

Tartu Ülikool
Matemaatika ja statistika instituut

Analüütiline geomeetria 2. osa

Teist järku jooned ja pinnad

Konspekt

Koostaja: prof. Viktor Abramov

Tartus, 2025

Sisukord

1	Koordinaatide teisendused tasandil	3
2	Teist järku joone üldvõrrand ja selle uurimine	9
3	Ellips	17
4	Hüperbool	24
5	Parabool	29
6	Puutujate võrrandid	31
7	Puutujate omadused	36
8	Võrrand polaarkoordinaatides	43

Sissejuhatus

Käesolev konspekt on koostatud õppeaine „Analüütiline geomeetria II osa“ loengute põhjal. Peamiseks uurimisobjektiks on teise järku jooned tasandil ja teise järku pinnad kolmemõõtmelises ruumis. Teise järku joonte hulgast on kõige olulisemad ellips, hüperbool ja parabool. Neid jooni nimetatakse ka koonilisteks lõigeteks ning neid uurisid põhjalikult juba Vana-Kreeka matemaatikud. Käesolevas konspektis uurime teise järku jooni Descartes'i koordinaatmeetodi abil. Selles meetodis varustatakse tasand või kolmemõõtmeline ruum ristkoordinaatsüsteemiga, leitakse teise järku joone võrrand ja uuritakse seda võrrandit algebrailiste meetoditega. Koordinaatsüsteemi valikul lähtume teise järku joone sümmeetriatest.

Kõigepealt kirjeldatakse tasandi koordinaatide teisendusi. Tuletatakse valem koordinaatide teisendamiseks tasandi ühest referentsist teise üleminekul. Koordinaatide teisenduses mängib olulist rolli üleminekumaatriks ühe tasandibaasi teisendamisel teiseks. Seejärel antakse teise järku joone võrrandi definitsioon. Tasandi koordinaatide teisenduse abil lihtsustatakse teise järku joone võrrand ja viiakse see kanoonilisse kuju. Antakse täielik teise järku joonte klassifikatsioon tasandil. Seejärel uuritakse ellipsi, hüperbooli ja parabooli kanoonilisi võrrandeid. Tutvustatakse nende iseloomustavaid parameetreid, nagu ekstsentrilisus, fokaalparameeter, fokaalraadiused ja juhtsirged. Pärast seda antakse teise järku joone puutujavektori määratlus ning tõestatakse silmapaistvaid omadusi ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutujate kohta. Lisaks tuletatakse nende kõverate võrrandid polaarkoordinaatides.

1 Koordinaatide teisendused tasandil

Selles paragrahvis uurime, kuidas tasandi punkti koordinaadid teisenevad üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Antud paragrahvis me käsitleme ainult sirgjoonelisi koordinaadisüsteeme.

Tuletame meelde, et koordinaadisüsteem tasandil määratakse reeperi abil $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus O on reeperi alguspunkt, s.t. koordinaadisüsteemi alguspunkt, ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on baasivektorid. Tuletame meelde, et kaks tasandi vektorit on reeperi baasivektorid parajasti siis, kui nad ei ole kollineaarsed. Kui baasivektorid on teineteisega risti $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ja ühtlasi ühikvektorid $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, siis nimetatakse reeperit $\mathcal{R}$ ristreeperiks. Sellisel juhul nimetatakse ka selle määratud tasandi koordinaadisüsteemi ristkoordinaadisüsteemiks.

Me alustame tasandi mingi joone uurimist algebraliste meetoditega, valides koordinaadisüsteemi ehk reperi $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Siis uuritav joon esitatakse võrrandiga. Sisuliselt uurime me joone geomeetrilisi omadusi, uurides tema võrrandit.

Ometi võime valida teise reeperi $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. On ilmne, et koordinaadisüsteem muutub ja koos sellega muutub ka joone võrrand. Võimalik, et uue reeperi valik osutub sobivamaks ning joone võrrand lihtsustub. Kuid selleks peame teadma, kuidas joone võrrand teiseneb üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele.

Kõigepealt leiame, kuidas teisenevad vektori $\vec{a}$ koordinaadid üleminekul uuele reeperile. Oletame, et meil on antud vektori koordinaadid reeperi $\mathcal{R}$ baasis, st $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$. Meie ülesanne on leida selle vektori koordinaadid uue reeperi $\mathcal{R}'$ baasis. Selleks peame andma uue reeperi $\mathcal{R}'$ baasivektorite $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ koordinaadid algse reeperi $\mathcal{R}$ baasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Olgu

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2,\end{aligned}\tag{1}$$

kus $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ on mingid arvud. Juhime tähelepanu sellele, et uue reeperi baasivektorite koordinaadid on nummerdatud kahe alaindeksiga, kus esimene näitab koordinaadi järjekorranumbrit ja teine baasivektori järjekorranumbrit. Kahe indeksiga suurusi on kasulik esitada maatriksi kujul. Kirjutame uue reeperi baasivektorite koordinaadid teist järku ruutmaatriksina

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit T nimetatakse üleminekumaatriksiks baasilt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ baasile $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Baasi definitsioonist järeldub, et maatriks T on üleminekumaatriks parajasti siis, kui tema determinant on nullist erinev. Maatriksi T determinanti tähistame sümboliga $|T|$, s.t. $|T| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Seega $|T| \neq 0$. Tuletame meelde, et maatriksarvutuses nimetatakse nullist erineva determinantiga maatrikseid *regulaarseteks*.

Olgu α'_1, α'_2 vektori $\vec{a}$ koordinaadid uues baasis $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, st $\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2$. Meie eesmärk on leida, kuidas vektori $\vec{a}$ ühed koordinaadid avalduvad teiste koordinaatide kaudu. Kõigepealt leiame, kuidas koordinaadid α_1, α_2 avalduvad koordinaatide α'_1, α'_2 kaudu. Kehtib vektorvõrdsus

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2.$$

Selle võrdsuse paremal poolel asendame uued baasivektorid $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ nende avaldistega (1) baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kaudu. Saame

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = (a_{11} \alpha'_1 + a_{12} \alpha'_2) \vec{e}_1 + (a_{21} \alpha'_1 + a_{22} \alpha'_2) \vec{e}_2.$$

Kaks vektorit on võrdsed parajasti siis, kui nende koordinaadid ühes ja samas baasis on võrdsed. Järelikult eelnevast vektorvõrdsusest saame

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} \alpha'_1 + a_{12} \alpha'_2 \\ \alpha_2 &= a_{21} \alpha'_1 + a_{22} \alpha'_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi uute koordinaatide α'_1, α'_2 suhtes, leiame, kuidas uued koordinaadid avalduvad α_1, α_2 koordinaatide kaudu. Selleks, et lihtsustada valemite kirjanekut ja muuta see kompaktsemaks, on mugav kasutada maatriksarvutust, st selliseid mõisteid nagu maatriksite korrutamine ja pöördmaatriks. Võtame kasutusele üherealised maatriksid $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2), (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2), (x \ y), (\alpha'_1 \ \alpha'_2)$. Siis saab valemid (1), (9) kirjutada maatriksikujul järgmiselt

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2) &= (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) T, \\ (\alpha_1 \ \alpha_2) &= (\alpha'_1 \ \alpha'_2) T. \end{aligned} \quad (3)$$

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et saadud valemite parematel pooltel on mõeldud üherealiste maatriksite korrutamist teist järku ruutmaatriksiga. Korrutades teise võrdsuse mõlemad pooled pöördmaatriksiga T^{-1} , kus

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

saame avaldada uued koordinaadid α'_1, α'_2 koordinaatide α_1, α_2 kaudu.

Nüüd on meie eesmärk leida, kuidas tasandi punkti koordinaadid teisenevad üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Reeper koosneb kahest osast: esimene osa on alguspunkt, teine osa on baas, mis tasandi korral koosneb kahest baasivektorist. Oleme fikseerinud uue reepri $\mathcal{R}'$ baasivektorite asendi algse reepri $\mathcal{R}$ baasivektorite suhtes üleminekumaatriksi T abil ja see võimaldas meil leida vektorite koordinaatide teisendusvalemid. Jäänud on fikseerida uue reepri $\mathcal{R}'$ alguspunkt O' koordinaadisüsteemis, mida määrab reeper $\mathcal{R}$. Olgu c_1, c_2 punkti O'

koordinaadid reepri $\mathcal{R}$ koordinaadisüsteemis. Siis saab selle punkti kohavektori $\overrightarrow{OO'}$ kirjutada kujul

$$\overrightarrow{OO'} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2. \quad (4)$$

Olgu P mõni tasandi punkt ning x, y selle koordinaadid reeperi $\mathcal{R}$ koordinaadisüsteemis ja x', y' sama punkti P koordinaadid reeperi $\mathcal{R}'$ koordinaadisüsteemis. On hõlpsasti näha, et kehtib vektorvõrdsus

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}. \quad (5)$$

Punkti P kohavektorid avalduvad järgmiselt

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2, \quad (6)$$

$$\overrightarrow{O'P} = x' \vec{e}'_1 + y' \vec{e}'_2. \quad (7)$$

Kasutades valemit (9), kirjutame kohavektori $\overrightarrow{O'P}$ kujul

$$\overrightarrow{O'P} = (a_{11} x' + a_{12} y') \vec{e}_1 + (a_{21} x' + a_{22} y') \vec{e}_2. \quad (8)$$

Asendades avaldised (4), (6), (8) valemisse (5), saame

$$\begin{aligned} x &= a_{11} x' + a_{12} y' + c_1, \\ y &= a_{21} x' + a_{22} y' + c_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Need valemid saab kirjutada ka maatriksikujul

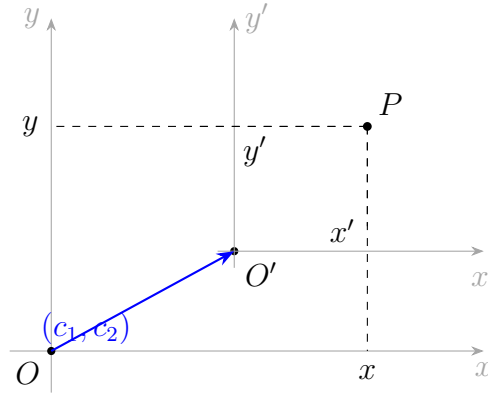
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Kuna me ei eeldanud reeperil mingeid erisuguseid omadusi, on saadud valemid tasandi koordinaatide teisendamise kõige üldisemad valemid. Siiski edaspidi kasutame me ristkoordinaadisüsteeme, st reeperi $\mathcal{R}$ baas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on ortonormeeritud. Seetõttu vaatleme ainult neid reeperi teisendusi, millede korral ortonormeeritud baas muutub ortonormeeritud baasiks. Sel juhul on üleminekumaatriks T ortogonaalmaatriks ja rahuldab võrrandit $TT^t = T^t T = I$, kus t tähistab maatriksi transponeerimist ja I on ühikmaatriks. Seejuures lubame, et baasi (reeperi) orientatsioon võib muutuda. Paralleellüke, pööre ja peegeldus on need tasandi koordinaatide teisendused, millede korral ristkoordinaadisüsteem teiseneb ristkoordinaadisüsteemiks.

1. Olgu üleminekumaatriks T ühikmaatriks, s.t. $T = I$. Ühikmaatriks on ortogonaalmaatriks. Järelikult toimub üleminek ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele ristkoordinaadisüsteemile. Valem (1) ühikmaatriksi korral on kujul

$\vec{e}_{-1}' = \vec{e}_{-1}, \vec{e}_{-2}' = \vec{e}_{-2}$. Seega algse reeperi baas langeb kokku uue reeperi baasiga. Geomeetriliselt tähendab see, et algse koordinaadisüsteemi koordinaatteljed nihutatakse paralleelselt punkti O' koordinaatidega (c_1, c_2) koordinaadisüsteemis $\mathcal{R}$. Sellist tasandi koordinaatide teisendust nimetatakse *paralleellükkeks*. Sellel juhul teisenevad koordinaadid valemi järgi

$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2. \quad (11)$$



Joonis 1: Koordinaadisüsteemi paralleellüke: $x = x' + c_1, y = y' + c_2$

- Teiseks baasiteisenduseks, mis säilitab baasi ortonormeerituse, on pööramine. Mõtleme selle all, et baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on rakendatud alguspunktist O ning neid pööratakse ümber punkti O positiivses suunas (tasandi orientatsiooni mõttes) nurga φ võrra. Seejuures alguspunkt O jääb paigale. Koordinaadisüsteemi pööramise üleminekumaatriks on kujul

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Lugeja võib veenduda, et maatriks (12) on ortogonaalmaatriks. Märgime, et pööramine ei muuda tasandi orientatsiooni. Koordinaadisüsteemi pööramisel teisenevad punkti P koordinaadid järgmise valemi järgi

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi x' - \sin \varphi y', \\ y &= \sin \varphi x' + \cos \varphi y'. \end{aligned} \quad (13)$$

- Viimaseks teisenduseks, mis säilitab baasi ortonormeerituse, on peegeldus. Peegeldust võib kirjeldada järgmiselt. Kõigepealt valime tasandil sirge, mille tähistame $\mathcal{L}$. Olgu $\vec{s}$ sirge $\mathcal{L}$ sihivektor. Eeldame, et see on normeeritud, st $\vec{s}$

on ühikvektor $|\vec{s}| = 1$. Olgu $\vec{a}$ mingi tasandi vektor. Paigutame selle vektori alguspunkti suvalisse punkti Q sirgele $\mathcal{L}$ ning selle lõpp-punkti tähistame P , st $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$. Tähistame punkti P ortogonaalprojektsiooni sirgele $\mathcal{L}$ tähega P' . Nüüd pikendame lõiku PP' punktist P' edasi sama pikkusega. Saadud punkti tähistame R . Siis vektorit $\overrightarrow{QR}$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{QP}$ peegelduseks sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Vektorit $\overrightarrow{QR}$ saab avaldada järgmiselt

$$\overrightarrow{QR} = 2 \langle \vec{a}, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{a}, \quad (14)$$

kus $\langle \vec{a}, \vec{s} \rangle$ on vektorite skalaarkorrutis. Olgu antud ortonormeeritud reeper $\mathcal{R} = O; \vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja sirge $\mathcal{L}$, mis läbib alguspunkti O ning mille sihiavektoriks on ühikvektor $\vec{s}$. Moodustame uue reperi $\mathcal{R}' = O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, mille baasivektorid on baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ peegeldused sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Siis

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= 2 \langle \vec{e}_1, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 &= 2 \langle \vec{e}_2, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (15)$$

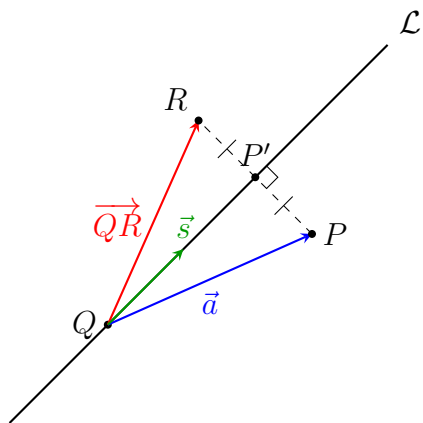
Ei ole raske veenduda, et baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ on ortonormeeritud. Me ei hakka välja kirjutama üleminekumaatriksi ega koordinaatide teisenduse valemid peegelduse korral sirge $\mathcal{L}$ suhtes, sest need valemid on mahukad ja edaspidi meil neid vaja ei lähe. Vaatleme erijuhtu, kus sirge $\mathcal{L}$ on alguspunktist O lähtuvate baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vahelise nurga poolitaja. Siis

$$\vec{s} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2,$$

ning asendades selle vektori valemisse (15), saame $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1$. Vastav koordinaatide teisendus on

$$\begin{aligned} x &= y', \\ y &= x'. \end{aligned} \quad (16)$$

Seega koordinaadisüsteemi peegeldus esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes taandub koordinaattelgede ümbernimetamisele, st x -telg muutub y' -teljeks ja vastupidi.



