

Praktikum 1. Tehted vektoritega, vektori ja punkti koordinaadid.

Definitsioon 1 (Seotud vektor). Lõiku, millel on fikseeritud alguspunkt nimetatakse suunatud lõiguks ehk *seotud vektoriks*. Seotud vektori alguspunktiga X ja lõpp-punktiga Y tähistatakse $\overline{XY}$.

Definitsioon 2. Seotud vektori, mille algus- ja lõpp-punkt ühtivad nimetatakse *seotud nullvektoriks*.

Definitsioon 3. Seotud vektori $\overline{XY}$ pikkuseks $|\overline{XY}|$ nimetatakse seda vektori määrava lõigu pikkust, st $|\overline{XY}| = |XY|$.

Definitsioon 4. Seotud vektorite $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ vaheliseks *nurgaks* $\angle(\overline{AB}, \overline{AC})$ nimetatakse nurka, mis tekib lõigu AB pööramisel ümber punkti A lühimat teed pidi lõigule AC .

Definitsioon 5. Olgu $X \neq Y$ kaks erinevat punkti; vaatleme seotud vektoreid $\overline{XY}$ ja $\overline{YX}$. Seotud vektori $\overline{XY}$ *vastandvektoriks* nimetatakse seotud vektori $\overline{YX}$, mida tähistame $-\overline{XY}$.

Lause 1. Seotud vektori ja tema vastandvektori vahel kehtivad seosed

$$-(-\overline{XY}) = \overline{XY}, \quad -\overline{XX} = \overline{XX}, \quad |-\overline{XY}| = |\overline{XY}|.$$

Definitsioon 6. Seotud vektori $\overline{AB}$ nimetatakse *kollineaarseks* seotud vektoriga $\overline{CD}$ kui leidub selline sirge, millega lõigud AB ja CD on paralleelsed. Tähistatakse $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Järeldus 1. Nullvektor on kollineaarne suvalise seotud vektoriga.

Definitsioon 7. Seotud vektoreid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ nimetatakse *samasuunalisteks* (vastandsuunalisteks) kui

1. $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on kollineaarsed,
2. $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ suunad on ühesugused (vastupidised).

Definitsioon 8. Me ütleme, et seotud vektorid $\overline{AB}$ ja $\overline{CD}$ on *võrdsed*, $\overline{AB} = \overline{CD}$, kui

1. need vektorid on samasuunalised,
2. nende vektorite pikkused ühtivad.

Definitsioon 9 (Vektor). Olgu $\overline{AB}$ seotud vektor. Seotud vektorite klassi kuhu kuuluvad **kõik** seotud vektoriga $\overline{AB}$ võrdsed vektorid nimetatakse *vektoriks* ja tähistatakse $\vec{AB}$. Seotud nullvektorite klassi nimetatakse *nullvektoriks* ja tähistatakse $\vec{0}$.

Definitsioon 10. Ühikvektoriks nimetatakse vektorit $\vec{e}$, mille pikkus on 1, st $|\vec{e}| = 1$.

Teoreem 1. Vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ liitmisel on järgmised omadused:

1. kommutatiivsus $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
2. assotsiatiivsus $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$,
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
5. kolmnurga reegel $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Definitsioon 11. Vektori $\vec{a}$ ja reaalarvu α korrutiseks nimetatakse vektorit $\alpha\vec{a}$, mis

1. $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
2. $\alpha\vec{a}$ ja $\vec{a}$ on samasuunalised kui $\alpha \geq 0$ ja vastandsuunalised kui $\alpha < 0$.

Teoreem 2. Olgu $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vektorid ning α , β arvud. Vektori reaalarvuga korrutamisel on järgmised omadused:

1. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
2. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
3. $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
4. $1\vec{a} = \vec{a}$.

Definitsioon 12 (Lineaarne sõltuvus). Vektoried $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\dots$, $\vec{a}_n$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuks kui mistahes arvude α_1 , α_2 , $\dots$, α_n korral võrdusest

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0} \quad (1)$$

järeldub, et $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Vektoreid nimetatakse *lineaarselt sõltuvateks* kui nad ei ole lineaarselt sõltumatud.

