olla lausearvutuse lauseteks. Kui mõne lause puhul ei õnnestu leida ühest vastust, siis püüdke formuleerida tingimusi või lisandusi, mille rakendamisel võiks lauset lugeda lausearvutuse lauseks.

- Elu kui kunstitõus.
- Kõik luigid on valged.
- Mõisa kõis, las lohiseb.
- Õppida, õppida, õppida.
- Selle lause kirjapanemiseks on kasutatud vähemalt kümmet sõna.
- 1000000000 on kõige suurem arv.
- Kõige suuremat arvu ei leidu.

2. Lugege järgmised laused (x, y, a, b ja α on reaalarvud).

- $\forall y, y^4 + 4 > 0$
- $\forall a, \forall b, a \cdot b = b \cdot a$
- $\forall \alpha, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$
- $\exists x, \log_a x = 0$
- $\exists \alpha, \tan \alpha \neq \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $\forall a, \forall b, |a \pm b| \leq |a| + |b|$
- $\exists x, e^x = 1$

3. Kirjutage järgmised laused sümboolite $\forall$ ja $\exists$ abil.

- a) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
- b) Leidub selline nurk α , mille koosinus on võrdne arvuga 0,5.
- c) Iga taandatud ruutvõrrandi lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega.
- d) Mistahes kahe arvu korral nende summa ei sõltu liidetavate järjekorrast.
- e) Iga nelja vabalt valitud naturaalarvu hulgas leidub kaks arvu, mille vahe jagub kolmega.
- f) Iga täisarvu x korral leidub täisarv y nii, et $xy = 1$.
- g) Ei ole vahet millise täisarvu sa valid, alati leidub teine täisarv, mis on temast suurem.

4. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused, kui n ja m on täisarvud.

- | | | |
|------------------------------|------------------------------|--|
| a) $\forall n, n + 1 > n$. | e) $\forall n, n^2 \geq 0$. | i) $\forall n, \exists m, n^2 < m$. |
| b) $\exists n, 2n = 3n$. | f) $\exists n, n^2 = 2$. | j) $\exists n, \forall m, n < m^2$. |
| c) $\exists n, n = -n$. | g) $\forall n, n^2 \geq n$. | k) $\forall n, \exists m, n + m = 0$. |
| d) $\forall n, 3n \leq 4n$. | h) $\exists n, n^2 < 0$. | l) $\exists n, \forall m, nm = m$. |

5. Määrake järgmiste lausete tõeväärtused, kui x ja y on reaalarvud.

- | | | |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\exists x, x^3 = -1$. | e) $\exists x, x^2 = 2$. | i) $\forall x, \exists y, x^2 = y$. |
| b) $\exists x, x^4 < x^2$. | f) $\exists x, x^2 = -1$. | j) $\exists x, \forall y, xy = 0$. |
| c) $\forall x, (-x)^2 = x^2$. | g) $\forall x, x^2 + 2 \geq 1$. | |
| d) $\forall x, 2x > x$. | h) $\forall x, x^2 \neq x$. | |

Kvantoreid $\forall$ (iga) ja $\exists$ (leidub) sisaldavates lausetes väite $P(x)$ eitamine (eitustehte $\neg$ kasutamine):

$$\neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x(\neg P(x)), \quad \neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x(\neg P(x)), \\ \neg(\forall x \exists y P(x, y)) \equiv \exists x \forall y(\neg P(x, y)), \quad \neg(\exists x \forall y P(x, y)) \equiv \forall x \exists y(\neg P(x, y)).$$

6. Moodustage antud lausete eitused ja määrake nende tõeväärtused.

- a) 2024 jagub 3-ga.
- b) Iga algarv on paaritu arv.
- c) Pole õige, et 2 on algarv.
- d) Diameetrile toetuv piirdenurk on sirgnurk.
- e) Igal ruutvõrrandil on kaks reaalsel lahendit.
- f) Leidub positiivne arv, millest ei saa logaritmi võtta.
- g) $\exists x, x^2 + 1 > 0$.
- h) $\forall \alpha, \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$.

7. Eitage järgmisi lauseid.

- a) Leidub arv, mis on võrdne oma vastand arvuga.
- b) Iga kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

- c) Igal kolmnurgal on ümberringjoon.
- d) Leidub kolmnurk, mille mediaanid ei lõiku ühes punktis.
- e) Iga reaalarvu ruut on mittenegatiivne.
- f) Leidub reaalarv x , mille jaoks $y^3 \neq x$ kõikide reaalarvude y korral.
- g) Leidub reaalarv a , mille jaoks $a + x = x$ iga reaalarvu x korral.

8. Eitage järgmisi lauseid.

- a) Kõik naised on emad.
- b) Kõikidel koertel on kirebud.
- c) Mõned tudengid on lahendanud kõik ülesanded sellest ülesannete kogust.
- d) Siin klassis on keegi, kellel ei ole hea suhtumine.
- e) Iga tudeng siit klassist on võtnud kursuse kõrgemast matemaatikast.
- f) On olemas aus poliitik.
- g) Kõik ameeriklased söövad juustuburgereid.

9. Eitage järgmisi lauseid ja määrake nende tõeväärtused.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\exists x \in \mathbb{R}, e^x < 0$. | e) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x > y$. | i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{N}, x + y > 0$. |
| b) $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = 1$. | f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y = 0$. | j) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, xy = 1$. |
| c) $\exists x \in \mathbb{N}, x = x + 1$. | g) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > x$. | k) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy = y$. |
| d) $\forall x \in \mathbb{N}, x + x = 2x$. | h) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$. | l) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$. |

10. Sõnastage järgmised laused, eeldades, et A tähendab lauset "Mulle meeldib jäätis" ja B tähendab lauset "Sulle meeldib šokolaad".

- | | | | | |
|-----------------|---------------|-----------------------|-------------------------|---------------------|
| a) $A \wedge B$ | c) $\neg B$ | e) $A \vee \neg B$ | g) $\neg A \vee \neg B$ | i) $\neg(A \vee B)$ |
| b) $\neg A$ | d) $A \vee B$ | f) $\neg(A \wedge B)$ | h) $\neg A \wedge B$ | |

11. Olgu lause $A = \text{"Hiir hüppab"}$ ja $B = \text{"Kass kargab"}$. Kirjutage sümbolkujul järgmised laused.

- | | |
|---|--|
| a) Hiir hüppab või kass kargab. | d) Hiir ei hüppa ja kass ei karga. |
| b) Kass ei karga. | e) Pole tõsi, et "Hiir hüppab ja kass kargab". |
| c) Pole tõsi, et "Hiir hüppab või kass kargab". | f) Hiir ei hüppa või kass ei karga. |

12. Olgu lause $P = \text{"Hiir hüppab"}$, lause $Q = \text{"Kass kargab"}$ ja lause $R = \text{"Vana karu lööb trummi"}$. Loe järgmised laused.

- | | | |
|--------------------------------|---------------------------------|--|
| a) $P \Rightarrow Q$ | d) $\neg(P \Rightarrow Q)$ | g) $(R \vee Q) \Rightarrow P$ |
| b) $Q \Rightarrow P$ | e) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ | h) $R \vee (Q \Rightarrow P)$ |
| c) $\neg Q \Rightarrow \neg P$ | f) $P \wedge (Q \Rightarrow R)$ | i) $(\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg R$ |

13. Tähistagu suured ladina tähed järgmisi lauseid:

A = „On pühapäev“,

B = „Kristjan läheb teatrisse“,

C = „Kristjan läheb sõbrale külla“,

D = „Kristjan läheb koeraga jalutama“,

E = „Kristjan istub kodus“.

Loe järgmised laused.

a) $A \Rightarrow B$

b) $D \wedge A \Rightarrow \neg B$

c) $\neg A \Rightarrow \neg(B \vee C)$

d) $\neg B \wedge \neg C \wedge \neg D \Rightarrow E$

e) $A \Rightarrow \neg E \wedge (B \vee C \vee D)$

f) $(A \Rightarrow \neg E) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg E)$

14. Pange järgmised väited kirja valemitega, milles võrdused ja võrratused on ühendatud lausearvutuse tehete märkidega. Muutujad a , b ja c tähistavad reaalarve.

a) $a \cdot b = 0$.

b) $a \cdot b \neq 0$.

c) $\frac{a}{b} = 0$.

d) $|a| = 3$.

e) Punkt (a, b) asub koordinaattasandi I veerandis.

f) Punkt (a, b) asub koordinaatteljel.

g) Reaalarvud a , b ja c on mingi kolmnurga külgede pikkused.

h) Reaalarvud a , b ja c on mingi võrdhaarse kolmnurga külgede pikkused.

15. Pange järgmised väited kirja lausearvutuse valemiga. Andke ka teisenduse „võti“, see tähendab, tabel, kust selgub, millised tähed vastavad millistele lihtlauseatele. Iga lause puhul hinnake, millised tähendusnüansid lähevad valemiks teisendamisel kaotsi.

a) Toas on kas isa või ema või on nad mõlemad.

b) Anu armastab koeri, kuid Mart kasse.

c) Kui hr. Kask on õnnelik, siis pr. Kask on õnnetu, ja kui hr. Kask on õnnetu, siis pr. Kask on õnnelik.

d) Pole sellel tegelasel ei kaastunnet ega südametunnistust.

e) Kui Kungla rahvas kuldsel aal kord istus maha sööma, siis Vanemuine murumaal läks kandlelugu lööma.

f) Talvel pääsevad laevad sadamast välja ainult siis, kui jäälõhkuja on neile tee rajanud.

g) Kui õnnetusi tuleb, siis tuleb neid uksest ja aknast.

h) Kui ma nüüd vangerdan, siis ma kaotan lipu, kui jätan vangerdamata, siis saan mati.

i) Televisori vea põhjus on mittekvaliteetne transistor või on kaitse läbi põlenud ja vool ei pääse toiteplokki.

j) Kommunism – see on nõukogude võim pluss kogu maa elektrifitseerimine.

16. Pange järgmised laused kirja lausearvutuse valemiga.

a) Selleks, et päike tõuseks idast, on tarvilik, et ta loojub läänes.

b) Selleks, et päike tõuseks idast, on piisav, et ta loojub läänes.

- c) Tarvilik tingimus, et ettevõtte oleks edukas, on see, et tema asutajatel on küllaldaselt algkapitali.
- d) Teatrite korralikuks töötamiseks piisab riigi toetusest.
- e) Ilma riigi toetuseta lakkavad teatrid korralikult töötamast.
- f) Tarvilik ja piisav tingimus, et rida koonduks absoluutselt, on see, et rea kõik ümberjärjestused koonduvad samaks summaks.

17. Leidke järgmiste lausete tõeväärtused.

- a) Kui 20 jagub 10-ga, siis 20 jagub 5-ga.
- b) Kui 20 jagub 5-ga, siis 20 jagub 10-ga.
- c) Kui 20 jagub 3-ga, siis 20 jagub 6-ga.
- d) Kui 20 jagub 4-ga, siis 20 jagub 8-ga.
- e) 20 jagub 5-ga parajasti siis, kui 20 jagub 4-ga.
- f) 10 jagub 5-ga parajasti siis, kui 10 jagub 4-ga.

18. Leidke järgmiste väidete tõeväärtused. Esmalt määrake kindlaks komponentide tõeväärtused ja nende järgi arvutage kogu lause tõeväärtus, kasutades lausearvutuse reegleid.

- a) Vesinik on gaas ja kui elavhõbe on gaas, siis ka kuld on gaas.
- b) Pole õige, et Kuu ei ole ümmargune.
- c) Keskerakond võitis valimised ja ei võitnud ka.
- d) Narva asub Eesti loodeosas parajasti siis, kui Pärnu asub Eesti kaguosas.

19. Laual on neli kaarti. Iga kaardi ühele poole on kirjutatud täht ja teisele poole täisarv. Kaardid paistavad nagu joonisel kujutatud:

A K 7 4

Meil on vaja veenduda, kas kehtib väide „Kui kaardi ühel pool on täishäälik, siis teisel pool on paarisarv.“ Millised kaardid tuleb kindlasti ümber pöörata, et teada saada, kas see väide tõepoolest kehtib või ei?

20. Lausete A ja B tõeväärtused a ja b on kas 1 (tõene) või 0 (väär). Leidke muutujaid a ja b kasutavad aritmeetilised avaldised lausete

- a) $\neg A$, b) $A \wedge B$, c) $A \vee B$, d) $A \Rightarrow B$, e) $A \Leftrightarrow B$

tõeväärtuste arvutamiseks.

21. Järgmiste lausete kirjanemiseks vajalikud valemid sisaldavad implikatsiooni või ekvivalentsi. Leidke nende lausete tõeväärtused, kasutades implikatsiooni ja ekvivalentsi tõeväärtuse definitsiooni.

- a) Kui $1 = 1$, siis $2 = 2$.
- b) Kui $1 = 2$, siis $2 = 3$.
- c) Kui $1 = 1$ ja $1 = 2$, siis $1 = 3$.
- d) Kui $1 = 2$ või $1 = 3$, siis $1 = 1$.
- e) $1 = 2$ parajasti siis, kui $2 = 3$.
- f) $1 = 1$ parajasti siis, kui $2 = 2$ ja $3 = 3$.
- g) Kui 1 ei võrdu 2-ga, siis $1 = 3$.
- h) 1 ei võrdu 3-ga parajasti siis, kui 1 ei võrdu 2-ga või 1 ei võrdu 1-ga.

22. Koostage valemite tõeväärtustabelid.

- a) $(X \Rightarrow \neg Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y)$ d) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
 b) $\neg(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow (X \vee Z)$ e) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$
 c) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$ f) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
 g) $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

23. Kas järgmised valemid on kehtestatavad? Põhjendage vastust!

- a) $\neg(X \Rightarrow \neg X)$ b) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

24. Näidake, et valemid on samaselt tõesed.

- a) $X \vee \neg X$ c) $X \Rightarrow (Y \Rightarrow (X \wedge Y))$
 b) $X \Rightarrow (X \vee Y)$ d) $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow ((Y \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

25. Määrake valemi liik (samaselt tõene, samaselt väär, kehtestatav, kummutatav).

- a) $P \Rightarrow \neg P$ c) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
 b) $\neg(P \Rightarrow \neg P)$ d) $P \Leftrightarrow \neg P$

26. Lausearvutuse valemite kirjanemiseks on käibel ka *poola kugu*, mille võttis 1928. aastal kasutusele poola loogik Jan Lukasiewicz. Selles ei panda tehtemärk mitte ühendatavate osavalemite vahele, vaid nende ette. Poola kugu iseärasusena pole valemities va- ja kasutada sulge. Valemid $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, on poola kujul vastavalt Na , Kab , Aab , Cab , Eab (lausemuutujad kirjutatakse väikese tähega). Keerukamaid valemite koostatakse analoogiliselt. Näiteks valemile $A \wedge B \vee C$ vastab valem $AKabc$, valemile $A \wedge (B \vee C)$ aga $KaAbc$. Alljärgnevatest valemities teisendage a)–c) poola kujule ning d)–f) tavakujule.