Joonis 2: Vektori peegeldamine sirge suhtes

2 Teist järku joone üldvõrrand ja selle uurimine

Selles paragrahvis käsitleme tasandi jooni ning eeldame, et tasand on varustatud ortonormeeritud reeperiga $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, st ristreeperiga. Vastava ristkoordinaadisüsteemi koordinaate tähistame x, y .

Kahe muutuja x, y teise astme polünoomiks nimetatakse algebralist avaldist

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F,$$

kus A, B, C, D, E, F on reaalarvud ning kordajatest A, B, C vähemalt üks on nullist erinev. *Teist järku joone võrrandiks* tasandil nimetatakse võrrandit $F(x, y) = 0$, st

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (17)$$

Võrrandi (17) lahendihulka, kui see pole tühi, nimetatakse *teist järku jooneks*. Seega teist järku joon on tasandi alamhulk, kuhu kuuluvad kõik punktid sellised, et nende koordinaadid x, y rahuldavad teist järku joone võrrandit (17). Kasutades matriksarvutust, saame teist järku joone võrrandi esitada kujul

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (18)$$

või

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (19)$$

Seega on kasulik moodustada teist järku joone võrrandi kordajatest kaks matriksit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Matriks $\mathbf{M}$ on sümmeetriline teist järku ruutmatriks ja see on moodustatud teist järku joone võrrandi ruutliikmete kordajatest. Matriks $\bar{\mathbf{M}}$ on sümmeetriline kolmandat järku ruutmatriks ja sellesse kuuluvad kõik teist järku joone võrrandi koefitsiendid. Märkime, et matriks $\mathbf{M}$ on matriksi $\bar{\mathbf{M}}$ alammaatriks. Seetõttu nimetatakse matriksit $\bar{\mathbf{M}}$ teist järku joone võrrandi *laiendatud matriksiks*.

On ilmne, et teist järku joone võrrandi kuju (17) sõltub koordinaadisüsteemi valikust, st reeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ valikust. Kui asendada üks koordinaadisüsteem x, y teisega $\tilde{x}, \tilde{y}$, siis teist järku joone võrrand ehk vasakul pool seisev teise astme polünoom $F(x, y)$ muutub. Oluline on aga märkida, et joone järk seejuures ei muutu, st teise astme polünoom kujuneb teise astme polünoomiks. See järeldub eelmises paragrahvis leitud koordinaatide teisenduse valemist ning sellest, et tasandi ühe

baasi üleminekumaatriks teise baasi on pööratav. Olgu uutes koordinaatides teist järku joone võrrand kujul

$$A' \tilde{x}^2 + 2B' \tilde{x}\tilde{y} + C' \tilde{y}^2 + 2D'\tilde{x} + 2E'\tilde{y} + F' = 0. \quad (21)$$

Käesoleva paragrahvi eesmärk on näidata, et sobivalt valitud koordinaatide teisendusega saab teist järku joone võrrandi kuju oluliselt lihtsustada. Uurides seejärel lihtsustatud võrrandit, jõuame teist järku joonte võrrandite täieliku klassifikatsiooni.

Lause 1. *Leidub koordinaadisüsteemi pööre nii, et uutes koordinaatides $\tilde{x}, \tilde{y}$ ei esine teist järku joone võrrandis korrutist $\tilde{x}\tilde{y}$, st $B' = 0$.*

Tõestus. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $B \neq 0$. Tõepoolest, kui $B = 0$, siis väide juba kehtib ja pole vaja midagi tõestada. Tõestamiseks uurime, kuidas teisendub kordaja B teist järku joone võrrandis. Seejärel näitame, et võrrandil $B' = 0$ leidub alati lahendus, kui tundmatuks võtta koordinaadisüsteemi pöördenurk φ . Märgime, et koordinaaditeisenduse lineaarsuse tõttu teisenduvad võrrandi ruutosa $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ ja lineaarosa $2Dx + 2Ey + F$ eraldi. Seega kordaja B teisenduse valemi leidmiseks kasutame ruutosa teisendamist. Kirjutame võrrandi ruutosa vanades ja uutes koordinaatides maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Teisendame koordinaadid x, y koordinaadisüsteemi pööramisega nurga φ võrra. Siis maatrikskujul koordinaadid teisenduvad järgmiselt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Asendades selle valemi valemisse (22), saame

$$\begin{pmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Sellest järeldub

$$\begin{aligned} B' &= B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (C - A) \sin \varphi \cos \varphi \\ &= B \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(C - A) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Saadud võrrandis võib olla kas $A = C$ või $A \neq C$. Esimesel juhul, kui $A = C$, teine liige läheb võrdub nulliga ning võrrand võtab kuju $B \cos 2\varphi = 0$. Sellel võrrandil

on lahendus $\varphi = \pi/4$, st pöörates koordinaatsüsteemi nurga $\pi/4$ võrra, saame soovitud tulemuse $B' = 0$. Teisel juhul, kui $A \neq C$, otsime lahendust vahemikus $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$. Sellel vahemikul funktsioon $\cos 2\varphi$ on vahemiku igas punktis nullist erinev. Jagades võrrandi mõlemad pooled funktsiooniga $\cos 2\varphi$, saame

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A-C}.$$

Vahemikus $-\pi/4 < \varphi < \pi/4$ on võrrandil lahendus

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2B}{A-C}.$$

Seega on väide tõestatud. $\square$

Uurime, kuidas teisendub teist järku joone võrrand koordinaadisüsteemi paralleellükke korral. Tuletame meelde, et sel juhul on üleminekumaatriks $T = I$ ühikmaatriks. Koordinaatide teisenemisevalemid kirjutame maatrikskujul

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (x \ y) = (\tilde{x} \ \tilde{y}) + (u \ v), \quad (25)$$

kus u, v on uue koordinaadisüsteemi alguspunkti koordinaadid. Lause ?? tõestuses leidsime maatriksvormi põhimaatriksi M teisenduseks teist järku joone võrrandi puhul

$$M' = T^t M T, \quad (26)$$

kus T on üleminekumaatriks. Sellest valemist järeldub, et juhul kui üleminekumaatriks on ühikmaatriks, siis teist järku joone võrrandi ruutosa maatriks ei muutu. Seega *koordinaadisüsteemi paralleellükke ei muuda teist järku joone võrrandi ruutosa*. Meid huvitab, millise valemi järgi teisendub teist järku joone võrrandi lineaarsed liikmed koordinaadisüsteemi paralleellükke korral. Selle valemi leidmiseks asendame (25) võrrandisse (??). Saame

$$\begin{aligned} ((\tilde{x} \ \tilde{y}) + (u \ v)) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} ((\tilde{x}) + (\tilde{y})) + 2 (D \ E) ((\tilde{x}) + (\tilde{y})) + F = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Kogudes selles valemis ainult lineaarsed liikmed ja võrreldes võrrandiga (21), saame

$$\begin{pmatrix} D' \\ E' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \quad (28)$$

Arvutustes on mugav kasutada kahte samasust

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

Pannes valemis (28) $D' = E' = 0$, jõuame järeldusele, et uue koordinaatide alguspunkti koordinaadid on lineaarvõrrandisüsteemi lahendiks

$$\begin{aligned} Au + Bv + D &= 0, \\ Bu + Cv + E &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Olgu teist järku joone võrrandi põhimaatriksi M determinant tähistatud δ , st $\delta = \det M$. Lisaks olgu

$$\delta_u = \begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}, \quad \delta_v = \begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}.$$

On kolm võimalikku juhtumit:

- $\delta \neq 0$. Siis süsteemil (30) on lahendus ja see on üheselt määratud;
- $\delta = 0$, kuid vähemalt üks arvudest δ_u, δ_v on nullist erinev. Siis süsteemil (30) lahendit pole;
- $\delta = \delta_u = \delta_v = 0$. Süsteemil (30) on lõpmata palju lahendusi.

Definitsioon 1. Kui teist järku joone võrrandi ruutosa maatriksi determinant on nullist erinev, st $\delta \neq 0$, siis nimetatakse teist järku joont *tsentraalseks* ning punkti, mille koordinaadid u, v on süsteemi (30) lahendiks, nimetatakse joone keskpunktiks.

Kui koordinaadisüsteemi paralleellükkega tuua alguspunkt teist järku joone keskpunkti, siis uutes koordinaatides kirjutatud võrrand ei sisalda lineaarliikmeid $D' = E' = 0$.

Uurime tsentraalsete teist järku joonte klassi. Olgu sellise joone võrrand kujul (17). Pöörates koordinaadisüsteemi vastava nurga φ võrra, viime selle kujule

$$A' \tilde{x}^2 + C' \tilde{y}^2 + 2D' \tilde{x} + 2E' \tilde{y} + F' = 0. \quad (31)$$

Seejärel teeme koordinaadisüsteemi paralleellüke teist järku joone keskpunkti, et lahti saada lineaarliikmetest, st viime teist järku joone võrrandi kujule

$$A'' \tilde{x}^2 + C'' \tilde{y}^2 + F'' = 0. \quad (32)$$

Oluline on märkida, et koordinaadisüsteemi pööramine ei muuda teist järku joone võrrandi põhimaatriksi determinanti. Sellest järeldeb, et mõlemad koefitsiendid A'', C'' on nullist erinevad, mis tuleneb eeldusest joone tsentraalsuse kohta $\delta \neq 0$. Leiame tsentraalsete teist järku joonte klassifikatsiooni.

I. Koefitsiendid A'', C'' on samamärgilised st $\delta > 0$.

1. $F'' \neq 0$ ning F'' on vastupidise märgiga võrreldes kordajatega A'', C'' .
Sel juhul teisendame võrrandi (32) kujule

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} = 1, \quad (33)$$

kus $a > b > 0$ ja

$$a^2 = -\frac{F''}{A''}, \quad b^2 = -\frac{F''}{C''}.$$

Definitsioon 2. Teist järku joont, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit (33), nimetatakse *ellipsiks*. Võrrandit (33) nimetatakse ellipsi kanooniliseks võrrandiks. Koordinaadisüsteemi, milles ellipsi võrrandil on kuju (33), nimetatakse ellipsi kanooniliseks koordinaadisüsteemiks.

2. $F'' \neq 0$ ning arvud F'', A'', C'' on samamärgilised. Siis teisendame võrrandi (32) kujule

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} = -1, \quad (34)$$

$$a^2 = \frac{F''}{A''}, \quad b^2 = \frac{F''}{C''}.$$

Võrrandit (34) nimetatakse *imaginaarse ellipsi võrrandiks*. Sellel võrrandil pole lahendeid reaaltasandil. Seetõttu on teist järku joon, mida määrab imaginaarse ellipsi võrrand, tühi hulk.

3. $F'' = 0$. Sel juhul saab võrrandi viia kujule $a^2 \dot{x}^2 + b^2 \dot{y}^2 = 0$. Seda võrrandit rahuldab ainult üks punkt, see on koordinaadisüsteemi alguspunkt. Seda võrrandit nimetatakse *imaginaarsete lõikuvate sirgete paariks*. Miks see nimetus on õigustatud, selgub klassifikatsiooni järgmistes punktides.

II. Koefitsiendid A'', C'' on erineva märgiga, s.t. $\delta < 0$.

1. $F'' \neq 0$. Teisendame võrrandi kujule

$$\frac{\dot{x}^2}{-\frac{F''}{A''}} - \frac{\dot{y}^2}{\frac{F''}{C''}} = 1.$$

Saame alati nii teha, et A'' ja F'' oleksid erineva märgiga. Vajaduse korral nimetame koordinaadid ümber, s.t. teeme koordinaattelgede peegelduse esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes. Seega saame positiivsed arvud a, b sisse viia järgmiselt

$$a^2 = -\frac{F''}{A''}, \quad b^2 = \frac{F''}{C''}.$$

Võrrand on nüüd kujul

$$\frac{\dot{x}^2}{a^2} - \frac{\dot{y}^2}{b^2} = 1. \quad (35)$$

Definitsioon 3. Teist järku joont, mille punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit (35), nimetatakse *hüperbooliks*. Võrrandit (35) nimetatakse *hüperbooli kanooniliseks võrrandiks*. Koordinaadisüsteemi, milles hüperbooli võrrandil on kuju (35), nimetatakse *hüperbooli kanooniliseks koordinaadisüsteemiks*.

