

Algebra I

Sügis 2025

eksamipiletid

PILET 1

1. (35 punkti) Tõestada, et tehte rakendamise tulemus poolrühmas ei sõltu sulgude paigutusest. (Lause 1.9)
2. (15 punkti) Defineerida eukleidilise ruumi ortogonaalne teisendus. Tuua näide mingist ortogonaalsest teisendusest, mis ei ole samasusteisendus.

PILET 2

1. (35 punkti) Kompleksarvude korpuse konstruktsioon. (Lause 2.1)
2. (15 punkti) Defineerida Eukleidiline ruum. Tuua näide mingist mittestandardsest skalaarkorrutamisest.

PILET 3

1. (35 punkti) Tõestada valem kompleksarvu n -ndate juurte leidmiseks. (Teoreem 2.12)
2. (15 punkti) Defineerida üleminekumaatriks vektorruumi ühelt baasilt teisele. Kuidas on omavahel seotud vektorruumi V lineaarteisenduse φ maatriksid baaside e ja e' suhtes?

PILET 4

1. (35 punkti) Tõestada, et kui vektorruumis on olemas lõplik moodustajate süsteem ja vähemalt kaks vektorit, siis selles vektorruumis leidub baas. (Teoreem 3.35)
2. (15 punkti) Defineerida ruutmaatriksi karakteristlik polünoom ja maatriksite sarnasuse seos. Kuidas on seotud sarnaste maatriksite karakteristlikud polünoomid?

PILET 5

1. (35 punkti) Tõestada, et maatriksite korrutamine on assotsiatiivne. (Lause 4.28(1))
2. (15 punkti) Kirjeldada Grami-Schmidt'i ortogonaliseerimisprotsessi.

PILET 6

1. (35 punkti) Tõestada, et transponeerimisel maatriksi determinant ei muutu. (Teoreem 5.20)
2. (15 punkti) Defineerida lineaarkujutuse tuum ja kujutis. Kuidas saab tuuma abil kontrollida lineaarkujutuse üksühesust?

PILET 7

1. (35 punkti) Tõestada, et sama järku ruutmaatriksite korrutise determinant on võrdne tegurite determinantide korrutisega. (Teoreem 5.39)
2. (15 punkti) Defineerida lineaarkujutus. Tuua näide mingist lineaarkujutusest, mis ei ole nullkujutus ega samasusteisendus.

PILET 8

1. (35 punkti) Tõestada, et ruutmaatriks on pööratav parajasti siis, kui ta on regulaarne. (Teoreem 6.14 ja lause 6.6)
2. (15 punkti) Defineerida polünoomi juur ja selle kordsus. Tuua näide mingist polünoomist, millel leidub kahekordne juur.

PILET 9

1. (35 punkti) Tõestada Bézout' teoreem polünoomide kohta (Teoreem 9.14) ja tuletada sellest Horneri skeem.
2. (15 punkti) Vektorruumi definitsioon. Sõnastada omal valikul kolm omadust, mis järelduvad vektorruumi definitsioonist. (Lause 3.6)

PILET 10

1. (35 punkti) Tõestada, et nullmaatriksist erineva maatriksi astak on võrdne selle maatriksi nullist erinevate miinorite kõrgeima järguga. (Teoreem 7.8)
2. (15 punkti) Defineerida ortogonaalne vektorite süsteem eukleidilises ruumis. Tuua näide mingist ortogonaalsest süsteemist, kus on vähemalt 2 vektorit.

PILET 11

1. (35 punkti) Tõestada Kroneckeri-Capelli teoreem lineaarvõrrandisüsteemi lahenduvuse kohta. (Teoreem 8.8)
2. (15 punkti) Defineerida eukleidilise ruumi vektori pikkus ja kahe vektori vaheline nurk. Millal on see nurk 90° ?

PILET 12

1. (35 punkti) Tõestada Crameri valemid. (Teoreem 8.13)
2. (15 punkti) Defineerida lineaarteisenduse omaväärtused ja omavektorid. Tuua näide mingi lineaarteisenduse omavektorist.

PILET 13

1. (35 punkti) Polünoomide ringi konstruktsioon. (Teoreem 9.2)
2. (15 punkti) Defineerida lineaarkujutuse maatriks. Tuua näide sellise lineaarkujutuse maatriksist, mis ei ole nullkujutus ega samasusteisendus.

PILET 14

1. (35 punkti) Tõestada seos lineaarteisenduse maatriksite vahel kahe erineva baasi suhtes. (Teoreem 10.32)
2. (15 punkti) Defineerida kompleksarvu moodul, argument ja trigonomeetriline kuju. Sõnastada eeskiri kahe kompleksarvu korrutamiseks trigonomeetrilisel kujul.

PILET 15

1. (35 punkti) Tõestada Laplace'i teoreem selle juhu jaoks, kui determinanti arendatakse ühe rea järgi. (Teoreem 5.38)
2. (15 punkti) Millal öeldakse, et lineaarvõrrandisüsteemi puhul on tegemist Crameri peajuhuga? Tuua näide ühest sellisest süsteemist.

PILET 16

1. (35 punkti) Tõestada teoreem lineaarkujutuse tuumast ja kujutisest. (Teoreem 10.16)
2. (15 punkti) Defineerida pöördmaatriks. Tuua näide maatriksist, mis a) on pööratav, b) ei ole pööratav.

PILET 17

1. (35 punkti) Tõestada valem regulaarse ruutmaatriksi pöördmaatriksi leidmiseks algebraliste täiendite abil. (Teoreem 6.17)
2. (15 punkti) Defineerida vektorruumi baas. Tuua näide vektorite süsteemist, mis a) on baas, b) ei ole baas.

PILET 18

1. (35 punkti) Tõestada, et maatriksite korrutise astak ei ületa tegurite astakuid. (Lause 7.12)
2. (15 punkti) Defineerida ring. Tuua näide mingist a) kommutatiivsest ringist, b) mittekommutatatiivsest ringist.

PILET 19

1. (35 punkti) Tõestada, et lineaarkujutuste vektorruum on isomorfne teatud maatriksite vektorruumiga. (Teoreem 10.23)
2. (15 punkti) Defineerida ruutmaatriksi determinant. Sõnastada 3 determinandi omadust omal valikul.

PILET 20

1. (35 punkti) Tõestada, et eukleidilise ruumi lineaarteisendus on sümmeetriline parajasti siis, kui selle teisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on sümmeetriline. (Teoreem 11.34)
2. (15 punkti) Defineerida vektorite süsteemi astak. Tuua näide vektorite süsteemist, mille astak on 2.