Võrduse (1) vasakul poolel olevat avaldist nimetatakse vektorite $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\dots$, $\vec{a}_n$ *lineaarkombinatsiooniks*. Lineaarkombinatsiooni nimetatakse *triviaalseks* kui kõik tema kordajad on nullid. Kui vähemalt üks kordaja on nullist erinev, siis ütleme, et vastav lineaarkombinatsioon on *mittetriviaalne*.

Teoreem 3. Tasandilised vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed parajasti siis kui leidub vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga. See tähendab leiduvad arvud α ja β , mis pole korraga nullid, et $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$.

Järeldus 2. Kui $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed vektorid, siis $\vec{b}$ avaldub vektori $\vec{a}$ kaudu $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, kus $\alpha \in \mathbb{R}$ ja

$$\alpha = \begin{cases} +\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{samasuunalised,} \\ -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}, & \text{vastandsamasuunalised.} \end{cases}$$

Definitsioon 13 (Baas, reeper). Kahest mittekollineaarsest vektorist $\vec{a}$, $\vec{b}$ koosnevat vektorite süsteemi $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ nimetatakse tasandi $\mathbb{E}^2$ *baasiks*. Vektoreid $\vec{a}$, $\vec{b}$ nimetatakse *baasivektoriteks*. Kolmikut $\{O; \vec{a}, \vec{b}\}$, kus punkt O on tasandi punkt ning $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ on tasandi baas, nimetatakse *reeperiks*. Punkti O nimetatakse seejuures reeperi *alguspunktiks*.

Definitsioon 14 (Projektsioonivektor). Olgu $\{O; \vec{a}, \vec{b}\}$ tasandi reeper ja määraku baasivektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ vastavalt punkti O läbivad sirged k , l . Olgu $\vec{r}$ tasandi suvaline vektor.

Rakendame vektori $\vec{r}$ alguspunktist O ja tähistame saadud seotud vektori lõpppunkti P . Vektorit $\vec{r}$ nimetatakse punkti P *kohavektoriks*.

Projekteerime punkti P sirgele k paralleelselt sirgega l ning tähistame saadud projektsioonipunkti P' . Vektorit $\overrightarrow{OP'}$ nimetatakse vektori $\vec{r}$ *projektsioonivektoriks* vektori $\vec{a}$ sihile.

Vektori $\vec{r}$ *projektsiooni* vektori $\vec{a}$ sihile defineerime

$$\text{pr}_{\vec{a}}\vec{r} = \begin{cases} +|\overrightarrow{OP'}|, & \text{kui } \overrightarrow{OP'} \text{ ja } \vec{a} \text{ on samasuunalised,} \\ -|\overrightarrow{OP'}|, & \text{kui } \overrightarrow{OP'} \text{ ja } \vec{a} \text{ on vastandsamasuunalised.} \end{cases}$$

Lause 2. Vektori projektsioonil on järgmised omadused:

1. $\text{pr}_{\vec{a}}(\vec{r} + \vec{s}) = \text{pr}_{\vec{a}}\vec{r} + \text{pr}_{\vec{a}}\vec{s}$,
2. $\text{pr}_{\vec{a}}(\alpha \vec{r}) = \alpha \text{pr}_{\vec{a}}\vec{r}$.

Definitsioon 15 (Vektori koordinaadid). Vektori $\vec{r}$ *koordinaatideks* baasis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ nimetatakse arve

$$x = \frac{\text{pr}_{\vec{a}}\vec{r}}{|\vec{a}|}, \quad y = \frac{\text{pr}_{\vec{b}}\vec{r}}{|\vec{b}|}.$$

Järeldus 3. Tasandi suvaline vektor $\vec{r}$ avaldub baasivektorite kaudu $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Lause 3. Olgu $\{O; \vec{a}, \vec{b}\}$ tasandi $\mathbb{E}^2$ reeper ja olgu (x_1, x_2) ning (y_1, y_2) vastavalt vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ koordinaadid baasis $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ ehk $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Siis

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \alpha \vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Definitsioon 16 (Ristkoordinaadid). Tasandi baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse *ortonormeeritud baasiks* ehk *ristbaasiks*, kui baasivektorid on teineteisega risti ja baadivektorid on ühikvektorid. Tasandi reeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ nimetatakse *ristreeperiks* kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on ortonormeeritud baas. Ristreeperiga määratud koordinaate nimetatakse *ristkoordinaatideks*.