2. $F'' = 0$. Võrrandi (32) saab viia kujule $a^2 \dot{x}^2 - b^2 \dot{y}^2 = 0$, kus $a^2 = A'', b^2 = C'', a > 0, b > 0$. Vasak pool on ruutude vahe ning seda saab esitada korrutisena

$$(a \dot{x} - b \dot{y})(a \dot{x} + b \dot{y}) = 0.$$

Järelikult koosneb teist järku joon *kahest lõikuvast sirgest* $a \dot{x} - b \dot{y} = 0$ ja $a \dot{x} + b \dot{y} = 0$. Sirged lõikuvad koordinaadisüsteemi alguspunktis. Nüüd on selge, miks selle klassifikatsiooni punktis I.3 oli kasutatud termin imaginaarsete lõikuvate sirgete paar.

- III. $\delta = 0$, kuid vähemalt üks determinantidest δ_u, δ_v on nullist erinev. Sel juhul süsteemil (30) lahendit pole, st me ei saa koordinaatide paralleellükkega samaaegselt viia nulli D ja E . Järelikult peame uurimist alustama võrrandist (31). Tingimusest $\delta = 0$ järeldub, et ainult üks koefitsientidest A', C' on võrdne nulliga, sest mõlemad ei saa olla nullid. Üldsust kitsendamata võime eeldada, et $A' = 0, C' \neq 0$ (vajaduse korral nimetame koordinaadid ümber). Siis võtab võrrand (31) kuju

$$C' \tilde{y}^2 + 2D' \tilde{x} + 2E' \tilde{y} + F' = 0. \quad (36)$$

Arvutame determinantid δ_u, δ_v võrrandi (36) korral. Saame

$$\delta_v = \begin{vmatrix} A' & D' \\ B' & E' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & D' \\ 0 & E' \end{vmatrix} = 0, \quad \delta_u = \begin{vmatrix} D' & B' \\ E' & C' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D' & 0 \\ E' & C' \end{vmatrix} = D' C'.$$

Kuna vähemalt üks kahest determinandist peab olema nullist erinev, ent δ_v on null, järeldame, et determinant δ_u peab olema nullist erinev. Siit järeldub $D' \neq 0$. Kirjutame võrrandi (36) kujul

$$C' (\tilde{y}^2 + 2 \frac{E'}{C'} \tilde{y} + \frac{(E')^2}{(C')^2}) + 2D' (\tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'}) = 0.$$

Esimene liige on täisruut. Seetõttu saame eelmise võrrandi ümber kirjutada kujul

$$C' (\tilde{y} + \frac{E'}{C'})^2 + 2D' (\tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'}) = 0.$$

Tehes koordinaadisüsteemi paralleellükke

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{x} + \frac{F'}{2D'} - \frac{(E')^2}{2D'C'}, \\ \dot{y} &= \tilde{y} + \frac{E'}{C'}, \end{aligned} \tag{37}$$

teisendame võrrandi kujule

$$C' \dot{y}^2 + 2D' \dot{x} = 0. \tag{38}$$

Jagades mõlemad pooled kordajaga C' ja viies teise liikme võrdusmärgi paremale poolele, saame

$$\dot{y}^2 = -\frac{2D'}{C'} \dot{x}. \tag{39}$$

Kui $D'/C' < 0$, siis tähistame $p = -D'/C' > 0$. Kui $D'/C' > 0$, pöörame x -telje vastassuunaliseks (koordinaadisüsteemi peegeldus y -telje suhtes) $\ddot{x} = -\dot{x}$, $\ddot{y} = \dot{y}$ ja tähistame $p = D'/C' > 0$. Mõlemal juhul saame võrrandi

$$\ddot{y}^2 = 2p \ddot{x}, \quad p > 0. \tag{40}$$

Definitsioon 4. Teist järku joont, mida määrab võrrand (40), nimetatakse *parabooliks*. Võrrandit (40) nimetatakse parabooli kanooniliseks võrrandiks. Koordinaadisüsteemi, milles paraboolil on kanooniline võrrand, nimetatakse kanooniliseks koordinaadisüsteemiks.

- IV. $\delta = \delta_u = \delta_v = 0$. Nagu eelmises punktis, on tingimus $\delta = 0$ samaväärne tingimusega $A' = 0, C' \neq 0$. Eelmises punktis nägime, et sellest järeldub $\delta_v = 0$. Viimane tingimus $\delta_u = 0$ toob kaasa $D' = 0$. Asendades kõik selle võrrandisse (36), saame

$$C' \tilde{y}^2 + 2 E' \tilde{y} + F' = 0.$$

Jagades mõlemad pooled kordajaga C' ja täiendes täisruuduks, viime saadud võrrandi kujule

$$(\tilde{y} + \frac{E'}{C'})^2 + \frac{F'}{C'} - \left(\frac{E'}{C'}\right)^2 = 0.$$

Tehes paralleellükke $\dot{x} = \tilde{x}, \dot{y} = \tilde{y} + E'/C'$ ja tähistades

$$F'' = \frac{F'}{C'} - \left(\frac{E'}{C'}\right)^2,$$

viime võrrandi kujule

$$\dot{y}^2 + F'' = 0.$$

Kui selles võrrandis $F'' < 0$, siis saab võrrandi viia kujule $\dot{y}^2 - a^2 = 0$, kus $a^2 = -F'', a > 0$. Teist järku joon, mida selline võrrand määrab, koosneb *kahest paralleelsest sirgest* $\dot{y} = -a, \dot{y} = a$. Sarnaselt, kui $F'' > 0$, saab võrrandi viia kujule $\dot{y}^2 + a^2 = 0$. Sellel võrrandil pole lahendeid reaaltasandil. Seetõttu nimetatakse vastavat teist järku joone võrrandit *imaginaarsete paralleelsete sirgete paariks*. Lõpuks, kui $F'' = 0$, siis teist järku joone võrrand on $\dot{y}^2 = 0$. On ilmne, et teist järku joon, mida määrab selline võrrand, on x -telg. Kuna vasakul poolel seisab y -koordinaadi ruut, siis läbime justkui kaks korda x -telje. Seetõttu nimetatakse teist järku joont, mida määrab võrrand (1), *ühtivate sirgete paariks*.

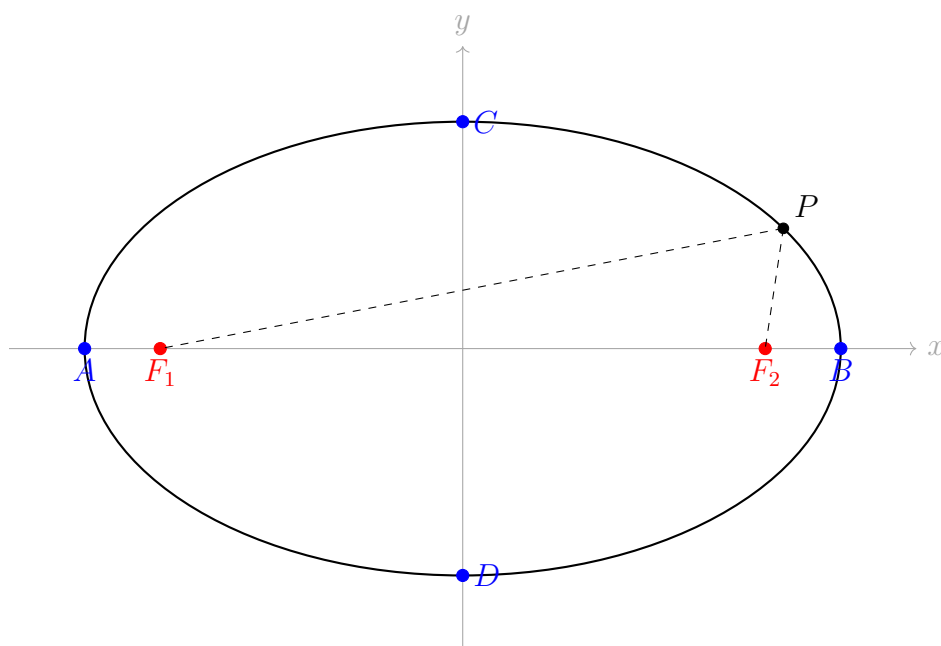
Sellega on teist järku joonte võrrandite klassifikatsioon lõpetatud.

3 Ellips

Ellipsi definitsioon saadi eelmises paragrahvis kui teist järku joonte võrrandite klassifikatsiooni tulemus. Ellips määratleti kanoonilise võrrandi abil

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0, \quad (41)$$

mis saadi algse koordinaadisüsteemi teisenduste kaudu. Sellest järeldub, et ellipsi võrrandil on kuju (41) vaid spetsiaalses koordinaadisüsteemis, mida nimetatakse ellipsi kanooniliseks koordinaadisüsteemiks. Käesolevas paragrahvis uurime, kuidas ellipsi kanooniline koordinaadisüsteem konstrueeritakse. Ellipsi kuju tasandikõverana on näidatud joonisel 3. Uurime ellipsi kanoonilist võrrandit. Arvu $2a$ nime-



Joonis 3: Ellips.

tatakse ellipsi *uuremaks teljeks*, arvu a nimetatakse *ellipsi suuremaks poolteljeks*. Analoogselt nimetatakse arvu $2b$ ellipsi väikseks teljeks ning jagades selle kahega saame ellipsi väikese pooltelje, s.t. b . Ellipsi teljed on tema olulised karakteristikud. Pole raske märgata, et ellips on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes. Olgu $P(x_0, y_0)$ ellipsi punkt, s.t. arvud x_0, y_0 rahuldavad ellipsi võrrandit (41). Kergesti on veenduda, et sel juhul kuuluvad ellipsile ka punktid $Q(-x_0, y_0)$, $R(x_0, -y_0)$, mis saadakse punkti P peegeldamisel koordinaattelgede suhtes, s.t. nende koordinaadid rahuldavad ellipsi võrrandit (41). See tähendab, et kanoonilises koordinaadisüsteemis on koordinaatteljed ellipsi sümmeetriateljed. Lisaks on ellips sümmeetriline ka

koordinaatide alguspunkti suhtes, st kui ellipsi punkt $P(x_0, y_0)$ peegeldada alguspunkti suhtes, siis saadakse punkt $T(-x_0, -y_0)$, mis samuti on ellipsi punkt. Kui tasandikõver on sümmeetriline mõne punkti suhtes, siis nimetatakse seda punkti kõvera sümmeetriakeskuseks ehk keskpunktiks. Seega on ellipsi keskpunktiks kanoonilise koordinaadisüsteemi alguspunkt.

Lause 2. *Ellipsi sümmeetriateljed on ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi teljed, kusjuures ellipsi suur telg paikneb x -teljel. Ellipsi sümmeetriakeskus on ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi alguspunkt.*

Ellips lõikab koordinaattelgi järgmistes punktides $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$ (asuvad x -teljel) ja $C(0, b)$, $D(0, -b)$ (asuvad y -teljel). Neid nelja punkti nimetatakse ellipsi tippudeks. Ellipsi struktuuri seisukohalt on olulised veel kaks punkti $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, kus $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c > 0$. Need punktid ei asu ellipsil, vaid paiknevad ellipsi sees x -teljel.

Definitsioon 5. Arvud

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}$$

nimetatakse vastavalt ellipsi *ekstsentrilisuseks ja fokaalparameetrik*s.

Ekstsentrilisus on ellipsi oluline karakteristik. Märgime, et meie käsitluses kehtib $a > b$. Just selle ebavõrdsuse tõttu saame kasutada termineid „suur” ja „väike” telg. Seega välistame võimaluse $a = b$. Vaatame, millisele tasandikõverale vastab juhul $a = b$. Ilmselt on see raadiusega a ringjoon keskmega koordinaadisüsteemi alguspunktis. Võime mõttes kujutada, et ellipsi fookused liiguvad mööda x -telge ellipsi keskme poole (jäädes seejuures keskme suhtes sümmeetrilisteks). Kui seejuures suur pooltelg a jääb muutumatuks (väike pooltelg b kasvab), siis $c \rightarrow 0$. Sellega läheneb ellipsi kuju üha enam ringjoone kujule ning piiril, kui $c = 0$ ja $F_1 = F_2$, muutub ellips ringjooneks ning saame $\varepsilon = 0$. Niisiis, mida lähemal on ekstsentrilisus nullile, seda lähedasem on ellips ringjoonele. Vastupidi, mida lähemal on ekstsentrilisus arvule 1, seda rohkem on ellips „lamestunud” väikese telje suunas ja „venitatud” suure telje suunas. On teada, et Päikesesüsteemi planeedid liiguvad ümber Päikese elliptilistel orbiitidel. Nii on Maa orbiidi ekstsentrilisus võrdne 0,0167, s.t. Maa orbiit on peaaegu ringjoon. Marsi orbiidi ekstsentrilisus on 0,094, s.t. Marsi orbiit on Maa omast piklikum.

Lõigud, mis ühendavad ellipsi punkti selle fookustega, nimetatakse fokaalraadiusteks. Joonisel 3 on näidatud punkti P fokaalraadiused, s.o lõigud F_1P , F_2P . Edaspidi nimetame nende lõikude pikkusi $r_1 = |F_1P|$, $r_2 = |F_2P|$ samuti fokaalraadiusteks.

Teoreem 1. *Kui punkt $P(x, y)$ on ellipsi punkt ja r_1, r_2 on selle fokaalraadiused, siis kehtib*

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

Tõestus. Kasutades kahe punkti vahelise kauguse valemit, leiame, et vasak fokaalraadius r_1 avaldub järgmiselt

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \quad (42)$$

Punkt P asub ellipsil, järelikult rahuldavad selle koordinaadid võrrandit (41). Avaldame y^2

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$$

ja asendame võrrandisse (42). Saame

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x+c)^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x^2 + 2cx + a^2} \\ &= \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2cx + a^2} = \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2a \varepsilon x + a^2} = a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Teise valemi tõestus on analoogiline. □

Teoreem 2. Olgu F_1, F_2 kaks erinevat punkti tasandil. Nende vahelist kaugust tähistame $2c$, s.t. $|F_1 F_2| = 2c$. Olgu $\mathcal{E}$ ellips, mille fookused on punktid F_1, F_2 ja mille suurem telg on $2a$, $a > c$. Siis tasandi punkt P on ellipsi $\mathcal{E}$ punkt parajasti siis, kui $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a$.