- a) $((A \vee B) \wedge (B \vee C)) \wedge (A \vee C)$ d) $EcNCbKad$
 b) $\neg A \wedge (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ e) $AaCKNabc$
 c) $(A \vee B) \Rightarrow (C \Leftrightarrow D) \wedge A$ f) $KENAabcd$

2. Valemite teisendamine

Definitsioon. Öeldakse, et valemitest $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldeb valem $\mathcal{G}$, kui igal neis valemis esinevate muutujate väärtustusel, millel $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ on tõesed, on ka $\mathcal{G}$ tõene.

Teoreem. Valemist $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ järeldeb valem $\mathcal{G}$ parajasti siis, kui valem $\mathcal{F}_1 \wedge \dots \wedge \mathcal{F}_n \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõene.

Definitsioon. Valemeid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ nimetatakse loogiliselt samaväärseteks, kui nende tõeväärtused on võrdsed igal neis valemis esinevate muutujate väärtustusel.

Olgu $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$ valedid.

1. **Idempotentsuse omadused:**

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

2. **Kommutatiivsuse omadused:**

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \wedge \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$.

3. **Assotsiatiivsuse omadused:**

- a) $(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \wedge \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H})$,
- b) $(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \vee \mathcal{H} \equiv \mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \vee \mathcal{H})$.

4. **Distributiivsuse omadused:**

- a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{H}$,
- b) $\mathcal{F} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{H}) \equiv (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{H})$.

5. **Neelamisomadused:**

- a) $\mathcal{F} \wedge (\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$.

6. **De Morgani seadused (duaalsus):**

- a) $\neg(\mathcal{F} \wedge \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \vee \neg\mathcal{G}$,
- b) $\neg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) \equiv \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$.

7. **Kahekordse eituse omadus:** $\neg\neg\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$.

8. **Liikmete elimineerimise reeglid**, kus t on suvaline samaselt tõene valem ja v on suvaline samaselt väär valem:

- a) $\mathcal{F} \wedge t \equiv \mathcal{F}$,
- b) $\mathcal{F} \vee t \equiv t$,
- c) $\mathcal{F} \wedge v \equiv v$,
- d) $\mathcal{F} \vee v \equiv \mathcal{F}$.

9. **Implikatsiooni avaldis konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu:**

- a) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G})$,
- b) $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.

10. **Konjunktsiooni ja disjunktsiooni avaldis implikatsiooni kaudu:**

- a) $\mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \equiv \neg(\mathcal{F} \Rightarrow \neg\mathcal{G})$,
- b) $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \equiv \neg\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$.

11. **Ekvivalentsi avaldis teiste tehete kaudu:**

- a) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv \mathcal{F} \wedge \mathcal{G} \vee \neg\mathcal{F} \wedge \neg\mathcal{G}$,
- b) $\mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{G} \equiv (\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}) \wedge (\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F})$.

Definitsioon. Lausearvutuse valemi $\mathcal{F}$ täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks nimetatakse valemiga $\mathcal{F}$ samaväärset valemit, mis kujutab endast erinevate täielike lihtkonjunktsioonide disjunktsiooni.

- 27.** a) Kas valemitest A ja $\neg B$ järelneb valem $\neg(A \Rightarrow B)$?
b) Kas valemitest $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ ja A järelneb valem C ?

- 28.**
a) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järelleda valemi $A \Rightarrow \neg B$ tõesuse kohta?
b) On teada, et valem $\neg A \Leftrightarrow B$ on tõene. Mida võib sellest järelleda valemi $\neg(A \vee B)$ tõesuse kohta?

- 29.** Kolme väite A , B ja C kohta on teada järgmist.
a) Kui A on tõene, siis ka B ja C on tõesed.
b) Kui B on tõene, siis vähemalt üks väidetest A ja C on tõene.
c) Kui C on tõene, siis A on tõene ja B on väär.

Millised väidetest A , B , C on tõesed?

30. Pange järgmine arutlus kirja lausearvutuse valemitega ja tõestage, et see arutlus kehtib, st tõestage, et eeldustele vastavatest valemitest järelneb väitele vastav valem. Õpilased on rõõmsad siis ja ainult siis, kui ei toimu kontrolltööd. Kui õpilased on rõõmsad, siis on õpetajal hea meel. Ent kui õpetajal on hea meel, siis ta ei taha pidada tundi, ning kui ta ei taha pidada tundi, siis toimub kontrolltöö. Järelikult õpilased pole rõõmsad.

- 31.** On teada järgmised faktid.
a) Kui Mihkel köhib ja on näost valge, siis ta kas on haige või on käinud nurga taga suitsu tegemas.
b) Kui Mihkel pole käinud suitsu tegemas ja ikkagi köhib või on näost valge, siis ta on haige.
c) Kui Mihkel on haige, siis ta köhib, aga pole näost valge.

Pärast vahetundi klassi tulles oli Mihkel näost valge. Kas sellest järelneb, et ta käis nurga taga suitsu tegemas?

- 32.** On teada järgmised faktid.
a) Kui Jüri vaatab korvpalli ja Eesti võidab, siis ta on õnnelik ja joob õlut.
b) Kui Jüri ei vaata korvpalli ja on ikkagi õnnelik, siis ta joob õlut.
c) Kui Eesti võidab, siis Jüri on õnnelik.

Õhtul oli Jüri õnnelik. Kas võib kindlalt väita, et ta jõi õlut? Põhjendage oma vastust.

33. Kui Siimule meeldiks šokolaad, siis ta sööks seda palju. Kui ta šokolaadi palju sööks, siis kaoks tal söögiisu. Kui tal kaoks söögiisu, siis ei meeldiks talle ka šokolaad. Kas saab järelleda, et Siimule ei meeldi šokolaad?

34. Zen-budismi guru teatas oma õpilastele: „Kui ma olen Buddha, siis ma ei ole Buddha.“ Õpilased olid seda kuuldes hämmastunud. Väljendage väide valemiga, koostage tõeväärtustabel ja selgitage, millise lihtsama väitega on see väide samaväärne.

35. Tõestage, et kui valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ on samaselt tõesed, siis ka valem $\mathcal{G}$ on samaselt tõene.

36. Keegi ütles, et tal on niisugused lausearvutuse valemid $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{G}$, et valemist $\mathcal{F}$ järeldeb valem $\mathcal{G}$ ja valemist $\mathcal{F}$ järeldeb valem $\neg \mathcal{G}$. Kas selline olukord on võimalik?

37. Näidake, et kehtivad samaväärsused.

- a) $(X \vee Y) \wedge Z \equiv X \wedge Z \vee Y \wedge Z$ c) $X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$
b) $X \Rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$

38. Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja konjunktsiooni.

- a) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$ d) $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
b) $P \vee Q \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
c) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$ e) $(P \Leftrightarrow Q) \vee P$

39. Teisendage järgmised valemid nii, et nad sisaldaksid ainult eitust ja disjunktsiooni.

- a) $(P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ d) $(P \Leftrightarrow Q) \wedge P$
b) $\neg P \wedge Q \Rightarrow \neg Q \wedge P$
c) $(P \Rightarrow Q) \wedge P$ e) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$

40. Leidke loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab võimalikult vähe sümboleid.

- a) $\neg(\neg A \vee B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge B)$ e) $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
b) $\neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \Rightarrow Q) \wedge P)$ f) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$
c) $(A \Leftrightarrow B) \wedge (A \vee B)$ g) $(P \Rightarrow \neg Q) \vee \neg(P \vee Q)$
d) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (C \Rightarrow A)$ h) $\neg(P \wedge Q \wedge (P \Rightarrow \neg Q))$

41. Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugemale kui võimalik.

- a) Kui a , b ja c on kolmnurga külgede pikkused, siis kehtivad võrratused $a + b > c$, $a + c > b$ ja $b + c > a$.
b) Kui a , b ja c on täisarvud nii, et $a = bc$, siis a jagub arvuga b ja a jagub arvuga c .
c) Kui n on positiivne täisarv, siis $n^2 + n + 41$ on algarv;
d) Kõigi täisarvude a ja b korral kehtib väide, et kui $a + b$ on paarisarv, siis a ja b on mõlemad kas paarisarvud või paaritud arvud.

42. Eitage järgmisi lauseid, viies eituse nii kaugemale kui võimalik.

- a) Iga tudeng selles aines on käinud Soomes või Rootsis.
b) Iga e-mail, mis on suurem kui üks megabait, kompressseeritakse.
c) Kui kasutaja on aktiivne, siis on vähemalt üks võrguühendus saadaval.
d) Leidub siga, kes oskab ujuda ja kalu püüda.
e) Selles aines pole kedagi, kes oskaks prantsuse või vene keelt.

- f) Arv x on positiivne, aga arv y ei ole positiivne.
- g) Kui x on algarv, siis $\sqrt{x}$ ei ole ratsionaalarv.
- h) Kui x on paaritu arv, siis x^2 on paaritu arv.
- i) Kui x on ratsionaalarv ja $x \neq 0$, siis $\tan x$ ei ole ratsionaalarv.
- j) Kui $\sin x < 0$, siis ei kehti $0 \leq x \leq \pi$.
- k) $\exists x \exists y (x + 2y = 2 \wedge 2x + 4y = 5)$.
- l) $\forall x \exists y (x + y = 2 \wedge 2x - y = 1)$.
- m) $\forall x \forall y (((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \Rightarrow (x - y > 0))$.
- n) $\exists x \exists y ((x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \wedge (x - y > 0))$.
- o) $\forall x \forall y ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Leftrightarrow (xy \neq 0))$.

43. Teisendage järgmised valemid nii, et eituse märk esineks ainult muutujate ees.

- a) $\neg(\neg P \vee Q)$
- b) $\neg(P \wedge Q \vee \neg R)$
- c) $\neg(P \wedge Q \vee R) \Rightarrow \neg(P \wedge Q)$
- d) $\neg(P \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge R)$

44. Viige täielikule disjunktiiivsele normaalkujule.

- a) $(\neg X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow ((Y \wedge Z) \Rightarrow (X \wedge Z))$
- b) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg X) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \wedge X))$
- c) $\neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg X) \wedge \neg((X \wedge Y) \Rightarrow \neg Y)$
- d) $(X \Rightarrow Y) \vee (X \Rightarrow X \wedge Y) \Leftrightarrow Z$
- e) $(X \Rightarrow \neg(Y \wedge X)) \Rightarrow X \vee Z$
- f) $(X \wedge (Y \Rightarrow X)) \Rightarrow \neg X$
- g) $((X \wedge \neg Y) \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$
- h) $(X \wedge (Y \vee \neg X)) \wedge ((\neg Y \Rightarrow X) \vee Y)$

45. Konstrueerige valem, mis rahuldab tingimust.

- a) Valem on tõene parajasti siis, kui X on tõene ja Y väär.
- b) Valem on väär parajasti siis, kui X ja Y on mõlemad tõesed.
- c) Valem on tõene parajasti siis, kui vähemalt kaks lausetest X , Y ja Z on tõesed
- d) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks lausetest X , Y ja Z on tõesed
- e) Valem on tõene parajasti siis, kui täpselt üks lausetest X , Y ja Z on tõesed

46. Leidke kolme muutuja valem, mis on tõene parajasti siis, kui täpselt kaks muutujat on väärad.

47. Leidke kolme muutuja valem, mis on sama tõeväärtusega kui enamus muutujaid.

48. Komisjon, kuhu kuuluvad liikmed A , B , C ja D , otsustab olulisemaid küsimusi hääletades. Igal liikmel on üks hääl, välja arvatud komisjoni juht A , kelle häälel on kahekordne kaal. Otsus loetakse vastuvõetuks, kui otsuse poolt antakse vähemalt 3 häält. Leidke valem, mis on tõene parajasti siis, kui otsus võetakse vastu.

49. Koostage valem, mis on tõene parajasti siis, kui kahendarvude $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ summa on ülimalt kahekohaline kahendarv.

50. Leidke iga kahe muutujaga tõeväärtuste veeru jaoks lihtsaim selliste tõeväärtustega valem.

- 51.** Tehke kindlaks, kas lausearvutuses kehtib
- a) implikatsiooni assotsiatiivsus;
 - b) ekvivalentsi assotsiatiivsus;
 - c) distributiivsus konjunktsiooni ja implikatsiooni vahel.

- 52.** Avaldage ülejäänud tehted
- a) eituse ja disjunktsiooni kaudu;
 - b) eituse ja konjunktsiooni kaudu;
 - c) eituse ja implikatsiooni kaudu.

- 53.** Avaldage disjunktsioon implikatsiooni kaudu.

3. Hulga mõiste

Hulga all mõistetakse üksteisest erinevate objektide kogumit, mida vaadeldakse ühe tervikuna ja kus iga objekti korral on võimalik üheselt kindlaks määrata, kas ta kuulub antud hulka.

Hulki tähistatakse tavaliselt suurte ladina tähtedega $A, B, C, \dots$, hulga elemente väikeste ladina tähtedega $a, b, c, \dots$. Tühi hulk $\emptyset = \{\}$ ei sisalda ühtki elementi. Tähtsamad arvuhulgad on

- naturaalarvude hulk $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;
- täisarvude hulk $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$;
- ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q} = \{q \mid q = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$;
- reaalarvude hulk $\mathbb{R}$;
- kompleksarvude hulk $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

Intervallid on

- lõik $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;
- vahemik $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$;
- poollõik $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;
- poollõik $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$.

