

Praktikum 8. Baasiteisendused. Baasiteisenduse maatriks.

Olgu tasandil antud reeperid $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Kehtivad valemid

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2, \end{cases} \quad \text{kus} \quad a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}.$$

Maatriksit $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ nimetatakse *üleminekumaatriksiks* baasilt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ baasile $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Üleminekumaatriks T on *regulaarne*, st $|T| \neq 0$. Olgu punkti P koordinaadid reeperites $\mathcal{R}$ ja $\mathcal{R}'$ vastavalt (x, y) ja (x', y') , ning olgu (c_1, c_2) punkti O' koordinaadid reeperis $\mathcal{R}$. Siis kehtib

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Koordinaadisüsteemi *paralleellüke* on koordinaaditeisendus

$$\begin{cases} x = x' + c_1, \\ y = y' + c_2. \end{cases}$$

Koordinaadisüsteemi *pööre* nurga φ võrra (vastupäeva, kui $\varphi > 0$) on järgmine teisendus

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \cos \varphi x' - \sin \varphi y', \\ y = \sin \varphi x' + \cos \varphi y'. \end{cases}$$

Ülesanne 1. Tasandil on antud kaks baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ja $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Teise baasi vektoritel on esimeses baasis vastavalt koordinaadid $(-1, 3)$ ja $(2, -7)$.

1. Leidke üleminekumaatriks ühelt baasilt teisele. Leidke vektori koordinaadid esimeses baasis, kui on antud selle koordinaadid α'_1, α'_2 teises baasis.
2. Leidke vektori koordinaadid teises baasis, kui on antud selle koordinaadid α_1, α_2 esimeses baasis.
3. Leidke baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinaadid teises baasis.

Ülesanne 2. Ruumis on antud kaks baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ja $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Teise baasi vektoritel on esimeses baasis vastavalt koordinaadid $(1, 1, 1)$, $(-1, -2, -3)$, $(1, 3, 6)$.

1. Leida vektori $\vec{a}$ koordinaadid esimeses baasis, kui on teada selle koordinaadid $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ teises baasis.
2. Leida vektori $\vec{a}$ koordinaadid teises baasis, kui on teada selle koordinaadid $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ esimeses baasis.
3. Leida baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinaadid teises baasis.

Ülesanne 3. Tasandil on antud kaks koordinaadisüsteemi (kaks reeperit) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Teise koordinaadisüsteemi alguspunktil on esimeses süsteemis koordinaadid $(-1, 3)$ ja teise koordinaadisüsteemi baasivektoritel on esimeses baasis vastavalt koordinaadid $(2, 3)$ ja $(1, 1)$.

1. Leida punkti P koordinaadid esimeses koordinaadisüsteemis, kui on teada tema koordinaadid x', y' teises koordinaadisüsteemis.
2. Leida punkti P koordinaadid teises koordinaadisüsteemis, kui on teada tema koordinaadid x, y esimeses koordinaadisüsteemis.
3. Leida punkti O koordinaadid teises koordinaadisüsteemis ning baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ koordinaadid teise koordinaadisüsteemi baasis.

Ülesanne 4. Kolmemõõtmelises ruumis on antud kaks koordinaadisüsteemi (reeperit) $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Teise koordinaadisüsteemi alguspunkti koordinaadid esimeses koordinaadisüsteemis on $(1, 1, 2)$ ja teise koordinaadisüsteemi baasivektorite koordinaadid esimese koordinaadisüsteemi baasis on $(4, 2, 1)$, $(5, 3, 2)$, $(3, 2, 1)$. Leidke

1. punkti koordinaadid esimeses koordinaadisüsteemis, kui selle koordinaadid teises koordinaadisüsteemis on (x', y', z') ;
2. punkti koordinaadid teises koordinaadisüsteemis, kui selle koordinaadid esimeses koordinaadisüsteemis on (x, y, z) ;
3. alguspunkti O koordinaadid teises koordinaadisüsteemis ja baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ koordinaadid teise koordinaadisüsteemi baasis.

Ülesanne 5. Tasandil on antud kaks ristkoordinaadisüsteemi

$$\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\} \text{ ja } \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}.$$

Teise koordinaatsüsteemi alguspunktil on esimeses koordinaadisüsteemis koordinaadid $(1, 3)$ ning baasivektorid $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ saadakse baasivektoritest $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vastavalt pöördega ühe ja sama nurga φ võrra lühima pöörde suunas vektorilt $\vec{e}_1$ vektorile $\vec{e}'_2$.

Leida punkti P koordinaadid esimeses koordinaadisüsteemis, kui on teada tema koordinaadid x', y' teises koordinaatsüsteemis, arvestades, et pöördenurk φ on:

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. 60° ; | 3. 90° ; |
| 2. 135° ; | 4. 180° . |

Ülesanne 6. Tetraeedris $ABCD$ on punkt M tahu BCD mediaanide lõikepunkt. Leida ruumipunkti P koordinaadid koordinaadisüsteemis $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, kui on teada tema koordinaadid x', y', z' koordinaadisüsteemis $\{M; \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\}$.