Tõestus. Jagame tõestuse kaheks osaks.

Tarvilikus. Oletame, et P on ellipsi punkt ja näitame, et $|F_1 P| + |F_2 P| = 2a$. Punkti P fokaalraadiused tähistame $r_1 = |F_1 P|$, $r_2 = |F_2 P|$. Lause 2 põhjal teame, et ellipsi kanoonilise koordinaadisüsteemi x -telg läbib fookuseid F_1, F_2 , koordinaadisüsteemi alguspunkt asub selle fookustega määratud lõigu $F_1 F_2$ keskpunktis ja y -telg on x -teljega risti. Selles koordinaadisüsteemis on ellipsi võrrand kanoonilisel kujul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0. \quad (43)$$

Teoreemist 1 järeldub, et punkti P fokaalraadiuste summa on $2a$ ja sellega on tarvilikus tõestatud.

Piisavus. Oletame, et punkti P korral kehtib võrdus $r_1 + r_2 = 2a$. Näitame, et leidub tasandi koordinaadisüsteem, milles punkti P koordinaadid x, y rahuldavad ellipsi kanoonilist võrrandit (43). Koordinaadisüsteemi konstrueerime järgmiselt:

- x -teljeks võtame sirge, mis läbib punkte F_1, F_2 , positiivse suunaga F_1 -st F_2 -ni,

- koordinaatide alguspunktiks O võtame lõigu F_1F_2 keskpunkti,
- y -teljeks võtame sirge, mis läbib punkti O ja on x -teljega risti.

Selles koordinaadisüsteemis on punktide F_1, F_2 koordinaadid vastavalt $(-c, 0)$, $(c, 0)$ ja võrduse $r_1 + r_2 = 2a$ võime kirjutada kujul

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Viime teise liidetava vasakul poolel paremale poole

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

ning tõstame mõlemad pooled ruutu. Saame

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Taandades võrdseid liikmeid, saame

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ehk

$$a^2 - cx = a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu, saame

$$a^4 - 2ca^2x + c^2x^2 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Taandades võrdseid liikmeid, saame

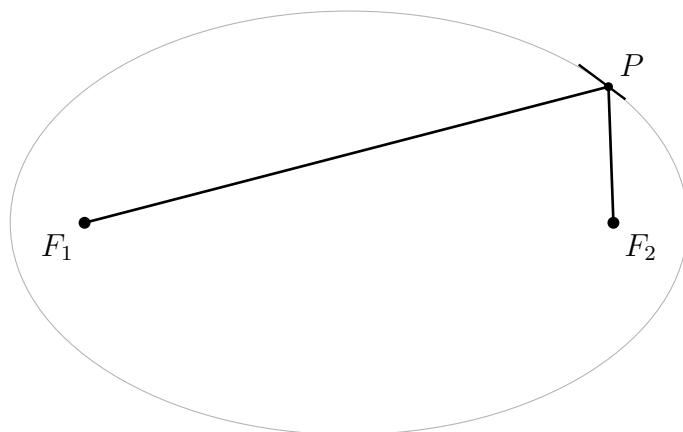
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Olgu $b^2 = a^2 - c^2, b > 0$. Eelmise võrrandi kirjutame kujul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ning sellega on tõestus lõpetatud. □

Tõestatud teoreemis antakse ellipsi punktide jaoks tarvilik ja piisav tingimus. Seda tingimust võib lühidalt sõnastada järgmiselt: ellips on tasandi punktihulk, mille korral iga punkti kauguste summa kahest antud punktist F_1, F_2 on konstantne suurus, mis võrdub $2a$, kusjuures $2a > |F_1F_2|$. Selle väite võiksime võtta ellipsi definitsioonina. Selle definitsiooni eelis seisneb selles, et see ei eelda tasandil mingit koordinaadisüsteemi, s.t. see ei sõltu koordinaadisüsteemi valikust.



Joonis 4: Ellipsi konstrueerimine niidi ja pliatsi abil

Ellipsi omadust $r_1 + r_2 = 2a$ kasutatakse praktilistes ülesannetes ellipsi konstrueerimiseks. Paberile märgitakse kaks punkti (ellipsi fookused). Seejärel võetakse mitteelastne niit või painduv traat, mille pikkus on suurem kui märgitud punktide vahekaugus. Niidi otsad kinnitatakse näiteks nõeltega märgitud punktidesse. Pliatsi teraga pingutatakse niit nii, et see toetuks paberile ja tema osad punktidesse terani oleksid sirged. Kui nüüd pliatsit paberil liigutada, pinget lõdvendamata, siis kirjeldab pliatsi tera ellipsi.

Definitsioon 6. Ellipsi kanoonilises koordinaadisüsteemis nimetatakse sirgeid

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

ellipsi *juhtsirgeteks*.

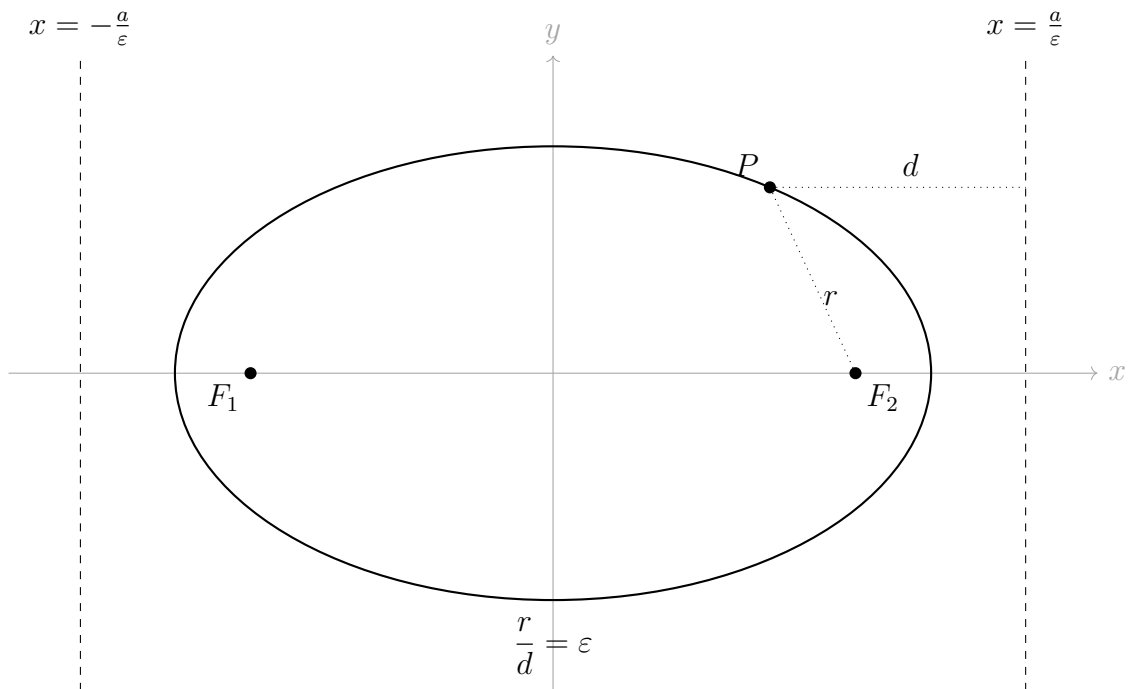
Teoreem 3. Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x, y)$ ellipsi punkt selline, et tema parem (vasak) fokaalraadius on r ja kaugus paremast (vasakust) juhtsirgest on d . Siis

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

kus ε on ellipsi ekstsentrilisus.



Tõestus. Teoreemi 1 põhjal võib punkti P parema fokaalraadiuse kirjutada kujul $r = a - \varepsilon x$. Punkti $P(x, y)$ kaugus paremast juhtsirgest on $d = a/\varepsilon - x$. Seega

$$\frac{r}{d} = \frac{a - \varepsilon x}{a/\varepsilon - x} = \varepsilon.$$

□

Teoreem 4. Olgu antud tasandi punkt F , tasandil sirge $\mathcal{L}$, mis ei läbi seda punkti, ning reaalarv $0 < \varepsilon < 1$. Olgu P tasandi punkt, r tema kaugus punktist F ja d tema kaugus sirgest $\mathcal{L}$. Tasandi punktihulk, mis rahuldab tingimuse

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{44}$$

on ellips.

Tõestus. Kuna punkt P ja sirge $\mathcal{L}$ on antud, siis teame punkti P kaugust sirgest $\mathcal{L}$. Tähistame selle kauguse h . Toome sisse kolm arvu

$$a = \frac{h\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad c = \frac{h\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2},$$

kus arvu b nimetajas võetakse positiivne ruutjuur. On lihtne veenduda, et need arvud rahuldavad seosed

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad a^2 - c^2 = b^2, \quad a > b, \quad b > 0.$$

Seame tasandil koordinaadisüsteemi järgmiselt:

- x -teljeks võtame sirge, mis läbib punkti F ja on risti sirgega $\mathcal{L}$, positiivse suunaga punktist F sirge $\mathcal{L}$ poole,
- x -teljel mõõdame punktist F lõigu pikkusega c vastassuunas x -telje positiivsele suunale ja saadud punkti O võtame koordinaadisüsteemi alguspunktiks,
- y -telg on sirge, mis läbib punkti O risti x -teljega ning valime sellel sirgel ühe kahest võimalikust suunast.

Nüüd näitame, et tingimust (44), mis on kirja pandud selles koordinaadisüsteemis, saab teisendada ellipsi kanooniliseks võrrandiks. Sellega teoreemi väide saab tõestatud. Meil on $r = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ja

$$d = c + h - x = \frac{h\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + h - x = \frac{h}{1 - \varepsilon^2} - x = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Asendades saadud avaldised võrrandisse (44), leiame

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \varepsilon x.$$

Tõstes mõlemad pooled ruutu ja taandades võrdsed liikmed, saame

$$x^2 + c^2 + y^2 = a^2 + \varepsilon^2 x^2.$$

Kasutades valemeid $1 - \varepsilon^2 = b^2/a^2$, $a^2 - c^2 = b^2$, toome saadud võrrandi ellipsi kanoonilisse kujusse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

Tõestatud väidete põhjal võime anda järgmise ellipsi definitsiooni:

Definitsioon 7. Ellipsiks nimetatakse tasandi punktide hulka, mis on määratud järgmise tingimusega: olgu antud punkt F (ellipsi fookus), sirge $\mathcal{L}$ (ellipsi juhtsirge), mis ei läbi punkti F , ning arv $0 < \varepsilon < 1$ (ellipsi ekstsentrilisus). Siis ellipsiks on kõigi tasandi punktide P hulk, mille korral kehtib

$$\frac{r}{d} = \varepsilon,$$

kus r on punkti P kaugus fookusest F ja d on punkti P kaugus juhtsirgest $\mathcal{L}$.

4 Hüperbool

Selles paragrahvis uurime hüperbooli omadusi. Hüperbooli võrrand saadi teises paragrahvis teist järku joonte klassifitseerimise käigus. Hüperbooli kanooniline võrrand on kujul

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0. \quad (45)$$

Arvud a, b nimetatakse hüperbooli *pooltelgedeks*, kusjuures a on hüperbooli reaalkoordinaat ja b on imaginaarkoordinaat. Me näeme, et hüperbooli kanooniline võrrand erineb ellipsi kanoonilisest võrrandist ainult märgi poolest võrrandi vasakul poolel. Sellest hoolimata erinevad hüperbooli geomeetrilised omadused oluliselt ellipsi geomeetrilistest omadustest.

Uurime hüperbooli, mida määrab võrrand (45), geomeetrilist kuju. Lahendame võrrandi y^2 suhtes. Saame

$$y^2 = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}. \quad (46)$$

Sellest võrrandist järeldub, et kui $x^2 < a^2$, st vahemikus $-a < x < a$, ei ole võrrandil reaalarvulisi lahendeid. See tähendab, et kahe ordinaatteljega paralleelse sirge $x = -a, x = a$ vahel ei ole hüperboolil punkte. Teisisõnu, kõik hüperbooli punktid asuvad väljaspool eespool mainitud riba. Kui $x = \pm a$, on võrrandil ainus lahend $y = 0$. Seega lõikab hüperbool abstsissitelge punktides $(-a, 0), (a, 0)$. Neid punkte nimetatakse *hüperbooli tippudeks*. Edasi, kui $x < -a$ või $x > a$, on võrrandil (46) kaks lahendit

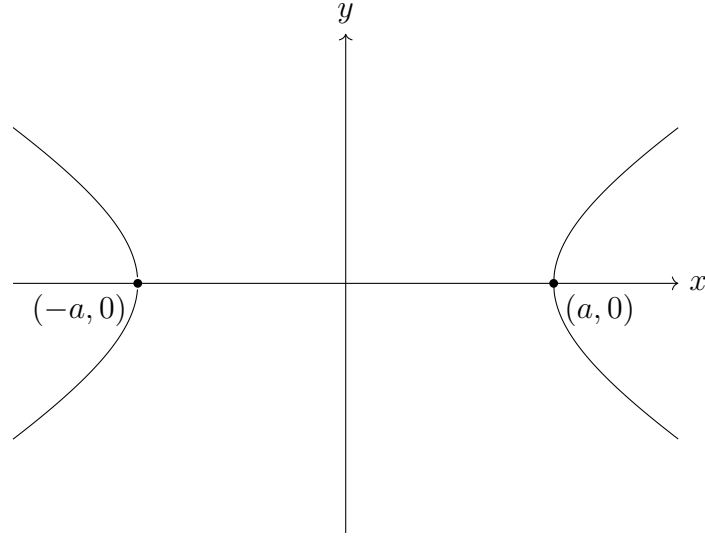
$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Seega on sel juhul neli hüperbooli punkti.

$$\begin{aligned} P_1(-x, \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \quad P_2(x, \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \\ Q_1(-x, -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}), \quad Q_2(x, -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}). \end{aligned}$$

On lihtne näha, et punktid P_1, P_2 ja ka punktid Q_1, Q_2 on sümmeetrilised ordinaatteljete suhtes. Samal ajal on punktid P_1, Q_1 ning punktid P_2, Q_2 sümmeetrilised abstsissitelje suhtes. Niisiis jõuame järeldusele, et kogu hüperbool asub väljaspool riba, mis on piiratud sirgetega $x = -a, x = a$. Sealjuures on hüperbool sümmeetriline koordinaatteljete suhtes. See tähendab, et hüperbooli kanoonilise koordinaadisüsteemi teljed on tema sümmeetriateljed. Hüperbool koosneb kahest osast, mida nimetatakse tema *harudeks*. Hüperbooli kuju on näidatud joonisel 5.