Kahte hulka loetakse võrdseteks, kui nad koosnevad samadest elementidest.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B osahulgaks, kui kõik hulga A elemendid on hulga B elementideks (ehk hulga A iga element kuulub hulka B). Sel juhul tähistatakse $A \subset B$ või $B \supset A$.

Definitsioon. Hulka A nimetatakse hulga B pärisosahulgaks ja kirjutatakse $A \subsetneq B$, kui hulk A on hulga B osahulk ja $A \neq B$.

Hulga A kõigi osahulkade hulka tähistatakse tavaliselt $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subset A\}$.

54. Esitage hulk A kujul $\{x \mid P(x)\}$:

a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

c) $A = \{0, 5; 1; 1, 5; 2\}$;

b) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$;

d) $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$;

e) $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\};$

g) $A = \{1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots\};$

f) $A = \{\frac{1}{3 \cdot 6}, \frac{1}{6 \cdot 9}, \frac{1}{9 \cdot 12}, \frac{1}{12 \cdot 15}, \dots\};$

h) $A = [a, b);$

i) A on paarisarvude hulk.

55. Esitage elementide loetelu abil järgnevad hulgad:

a) $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\};$

e) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 7x^2 - 8x = 0\};$

b) $\{n + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\};$

f) $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1 \wedge y - x = 1\};$

c) $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 - 13n + 30 \leq 0\};$

g) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4 = 0\};$

d) $\{\cos n\pi : n \in \mathbb{N}\};$

h) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}.$

56. Kirjutage välja antud hulkade kõik elemendid ja kõik osahulgad:

a) $\{a, b\};$

b) $\{1, \{1\}\};$

c) $\{a, b, c\}.$

57. Otsustage, kas antud väited on tõesed:

a) $3 \in \{1, 2, 3\};$

i) $\{\{3\}\} \subset \{2, 3, \{3\}\};$

b) $\{2\} \in \{1, 2, 3\};$

j) $\{a, b\} \subset \{a, b, c\};$

c) $\{a, b, c\} = \{a, c, b\};$

k) $3 \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\};$

d) $x \in \{x\};$

l) $\{\emptyset\} \in \emptyset;$

e) $\{1\} \subset \{1, 2, 3\};$

m) $\emptyset \in \{\emptyset\};$

f) $\{2\} \in \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\};$

n) $\emptyset \subset \emptyset;$

g) $\{1, 2\} \subset \{1, 2, \{3\}\};$

o) $\{\emptyset\} = \emptyset.$

h) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\};$

58. Kirjutage välja $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ ja $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

59. Kujutage antud hulgad arvsirgel:

a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leq 7\};$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x - a| < \varepsilon\};$

b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < c\};$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 9x + 7 \geq 0\};$

- e) $\{2x^2 + 9x + 7 \mid x \in \mathbb{R}\};$ k) $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x^2 - 9x + 6| = 2x^2 - 9x + 6\};$
 f) $\{x^2 + 2x + 1 \mid x \in (-2, \infty)\};$ l) $\{1 - |x| \mid x \in [-2, 1]\};$
 g) $\{x^2 + 2|x| + 1 \mid x \in (-1, 1)\};$ m) $\{|1 + x| + 1 \mid x \in [1, 2]\};$
 h) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|1 - 2x|} \geq 1 + x\};$ n) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = -x^2 + 6x - 2 \wedge x \in (0, \infty)\};$
 i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{|0,25 - x|} \geq x + 0,5\};$ o) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = x^2 - 4x + 3 \wedge x \in (0, \infty)\}.$
 j) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| + 2x \geq 1\};$

60. Kujutage antud punktihulga koordinaattasandil:

- a) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge 2 < x \leq 5\};$ d) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge y \geq x^2\};$
 b) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b \wedge c < y \leq d\};$
 c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 4\};$ e) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge |x| + |y| = 1\};$

61. Kirjutage välja kõik antud hulga elemendid:

- a) $\{A \mid \{1\} \subset A \subset \{1, 2, 3\}\};$ c) $\{A \mid A \subset \{a, b, c\} \wedge a \notin A \wedge b \in A\}.$
 b) $\{A \mid \{a, b\} \subset A \subset \{a, b, c, d\}\};$

62. (Lewis Carroll'i ülesanne) Vanal ajal toimunud lahingus sai palju sõdalasi kannatada. Lahingust osavõtjatest 70% kaotas silma, 75% – kõrva, 80% – käe ja 85% – jala. Kui palju sõdalastest (minimaalselt ja maksimaalselt) jäid ilma nii silmast, kõrvast, käest kui ka jalast?

63. Tõestage, et kui hulgas on n elementi, siis sellel hulgal on 2^n osahulka.

64. Olgu $A_1, A_2, \dots, A_n$ hulga. Tõestage, et $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset A_1 \Leftrightarrow A_1 = A_2 = \dots = A_n$.

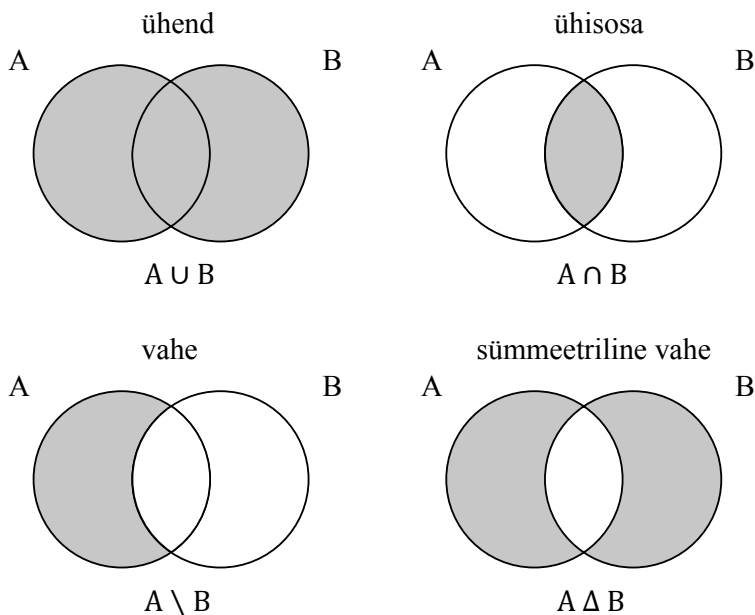
4. Tehted hulkadega

ühend $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee (\text{või}) x \in B\}$	$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid \exists (\text{leidub}) \alpha \text{ nii, et } x \in A_{\alpha}\}$
ühisosa $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge (\text{ja}) x \in B\}$	$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \{x \mid \forall (\text{iga}) \alpha \text{ korral } x \in A_{\alpha}\}$
vahe $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	sümmeetriline vahe $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Ühendi ja ühisosa omadused.

- idempotentsus: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- kommutatiivsus: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- assotsiatiivsus: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- distributiivsus: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- neelduvus: $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$

Venni diagrammid.



Sümmeetrilise vahe omadusi.

- kommutatiivsus: $A \triangle B = B \triangle A$
- assotsiatiivsus: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
- distributiivsus ühisosaga: $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

Tihti on käsitluses fikseeritud teatav hulk U ja kõik vaadeldavad hulgad on selle hulga alamhulgad. Sellisel juhul nimetatakse hulka U universaalseks. Olgu fikseeritud teatav universaalne hulk U .

Definitsioon. Hulga A täiendiks A' nimetatakse hulka, mille moodustavad kõik need universaalse hulga U elemendid, mis ei kuulu hulka A , s.t

$$A' = \{x \in U: x \notin A\} = U \setminus A.$$

De Morgani seadused: $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Kahekordse täiendi seadus: $A'' = A$.

65. Olgu A suvaline hulk. Kirjeldage hulki

- a) $A \cup \emptyset$; c) $A \setminus \emptyset$; e) $A \setminus A$; g) $A \cup A'$; i) $\emptyset'$.
b) $A \cap \emptyset$; d) $A \triangle \emptyset$; f) $\emptyset \setminus A$; h) $A \cap A'$;

66. Leidke hulgad $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$, kui

- a) $A = \{-1, 0, 3, 4\}$, $B = \{0, 4, 6\}$; d) $A = (-\infty, 7]$, $B = [2, 4]$;
b) $A = [0, 2]$, $B = [1, 5]$; e) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$;
c) $A = [0, 2]$, $B = \{0, 4, 6\}$; f) $A = \{\emptyset\}$, $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

67. Leidke hulgad A ja B , kui $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$.

68. Kujutage antud hulgad arvsirgel:

- a) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x < 1\} \cup \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 0 < x < 3\}$;
b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1\} \cap \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge |x| < 3\}$;
c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 3 < x \leq 5\}$;
d) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge 1 < x \leq 5\} \triangle \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$.

69. Leidke hulga A täiend A' universaalse hulga U suhtes:

a) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 5, 7\}$; b) $U = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$.

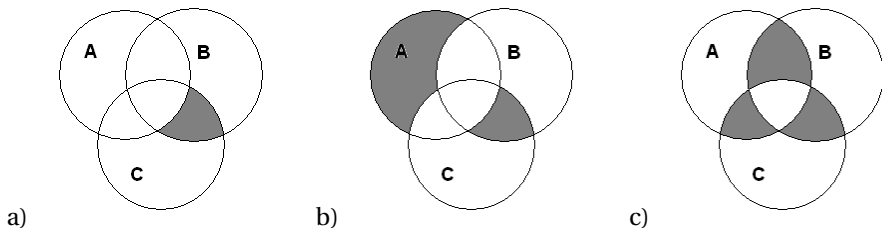
70. Millist tingimust peavad rahuldama hulgad A ja B , et kehtiks võrdus:

a) $A \cup B = A$; c) $A \cup B = A \cap B$; e) $A \setminus B = B$; g) $A \triangle B = \emptyset$.
 b) $A \cap B = A$; d) $A \setminus B = A$; f) $A \triangle B = A$;

71. Kujutage Venni diagrammil järgmised hulgad:

a) $A \setminus (B \cup C)$; d) $A \cap (B \setminus C)$; g) $(A \setminus B) \triangle C$;
 b) $A \setminus (B \cap C)$; e) $(A \triangle B) \triangle C$; h) $(A \cap B) \cap (A \triangle B)$;
 c) $(A \setminus (B \cap C)) \cap B$; f) $(A \cup B) \cap C$; i) $(A \cap C) \cup (B \setminus (A \cup C))$.

72. Kirjutage hulgateoreetiliste tehete abil järgmised Venni diagrammidel kujutatud hulgad:



73. Klassi 30 õpilasest igaüks tegeleb vähemalt ühe hobiga. Õpilased saavad valida kolme hobi vahel: male, näitering, skautlus. Kuus õpilast tegelevad ainult skautlusega. Viis õpilast jõuavad igale poole. Kaks maletavad ja tegelevad skautlusega, aga ei näitle. Viisteist on skaudid. Kaks last tegelevad üksnes malega. Kolm last käib üksnes näitetrupis. Mitu last tegeleb male ja näitemänguga, aga ei ole skaudid? Mitu last kuulub maleringi?

74. Ühe instituudi 100 üliõpilase küsitlemisel selgus, et neist 28 õpivad inglise keelt, 30 saksa keelt, 42 prantsuse keelt, 8 inglise ja saksa keelt, 10 inglise ja prantsuse keelt, 5 saksa ja prantsuse keelt, 3 aga kõiki kolme keelt. Mitu üliõpilast ei õpi nimetatud keeli? Mitu üliõpilast õpib ainult prantsuse keelt, ainult inglise keelt, ainult saksa keelt?

75. Ühes sõjaväeosas mängivad 100-st sõdurist 80 jalgpalli, 60 võrkpalli ja 40 korvpalli. On teada, et 40 neist oskavad mängida nii jalgpalli kui ka võrkpalli, 30 jalgpalli ja korvpalli, 20 võrkpalli ja korvpalli. Kui palju neist 100-st sõdurist oskavad mängida kõiki kolme mängu, kui iga sõdur oskab mängida vähemalt ühte mängu?

76. Leidke $(\{\{\emptyset\}\} \triangle \{\emptyset\}) \setminus (\{\emptyset\} \triangle \emptyset)$.

77. Hulgad A, B ja $A \cup B$ sisaldavad vastavalt m, n ja p elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $A \cap B$, $A \setminus B$ ja $A \triangle B$?

78. Tõestage järgmised võrdused.

- | | |
|--|--|
| a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | k) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ |
| b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | l) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ |
| c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | m) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ |
| d) $A \cup (A \cap B) = A$ | n) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$ |
| e) $A \cap (A \cup B) = A$ | o) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ |
| f) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | p) $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$ |
| g) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ | q) $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ |
| h) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ | r) $A \triangle (A \triangle B) = B$ |
| i) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$ | s) $A \triangle \emptyset = A$ |
| j) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ | t) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ |

79. Tõestage järgmised võrdused.

- | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $(A')' = A$ | c) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ |
| b) $(A' \cup B) \cap A = A \cap B$ | d) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$ |

80. Leidke hulgad.

- | | | | |
|---|---|---|--|
| a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ | e) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 1]$ | i) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-2^n, 2^n)$ | m) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2^n, \infty)$ |
| b) $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ | f) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n})$ | j) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [-2^{-n}, 2^{-n}]$ | n) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, \infty)$ |
| c) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n}]$ | g) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^{-n}]$ | k) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$ | o) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$ |
| d) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, 1 + 2^n]$ | h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} [-1, n^{-1}]$ | l) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n]$ | p) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty)$ |

$$\begin{array}{ll} \text{q)} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, 2, \dots, 2n\} & \text{s)} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\} \\ \text{r)} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1, 2, \dots, 2n\} & \text{t)} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{-n, n\} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{u)} \bigcup_{j=k}^n [2j, 2j+3] & \text{w)} \bigcap_{j=k}^n \{-j, j\} \\ \text{v)} \bigcup_{j=k}^n \{-j, j\} & \text{x)} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{-2n, 0, 2n\} \end{array}$$

81. Tõestage, et $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

82. Tõestage, et kui $A \subset B$, siis suvalise hulga C korral kehtivad sisalduvused:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} A \cup C \subset B \cup C; & \text{c)} (A \setminus C) \subset (B \setminus C); & \text{e)} B' \subset A'. \\ \text{b)} A \cap C \subset B \cap C; & \text{d)} (C \setminus B) \subset (C \setminus A); & \end{array}$$

83. Näidake, et kehtib:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A \cup B \subset C \Leftrightarrow A \subset C \wedge B \subset C; & \text{c)} C \subset A \vee C \subset B \Rightarrow C \subset A \cup B. \\ \text{b)} C \subset A \cap B \Leftrightarrow C \subset A \wedge C \subset B; & \end{array}$$

84. Avaldage

$$\begin{array}{ll} \text{a)} A \cup B \text{ tehete } \cap \text{ ja } \Delta \text{ abil;} & \text{d)} A \setminus B \text{ tehete } \cup \text{ ja } \Delta \text{ abil;} \\ \text{b)} A \setminus B \text{ tehete } \cap \text{ ja } \Delta \text{ abil;} & \text{e)} A \cup B \text{ tehete } \setminus \text{ ja } \Delta \text{ abil;} \\ \text{c)} A \cap B \text{ tehete } \cup \text{ ja } \Delta \text{ abil;} & \text{f)} A \cap B \text{ tehete } \setminus \text{ abil.} \end{array}$$

85. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jada, kusjuures $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühendit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

86. Olgu antud hulkade $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ jada, kusjuures $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$. Tõestage, et selle jada lõpliku arvu liikmete ärajätmine ei mõjuta nende hulkade ühisosa $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Definitsioon. Hulkade A ja B otsekorrutiseks nimetatakse kõikide paaride (a, b) hulka, kus $a \in A$ ja $b \in B$, seejuures elementide järjekord on oluline.

$$\begin{array}{l} A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\} \\ \underbrace{A \times \dots \times A}_n = A^n \end{array}$$

Otsekorrutise omadusi:

- otsekorrutis tühja hulgaga: $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$;

- distributiivsus: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
 $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

87. Leidke antud hulcade otsekorrutis $A \times B$:

- a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$; d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$;
b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; e) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x = 5\}$,
c) $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 1 < x \leq 3\}$.