Teoreem 4. Kolm vektorit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui leidub nende vektorite mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga.

Ülesanne 1. On antud $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$ ja $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Arvutage $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne 2. Vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheline nurk on $\varphi = 120^\circ$, kusjuures $|\vec{a}| = 3$ ja $|\vec{b}| = 5$. Leidke $|\vec{a} + \vec{b}|$ ja $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Ülesanne 3. Kolm vektorit $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ on kolmnurga külgedeks. Esitage vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ abil kolmnurga mediaanidega ühtivad vektorid $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ ja $\overrightarrow{CP}$.

Ülesanne 4. Rööpküliku $ABCD$ diagonaalvektoreiks on $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ ja $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Avaldage rööpküliku külgevektorid $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ ja $\overrightarrow{DA}$ vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ kaudu.

Ülesanne 5. Punktid E ja F on nelinuga $ABCD$ külgede AB ja CD keskpunktid. Tõestage, et $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Ülesanne 6. On antud kolm vektorit $\vec{a} = (2, 4)$, $\vec{b} = (-3, 1)$ ja $\vec{c} = (5, -2)$. Leidke vektorid

a) $2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$,

b) $\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c}$.

Ülesanne 7. Ruumis on antud vektorid $\vec{a} = (3, -2, 6)$ ja $\vec{b} = (-2, 1, 0)$. Leidke vektorid:

a) $\vec{a} + \vec{b}$,

c) $2\vec{a}$,

e) $2\vec{a} + 3\vec{b}$,

b) $\vec{a} - \vec{b}$,

d) $-\frac{1}{2}\vec{b}$,

f) $\frac{1}{3}\vec{a} - \vec{b}$.

Ülesanne 8. Esitage vektor $\vec{d}$ vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ lineaarkombinatsioonina, kui

a) $\vec{a} = (2, 3, 1)$, $\vec{b} = (5, 7, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, 4)$, $\vec{d} = (4, 12, -3)$;

b) $\vec{a} = (5, -2, 0)$, $\vec{b} = (0, -3, 4)$, $\vec{c} = (-6, 0, 1)$, $\vec{d} = (25, -22, 16)$;

c) $\vec{a} = (3, 5, 6)$, $\vec{b} = (2, -7, 1)$, $\vec{c} = (12, 0, 6)$, $\vec{d} = (0, 20, 18)$.

Ülesanne 9. Leidke rööpküliku $ABCD$ tippude koordinaadid reeperi $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$ suhtes.

Ülesanne 10. On antud trapetsi kolm järjestikust tippu $A(-2, -3)$, $B(1, 4)$, $C(3, 1)$. Leidke neljas tipp D tingimusel, et alus AD on viis korda pikem alusest BC .

Ülesanne 11. Lõik otspunktidega $A(-1, 8, 3)$ ja $B(9, -7, -2)$ on jagatud punktidega C , D , E , F viieks võrdseks osaks. Leidke nende punktide koordinaadid.

Ülesanne 12. Olgu $\vec{e}$ ühikvektor. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni ühikvektori $\vec{e}$ sihile tähistame $\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a}$. On antud

$$\text{pr}_{\vec{e}}\vec{a} = 5, \text{pr}_{\vec{e}}\vec{b} = -3, \text{pr}_{\vec{e}}\vec{c} = -8, \text{pr}_{\vec{e}}\vec{d} = 6.$$

Kas antud projektsioonidest järeldub, et vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ moodustavad kinnise murdjoone? Siin eeldame, et vektori $\vec{b}$ alguspunkt on vektori $\vec{a}$ lõpp-punkt, vektori $\vec{c}$ alguspunkt asub vektori $\vec{b}$ lõpp-punktis ja nii edasi.