Tavaliselt uuritakse kõvera geomeetrilist kuju sirgete parve abil. See tähendab, et valime mingi sirgete parve ja otsime nende sirgete lõikepunkte kõveraga. Antud juhul kasutame nullpunktist läbivaid kaldu sirgeid. Iga selline sirge võib olla



Hüperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Joonis 5: Kanooniline koordinaadisüsteem ja tipud.

antud võrrandiga $y = kx$, kus k on sirge tõus. Seega toimib sirge tõus sirgete parve parameetrina. Lõikepunktid hüperbooliga leiame võrrandisüsteemi lahendamise abil

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = kx.$$

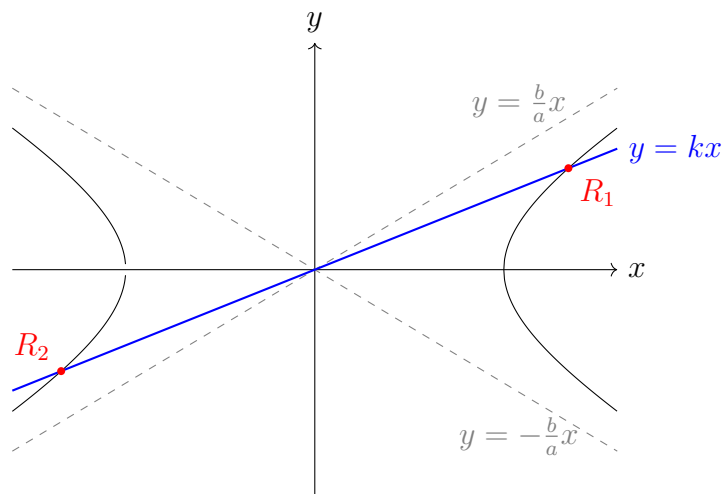
Lahendades selle süsteemi x^2 suhtes, saame

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - k^2 a^2}. \quad (47)$$

Seega, kui võrrandi paremal seisva murru nimetaja rahuldab tingimust $b^2 - k^2 a^2 \leq 0$, siis võrrandisüsteemil pole lahendit. Geomeetriliselt tähendab see, et sirged $y = kx$ tõusuga $k \leq -b/a$ või $k \geq b/a$ ei lõika hüperbooli. Kui aga sirge tõus jääb vahemikku $-b/a < k < b/a$, siis vastav sirge lõikab hüperbooli kahes punktis

$$R_1 \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \frac{abk}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}} \right), \quad R_2 \left(-\frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, -\frac{abk}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}} \right).$$

On lihtne märgata, et punktid R_1, R_2 on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Sellest järeldub muuhulgas, et hüperbool on sümmeetriline nullpunkti suhtes ning seega on nullpunkt hüperbooli keskpunkt. Niisiis on termini „tsentraalne teist järku joon” ($\delta \neq 0$) kasutamine hüperbooli kohta õigustatud.



Lõikamine sirgega $y = kx$

Joonis 6: Hüperbooli asümptoodid

Uurides võrrandi (47) lahendite sõltuvust tõusust k , leidsime, et kui tõus rahuldab tingimust $b^2 - k^2a^2 \leq 0$, siis võrrandil ei ole lahendit. Siiski tuleb siin täpsustada. Kui on täidetud tingimus $b^2 - k^2a^2 < 0$, siis võrrandil ei ole reaalarvulisi lahendeid, kuid see võib olla lahendatav kompleksarvude korpus. Kui aga on täidetud võrdsus $b^2 - k^2a^2 = 0$, st $k = \pm b/a$, siis murru nimetaja muutub nulliks ja võrrandil ei ole lahendit ei reaalarvude ega kompleksarvude korpus. Niisiis mängivad kaks sirget tõusuga $k = \pm b/a$ olulist rolli hüperbooli geomeetrilise struktuuri uurimisel.

Definitsioon 8. Sirgeid

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x$$

nimetatakse hüperbooli (45) asümptootideks.

Teoreem 5. Olgu $R_1(x, y)$, kus $x > 0, y > 0$, hüperbooli punkt. Olgu d punkti $R_1(x, y)$ kaugus asümptoodist $y = \frac{b}{a}x$. Siis, kui punkt R_1 liigub mööda hüperbooli nii, et tema x -koordinaat piiramata kasvab, st $x \rightarrow \infty$, siis kaugus d piiramata väheneb, st $d \rightarrow 0$.

Tõestus. Teoreemis on juttu punkti kaugusest sirgest. Tuletame meelde, et kui tasandi sirge on antud üldvõrrandiga $Ax + By + C = 0$, siis punkti $P(u, v)$ kaugus sirgest arvutatakse järgmise valemi järgi

$$d = \frac{|Au + Bv + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Rakendades seda valemit hüperbooli punktile $R_1(x, y)$ ja asümptoodile $y = \frac{b}{a}x$, leiame kauguse

$$d = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (48)$$

Näitame, et punkti R_1 kaugenemisel mööda hüperbooli on kauguse d piirväärtus null. Selleks on mugav kasutada hüperbooli parema haru parameetrilist võrrandit. Eelmises paragrahvis tutvustasime tasandi kõvera parameetrilise võrrandi mõistet. Hüperbooli parema haru parameetiline võrrand on kujul

$$x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t, \quad -\infty < t < \infty, \quad (49)$$

kus $\cosh t$ nimetatakse hüperboolseks koosinuseks ja $\sinh t$ hüperboolseks siinuseks ning hüperboolsed funktsioonid on defineeritud valemitega

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (50)$$

Lihtne on veenduda, et hüperboolsete funktsioonide jaoks kehtib samasus

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1. \quad (51)$$

Selle samuse abil saame näidata, et parameetiline võrrand (49) kirjeldab hüperbooli parema haru punkte. Tõepoolest, asendades parameetrilise võrrandi hüperbooli kanoonilisse võrrandisse, saame samasuse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cosh^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \sinh^2 t}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Tuleb mainida, et hüperbooli parameetiline võrrand (49) seab üksüheselt vastavusse parameetri t väärtused ($\mathbb{R}$) ja hüperbooli parema haru punktid.

Asendades parameetrilise võrrandi (49) kauguse valemisse (48), saame

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} |\cosh t - \sinh t| = \frac{ab e^{-t}}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (52)$$

Ekspponentsiaalfunktsiooni omadusi arvestades saame

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0.$$

□

Olgu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $c > 0$. Punktid abstsissiteljel $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ nimetatakse hüperbooli *fookusteks*. Kui $P(x, y)$ on hüperbooli punkt, siis lõikude F_1P , F_2P pikkusi nimetatakse punkti $P(x, y)$ fokaalraadiusteks ja neid tähistatakse vastavalt r_1, r_2 .

Definitsioon 9. Arve

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a},$$

nimetatakse vastavalt hüperbooli ekstsentrilisuseks ja fokaalparameetriks.

Ekstsentrilisuse definitsioonist tuleneb, et $\varepsilon > 1$.

Teoreem 6. Kui punkt $P(x, y)$ asub hüperbooli paremal harul, st $x \geq a$, siis tema fokaalraadiused avalduvad järgmiselt

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a. \quad (53)$$

Kui punkt $P(x, y)$ asub hüperbooli vasakul harul, st $x \leq -a$, siis tema fokaalraadiused avalduvad järgmiselt

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a. \quad (54)$$

Tõestus. Tõestame valemi $r_2 = \varepsilon x - a$ hüperbooli parema haru punkti korral. Ülejäänud valemid tõestatakse analoogselt. Kasutades kahe punkti vahelise kauguse valemit ja valemit (46), saame

$$\begin{aligned} r_2 &= |F_2P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} \\ &= \sqrt{\frac{c^2x^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}ax + c^2 - b^2} = \sqrt{\varepsilon^2x^2 - 2\varepsilon ax + a^2} \\ &= \sqrt{(\varepsilon x - a)^2} = \varepsilon x - a. \end{aligned}$$

Ruutjuure võtmisel täisruudust arvestasime, et hüperbooli parema haru juhul kehtib võrratus $\varepsilon x - a > 0$. □

Teoreem 7. Olgu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

hüperbooli kanooniline võrrand. Siis punkt $P(x, y)$ on hüperbooli punkt parajasti siis, kui punkti $P(x, y)$ fokaalraadiused r_1, r_2 rahuldavad tingimust

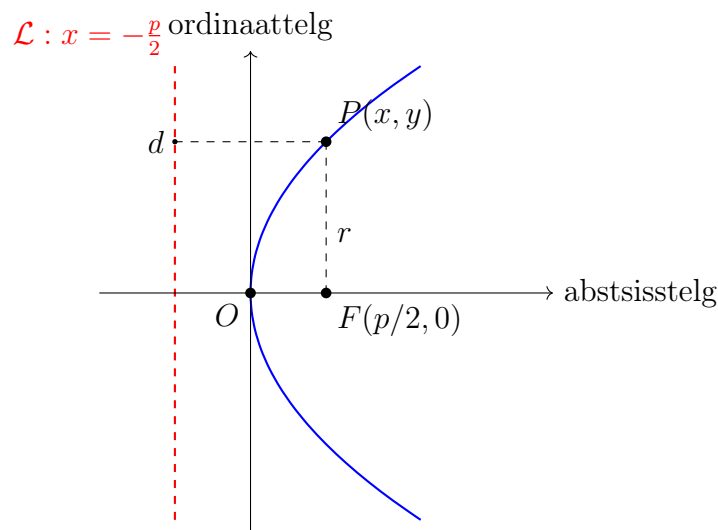
$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

5 Parabool

Selles paragrahvis uurime parabooli geomeetrilisi omadusi ning tuletame ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand polaarkoordinaatides.

Teist järku joont nimetatakse *parabooliks*, kui tasandil leidub ristkoordinaadisüsteem, milles selle joone punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 = 2px$, kus p on positiivne reaalarv, mida nimetatakse parabooli *fokaalparameetriks*. Võrrandit $y^2 = 2px$ nimetatakse parabooli *kanooniliseks võrrandiks* ja koordinaadisüsteemi, milles parabooli võrrand on kujul $y^2 = 2px$, nimetatakse parabooli *kanooniliseks koordinaadisüsteemiks*.

Parabooli kanoonilisest võrrandist järeldub, et parabool on sümmeetriline abstsissitelje suhtes. Tõepoolest, kui punkt $P(x, y)$ on parabooli punkt, siis ka punkt $P(x, -y)$ kuulub paraboolile. Seega on abstsissitelg parabooli sümmeetriatelg. Tuletame meelde, et kõvera lõikepunkte sümmeetriateljega nimetatakse kõvera tippudeks. Parabool lõikab abstsissitelge koordinaatide alguspunktis. Seega asub parabooli tipp kanoonilises koordinaadisüsteemis koordinaatide alguspunktis.



Joonis 7: Parabool.

Punkti $F(p/2, 0)$, mis asub abstsissiteljel, nimetatakse parabooli *fookuseks*. Sirget $x = -p/2$ nimetatakse parabooli *juhtsirgeks*.

Teoreem 8. *Punkt $P(x, y)$ kuulub paraboolile parajasti siis, kui $r = d$, kus r on punkti P kaugus parabooli fookusest F ja d on punkti P kaugus parabooli juhtsirgest.*

Tõestus. Olgu tasandil antud parabool. Varustame siis tasandi antud parabooli kanoonilise koordinaadisüsteemiga. Siis parabooli punktide koordinaadid rahuldavad parabooli kanoonilist võrrandit $y^2 = 2px$. Vaatleme mõnda parabooli punkti

ja näitame, et tema puhul kehtib võrdus $r = d$. Kanoonilises koordinaadisüsteemis on fookuse koordinaadid $F(p/2, 0)$. Seega

$$r = \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2}.$$

Teiselt poolt

$$d = x + \frac{p}{2}.$$

Näitame, et need arvud on võrdsed. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - p/2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2} = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} \\ &= \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = x + \frac{p}{2} = d. \end{aligned} \quad (55)$$

Olgu nüüd tasandil antud sirge $\mathcal{L}$ ja punkt F , mis ei asu sellel sirgel. Tähistame punkti F kaugust sirgest $\mathcal{L}$ tähega p . Seame tasandile ristkoordinaadisüsteemi. Abstsissteljeks võtame sirge, mis läbib punkti F ja on risti sirgega $\mathcal{L}$. Positiivseks suunaks loeme suuna sirgest $\mathcal{L}$ punkti F . Olgu A abstsisstelje ja sirge $\mathcal{L}$ lõikepunkt. Eelnevalt sisseviidud tähistuse kohaselt kehtib $|AF| = p$. Koordinaatide alguspunktiks valime lõigu AF keskpunkti. Ordinaatteljeks võtame sirge, mis läbib alguspunkti ja on risti abstsissteljega. Ordinaattelje suund valitakse vabalt. Selles koordinaadisüsteemis on punkti F koordinaadid $(p/2, 0)$ ja sirge $\mathcal{L}$ võrrandiks $x = -p/2$. Näitame, et tasandi punktid, mis paiknevad võrdse kaugusel punktist F ja sirgest $\mathcal{L}$, moodustavad parabooli, s.t. nende punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $y^2 = 2px$. Kirjutame tingimuse $r = d$ koordinaatides

$$r = d \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \quad (56)$$

Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu. Saame

$$(x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \Rightarrow x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Pärast võrdsete liikmete taandamist saame $y^2 = 2px$. Seega teoreem on tõestatud. $\square$

6 Puutujate võrrandid

Selles paragrahvis käsitleme teist järku joone puutuja küsimust. Saame ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutuja võrrandid.