88. Olgu antud hulgad $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$ ja $C = \{y \in \mathbb{N} : 1 \leq y \leq 5\}$. Kujutage koordinaattasandil

- a) $A \times (B \cup C)$, c) $C \times (A \cup B)$, e) $(A \cup C) \times B$, g) $(B \cap A) \times C$, i) $(C \setminus A) \times B$,
b) $(A \triangle B) \times C$, d) $C \times (B \triangle A)$, f) $C \times (B \setminus A)$, h) $B \times (C \cup A)$, j) $A \times (B \cap C)$.

89. Hulgad A ja B sisaldavad vastavalt m ja n elementi. Mitu elementi sisaldavad hulgad $\mathcal{P}(A)$, $A \times B$, $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ ja $\mathcal{P}(A \times B)$? Leidke need hulgad, kui

- a) $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$; b) $A = B = \{0, 1\}$; c) $A = \{a, b, c\}$, $B = \emptyset$.

90. Tõestage võrdused.

- a) $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$ c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$
b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ d) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

91. Näidake, et $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$.

92. Tõestage, et kui $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$, siis $A \times B = B \times A$ parajasti siis, kui $A = B$.

93. Tõestage, et kui $A_i \neq \emptyset$, $B_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, siis

- a) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subset B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2, \dots, A_n \subset B_n$;
b) $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$ parajasti siis, kui $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2, \dots, A_n = B_n$.

5. Arvuteooria elemente ja matemaatiline induktsioon

Definitsioon. Öeldakse, et täisarv a jagab täisarvu b (ja tähistatakse $a \mid b$), kui leidub selline täisarv c , et $ac = b$. Fakti, et $a \mid b$ võib tähistada ka kujul $b : a$ ehk arv b jagub arvuga a .

Teoreem. Olgu a täisarv ja b naturaalarv. Siis leiduvad üheselt määratud täisarvud q (jagatis) ja r (jääk) nii, et

$$a = bq + r \quad \text{ja} \quad 0 \leq r < b.$$

Definitsioon. Algarvuks nimetatakse naturaalarvu $p > 1$, mille ainsad naturaalarvulised jagajad on 1 ja p . Naturaalarvu, mis on suurem kui 1 ja mis pole algarv, nimetatakse kordarvuks.

Definitsioon. Täisruuduks nimetatakse naturaalarvu, mis võrdub mingi täisarvu ruuduga.

94. Olgu a, b, c ja d täisarvud. Tõestage järgmised omadused:

- $a \mid a$ (refleksiivsus);
- $1 \mid a$;
- $0 \mid a$ parajasti siis, kui $a = 0$;
- kui $a \mid b$ ja $b \mid c$, siis $a \mid c$ (transitiivsus);
- kui $a \mid b$ ja $b \neq 0$, siis $|a| \leq |b|$;
- kui $a \mid b$ ja $a \mid c$, siis $a \mid xb + yc$ suvaliste täisarvude x ja y korral;
- kui $a \mid b$ ja $a \mid (b \pm c)$, siis $a \mid c$;
- kui $a \mid b$ ja $b \mid a$, siis $|a| = |b|$;
- kui $a \mid b$ ja $a \neq 0$, siis $(b/a) \mid b$;
- kui $c \neq 0$, siis $a \mid b$ parajasti siis, kui $ac \mid bc$.
- kui $a \mid b$, siis $a \mid be$ suvalise täisarvu e korral.
- kui $a \mid b$ ja $c \mid d$, siis $ac \mid bd$;

95. Näidake, et kolmekohaline arv, mis on kirjutatud ühesuguste numbritega, jagub alati kolmega.

96. Tõestage, et suvaliste täisarvude a ja b korral vähemalt üks arvudest $a, b, a + b$ ja $a - b$ jagub kolmega.

97. Viis täisarvu a, b, c, d, j rahuldavad järgmisi tingimusi:

- $j \mid (ad - bc)$;
- $j \mid (a - b)$, ning
- arvude b ja j ühised jagajad on ± 1 .

Tõestage, et $j \mid (c - d)$.

98. Tõestage, et arvust 3 suuremate algarvude p ja q korral $p^2 - q^2$ jagub arvuga 24.

99. Põhjendage, et täisarvu ruut ei saa lõppeda numbritega 2, 3, 7 või 8.

100. Näidake, et kolme järjestikuse naturaalarvu ruutude summa ei jagu kolmega.

101. Tõestage, et

- a) Kolmest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 3;
- b) Kahest järjestikusest paarisarvust täpselt üks jagub arvuga 4;
- c) Viiest järjestikusest arvust täpselt üks jagub arvuga 5.

102. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n+1)(n+2)$.

103. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $6 \mid n(n^2 - 1)$.

104. Tõestage, et iga naturaalarvu n korral $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.

105. Näidake, et kui n on naturaalarv, siis $n^2 + 1$ ei jagu 11-ga.

106. Tõestage, et kui $(mn + pq) : (m - p)$, siis $(mq + np) : (m - p)$.

107. Avaldis $a + b + c$, kus a, b ja c on täisarvud, jagub arvuga 6. Näidake, et siis ka $a^3 + b^3 + c^3$ jagub arvuga 6.

108. Tõestage, et mistahes täisarvu ruudu jagamisel

- a) arvuga 3 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
- b) arvuga 4 tekkiv jääk saab olla vaid 0 või 1;
- c) arvuga 8 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1 või 4;
- d) arvuga 7 tekkiv jääk saab olla vaid 0, 1, 2 või 4.

109. Naturaalarvu a jagamisel arvuga 8 tekkis jääk 7. Milline jääk tekib arvu a^3 jagamisel arvuga 8?

110. Naturaalarvu a jagamisel arvuga 5 tekkis jääk 4. Tõestage, et $a^2 + a^3$ jagub arvuga 5.

111. Tõestage, et suvalise naturaalarvu n korral arv $n^3 + 3n^2 + 2n$ jagub 6-ga.

112. Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geq 5$ jagamisel arvuga 6 tekkiv jääk saab olla vaid 1 või 5.

113. Tõestage, et mis tahes algarvu $p \geq 5$ ruudu jagamisel arvuga 24 tekkiv jääk saab olla vaid 1.

114. Tõestage, et mis tahes 12 naturaalarvu seast on alati võimalik välja valida kaks erinevat arvu nii, et nende vahe jagub arvuga 11.

115. Tõestage, et kui p , $p+2$ ja $p+4$ on kõik algarvud, siis $p=3$.

Näpunäide. Vaadelda eraldi juhtusid arvu p jagamisel arvuga 3 tekkiva jäägi 0, 1 või 2 korral.

Matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

- Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;
- Induktsiooni samm.** $S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et suvaline väide S_k on tõene, järeldub, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tugeva matemaatilise induktsiooni meetod. Olgu antud mingi seeria väiteid $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. Antud seerias iga väide S_n on tõene, kui

- Induktsiooni baas.** S_1 on tõene, s.t seerias esimene väide on tõene;
- Induktsiooni samm.** $S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_k \Rightarrow S_{k+1}$, s.t oletusest, et kõik eelnevad väited $S_1, \dots, S_k$ on tõesed, järeldub, et järgnev väide S_{k+1} on tõene.

Tähtis! Tugeva induktsiooni baasi kehtivuse kontrollimisel on mõnikord vaja tõestada lisaks esimesele väitele veel mõned järgnevad väited.

116. Tõestage võrdused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1) \cdot (2i+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{i=0}^n i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\sum_{i=1}^n (3i^2 - i - 2) = (n-1)n(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$
- $1 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \forall n \geq 2$
- $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

117. Tõestage võrratused, kasutades matemaatilist induktsiooni.

- a) $n^2 \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$
b) $2^n \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
c) $n^n \geq n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$
d) $(n+1)! \geq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$
e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
f) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
g) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
h) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n} \quad \forall n \geq 2$
i) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
j) $n! > 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 4$
k) $\frac{n}{2} + 1 \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
l) $\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sqrt{l}} \geq \sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

118. Tõestage, et kui $n \in \mathbb{N}$, siis $(1+x)^n \geq 1+nx$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral, kus $x > -1$.

119. Geomeetrilise jada n esimese elemendi summa valem. Tõestage matemaatilise induktsiooni abil, et kehtib $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, kus $n \geq 0$ ja $x \neq 1$.

120. Tõestage matemaatilise induktsiooniga, et kumera n -nurga sisenurkade summa S_n avaldub valemiga $S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$.

121. Olgu x reaalarv, mille korral $x + \frac{1}{x}$ on täisarv. Tõestage, et siis ka $x^n + \frac{1}{x^n}$ on täisarv iga naturaalarvu n korral. *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induktsiooni.*

122. Korvpalliliigas on n meeskonda ($n \geq 2$). Kõik meeskonnad kohtuvad omavahel paarajasti ühe korra, kusjuures viigid ei ole lubatud (igas mängus selgitatakse võitja ja kaotaja). Tõestage, et pärast liigahooaja lõppu on võimalik meeskondi sedasi vasakult paremale rivistada, et kahe kõrvuti paikneva meeskonna korral paikneb omavahelise duelli võitja kaotajast vasakul.

123. Ringmaanteel, mille pikkus on 100 km, seisab n ühesugust autot. Neil on ühtekokku nii palju kütust, et katta 101 km. Tõestage, et leidub üks auto, mis, alustades oma kütusega ja kogudes teel kütust ülejäänud autodelt, võib läbida täisringi. (Kütust tohib võtta ainult siis, kui autod on kõrvuti; autot lükata ei tohi)

124. Peol, kus viibib $2n$ inimest, tervitavad varasemalt tuttavad teineteist käepigistusega. On teada, et peol ei leidu ühtegi kolmeliikmelist alamseltskonda, mille kõik liikmed oleksid omavahel enne pidu tuttavad. Tõestage, et tervitavate käepigistuste koguarv peol on ülimalt n^2 .

125. Linnas elab n latatara, kusjuures $n \geq 4$. Kõigil neil on telefon. Ühel päeval samal ajal saab igaüks neist teada mingi uudise. Tõestage, et on võimalik korraldada telefonikõned niiviisi, et pärast $2n-4$ kõnet teab iga latatara iga ülejäänud uudist.

126. Malelualal, mõõtmetega $2^n \times 2^n$ ruutu, värvitakse üks vabalt valitud ruut punaseks. Tõestage, et malelaua saab katta kolmeruuduliste L-kujuliste tükkidega nii, et nähtavale jääb ainult punane ruut.

127. Tõestage jaguvused ($n \in \mathbb{N}$).

a) $3 \mid n^3 + 2n$

b) $5 \mid n^5 - n$

c) $7 \mid n^7 - n$

d) $12 \mid 5 \cdot 9^n + 3$

e) $8 \mid 3^{2n} - 1$

f) $64 \mid 3^{2n} - 8n - 1$

g) $6 \mid n(n+1)(n+2)$

h) $6 \mid n(n^2 - 1)$

i) $30 \mid (n^5 - n)$

j) $30 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

k) $30 \mid mn(m^4 - n^4)$

128. Tõestage, et summa $\frac{a}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{6}$ on täisarv iga täisarvu a korral.

129. Tõestage, et $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot a^{n-i} \cdot b^i$. ($a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$)

Vihje: esmalt veenduge, et $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$.

130. Tõestage, et kehtib üldistatud De Morgani valem ehk

$$\neg(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge \dots \wedge X_n) = \neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3 \vee \dots \vee \neg X_n$$

iga naturaalarvu $n \geq 2$ korral, kus $X_1, \dots, X_n$ on mingid lausearvutuse valemid. Kuidas sellest lihtsasti järeldada, et kehtib ka analoogiline valem

$$\neg(X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee \dots \vee X_n) = \neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3 \wedge \dots \wedge \neg X_n$$

iga naturaalarvu $n \geq 2$ korral, kus $X_1, \dots, X_n$ on mingid lausearvutuse valemid?

131. Olgu meil jada $a_0, a_1, a_2, \dots$ elemendid defineeritud järgmiselt: $a_0 = \frac{1}{4}$ ja $a_{n+1} = 2 \cdot a_n(1 - a_n)$, kus $n \geq 0$. Näidake, et kõikide $n \geq 0$ korral selle jada üldliige on esitatav valemiga $a_n = \frac{1 - 0,5^{2^n}}{2}$.

132. Rekurrentne jada on defineeritud kujul $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ja $n \geq 2$ korral $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$. Leidke a_{300} . *Vihje: Kasutage tugevat matemaatilist induksiooni.*

Definitsioon. Arve $F_0, F_1, F_2, \dots$, kus $F_0 = 0$ ja $F_1 = 1$ ning iga naturaalarvu n korral $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ nimetatakse Fibonacci arvudeks.

133. Tõestage Fibonacci jada jaoks järgmised väited.

a) Iga $n \geq 0$ korral F_{3n} on paarisarv.

b) Iga $n \geq 0$ korral $\sum_{i=0}^n (F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

c) Iga $n \geq 1$ korral $\sum_{i=0}^{n-1} F_i = F_{n+1} - 1$.

- d) Iga $n \geq 1$ korral $F_1 + F_3 + F_5 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
 e) Iga $n \geq 0$ ja $m \geq 1$ korral $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$.
 f) Iga $n \geq 1$ korral $F_0 - F_1 + F_2 - F_3 + \dots - F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n-1} - 1$.
 g) Iga $n \geq 1$ korral $F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
 h) Iga $n \geq 0$ korral $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$.

134. Leidke viga väite „Kõik linnud on ühte värvi“ tõestuses.

Baas. Kui $n = 1$, siis on meil tegemist üheainsa linnuga ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et väide kehtib k linnu korral. Vaatleme $k + 1$ lindu $L_1, \dots, L_{k+1}$. Jättes esialgu viimase linnu välja, saame induktsiooni eelduse põhjal, et linnud $L_1, \dots, L_k$ on ühte värvi. Jättes välja esimese linnu, näeme, et ka linnud $L_2, \dots, L_{k+1}$ on ühte värvi. Siit järeldub, et lind L_{k+1} on sama värvi nagu linnud $L_1, \dots, L_k$, seega on kõik $k + 1$ lindu ühte värvi.

135. Leidke viga väite „Kõik positiivsed täisarvud on omavahel võrdsed“ tõestuses.

Märkigu tähis $\max(x, y)$ arvude x ja y seast suurimat. Tõestame väite induktsiooniga arvu $\max(x, y)$ väärtuse järgi.

Baas. Kui $\max(x, y) = 1$, siis peab olema $x = y = 1$, sest tegemist on positiivsete täisarvudega.

Samm. Eeldame, et väide kehtib arvude puhul, mille maksimum on k . Olgu nüüd arvud x ja y sellised, et $\max(x, y) = k + 1$. Viimane võrdus on samaväärne võrdusega $\max(x - 1, y - 1) = k$. Induktsiooni eelduse põhjal $x - 1 = y - 1$, millest $x = y$.

136. Leidke viga väite „Iga $n \geq 3$ korral on F_n paarisarv“ tõestuses.

Baas. Kui $n = 3$, siis $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$ ja väide kehtib.

Samm. Eeldame, et $m \geq 3$ ja iga $3 \leq k \leq m$ korral väide kehtib. Nüüd $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ ja induktsiooni eelduse põhjal on F_m ja F_{m-1} paarisarvud. Seega on ka F_{m+1} paarisarv, sest esitub paarisarvude summana.

137. Olgu x_1 ja x_2 ruutvõrrandi $x^2 + px - 1 = 0$ lahendid, kus p on paaritu täisarv, ning tähistagu $y_n = x_1^n + x_2^n$ iga $n = 0, 1, 2, \dots$ korral. Tõestage, et siis iga n korral y_n ja y_{n+1} on ühistegurita täisarvud.

138. Tõestage (tugeva induktsiooni meetodil), et iga naturaalarv esitub arvu 2 erinevate astmete summana.

139. Puslet pannakse kokku sammhaaval. Sammuks on kas tüki ühendamine olemasoleva plokiga, või kahe ploki ühendamine. Tõestage tugeva induktsiooni meetodil, et mis tahes viisil sammusid läbi viies, on n -tükilise pusle kokkupanekuks tarvis $n - 1$ sammu.

140. Johann ja Kaido valmistasid endale suure kausitäie popkorni ja söövad seda filmi vaadates. Nad võtavad popkorni vaheldumisi, võttes alati vähemalt ühe popkornitera ja kuni peotäie. Tõestage, et popkornikauss saab millalgi tühjaks.

6. Funktsioonid

Definitsioon. Olgu X ja Y mittetühjad hulgad. Kui on antud eeskiri, mis seab hulga X igale elemendile vastavusse täpselt ühe hulga Y elemendi, siis öeldakse, et on defineeritud funktsioon f , ja kirjutatakse $f: X \rightarrow Y$. Kui elemendile $x \in X$ seatakse vastavusse $y \in Y$, siis kasutatakse kirjutist $y = f(x)$ või $y = fx$ või $f: x \mapsto y$.

Definitsioon. Funktsioone $f: X \rightarrow Y$ ja $g: Z \rightarrow W$ nimetatakse võrdseteks, kui $X = Z$, $Y = W$ ja $f(x) = g(x)$ iga $x \in X (= Z)$ korral.

Definitsioon. Vaatleme funktsiooni $f: X \rightarrow Y$. Hulka $G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ nimetatakse funktsiooni f graafikuks.

Funktsiooni $I_X: X \rightarrow X$ eeskirjaga $I_X(x) = x \quad \forall x \in X$ nimetatakse samasusteisenduseks.

141. Skitseerige antud funktsioonide graafikud ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= 1 - |x|; \\ \text{b) } f(x) &= \begin{cases} 1 - x^2, & \text{kui } x \leq 0, \\ 1/x, & \text{kui } 0 < x < 2, \\ 1/2, & \text{kui } x \geq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{kui } x < 0, \\ 0, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1, \\ 2x, & \text{kui } x > 1. \end{cases}$$

142. Olgu $f_1: X \rightarrow Y$ ja $f_2: X \rightarrow Y$. Tõestage, et $f_1 = f_2$ parajasti siis, kui $G(f_1) = G(f_2)$.

143. Olgu $f_1: X \rightarrow Y$ ja $f_2: X \rightarrow Y$. Näidake, et $G(f_1) \cup G(f_2)$ (samuti $G(f_1) \cap G(f_2)$) on mingi hulgal X määratud funktsiooni graafik parajasti siis, kui $f_1 = f_2$.

Olgu X universaalne hulk.

Definitsioon. Hulga $A \subset X$ karakteristikuks funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\}$, kus

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A, \\ 0, & \text{kui } x \in X \setminus A. \end{cases}$$

144. Olgu U universaalhulk ja $A, B \subset U$. Tõestage, et iga $x, y \in U$ korral:

$$\begin{aligned} \text{a) } \chi_{\emptyset}(x) &= 0, \chi_U(x) = 1; & \text{e) } \chi_{A \setminus B}(x) &= \chi_A(x) - \chi_A(x)\chi_B(x); \\ \text{b) } \chi_A(x)\chi_A(x) &= \chi_A(x); & \text{f) } \chi_{A^c}(x) &= 1 - \chi_A(x); \\ \text{c) } \chi_{A \cap B}(x) &= \chi_A(x)\chi_B(x); & & \\ \text{d) } \chi_{A \cup B}(x) &= \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x) & \text{g) } \chi_{A \times B}((x, y)) &= \chi_A(x)\chi_B(y). \end{aligned}$$

145. Näidake, et $\chi_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = \max_{i \in I} \chi_{A_i}(x)$, $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \min_{i \in I} \chi_{A_i}(x)$.

146. Avaldage $\chi_{A \triangle B}$ funktsioonide χ_A ja χ_B kaudu.

147. Hulga karakteristikliku funktsiooni abil tõestage, et kehtivad võrdused:

- | | |
|---|--|
| a) $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$; | d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$; |
| b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; | e) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; |
| c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; | f) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. |

148. Tõestage, et $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Definitsioon. Olgu antud funktsioon $f : X \rightarrow Y$ ja olgu $x \in X$ ning $y \in Y$. Kui $y = f(x)$, siis elementi y nimetatakse elemendi x kujutiseks ja elementi x nimetatakse elemendi y originaaliks.

Definitsioon. Kui $A \subset X$, siis hulka

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{leidub } x \in A \text{ nii, et } y = f(x)\} = \{f(x) \in Y \mid x \in A\}$$

nimetatakse hulga A kujutiseks.

Definitsioon. Kui $B \subset Y$, siis hulka

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

nimetatakse hulga B originaaliks.

149. Olgu antud funktsioon f ja element x_0 . Leidke elemendi x_0 kujutis $f(x_0)$.

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = x^2 + x + 1$, $x_0 = 3$
- $f : \{\text{Riigid}\} \rightarrow \{\text{Inimesed}\}$, $f(x)$ = riigi x riigipea, x_0 = Eesti
- $f : \mathbb{N} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x)$ = arvu x erinevate algtegurite arv, $x_0 = 360$
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x^2}{4}$, kui x on paaris, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{4}$, kui x on paaritu, $x_0 = -5$

150. On antud funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja element $y_0 \in \mathbb{R}$. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid:

- $f(x) = 4 - x^2$, $i) y_0 = 0$; $ii) y_0 = 4$; $iii) y_0 = 2$;
- $f(x) = 3^x$, $i) y_0 = 3$; $ii) y_0 = 1$; $iii) y_0 = 5$.

151. Leidke kõik elemendi y_0 originaalid funktsiooniga f .

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$, $y_0 = 2$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x - 1)$, $y_0 = 6$
- $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x \bmod 5$ (s.t. $f(x)$ on jääk x jagamisel arvuga 5), $y_0 = 3$
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f((r, s)) = (r + 2)^2 + (s - 3)^2$, $y_0 = 4$

152. On antud funktsioon f ja hulk A . Leidke hulga A kujutis $f(A)$:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x, A = [1, 2]$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x, A = [0, 3]$;
 b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, A = \{2\}$; e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x - 1|, A = [0, 3]$;
 c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$; f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x - 2)^2, A = [1, 4]$;

153. Vaatleme funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f(\{-1, 0, 1\})$ c) $f([-2, 2])$ e) $f((-\infty, 0])$
 b) $f([-1, 1])$ d) $f([-5, -3] \cup [0, 3])$ f) $f(\mathbb{R})$

154. On antud funktsioon f ja hulk B . Leidke hulga B originaal $f^{-1}(B)$:

- a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x, B = \{0\}$; c) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, B = (0, \infty)$;
 b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (-1)^x, B = \{1\}$; d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x, B = [0, 3]$.

155. Vaatleme funktsiooni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 2$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\})$ b) $f^{-1}([-2, 2])$ c) $f^{-1}([10, 50])$ d) $f^{-1}((-\infty, 0])$ e) $f^{-1}(\mathbb{R})$

156. Olgu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}$. $g(x) = \lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} | m \geq x\}$. Leidke järgmised hulgad.

- a) $f^{-1}(\{0\}), g^{-1}(\{0\})$ c) $f^{-1}(\{x | 0 < x < 1\}), g^{-1}(\{x | 0 < x < 1\})$
 b) $f^{-1}(\{-1, 0, 1\}), g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$

157. Olgu $m, k \in \mathbb{Z}$. Leidke $f^{-1}(\{m\}), f^{-1}(\{m, m + 1\}), f([k, k + 1]), f([k, k + 2])$ järgmiste funktsioonide $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jaoks:

- a) $f(x) = \lceil \lfloor x - \frac{1}{2} \rfloor + \frac{1}{2} \rceil$ c) $f(x) = \lfloor \frac{1}{2} - 2 \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \rfloor$
 b) $f(x) = \lfloor \frac{1}{2} - \lceil x + \frac{1}{2} \rceil \rfloor$ d) $f(x) = \lfloor 2 \lceil \frac{x}{2} \rceil + \frac{1}{2} \rfloor$

158. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Tõestage, et kehtivad järgmised väited:

- a) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$; d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
 b) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$; e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
 c) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$; f) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

159. Tõestage järgnevad võrdused:

- a) $f(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha})$; b) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$; c) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha})$.

160. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $B \subset Y$. Tõestage, et $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

161. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$. Leidke näide, kus $f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$.

162. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Tõestage järgnevad sisalduvused ja tooge näiteid, kus need sisalduvused ei ole võrdsed.

- a) $A \subset f^{-1}(f(A))$ b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

163. Olgu $f : X \rightarrow Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. Tõestage, et $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse injekttiivseks ehk üksüheseks, kui iga paari $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, korral $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definitsioon. Funktsiooni $f : X \rightarrow Y$ nimetatakse surjekttiivseks ehk pealekujutuseks, kui $f(X) = Y$.

Definitsioon. Funktsiooni nimetatakse bijekttiivseks, kui ta on injekttiivne ja surjekttiivne.

Definitsioon. Funktsioonide $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$ korrutiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse funktsiooni $g \circ f : X \rightarrow Z$, mis määratakse võrdusega

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in X.$$

Definitsioon. Substitutsiooniks hulgal $M \neq \emptyset$ nimetatakse mistahes bijekttiivset kujutust $f : M \rightarrow M$.

Kui funktsioon $f : X \rightarrow Y$ on bijekttiivne, siis saab defineerida pöördfunktsiooni $f^{-1} : Y \rightarrow X$, mis igale elemendile $y \in Y$ seab vastavusse tema originaali $x \in X$ funktsiooniga f teisendamisel, st

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

164. Otsustage, kas järgmised funktsioonid on sürjektiivsed.

a) $q: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, q(x) = x + 2$

b) $p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, p(x) = x + 2$

165. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus.

Põhjendage (tähistame $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$):

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 2;$

g) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x;$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^x;$

h) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin x;$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^2;$

i) $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \tan x;$

d) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, f(x) = x^2;$

j) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x;$

e) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3;$

k) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cot x;$

f) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x;$

166. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus.

Põhjendage.

a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 1 + n + 3|n|;$

c) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = (-1)^x x$

b) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f(n) = (-1)^n n.$

d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 1 + \frac{x+3|x|}{2}$

167. Määrake, kas funktsioon f on injektiivne, sürjektiivne või bijektiivne kujutus.

Põhjendage.

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f((x, y)) = (x + y, x - y)$ c) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f((m, n)) = (2m, m - n)$

b) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f((m, n)) = m^2 - n$

168. Tähistame tähega E paarisarvude hulga. Iga järgmise funktsiooni $f: \mathbb{Z} \rightarrow E$ korral otsustage, kas f on injektiivne või sürjektiivne. Põhjendage oma vastust.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 4 - x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & \text{kui } x \text{ on paaritu} \\ 2x, & \text{kui } x \text{ on paaris} \end{cases}$

169. Olgu funktsioon $f: [0, 1] \times \{1, 2, 3\} \rightarrow [1, 4]$ antud kujul $f((x, y)) = x + y$. Näidake, et f on sürjektiivne, aga ei ole injektiivne.