Puutuja kõverale tasandil on sirge. Seetõttu meenutame, et sirge tasandil võib olla määratud üldvõrrandi, parameetrilise võrrandi või kanoonilise võrrandi abil. Need võrrandid on järgmised:

$$Ax + By + C = 0, \quad (\text{sirge üldvõrrand}), \quad (57)$$

$$x = s_1 t + x_0, \quad y = s_2 t + y_0, \quad (\text{sirge parameetriline võrrand}), \quad (58)$$

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}, \quad (\text{sirge kanooniline võrrand}). \quad (59)$$

Vektor, mis on moodustatud sirge üldvõrrandi kordajatest $\vec{N} = (A, B)$, on sirge normaalkvektor. Vektor $\vec{s} = (s_1, s_2)$ on sirge sihivektor ning punkt $P(x_0, y_0)$ asub sirgel. Muutuja t nimetatakse kõvera parameetriks ja see võib võtta mistahes reaalarvulisi väärtusi.

Tuletame meelde, et funktsiooni $y = y(x)$ graafikuks nimetatakse tasandi punktihulka $(x, y(x))$. Kui funktsioon $y = y(x)$ on punktis $x = x_0$ diferentseeruv, siis funktsiooni $y = y(x)$ graafiku puutuja võrrand punktis $x = x_0$ on

$$y - y_0 = y'(x)|_{x=x_0} (x - x_0). \quad (60)$$

Kõver tasandil võib olla antud parameetrilise võrrandiga

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)),$$

kus t on kõvera parameeter, $x(t), y(t)$ on muutujast t sõltuvad funktsioonid, mille määramispiirkond on $I \subset \mathbb{R}$, kus I on kas lõik, poollõik või vahemik. Tavaliselt eeldatakse, et need funktsioonid on diferentseeruvad, st parameetri suvalise väärtuse t korral eksisteerivad tuletised $x'(t), y'(t)$ ja need on pidevad t funktsioonid. Funktsioonid $x(t), y(t)$ määravad kujutuse $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Kujutust α nimetatakse *parametriseeritud jooneks* tasandil.

Ellipsi, hüperbooli ja parabooli parameetrilised võrrandid on järgmised:

$$\mathbf{e}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad I = [0, 2\pi), \quad (\text{ellips pooltelgedega } a, b), \quad (61)$$

$$\mathbf{h}(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad I = \mathbb{R}, \quad (\text{hüperbooli parem haru}), \quad (62)$$

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right), \quad I = \mathbb{R}, \quad (\text{parabool}). \quad (63)$$

Olgu tasandil kõver, mis on antud parameetrilise võrrandiga $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, kus $t \in I \subset \mathbb{R}$. Vaatleme kõvera puutuja küsimust, kui puutepunktiks on kõvera

punkt $P(x_0, y_0)$, kus $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ ja $t_0 \in I$. Eeldame, et parameetri väärtuse $t = t_0$ korral on funktsiooni $x(t)$ tuletis nullist erinev, st $x'(t)|_{t=t_0} \neq 0$. Kuna funktsioon $x(t)$ on pidevalt diferentseeruv, siis pöördfunktsiooni teoreemi kohaselt leidub punkti t_0 ümbrus $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, kus δ on positiivne reaalarv, nii et selles ümbruses on funktsioon $x(t)$ pööratav, st eksisteerib pöördfunktsioon, mida tähistame $t = t(x)$. Lisaks avaldub pöördfunktsiooni tuletis algse funktsiooni tuletise kaudu järgmiselt:

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)} \Big|_{t=t(x)}. \quad (64)$$

Asendame pöördfunktsiooni $t = t(x)$ kõvera parameetrisse võrrandisse $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Kasutades pöördfunktsiooni omadust $x(t(x)) \equiv x$, saame tasandi punktihulga $(x, y(t(x)))$. Ühest küljest on see kõvera $\alpha(t)$ punktihulk, sest oleme tegelikult teinud kõvera ümberparameetriseerimise, st läinud üle parameetrilt t parameetrile x . Ilmselt jääb kõvera punktihulk ümberparameetriseerimisel samaks. Teisest küljest on punktihulk $(x, y(t(x)))$ funktsiooni $y = y(t(x))$ graafik. Seega on kõvera $\alpha(t)$ puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul (60), st

$$y - y_0 = y'(t(x))|_{x=x_0}(x - x_0). \quad (65)$$

Kuna funktsioon $y = (t(x))$ on liitfunktsioon, avaldub selle tuletis muutuja x järgi järgmiselt:

$$\frac{dy(t(x))}{dx} = \frac{dy(t)}{dt} \frac{dt(x)}{dx}. \quad (66)$$

Kasutades pöördfunktsiooni tuletise valemit (64) ja asendades (66) parema poole puutuja võrrandisse (65), saame puutuja võrrandi kujul

$$\frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{x - x_0}{x'(t_0)}, \quad y'(t_0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0}, \quad x'(t_0) = \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_0}. \quad (67)$$

Võrreldes saadud võrrandit sirge kanoonilise võrrandiga (59), jõuame järeldusele, et vektor $x'(t_0), y'(t_0)$ on kõvera $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ puutuja suunavektor punktis $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$.

Definitsioon 10. Olgu antud parameetiline kõver $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Vektorit $\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t))$ nimetatakse kõvera α puutujavektoriks ehk kiirusvektoriks punktis $\alpha(t)$.

Valemist (67) järeldub, et parameetrilise kõvera kiirusvektor on selle kõvera puutuja suunavektor. Seega, kui leiame diferentseerimise teel parameetrilise kõvera kiirusvektori mingis punktis, saame kirjutada selle kõvera puutuja võrrandi ühes eespool toodud kujus (57), (58), (59).

Kasutades parameetrilise kõvera kiirusvektori mõistet, tuletame üldise võrrandi ellipsi puutujale mingis selle punktis. Olgu antud ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Selle ellipsi parameetriline võrrand on

$$\mathbf{c}(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Olgu

$$x_0 = a \cos t_0, \quad y_0 = b \sin t_0 \quad (68)$$

mõne ellipsi punkti koordinaadid. Leiame ellipsi puutuja üldvõrrandi selles punktis. Arvutades tuletised selles punktis, saame ellipsi kiirusvektori

$$\vec{\mathbf{c}}'(t_0) = (-a \sin t_0, b \cos t_0).$$

Kasutades valemeid (68), saame

$$\sin t_0 = \frac{y_0}{b}, \quad \cos t_0 = \frac{x_0}{a}.$$

Asendades need väärtused kiirusvektori valemisse, saame

$$\vec{\mathbf{c}}'(t_0) = \left(-\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right). \quad (69)$$

Et koostada puutuja üldvõrrand, on meil vaja puutuja normaalvektorit, s.t. vektorit, mis on kiirusvektoriga risti. Saame puutuja normaalvektori, kui vahetame kiirusvektori koordinaadid omavahel ja korrutame ühe neist arvuga -1 . Tähistame ellipsi puutuja normaalvektorit punktis, mis vastab parameetri väärtusele $t = t_0$, kujul $\vec{\mathbf{N}}(t_0)$. Siis

$$\vec{\mathbf{N}}(t_0) = \left(\frac{bx_0}{a}, \frac{ay_0}{b}\right).$$

Sellest järeldub, et ellipsi puutuja üldvõrrand punktis $P(x_0, y_0)$ on

$$\frac{bx_0}{a}(x - x_0) + \frac{ay_0}{b}(y - y_0) = 0.$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled arvuga ab ja avades sulud, saame

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0.$$

Kuna punkt $P(x_0, y_0)$ asub ellipsil, siis rahuldavad selle koordinaadid ellipsi kanoonilist võrrandit:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Asendades selle võrduse eelmisse võrrandisse, saame ellipsi puutuja üldvõrrandi:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (70)$$

Teoreem 9. *Olgu ellips antud kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ ellipsi punkt. Siis on ellipsi puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Vaatleme nüüd hüperbooli puutuja küsimust mingis tema punktis. Olgu hüperbool antud kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ hüperbooli parempoolse haru punkt. Märgime, et samad arvutused vasakpoolse haru korral viivad samale tulemusele. Kuna $P(x_0, y_0)$ on hüperbooli punkt, siis selle koordinaadid rahuldavad hüperbooli võrrandit, st kehtib võrdsus

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (71)$$

Et leida hüperbooli kiirusvektor punktis $P(x_0, y_0)$, kasutame hüperbooli parempoolse haru parametrizeerimist

$$\mathfrak{h}(t) = (a \cosh t, b \sinh t).$$

Olgu punktile $P(x_0, y_0)$ vastav parameetri väärtus $t = t_0$, st

$$x_0 = a \cosh t_0, \quad y_0 = b \sinh t_0.$$

Siis on kiirusvektor punktis $t = t_0$ kujul

$$\vec{\mathfrak{h}}'(t_0) = (a \sinh t_0, b \cosh t_0).$$

Avaldades kiirusvektori koordinaadid punkti $P(x_0, y_0)$ koordinaatide kaudu, saame

$$\vec{\mathfrak{h}}'(t_0) = \left(\frac{ay_0}{b}, \frac{bx_0}{a}\right).$$

Normaalvektori saame, kui vahetame kiirusvektori koordinaadid ja korrutame ühe neist arvuga -1 . Seega on normaalvektor kujul

$$\vec{N}(t_0) = \left(-\frac{bx_0}{a}, \frac{ay_0}{b}\right).$$

Järelikult on hüperbooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$

$$-\frac{bx_0}{a}(x - x_0) + \frac{ay_0}{b}(y - y_0) = 0.$$

Jagades mõlemad pooled arvuga $-ab$ ja avades sulud, saame võrrandi kujul

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Arvestades, et kehtib võrdsus (71), saame lõplikult

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Teoreem 10. *Olgu hüperbool antud oma kanoonilise võrrandiga*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$ hüperbooli punkt. Siis on hüperbooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Järgmiseks tuletame parabooli puutuja võrrandi, kui parabool on antud kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$. Parabooli puutuja võrrandi leidmiseks kasutame parabooli parametrilist võrrandit

$$\mathbf{p}(t) = \left(\frac{t^2}{2p}, t\right), t \in \mathbb{R}.$$

Olgu $P(x_0, y_0)$, kus $x_0 = \frac{t_0^2}{2p}$, $y_0 = t_0$, parabooli punkt. Leiame parabooli kiirusvektori

$$\vec{\mathbf{p}}'(t_0) = \left(\frac{t_0}{p}, 1\right).$$

Siis on puutuja normaalvektor kujul

$$\vec{N}(t_0) = \left(-1, \frac{y_0}{p}\right).$$

Parabooli puutuja võrrand on

$$(-1)(x - x_0) + \frac{y_0}{p}(y - y_0) = 0.$$

Avades sulud ja arvestades, et $y_0^2 = 2px_0$, saame puutuja võrrandi kujul

$$y_0y = p(x + x_0).$$

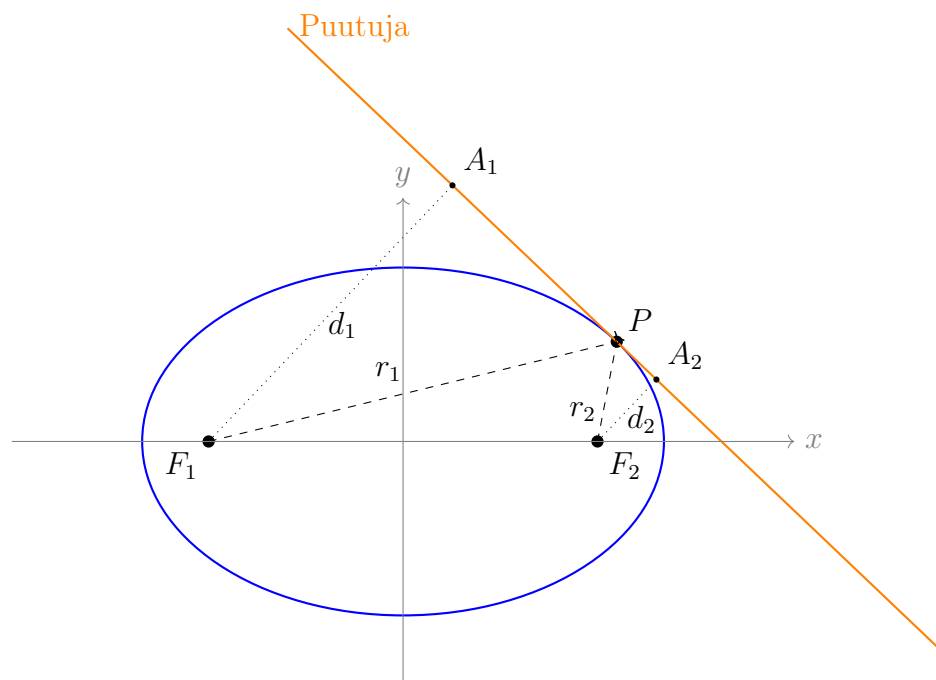
Teoreem 11. *Olgu parabool antud kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$ ja $P(x_0, y_0)$ parabooli punkt. Siis on parabooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ kujul*

$$y_0y = p(x + x_0).$$

7 Puutujate omadused

Selles paragrahvis tõestame olulisi ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutujate omadusi. Neid omadusi kasutatakse tehnikas ja arhitektuuris.

Teoreem 12. *Ellipsi puutuja mistahes punktis moodustab võrdsed nurgad ellipsi fokaalraadiustega.*



Joonis 8: $\angle F_1PA_1 = \angle F_2PA_2$

Tõestus. Olgu antud ellips, selle fookused F_1, F_2 , ellipsi punkt P ning selle fokaalraadiused, mida tähistame r_1 (vasak fokaalraadius F_1P) ja r_2 (parem fokaalraadius F_2P). Punktis P tõmbame ellipsile puutuja. Selle moodustatud nurka vasaku fokaalraadiusega tähistame ϕ_1 ning parema fokaalraadiusega ϕ_2 . Seega $\phi_1 = \angle F_1PA_1, \phi_2 = \angle F_2PA_2$. Vaja on tõestada, et $\phi_1 = \phi_2$.