170. Olgu funktsioon $g: [1, 4] \rightarrow [0, 1]$ antud kujul $g(x) = \frac{x}{4}$. Näidake, et g on injektiivne, aga ei ole surjektiivne.

171. Olgu $X = \mathbb{N} \cup \{-1, 3, 5\}$ ja $Y = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Leidke funktsioon $f: X \rightarrow Y$, mis on injektiivne ja surjektiivne ning $f(2) = 3$.

172. Olgu antud kahe muutuja funktsioon $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nii, et $g((m, n)) = m^2 - n$.

- Kas funktsioon g on üksühene? Kas funktsioon g on pealekujutus?
- Arvuta funktsiooni väärtused $g((0, 3))$, $g((3, -2))$, $g((-3, -2))$ ja $g((7, -1))$.
- Leia funktsiooni g väärtusele 0 vastav originaalide hulk. (Kasuta hulgasümboolikat!)
- Leia funktsiooni g väärtusele 5 vastav originaalide hulk.

173. Olgu $\varphi: A \rightarrow B$ bijektsioon. Tõestage, et

- φ^{-1} on bijektsioon,
- $\varphi^{-1}\varphi = I_A$,
- $\varphi\varphi^{-1} = I_B$.

174. Tõestage, et funktsioon $f: X \rightarrow Y$ rahuldab tingimust

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall A, B \subset X$$

ning võrdus $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ kehtib parajasti siis, kui f on injektiivne.

175. Tõestage, et $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \subset \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$. Tooge näide funktsioonist f ja hulkadest A_{α} , kus $f(\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}) \neq \bigcap_{\alpha} f(A_{\alpha})$. Näpunäide: vaadelda projekteerimisteisendust.

176. Tõestage, et $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A) \quad \forall A \subset X$ parajasti siis, kui f on injektsioon.

177. Tõestage, et $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A) \quad \forall A \subset X$ parajasti siis, kui f on surjektsioon.

178. Tooge näide funktsioonist f täisarvude hulgast positiivsete täisarvude hulka, mis

- On injektiivne, aga ei ole surjektiivne.
- On surjektiivne, aga ei ole injektiivne.
- On injektiivne ja surjektiivne.
- Ei ole injektiivne ega surjektiivne.

179. Hinnake järgmist tõestust hindegas A, C või E, kus hinne A antakse korrektse tõestuse eest, hinne C saab osaliselt õige tõestuse eest ja hinne F tähendab, et tõestus on vale. Põhjendage oma hinne panemist.

Väide: Funktsioon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kujul $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kui } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 2x^2 - \sqrt{2}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ on injektiivne.

Tõestus: Olgu $x \neq y$. Siis $2x^2 - \sqrt{2} \neq 2y^2 - \sqrt{2}$ ja $-x \neq -y$. Seega $f(x) \neq f(y)$, mis tõestab, et f on injektiivne.

180. Olgu A ja B mittetühjad hulgad. Defineerime funktsiooni

$$p_1: A \times B \rightarrow A, \quad p_1(a, b) = a,$$

iga $(a, b) \in A \times B$ korral. See on **esimene projektsiooni funktsioon**.

- Kas funktsioon p_1 on sürjektsioon? Põhjendage oma vastust.
- Kui $B = \{b\}$, kas funktsioon p_1 on siis injektsioon? Põhjendage oma vastust.
- Millis(t)e tingimus(t)e korral ei ole funktsioon p_1 injektsioon? Koostage vastav väide ja tõestage see.

181. Olgu C kõikide lõigud $[0, 1]$ pidevate funktsioonide hulk. Defineerime funktsiooni $A: C \rightarrow \mathbb{R}$ järgnevalt: iga $f \in C$ korral

$$A(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Kas funktsioon A on injektsioon? On see sürjektsioon? Põhjendage oma vastuseid.

182. Olgu $A = \{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\}$. Defineerime funktsiooni $f: A \rightarrow \mathbb{Q}$ järgnevalt:

$$\text{iga } (m, n) \in A \text{ korral } f(m, n) = \frac{m+n}{n}.$$

- Kas funktsioon f on injektsioon? Põhjendage oma vastust.
- Kas funktsioon f on sürjektsioon? Põhjendage oma vastust.

Tähistame $A^B = \{f: B \rightarrow A \mid f \text{ on funktsioon}\}$.

183. Olgu hulkade A ja A_1 vahel ning B ja B_1 vahel üksühesed vastavused (e. bijektsioonid). Tõestage, et siis on üksühesed vastavused ka hulgad

- $A \times B$ ja $A_1 \times B_1$,
- A^B ja $A_1^{B_1}$,
- $A \cup B$ ja $A_1 \cup B_1$, kui $A \cap B = \emptyset$ ja $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

184. Korraldage üksühene vastavus järgmiste hulkade vahel:

- a) $A \times B$ ja $B \times A$,
- b) $A \times (B \times C)$ ja $(A \times B) \times C$,
- c) $(A \times B)^C$ ja $A^C \times B^C$,
- d) $(A^B)^C$ ja $A^{B \times C}$,
- e) $A^{B \cup C}$ ja $A^B \times A^C$, kui $B \cap C = \emptyset$.

185. Olgu A ja B hulgad, $B \neq \emptyset$. Defineerime funktsioonid $f: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B \cup A)$, $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ valemitega $f(X) = X \cup A$ ja $g(X) = X \cap A$. Mis tingimusel on f või g injektiivne funktsioon? Mis tingimusel on f või g surjektiivne funktsioon?

186. Olgu $C \neq \emptyset$ ja $A, B \subset C$ ning $f, g: \mathcal{P}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C) \times \mathcal{P}(C)$ funktsioonid, kus $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$, $g(X) = (X \cap A, X \cap B)$ iga $X \in \mathcal{P}(C)$. Mis tingimustel on f või g injektiivne funktsioon?

187. Olgu $f(x) = 3x$, $g(x) = x + 1$ ja $h(x) = x^2 + 2$. Leidke

- a) $(fg)(3)$; c) $(gf)(x)$; e) $(fh)(x)$; g) $(gh)(x)$;
- b) $(fg)(-6)$; d) $(fh)(2)$; f) $(hf)(x)$; h) $(hg)(x)$.

188. Olgu $f(x) = x^2 - 1$ ning $g(x) = 3 - x$. Leidke

- a) $(gf)(1)$; b) $(fg)(-4)$; c) $(fg)(x+1)$; d) $(fg)(x+2)$.

189. Olgu $f(x) = x^3 + 3$ ning $g(x) = x - 4$. Leidke $(fg)(x)$ ja $(gf)(x)$ ning lahendage võrrand $(fg)(x) = (gf)(x)$.

190. Leidke gf , fg , g^2 , f^3 , kui

- a) $f(x) = 2x + 1$ ja $g(x) = 3x - 1$; b) $f(x) = x^2$ ja $g(x) = 2^x$.

191. Leidke f^{-1} , kui

- a) $f(x) = 3x - 1$; c) $f(x) = \frac{1}{4}x + 5$; e) $f(x) = 2x^3 + 3$;
- b) $f(x) = x^3 - 3$; d) $f(x) = \sqrt{3}x - 3$; f) $f(x) = \frac{2x}{5-x}$, $x \neq 5$.

192. Leidke gf , fg , g^5 , f^6 , kui f ja g on substituutsioonid hulgal X :

- a) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;
- b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- c) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

193. Leidke f^{-1} , g^{-1} , $g^{-2}f^3$, f^3g^2 , kui f ja g on substituutsioonid hulgal X :

a) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

c) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

194. Tõestage, et kui $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow X$ korral $gf = I_X$, siis f on injektiivne ja g on sürjektiivne.

195. Tõestage, et kui $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_2 : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $gf_1 = gf_2$ ja g on injektiivne, siis $f_1 = f_2$.

196. Tõestage, et kui $f : X \rightarrow Y$, $g_1 : Y \rightarrow Z$, $g_2 : Y \rightarrow Z$, $g_1f = g_2f$ ja f on sürjektiivne, siis $g_1 = g_2$.

197. Olgu $f : X \rightarrow Y$ ja $g : Y \rightarrow Z$. Olgu $h = gf$. Tõestage või lükake ümber järgmised väited.

- a) Kui f ja g on injektiivsed, siis ka h on injektiivne.
- b) Kui f ja g on sürjektiivsed, siis ka h on sürjektiivne.
- c) Kui f ja g on bijektiivsed, siis ka h on bijektiivne.
- d) Kui h on injektiivne, siis ka f on injektiivne.
- e) Kui h on injektiivne, siis ka g on injektiivne.
- f) Kui h on sürjektiivne, siis ka f on sürjektiivne.
- g) Kui h on sürjektiivne, siis ka g on sürjektiivne.

198. Olgu X , Y ja Z mittetühjad hulgad ja $f : X \rightarrow Y$ ning $g : Y \rightarrow Z$ funktsioonid. Tõestada väited:

- a) Kui f on sürjektiivne ja gf on injektiivne, siis g on injektiivne.
- b) Kui g on injektiivne ja gf on sürjektiivne, siis f on sürjektiivne.

7. Hulga võimsus

Definitsioon.

1. Öeldakse et hulgad X ja Y on sama võimsusega ehk ekvivalentsed ja kirjutatakse $|X| = |Y|$ või $X \sim Y$, kui leidub bijektiivne kujutus $f: X \rightarrow Y$. Kui hulgad X ja Y ei ole sama võimsusega, siis kirjutatakse $|X| \neq |Y|$ või $X \not\sim Y$.
2. Öeldakse, et hulga X võimsus ei ületa hulga Y võimsust ja kirjutatakse $|X| \leq |Y|$, kui leidub injektiivne kujutus hulgast X hulka Y .
3. Öeldakse, et hulga X võimsus on väiksem kui hulga Y võimsus ja kirjutatakse $|X| < |Y|$, kui $|X| \leq |Y|$ ja $|X| \neq |Y|$.

Definitsioon.

1. Öeldakse, et hulk X on lõplik, kui $X = \emptyset$ või leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et $|X| = |\{1, \dots, n\}|$.
2. Öeldakse, et hulk X on lõpmatu, kui ta ei ole lõplik.
3. Öeldakse, et hulk X on loenduv, kui $X \sim \mathbb{N}$.
4. Öeldakse, et hulk X on ülimalt loenduv, kui $|X| \leq |\mathbb{N}|$.
5. Öeldakse, et hulk X on kontiinumi võimsusega, kui $|X| = |\mathbb{R}|$.

Teoreem. Kui hulga A võimsus ei ületa hulga B võimsust ja hulga B võimsus ei ületa hulga A võimsust, siis hulgad A ja B on sama võimsusega.

199. Otsustage, kas hulk on lõplik või lõpmatu. Kui hulk on lõpmatu, otsustage kas on loenduv või mitte. Põhjendage.

- a) $X = \{-10, -9, -8, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, 5, 6\}$; c) $X = \emptyset$;
b) $X = \{10^x : x \in \mathbb{N}\}$; d) $X = (1, 2)$.

200. Esitage bijektsioonid $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ ja $g: M \rightarrow \mathbb{N}$ järgmiste hulkade M korral (siin $k \in \mathbb{N}$)

- a) $M = \mathbb{Z}$; d) $M = \mathbb{N} \cup \{-k, 1-k, \dots, 0\}$;
b) M on paarisarvude hulk; e) $M = \mathbb{N} \cup \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$;
c) M on paaritute arvude hulk; f) $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

201. Hilberti hotellis on loenduv arv tube, kõigis külalised. Kuidas paigutada uued külalised, kui:

- a) saabub rong miljoni külalisega;
- b) saabub rong loenduva arvu külalistega;
- c) saabub loenduv arv ronge, igas rongis loenduv arv külalisi.

- 202.** Kas hulk $\mathbb{N}$ on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga?
- 203.** Tõestage, et iga lõpmatu hulk sisaldab loenduva alamhulga.
- 204.** Tõestage, et hulk on lõpmatu parajasti siis, kui ta on ekvivalentne enda mingi pärisalamhulgaga.
- 205.** Olgu A ja B loenduvad hulgad. Tõestage, et $A \cup B$ on loenduv.
- 206.** Olgu A loenduv hulk ja B lõplik hulk. Tõestage, et $A \cup B$ ja $A \setminus B$ on loenduvad ja $A \cap B$ on lõplik.
- 207.** Tõestage, et naturaalarvude hulga kõigi lõplike alamhulkade hulk on loenduv.
- 208.** Esitage kõigi naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ kujul $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kus hulgad $A_1, A_2, \dots$ on lõpmatud ja paarikaupa lõikumatud.
- 209.** Olgu A mittetühi lõplik hulk. Nimetame teda tähestikuks, tema elemente tähtedeks ja iga lõplikku tähtede järjestikust kirjutist sõnaks. Kui $a, b, c \in A$, siis sõnad on näiteks a ja $baaaa$. Tõestage, et kõigi sõnade hulk on loenduv.
- 210.** Tõestage, et kõigi lõplike binaarjärjendite hulk on loenduv. Tõestage, et kõigi binaarjadade hulk on kontinuumi võimsusega.
- 211.** Tõestage, et kõikide ratsionaalarvuliste otspunktidega reaalarvude vahemike hulk on loenduv.
- 212.** Tõestage, et hulkade A, B ja C korral kehtib: kui $A \sim B$ ja $B \sim C$, siis $A \sim C$.
- 213.** Olgu A ja B hulgad. Tõestage, et kui $A \setminus B \sim B \setminus A$, siis $A \sim B$. Tuua näide hulkadest A ja B , mille korral vastupidine implikatsioon ei kehti.
- 214.** Tooge näide hulkadest A, B, C ja D , mille korral $A \sim C$ ja $B \sim D$, kuid $A \cup B \not\sim C \cup D$ ja $A \cap B \not\sim C \cap D$.
- 215.** Olgu A, B, C ja D hulgad. Tõestage, et kui $A \sim C$ ja $B \sim D$, siis $A \times B \sim C \times D$.
- 216.** Olgu X ja Y hulgad.
- Tõestage, et kui $X \subset Y$, siis $|X| \leq |Y|$.
 - Tõestage, et kui $X \subsetneq Y$ ja Y on lõplik hulk, siis $|X| < |Y|$.
- 217.** Olgu X, Y ja Z hulgad. Tõestage, et kui $|X| \leq |Y|$ ja $|Y| \leq |Z|$, siis $|X| \leq |Z|$.
- 218.** Olgu A ja B hulgad. Tõestage, et kui $|B| < |A|$, siis ükski kujutus $A \rightarrow B$ ei ole injektiivne.