Joonisel näeme, et nurgad ϕ_1 ja ϕ_2 on teravnurgad ning see väide kehtib iga ellipsi punkti P korral. Seetõttu, kui näitame, et $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$, järeldub sellest nurkade võrdsus $\phi_1 = \phi_2$.

Tõmbame fookustest F_1, F_2 ristsirged ellipsi puutujale ja tähistame ristsirgete ja puutuja lõikepunkte vastavalt A_1, A_2 . Olgu $d_1 = |F_1A_1|, d_2 = |F_2A_2|$, st d_1, d_2

on vastavalt fookuste F_1, F_2 kaugused puutujast. Siis

$$\sin \phi_1 = \frac{d_1}{r_1}, \quad \sin \phi_2 = \frac{d_2}{r_2}. \quad (72)$$

Et arvutada fookuste kaugused puutujast, seame ellipsile kanoonilise koordinaadisüsteemi. Selles koordinaadisüsteemis on ellipsi fookustel F_1, F_2 koordinaadid $(-c, 0), (c, 0)$. Olgu (x_0, y_0) ellipsi punkti P koordinaadid kanoonilises koordinaadisüsteemis. Siis ellipsi puutuja punktis P võrrand on kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Kirjutame selle sirge üldvõrrandi kujul

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0.$$

Siis vasaku fookuse $F_1(-c, 0)$ kaugus puutujast avaldub järgmiselt:

$$d_1 = \frac{|-b^2 c x_0 - a^2 b^2|}{Q_1} = \frac{|b^2 c x_0 + a^2 b^2|}{Q},$$

kus $Q = \sqrt{b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}$. Avaldise lugejas teisendame järgmiselt:

$$b^2 c x_0 + a^2 b^2 = b^2 a \frac{c}{a} x_0 + a^2 b^2 = ab^2 \varepsilon x_0 + a^2 b^2 = ab^2 (a + \varepsilon x).$$

Arvestades ellipsi vasaku fokaalraadiuse valemit $r_1 = a + \varepsilon x$, saame

$$d_1 = \frac{ab^2 r_1}{Q}. \quad (73)$$

Eelmises valemis jätsime absoluutväärtuse märgi ära, sest korrutis $ab^2 r_1$ on positiivne arv. Sarnased arvutused parema fookuse jaoks annavad:

$$d_2 = \frac{ab^2 r_2}{Q}. \quad (74)$$

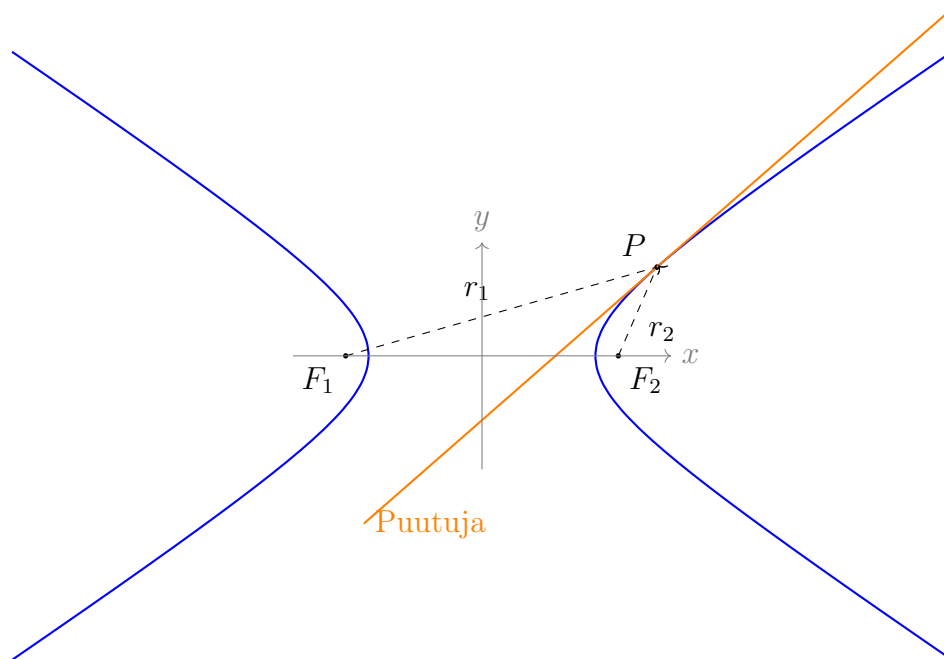
Asendades saadud kaugused d_1, d_2 valemisse (72), saame

$$\sin \phi_1 = \frac{ab^2}{Q}, \quad \sin \phi_2 = \frac{ab^2}{Q},$$

ehk $\sin \phi_1 = \sin \phi_2$. Seega on teoreem tõestatud. $\square$

Huvitav on märkida, et ellipsi puutuja tõestatud omadust kasutavad insenerid tehnilistes konstruktsioonides. Oletame, et meil on ellips. Selle fookused asuvad ellipsi sümmeetriateljel. Pöörame ellipsi ümber selle sümmeetriatelje. Saame niinimetatud pöördpinna. Sel juhul nimetatakse seda pöördellipsoidiks. Oletame, et pöördellipsoidi pind on valmistatud valgust peegeldavast materjalist. Asetame valgusallika pöördellipsoidi ühte fookusesse, näiteks ellipsi fookusesse F_1 , ja jälgime, kuidas valgusallikaga kiirgav valgus hakkab levima. Oletame, et valguskiir liigub mööda sirget F_1P , kus P on pöördellipsoidi punkt. Valguskiir peegeldub punktis P . Kuidas see edasi levib? Tuntud optikaseaduse kohaselt on langemisnurk võrdne peegeldumisnurgaga. Ellipsi puutuja tõestatud omadusest järeldub aga, et pärast peegeldumist levib valguskiir mööda punkti P parempoolset fokaalraadiust, st mööda sirget PF_2 , ja jõuab parempoolsesse fookusesse F_2 . Seega kogunevad kõik vasakpoolsest fookusest kiirguvad valguskiired pärast pöördellipsoidi pinnalt peegeldumist parempoolses fookuses, mis suurendab oluliselt valguse intensiivsust parempoolses fookuses.

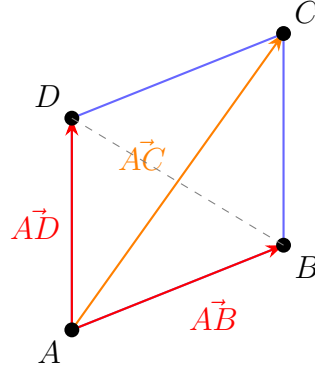
Teoreem 13. *Hüperbooli mistahes punkti puutuja on selle punkti fokaalraadiuste vahelise nurga nurgapoolitaja.*



Joonis 9: Puutuja punktis P on nurga $\angle F_1PF_2$ nurgapoolitaja.

Tõestus. Olgu antud hüperbool, mille fookused on tähistatud F_1, F_2 . Olgu P hüperbooli parema haru punkt ja r_1, r_2 selle punkti fokaalraadiused. Tõmbame läbi

punkti P hüperboolile puutuja. Teoreem väidab, et puutuja on nurga $\angle F_1PF_2$ nurgapoolitaja.



Joonis 10: Romb ja vektorid $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ ning diagonaal $\vec{AC}$.

Meie tõestus põhineb järgmisel geomeetrilisel väitel: rombi diagonaalid on rombi sisemiste nurkade nurgapoolitajad. Olgu rombi tipud A, B, C, D . Siis kehtib vektorvõrrand $\vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC}$ (vt joonis 10). Järelikult on vektorite $\vec{AD}$ ja $\vec{AB}$ summa nurgapoolitaja sihivektor $\vec{AC}$.

Tõestuse skeem on järgmine. Moodustame vektorid $\vec{PF}_1, \vec{PF}_2$. Vektorid $\vec{PF}_1$ ja $\vec{PF}_2$ teisendame samasuunalisteks ühikvektoriteks, jagades nende koordinaadid vastavate vektorite pikkustega. Tuletame meelde, et nende pikkused saame arvutada hüperbooli fokaalraadiuste valemite abil. Seejärel liidame saadud ühikvektorid, tulemuseks olev vektor on nurga $\angle F_1PF_2$ nurgapoolitaja sihivektor. Seejärel näitame, et see vektor on kollineaarne puutuja sihivektoriga. Sellest järeldub teoreemi väide. Tõepoolest, nurgapoolitaja ja puutuja läbivad punkti P ja nende sihivektorid on kollineaarsed. Järelikult puutuja ühtib nurgapoolitajaga.

Varustame tasandit antud hüperbooli kanoonilise koordinaadisüsteemiga. Olgu (x_0, y_0) punkti P koordinaadid. Siis fookuste koordinaadid on $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ja

$$\begin{aligned} \vec{PF}_1 &= (-c - x_0, -y_0), & \vec{PF}_2 &= (c - x_0, -y_0), \\ |\vec{PF}_1| &= \varepsilon x_0 + a, & |\vec{PF}_2| &= \varepsilon x_0 - a. \end{aligned} \quad (75)$$

Vastavad samasuunalised ühikvektorid on

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{-c - x_0}{\varepsilon x_0 + a}, \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 + a} \right), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{c - x_0}{\varepsilon x_0 - a}, \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 - a} \right). \quad (76)$$

Teisendame vektori $\vec{e}_1$ koordinaadid järgmiselt:

$$\begin{aligned}\frac{-c - x_0}{\varepsilon x_0 + a} &= \frac{(-c - x_0)(\varepsilon x_0 - a)}{(\varepsilon x_0 + a)(\varepsilon x_0 - a)} = \frac{-c\varepsilon x_0 + ac - \varepsilon x_0^2 + ax_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \\ \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 + a} &= \frac{(-y_0)(\varepsilon x_0 - a)}{(\varepsilon x_0 + a)(\varepsilon x_0 - a)} = \frac{-\varepsilon x_0 y_0 + ay_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Sarnaselt teisendame teise vektori $\vec{e}_2$ koordinaadid kujule

$$\begin{aligned}\frac{c - x_0}{\varepsilon x_0 - a} &= \frac{(c - x_0)(\varepsilon x_0 + a)}{(\varepsilon x_0 - a)(\varepsilon x_0 + a)} = \frac{c\varepsilon x_0 + ac - \varepsilon x_0^2 - ax_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \\ \frac{-y_0}{\varepsilon x_0 - a} &= \frac{(-y_0)(\varepsilon x_0 + a)}{(\varepsilon x_0 - a)(\varepsilon x_0 + a)} = \frac{-\varepsilon x_0 y_0 - ay_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}.\end{aligned}$$

Vektorite summa koordinaadid on

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(\frac{2(ac - \varepsilon x_0^2)}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}, \frac{-2\varepsilon x_0 y_0}{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2} \right).$$

Nüüd tuleb näidata, et saadud vektor on kollineaarne hüperbooli puutuja sihivektoriga punktis $P(x_0, y_0)$, st vektoriga

$$\vec{s} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2} \right). \quad (77)$$

Seega peame näitama, et korrutades vektori $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ sobiva nullist erineva arvuga, saame vektori $\vec{s}$. Kõigepealt korrutame vektori $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ arvuga $(\varepsilon^2 x_0^2 - a^2)/2$. Saame vektori

$$\frac{\varepsilon^2 x_0^2 - a^2}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (ac - \varepsilon x_0^2, -\varepsilon x_0 y_0). \quad (78)$$

Seejärel teisendame saadud vektori esimese koordinaadi järgmiselt:

$$\begin{aligned}ac - \varepsilon x_0^2 &= \varepsilon a^2 - \varepsilon x_0^2 = \varepsilon(a^2 - x_0^2) = \varepsilon(a^2 - a^2(1 + \frac{y_0^2}{b^2})) \\ &= -\frac{\varepsilon a^2 y_0^2}{b^2}.\end{aligned} \quad (79)$$

Seega vektor (78) on võrdne vektoriga

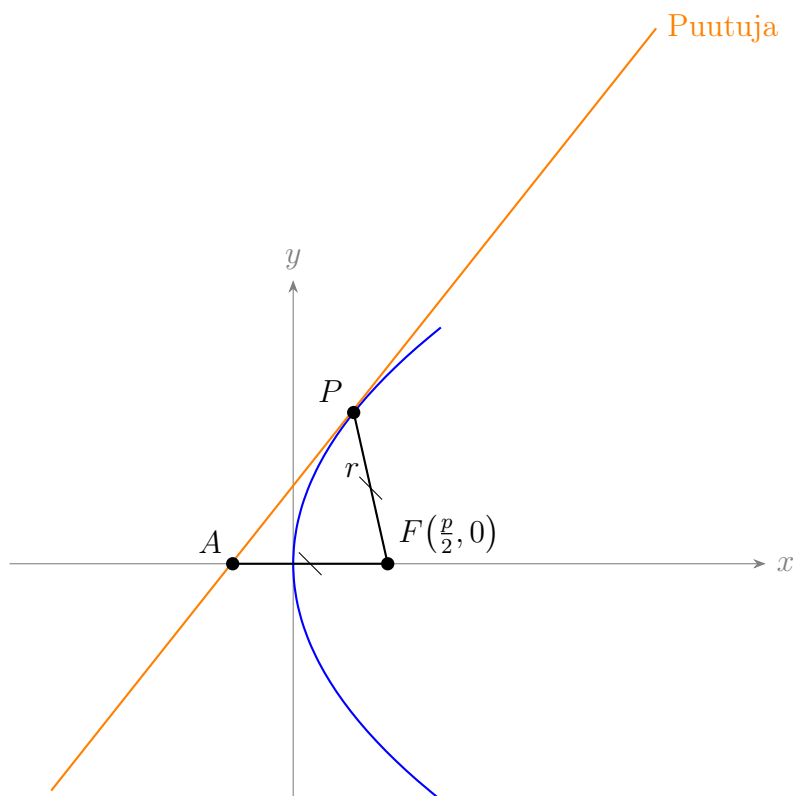
$$\left(-\frac{\varepsilon a^2 y_0^2}{b^2}, -\varepsilon x_0 y_0 \right). \quad (80)$$

Eeldades, et $y_0 \neq 0$, korrutame vektori (80) arvuga

$$-\frac{1}{\varepsilon a^2 y_0},$$

ja saame vektori $\vec{s}$ (77). Järelikult nurgapoolitaja sihivektor on kollineaarne puutuja sihivektoriga ja sellega teoreem on tõestatud. Viimasel teisendusel jätsime välja punkti, kus $y_0 = 0$. Ilmselt on see hüperbooli parema haru tipp. Tipp-punktis fokaalraadiuste vaheline nurk on sirgnurk ja puutuja on risti abstsisssteljega, st see on sirgnurga nurgapoolitaja. Seega kehtib teoreemi väide ka selles punktis. $\square$

Teoreem 14. *Olgu tasandil antud parabool fookusega F . Olgu P parabooli suvaline punkt. Tõmbame paraboolile puutuja punktis P ja tähistame selle lõikepunkti parabooli sümmeetriateljega tähega A . Siis $|AF| = |FP|$, st kolmnurk $\triangle AFP$ on võrdhaarne.*



Joonis 11: Puutuja paraboolile $y^2 = 2px$ punktis P lõikab sümmeetriatelge punktis A ; $\triangle AFP$ on võrdhaarne ($|AF| = |PF|$).