219. Tõestage, et reaalarvude vahemik $(0, 1)$ ei ole loenduv.

220. Esitage konkreetsed bijektiivsed kujutused $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ hulkade A ja B vahel (siin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$):

- a) $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e) $A = (-\infty, b)$, $B = (c, \infty)$ i) $A = [a, b]$, $B = [c, d]$
b) $A = (a, b)$, $B = (-\infty, d)$ f) $A = (-\infty, b)$, $B = \mathbb{R}$ j) $A = [a, b]$, $B = (c, d)$
c) $A = (a, b)$, $B = (c, \infty)$ g) $A = (a, \infty)$, $B = \mathbb{R}$
d) $A = (a, b)$, $B = \mathbb{R}$ h) $A = [a, b]$, $B = (c, d)$ k) $A = [a, \infty)$, $B = (c, \infty)$.

221. Olgu X lõpmatu hulk ja Y ülimalt loenduv hulk.

- a) Tõestage, et $X \cup Y \sim X$.
b) Tõestage, et kui hulk $X \setminus Y$ on lõpmatu, siis $X \setminus Y \sim X$.

222. Mis on kõigi irratsionaalarvude hulga võimsus?

223. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega jadade hulga võimsus.

224. Leidke kõigi naturaalarvuliste liikmetega kasvavate jadade hulga võimsus.

225. Olgu X kõigi selliste reaalarvude hulk, mis kuuluvad vahemikku $(0, 1)$ ja mille kümnendesituses leidub number viis. Tõestage, et $X \sim (0, 1)$. Tõestage veel, et iga vahemiku $(a, b) \subset (0, 1)$ korral leidub vahemik $(c, d) \subset (a, b)$ nii, et $(c, d) \subset X$. Näidake, et täiendhulk $(0, 1) \setminus X$ on lõpmatu.

226. Olgu A_n , $n = 1, 2, \dots$, hulgad. Tõestage, et kui iga hulk A_n , $n = 1, 2, \dots$, on kontiinumi võimsusega, siis ka hulk $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on kontiinumi võimsusega.

227. Tooge näide kontiinumi võimsusega hulkadest A ja B nii, et a) $A \cap B$ on (i) lõplik, (ii) loenduv, (iii) kontiinumi võimsusega. Ülesanne b) sisaldab samu alamülesandeid (i)-(iii) nagu a), kuid hulga $A \cap B$ asemel on hulk $A \setminus B$.

8. Seosed

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seoseks ehk relatsiooniks hulkade X ja Y vahel nimetatakse otsekorruptise $X \times Y$ mis tahes osahulka.

Kui $R \subset X \times X$, siis räägitakse seosest hulgas X . Paari $(x, y) \in R$ korral öeldakse, et elemendid x ja y on seoses R ning tähistatakse ka xRy .

Definitsioon. Olgu X ja Y hulgad. Seost $R \subset X \times Y$ nimetatakse funktsiooniks, kui

- a) iga $x \in X$ korral leidub $y \in Y$ nii, et $(x, y) \in R$
- b) kui $x \in X$ ja $y, z \in Y$ on sellised, et $(x, y) \in R$ ja $(x, z) \in R$, siis $y = z$.

228. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid järjestatud paare sisaldab seos $R = \{(a, b) : a|b\}$, mis on määratud hulgal A ?

229. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esitage nooldiagrammi abil järgmine seos

$$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x + y \text{ on paarisarv}\}.$$

230. Esitage järgmised hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$ määratud seosed maatrikskuul ja graafina.

- a) $R = \{(1, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (4, 1)\}$; c) $R = \{(x, y) \mid x > y\}$;
- b) $R = \emptyset$; d) $R = \{(x, y) \mid \neg(x = y)\}$.

231. Esitage järgmiste maatriksitega antud seosed paaride loeteluna hulgal $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

c) $M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

b) $M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

d) $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

232. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $Y = \{a, b, c\}$. Esitage seos R hulga $X \times Y$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

233. Esitage antud seosed visuaalselt tasandi punktipaaride hulkana. Eeldame, et $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

- a) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$; d) $R = \{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 16\}$;
 b) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; e) $R = \{(x, y) \mid |x| = |y|\}$;
 c) $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$; f) $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$.

234. Tehke kindlaks, kas antud seos kehtib antud elementide vahel. Põhjendage iga vastust.

- a) Hulgale $\mathbb{Z}$ on antud seos $R = \{(m, n) \mid m \text{ ja } n \text{ jaguvad sama algarvuga}\}$. Kas kehtib $22 R 45$?
 b) Hulgale $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ (st hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kõigi alamhulkade hulk) on antud seos $R = \{(A, B) \mid A \text{ ja } B \text{ elementide arv on sama}\}$. Kas kehtib $\{2, 3, 4\} R \{3, 4, 5\}$?
 c) Hulgale $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on antud seos $R = \{((a, b), (c, d)) \mid \text{sirge läbi punktide } (a, b) \text{ ja } (c, d) \text{ läbib koordinaatide alguspunkti}\}$. Kas kehtib $(-6, 9) R (8, -12)$?
 d) Kõigi tähtedest a ja b moodustatud lõplike sõnade hulgale on antud seos $R = \{(s, t) \mid s \text{ ja } t \text{ algavad või lõpevad sama tähega}\}$. Kas kehtib $abbab R bbaba$?
 e) Kõigi lausearvutusvalemite hulgale on antud seos $R = \{(F, G) \mid F \text{ ja } G \text{ on mingil samal väärtustusel tõesed}\}$. Kas kehtib $\neg C \wedge (B \Rightarrow A) R B \vee C \Rightarrow \neg A \wedge B$?

235. Olgu $R = \{(a, b) \mid |a - b| \leq 2\}$ seos täisarvude hulgale $\mathbb{Z}$.

- a) Tooge näiteid elementide paaridest, mis kuuluvad seosesse R .
 b) Leidke kõik täisarvud x nii, et $xR5$ ja leia kõik täisarvud x nii, et $5Rx$.
 c) Kui võimalik, leidke arvud x ja y nii, et $xR8$ ja $8Ry$, aga arv x ei ole seoses R arvuga y .
 d) Kui $a \in \mathbb{Z}$, leidke kõik täisarvud x nii, et xRa .

236. Leidke arvupaarid, mis kuuluvad seosesse

- a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = xy\}$; b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{y}{x} + 2x = 0\}$.

237. Kujutage graafiliselt seost $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor\}$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab arvu x alumist täisosa, s.t. $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ nii, et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

238. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \mathbb{N}$ on funktsioonid:

- a) $R = \{(1, 1), (3, 2), (5, 3), (3, 4), (1, 5)\}$,
 b) $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$,
 c) $R = \{(3, 4), (5, 9), (1, 9), (2, 3)\}$,
 d) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (4, 1)\}$.

239. Otsustage, kas järgmised maatriksiga antud seosed R on funktsioonid:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{d)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{f)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{g)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{h)} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

240. Otsustage, kas järgmised seosed $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on funktsioonid:

- | | |
|--|---|
| a) $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, | e) $R = \{(t^3, t) : t \in \mathbb{R}\}$, |
| b) $R = \mathbb{R} \times [0, \infty)$, | f) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t \leq 0\}$, |
| c) $R = \mathbb{R} \times \{1\}$, | g) $R = \{(t, 2^t) : t \in [0, \infty)\} \cup \{(t, -t) : t < 0\}$, |
| d) $R = \{1\} \times \mathbb{R}$, | h) $R = \left\{(\tan t, t), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$. |

Definitsioon. Seost $R \subset X \times X$ nimetatakse

- refleksiivseks, kui $xRx \forall x \in X$;
- irrefleksiivseks, kui $x \not R x \forall x \in X$;
- sümmeetriliseks, kui $xRy \Rightarrow yRx \forall x, y \in X$;
- antisümmeetriliseks, kui $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y \forall x, y \in X$;
- transitiivseks, kui $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz \forall x, y, z \in X$.

Definitsioon. Seose $R \subset A \times B$ pöördseoseks nimetatakse seost $R^{-1} \subset B \times A$, mis määratakse samaväärsusega $bR^{-1}a \Leftrightarrow aRb$ ehk $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$.

Definitsioon. Seost $\triangle X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ nimetatakse diagonaalsiks hulgas X .

241. Leidke kõik seosed hulgas $\{a, b\}$, mis on:

- a) refleksiivsed; b) sümmeetrilised; c) transitiivsed; d) antisümmeetrilised.

242. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, irrefleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldab seos $R = \{(a, b) : a|b\}$ hulgal A ?

243. Olgu $A = \{1, 2, 3\}$ ja vaatame kolme seost hulgal A .

- a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
b) $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$;

c) $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$.

Milliseid omadusi rahuldavad need seosed?

244. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Tooge näide seosest R hulgal A , mis

- a) on refleksiivne, aga ei ole antisümmeetriline ega transitiivne;
- b) ei ole refleksiivne, sümmeetriline ega transitiivne;
- c) on sümmeetriline ja transitiivne;
- d) ei ole sümmeetriline ega antisümmeetriline;
- e) on nii sümmeetriline kui ka antisümmeetriline.

245. Olgu $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Selgitage, kas seos R hulgal X on refleksiivne, sümmeetriline või antisümmeetriline ning esitage R hulga $X \times X$ alamhulgana (ehk paaride loeteluna), kui tema maatriksesitus on

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

246. Selgitage, kas seos on transitiivne, kui tema maatriksesitus on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

247. Kas reaalarvude hulgal antud seos $xRy \Leftrightarrow x + y = 0$ on refleksiivne? Irrefleksiivne?

248. Uurige, milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{Z}$:

- a) $xRy \Leftrightarrow x = y$; c) $xRy \Leftrightarrow x \leq y$; e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{N}$;
- b) $xRy \Leftrightarrow x < y$; d) $xRy \Leftrightarrow |x - y| > 1$; f) $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$.

249. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, transitiivsus, antisümmeetrilisus) rahuldavad järgmised seosed R hulgas $\mathbb{R}$:

- a) $xRy \Leftrightarrow x = y^2$; c) $xRy \Leftrightarrow |x - y| \geq 2$; e) $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$;
- b) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$; d) $xRy \Leftrightarrow x = -y$; f) $xRy \Leftrightarrow y \leq x^2$.

250. Olgu $X \neq \emptyset$. Milliseid omadusi (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) omavad järgmised seosed hulga X kõigi osahulkade hulgas $\mathcal{P}(X)$:

- a) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulgad A ja B on lõplikud ning neil on ühepalju elemente;

- b) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
 c) $(A, B) \in R \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$;
 d) $(A, B) \in R \Leftrightarrow$ hulkadel A ja B on täpselt kaks ühist elementi.

251. Olgu $X \neq \emptyset$. Vaatleme seost $\subset$ hulga X kõikide alamhulkade hulgas $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$. Milliseid omadusi rahuldab seos $\subset$ hulgas $\mathcal{P}(X)$?

252. Vaatleme seost $R = \{(a, d), (b, b), (d, a), (d, c)\}$ hulgal $A = \{a, b, c, d\}$. Leidke vähim seos, mis sisaldab seost R ja on

- a) refleksiivne ja sümmeetriline;
 b) sümmeetriline ja transitiivne;
 c) refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

253. Selgitage, millised omadused (refleksiivsus, sümmeetrilisus, antisümmeetrilisus, transitiivsus) on seostel R hulgal $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

- a) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k \wedge n \leq l)$; d) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m + n \geq k + l$;
 b) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow (m \leq k \vee n \leq l)$;
 c) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m \leq k$; e) $(m, n)R(k, l) \Leftrightarrow m + l = n + k$.

254. Tõestage, et kui seos on sümmeetriline ja antisümmeetriline, siis on ta ka transitiivne.

255. Tõestage, et seos on refleksiivne, sümmeetriline ja antisümmeetriline parajasti siis, kui ta on diagonaal mingis hulgas X .

256. Leidke R^{-1} ning uurige seose ja tema pöördseose omadusi, kui

- a) $R = \{(a, b), (b, a), (b, b)\}$; c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = -y\}$;
 b) $R = \{(5, 4), (1, 2), (3, 1), (2, 1), (4, 3)\}$; d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y - x = 2\}$.

257. Olgu $R \subset X \times X$ seos. Tõestage, et

- a) R on refleksiivne parajasti siis, kui $\Delta X \subset R$;
 b) R on sümmeetriline parajasti siis, kui $R = R^{-1}$.

258. Leidke järgmiste seoste pöördseosed.

- a) $(\{0, 1, 2\}, \leq)$ b) $(\mathbb{N}, |)$ c) $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \subset)$

Definitsioon. Olgu $R \subset X \times Y$ ja $S \subset Y \times Z$ seosed. Seoste R ja S korratiseks ehk kompositsiooniks nimetatakse seost $T \subset X \times Z$, kus $T = \{(x, z) \mid \exists y \in Y \text{ nii, et } (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$. Tähistatakse $S \circ R$.

259. Olgu $X = \{1, 2, 3\}$ ning $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x + y = 3\}$ ja $S = \{(x, y) \in X \times X \mid x - y = 1\}$ seosed hulgas X . Leidke $R \circ S$ ja $S \circ R$.

260. Olgu $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ ja $S = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Leidke R^{-1} , $S \circ R$, $R \circ S$ ja $R \circ R$.

261. Olgu $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$ seos hulgast $A = \{1, 3, 5, 7\}$ hulka $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Olgu $S = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5), (8, 7)\}$ seos hulgast B hulka A . Leidke $S \circ R$ ja $R \circ S$. Mida märkate?

262. Tooge näide seostest R ja S mingis mittetühjas hulgas X , mille korral $R \circ S = S \circ R$.

263. Olgu R ja S seosed mingis hulgas X . Tõestage või leidke kontranäide:

- kui seosed R ja S on refleksiivsed, siis on refleksiivne ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on sümmeetrilised, siis on sümmeetriline ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on antisümmeetrilised, siis on antisümmeetriline ka kompositsioon $R \circ S$;
- kui seosed R ja S on transitiivsed, siis on transitiivne ka kompositsioon $R \circ S$.