Tõestus. Varustame tasandit antud parabooli kanoonilise koordinaadisüsteemiga. Siis on parabooli võrrand kujul $y^2 = 2px$, kus p on parabooli fokaalparameeter. Olgu (x_0, y_0) punkti P koordinaadid. Parabooli fookus on $F(p/2, 0)$. Parabooli puutuja võrrand punktis $P(x_0, y_0)$ on kanoonilises koordinaadisüsteemis kujul

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Leiame punkti A koordinaadid, st puutuja ja x -telje lõikepunkti koordinaadid. Selles punktis on $y = 0$, ning puutuja võrrandist saame $x = -x_0$. Seega on $A(-x_0, 0)$. Sellest järeldub, et $|AF| = x_0 + p/2$. Arvutame nüüd lõigu PF pikkuse

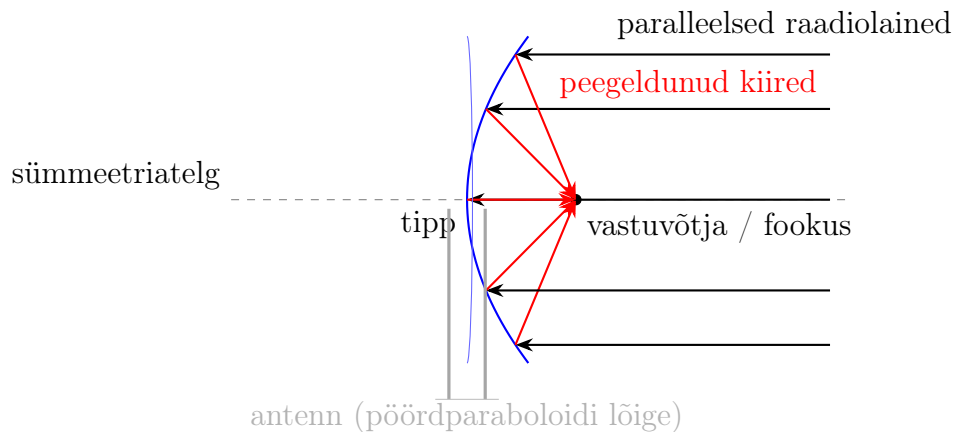
$$\begin{aligned} |PF| &= \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \frac{p^2}{4} + 2px} \\ &= \sqrt{x_0^2 + px_0 + \frac{p^2}{4}} = x_0 + \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (81)$$

Seega $|AF| = |PF|$ ning kolmnurk $\triangle AFP$ on võrdhaarne. Sellest järeldub ka nurkade võrdsus

$$\angle PAF = \angle APF.$$

□

Insenerid kasutavad antennide loomisel parabooli puutuja omadust. Pöörates parabooli ümber selle sümmeetriatelje, saame pinna, mida nimetatakse pöördparaboloidiks. Antenn on pöördparaboloidi kujuga ja signaalide vastuvõtja, näiteks raadiosignaali vastuvõtja, asetatakse selle pöördparaboloidi fookusesse. Kui raadiosignaali allikas on väga kaugel kosmoses, näiteks teises galaktikas, võib eeldada, et raadiosignaalid liiguvad sirgjooneliselt paralleelselt pöördparaboloidi sümmeetriateljega. Pöördparaboloidi pinnalt peegeldudes koondavad need parabooli tõestatud puutuja omaduse tõttu pöördparaboloidi fookusesse ja jõuavad signaalide vastuvõtjasse. Asjaolu, et raadiosignaalid koonduvad fookusesse, võimaldab oluliselt kosmosest tulevaid signaale.



Joonis 12: Pöördparaboloidi tööpõhimõte: paremalt tulevad paralleelsed raadiolained peegelduvad pöördparaboloidi pinnalt ja koonduvad fookusesse, kus paikneb vastuvõtja.

8 Võrrand polaarkoordinaatides

Selles paragrahvis tuletame ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand polaarkoordinaatides. Selle võrrandi tähelepanuväärne omadus seisneb selles, et see on sama kuju nii ellipsi, hüperbooli kui ka parabooli jaoks. Võrrandis esineb parameetrina nimetatud kõverate ekstsentrilisus. Ekstsentrilisuse väärtuse järgi saame kindlaks teha, kas tegemist on ellipsi (ekstsentrilisus väiksem kui üks), hüperbooli (ekstsentrilisus suurem kui üks) või parabooli (ekstsentrilisus võrdne ühega) võrrandiga. Paragrahvi teises pooles tuletatakse impulssmomendi jäävuse seadus. Seejärel tuletatakse ellipsi võrrandi abil polaarkoordinaatides esimene Kepleri seadus, mille kohaselt Päikesesüsteemi planeedid liiguvad elliptilistel orbiitidel, mille ühes fookuses asub Päike.

Et määrata tasandil polaarkoordinaatide süsteem, valime punkti O , mis on koordinaatide alguspunkt. Seda punkti nimetatakse polaarkoordinaatide süsteemi pooluseks. Seejärel valime poolusest lähtuva kiire, mida nimetatakse polaarteljeks. Nüüd on polaarkoordinaatide süsteem määratud. Näitame, kuidas määratakse punkt P polaarkoordinaadid selles süsteemis. Kõigepealt ühendame punkti P poolusega O . Lõigu pikkust $|OP|$ nimetatakse punkti P polaarraadiuseks ja see on punkti esimene koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Tähistame $r = |OP|$. Nurka, mis saadakse pöörates polaartelge vastupäeva kuni see ühtib lõiguga OP , nimetatakse punkti P polaarnurgaks ja tähistatakse φ . See on punkti P teine koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Polaarkoordinaate kirjutatakse punkti taha sulgudesse kujul $P(r, \varphi)$.

Kui määrata tasandil ristkoordinaatide süsteem x, y nii, et selle alguspunkt asub polaarkoordinaatide pooluses, abstsissitelg on polaartelg ja ordinaattelg on polaarteljega risti ning läbib poolust, siis saab ristkoordinaadid x, y avaldada polaarkoordinaatide r, φ kaudu järgmiste valemitega:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (82)$$

Kõvera võrrand polaarkoordinaatides kirjutatakse kujul $r = r(\varphi)$, st antakse polaarraadiuse funktsionaalne sõltuvus polaarnurgast. Kui on teada kõvera võrrand polaarkoordinaatides $r = r(\varphi)$, siis saame kirjutada selle parameetrilise võrrandi ristkoordinaatides

$$\alpha(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi).$$

Selles parameetrilises võrrandis on parameetriks polaarnurk φ . Diferentseerides parameetri φ järgi, saame arvutada kõvera puutujavektori ristkoordinaadid.

Meie eesmärk selles paragrahvis on tuletada ellipsi, hüperbooli ja parabooli võrrand polaarkoordinaatides. Kõveraks võtame ellipsi. Kõigepealt tuleb konstrueerida polaarkoordinaatide süsteem. Tähele tuleb panna järgmist iseärasust: po-

laarkoordinaatide poolus asetatakse ellipsi vasakusse fookusesse F_1 . Seega, erinevalt kanoonilisest ristkoordinaatide süsteemist, mille algus asub ellipsi keskpunktis, asub polaarkoordinaatide poolus ellipsi vasakus fookuses. Polaarteljeks võtame kiire, mis lähtub poolusest F_1 ja läbib paremat fookust F_2 . Lõigu F_1F_2 keskpunkti ehk ellipsi keskpunkti tähistame tähega O . Joonisel näitame ka ellipsi vasakut juhtsirget ning tähistame punkti, kus see lõikab ellipsi sümmeetriatelge (mis läbib fookuseid), tähega M . Olgu $P(r, \varphi)$ ellipsi suvaline punkt. Meie eesmärk on leida võrrand, mida rahuldavad ainult ellipsi punktide polaarkoordinaadid. Olgu d kaugus punktist P vasaku juhtsirgeni ja r punkti P vasakpoolne fokaalraadius. Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et punkt P kuuluks ellipsile, on võrrand

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \quad (83)$$

kus ε on ellipsi ekstsentrilisus. Valitud polaarkoordinaatide süsteemis punkti P vasak fokaalraadius ühtib punkti P polaarraadiusega. Seega tuleb leida, kuidas kaugus juhtsirgest d on avaldatav polaarnurga φ ja polaarraadiuse r kaudu. Teame, et kaugus ellipsi keskpunktist juhtsirge ja sümmeetriatelje lõikepunktini, so lõigu OM pikkus, on a/ε , kus a on ellipsi suurem pooltelg. Kaugus ellipsi keskpunktist fookuseni on c . Seega lõigu OF_1 pikkus on c . Sellest järeldub, et lõigu MF_1 pikkus on

$$|MF_1| = \frac{a}{\varepsilon} - c.$$

Olgu $\tilde{P}$ punkti P ortogonaalprojektsioon ellipsi sümmeetriateljele, mis läbib fookuseid. Siis $d = |M\tilde{P}| = |MF_1| + |F_1\tilde{P}|$. Kuna $|F_1\tilde{P}| = r \cos \varphi$, saame

$$d = \frac{a}{\varepsilon} - c + r \cos \varphi.$$

Asendades saadud avaldise võrrandisse (83), saame

$$r = a - \varepsilon c + \varepsilon r \cos \varphi,$$

ehk

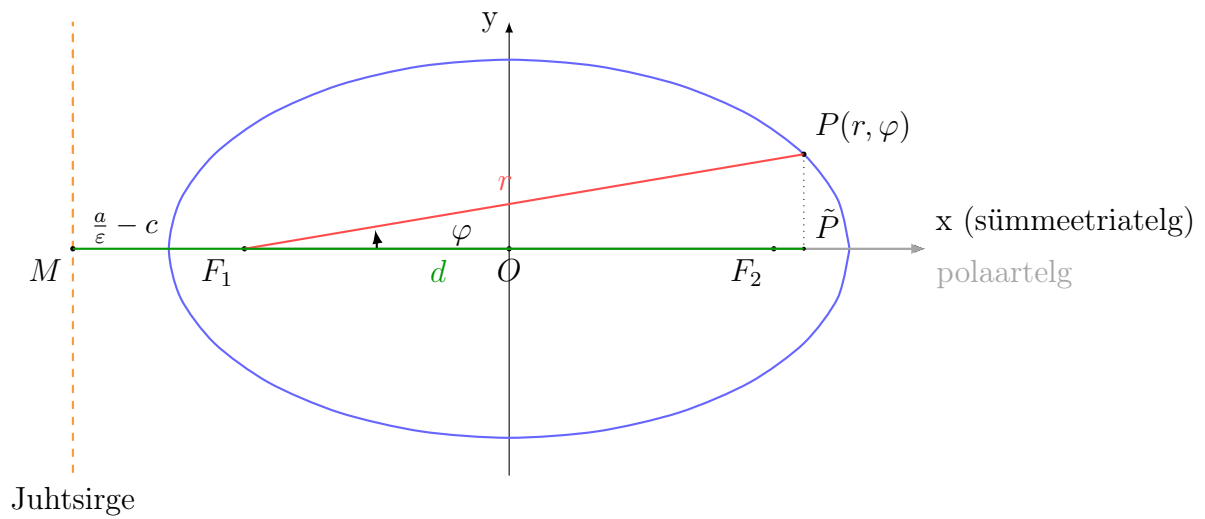
$$r = \frac{a - \varepsilon c}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (84)$$

On lihtne näidata, et murru lugejas olev avaldis on võrdne ellipsi fokaalparameetriga p . Tõepoolest,

$$a - \varepsilon c = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p.$$

Seega saame ellipsi võrrandi polaarkoordinaatides

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (85)$$



Joonis 13: Ellipsi võrrand polaarkoordinaatides.

Sarnaste arvutuste abil võib saada hüperbooli võrrandi polaarkoordinaatides. Kui asetada polaarkoordinaatide süsteemi poolus hüperbooli paremasse fookusesse F_2 ja suunata polaartelg paremale mööda abssisstelge, siis on hüperbooli parema haru võrrand polaarkoordinaatides kujul

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Kui aga poolus asetada vasakusse fookusesse F_1 ja polaartelg suunata parema fookuse F_2 suunas, siis on hüperbooli parema haru võrrand polaarkoordinaatides kujul

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1}.$$

Ülesanded

1. Antud on hüperbool. Polaarkoordinaatide süsteemi poolus asub hüperbooli paremas fookuses ja polaartelg on suunatud paremale mööda abssisstelge. Olgu $P(r, \varphi)$ hüperbooli parema haru punkt ning r, φ selle polaarkoordinaadid. Ilma kasutamata hüperbooli võrrandit polaarkoordinaatides, tõestada võrratus $\varepsilon \cos \varphi < 1$.