264. Olgu R ja S seosed hulgas X . Tõestage, et $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

265. Olgu $R \subset X \times X$ seos. Tõestage, et

- R on antisümmeetriline parajasti siis, kui $R \cap R^{-1} \subset \Delta X$;
- R on transitiivne parajasti siis, kui $R \circ R \subset R$.

266. Olgu R refleksiivne ja transitiivne seos hulgas X . Tõestage, et $R \circ R = R$.

267. Olgu seos $R \subset X \times Y$ funktsioon hulgast X hulka Y ning seos $S \subset Y \times Z$ funktsioon hulgast Y hulka Z . Tõestage, et seos $S \circ R \subset X \times Z$ on funktsioon hulgast X hulka Z .

268. Olgu seos $R \subset X \times Y$ funktsioon hulgast X hulka Y ning seos $S \subset Y \times Z$ funktsioon hulgast Y hulka Z . Millistel tingimustel

1) pöördseos $R^{-1} \subset Y \times X$ on funktsioon (hulgast Y hulka X),

2) seos $S \circ R \subset X \times Z$ on üksühene funktsioon (hulgast X hulka Z)?

269. Olgu R, S ja T seosed hulgas X . Tõestage sisalduvus $(R \circ S) \setminus (R \circ T) \subset R \circ (S \setminus T)$.

Definitsioon. Seost nimetatakse ekvivalentsusseoseks, kui ta on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne.

270. Millised järgmistest seostest hulgal $\{0, 1, 2, 3\}$ on ekvivalentsusseosed?

- $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$;
- $\{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (0, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$.

271. Millised järgmistest seostest on ekvivalentsusseosed?

Kui R on ekvivalentsusseos hulgas X , siis hulki $X_x = \{y \in X \mid (y, x) \in R\}$, $x \in X$, nimetatakse ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon. Hulga X faktorhulgaks temas antud ekvivalentsusseose R järgi nimetatakse kõigi ekvivalentsiklasside hulka $X/R = \{X_x \mid x \in X\}$.

279. Pange kirja kõikvõimalikud klassijaotused hulgal $A = \{a, b, c\}$.

280. Antud hulkadest $A_1, \dots, A_8$ moodustage sellised hulkade süsteemid, mis moodustaksid klassijaotusi hulgal $\mathbb{Z}$ kui $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_4 = \{-1, -2, -3, \dots\}$, $A_5 = \{2, 4, 6, \dots\}$, $A_6 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, A_7 on kõigi algarvude hulk ja A_8 on kõigi kordarvude hulk.

281. Kas poollõikude süsteem $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, on klassijaotus arvsirgel $\mathbb{R}$?

282. Leidke hulga $\mathbb{R}$ klassijaotusele $\{[k, k+1), k \in \mathbb{Z}\}$ loomulikult vastav ekvivalentsusseos.

283. Leidke hulgal $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ määratud ekvivalentsusseose R ekvivalentsiklassid, kui $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (1, 5), (5, 1)\}$.

284. Leidke ekvivalentsusseos R hulgal $X = \{1, 2, 3\}$, kui vastavad ekvivalentsiklassid on $\{1, 3\}$ ja $\{2\}$.

285. Leidke ekvivalentsusseos R hulgal $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kui ekvivalentsiklassid on $\{1\}$, $\{2, 3\}$ ja $\{4, 5, 6\}$.

286. Olgu $A = \{a, b, c, d, e\}$. Olgu R ekvivalentsusseos hulgal A . Eeldame, et seosel R on kaks ekvivalentsiklassi. On teada, et aRd , bRc ja eRd . Kirjutage seos R hulgana.

287. Olgu R seos hulgal $\mathbb{N}$, mis on defineeritud nii, et mRn parajasti siis, kui m ja n annavad ühe ja sama jäägi jagamisel arvuga 3. Leidke faktorhulk $\mathbb{N}/R$.

288. Olgu hulgal $X = \{a, b, c, d\}$ antud seos $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, a)\}$. Veenduge, et R on ekvivalentsusseos ja leidke X/R .

289. Leidke $\mathbb{R}/R$, kui hulgal $\mathbb{R}$ on defineeritud seos R järgnevalt:

a) $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| = |y|;$

b) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$

Definitsioon. Seost nimetatakse osalise järjestuse seoseks, kui ta on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne.

Definitsioon. Hulka, millel on antud osalise järjestuse seos, nimetatakse osaliselt järjestatud hulgaks.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulka nimetatakse lineaarselt järjestatud hulgaks, kui iga elementide paari a ja b korral $a \leq b$ või $b \leq a$, s.t kaks suvalist elementi on omavahel võrreldavad.

290. Vaatleme seost R hulgas $\mathbb{N}$, kus suvaliste $a, b \in \mathbb{N}$ korral $aRb \Leftrightarrow a \mid b$ (see tähendab, et aRb parajasti siis, kui a jagab arvu b). Milliseid omadusi rahuldab seos R hulgas $\mathbb{N}$? Kas tegu on osalise järjestuse seosega hulgas $\mathbb{N}$?

291. Millised järgmistest seostest hulgal $\{0, 1, 2, 3\}$ on osalise järjestuse seosed?

- a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$;
- b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;
- c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3)\}$;
- d) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$;
- e) $\{(0, 0), (2, 2), (3, 3)\}$;
- f) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$;
- g) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)\}$.

292. Kas hulk (H, R) on osaliselt järjestatud hulk, kui H on kõigi Maal elavate inimeste hulk ning inimesed a ja b on seoses R , kui

- a) a on pikem kui b ;
- b) a ei ole pikem kui b ;
- c) a ei ole lühem, kui b ;
- d) inimestel a ja b on ühine sõber;
- e) inimestel a ja b ei ole ühist sõpra;
- f) a kaalub rohkem kui b ;
- g) $a = b$ või a on b vanem;
- h) $a = b$ või a on b järglane.

293. Millised järgmistest on osaliselt järjestatud hulgad?

- a) $(\mathbb{Z}, =)$;
- b) $(\mathbb{Z}, \neq)$;
- c) $(\mathbb{Z}, \geq)$;
- d) $(\mathbb{Z}, +)$;
- e) $(\mathbb{R}, <)$;
- f) $(\mathbb{R}, \leq)$.

294. Otsustage, millised maatriksiga antud seosed on osalise järjestuse seosed:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

295. Tooge näiteid võrreldavatest ja mitte võrreldavatest elementidest osaliselt järjestatud hulgas $(\mathbb{N}, |)$.

296. Leidke kaks mitte võrreldavat elementi järgmistest osaliselt järjestatud hulkades:

a) $(\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}), \subset);$

b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |).$

297. Olgu $<^X$ ja $<^Y$ osalise järjestuse seosed vastavalt hulkades X ja Y . Defineerime seose $<$ hulgas $X \times Y$ selliselt, et $(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 <^X x_2 \wedge y_1 <^Y y_2$. Tõestage, et seos $<$ on osalise järjestuse seos hulgas $X \times Y$.

298. Tõestage, et kui R on osalise järjestuse seos, siis $xRy \wedge yRx \Leftrightarrow x = y$.

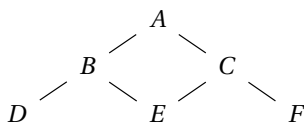
299. Tõestage, et seos $(m, n) \in R \Leftrightarrow \frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ on osalise järjestuse seos hulgal $\mathbb{N}$.

300. Tõestage, et R on osalise järjestuse seos parajasti siis, kui R^{-1} on osalise järjestuse seos.

301. Millised järgmistest seostest hulgal $\{0, 1, 2, 3\}$ on lineaarse järjestuse seosed?

- $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 0), (0, 3), (2, 3), (1, 2), (1, 3), (1, 0)\},$
- $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 3)\};$
- $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 3), (2, 3), (2, 0)\},$
- $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 0), (0, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 2), (1, 0)\},$
- $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (0, 3), (2, 1), (3, 2), (1, 0), (1, 3), (2, 0)\},$
- $\{(3, 3), (1, 1), (2, 2), (0, 0), (1, 0), (3, 1), (3, 2), (0, 2), (3, 0), (1, 2)\}.$

302. Projekti teostamiseks on vaja täita ülesanded A, B, C, D, E, F , millest mõningad vajavad eeltõid nagu joonisel näidatud.



Näiteks ülesanne E tuleb teha enne ülesandeid B ja C , kuid ülesandeid D, E ja F võib teha ükskõiksest sõltumatus järjekorras.

Olgu ülesannete hulgal $Y = \{A, B, C, D, E, F\}$ antud osalise järjestuse seos R , mis vastab joonisel toodud olukorrale.

- Esitage seos R elementide loeteluna või maatrikskuul.
- Leidke hulgal Y lineaarse järjestuse seos S nii, et $R \subset S$.

303. Tõestage, et osalise järjestuse seos R hulgal X on lineaarse järjestuse seos parajasti siis, kui $R \cup R^{-1} = X \times X$.

304. Olgu R ja S osalise järjestuse seosed hulgal X . Millised järgmistest seostest on osalise järjestuse seosed?

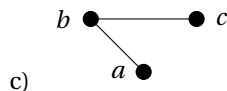
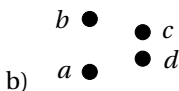
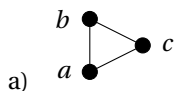
a) $R \cap S$;

b) $R \cup S$;

c) $R \setminus S$;

d) $S \circ R$.

305. Põhjendage, miks ei saa järgmised joonised esineda mitte ühegi osalise järjestuse seose Hasse diagrammis.

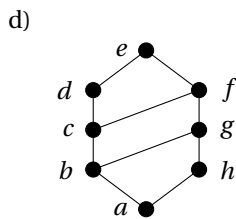
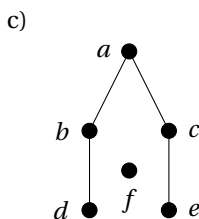
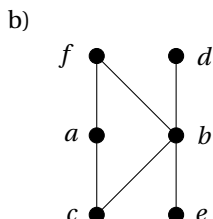
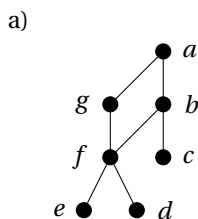


306. Esitage hulgal $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ antud osalise järjestuse seose R Hasse diagrammi.

- $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2)\}$;
- $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 0), (4, 3)\}$;
- $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (0, 2), (0, 4), (3, 1)\}$;
- $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (0, 2), (1, 0), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (4, 2)\}$;
- $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (0, 1), (0, 2), (0, 4), (2, 1), (4, 1)\}$.

307. Eeldusel, et järgmistel joonistel on kujutatud teataval hulgal X antud osalise järjestuse seose R Hasse diagrammi, leidke

- kõik hulga X elemendid, mis järgnevad elemendile b ;
- kõik hulga X elemendid, mis eelnevad elemendile c ;
- kõik hulga X elemendid, mis on võrreldavad elemendiga a ;
- kõik hulga X elemendid, mis eelnevad täpselt kahele hulga X elemendile.



308. Leidke hulk X ja osalise järjestuse seos R sellel hulgal nii, et üllesande 307 joonis oleks seose R Hasse diagrammi.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga $(X, \leq)$ elementi x_0 nimetatakse vähimaks, kui $x_0 \leq x$ iga $x \in X$ korral. Analoogiliselt, elementi $x_0 \in X$ nimetatakse suurimaks, kui $x \leq x_0$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon. Osaliselt järjestatud hulga $(X, \leq)$ elementi x_0 nimetatakse minimaalseks, kui sellest, et $x \in X$ ja $x \leq x_0$, järeldub, et $x = x_0$. Analoogiliselt, elementi x_0 nimetatakse maksimaalseks, kui sellest, et $x \in X$ ja $x_0 \leq x$, järeldub, et $x = x_0$.

309. Olgu $H = \{1, 2, 3, 4\}$ ja vaatleme leksikograafilist järjestust selles hulgas. Leidke

- kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on väiksemad kui $(2, 3)$;
- kõik paarid hulgas $H \times H$, mis on suuremad kui $(3, 1)$.

310. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{3, 5, 9, 15, 24, 45\}, |)$

- kõik minimaalsed elemendid;
- kõik maksimaalsed elemendid;
- vähim element, kui see on olemas;
- suurim element, kui see on olemas.

311. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{2, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 48, 60, 72\}, |)$

- kõik minimaalsed elemendid;
- kõik maksimaalsed elemendid;
- vähim element, kui see on olemas;
- suurim element, kui see on olemas.

312. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subset)$

- kõik minimaalsed elemendid;
- kõik maksimaalsed elemendid;
- vähim element, kui see on olemas;
- suurim element, kui see on olemas.

313. Leidke osaliselt järjestatud hulga $(\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{c, b, d, a\}, \{b, d, e\}\}, \subset)$

- kõik minimaalsed elemendid;
- kõik maksimaalsed elemendid;
- vähim element, kui see on olemas;
- suurim element, kui see on olemas.

314. Tooge näide osaliselt järjestatud hulgast, millel

- on minimaalne element, kuid maksimaalset elementi pole;
- on maksimaalne element, kuid minimaalset elementi pole;
- ei ole minimaalset ega ka maksimaalset elementi.

315. Tooge näide osaliselt järjestatud hulgast, millel on täpselt üks minimaalne element, kuid vähimat elementi pole.

316. Olgu R osalise järjestuse seos hulgal X ja $x \in X$. Tõestage, et

- x on osaliselt järjestatud hulga (X, R) minimaalne element parajasti siis, kui x on osaliselt järjestatud hulga (X, R^{-1}) maksimaalne element;
- x on osaliselt järjestatud hulga (X, R) maksimaalne element parajasti siis, kui x on osaliselt järjestatud hulga (X, R^{-1}) minimaalne element;
- x on osaliselt järjestatud hulga (X, R) vähim element parajasti siis, kui x on osaliselt järjestatud hulga (X, R^{-1}) suurim element;
- x on osaliselt järjestatud hulga (X, R) suurim element parajasti siis, kui x on osaliselt järjestatud hulga (X, R^{-1}) vähim element.