

Analüütiline geomeetria (1. osa)

Loengukonspekt

Matemaatika ja statistika instituut
Tartu 2025

Sisukord

1	Sissejuhatus	2
2	Tehted vektoritega	3
2.1	Vektori mõiste	3
2.2	Vektorite liitmine	6
2.3	Vektori korrutamine arvuga	9
3	Baas, reeper, koordinaadid	13
3.1	Baas	13
3.2	Reeper, koordinaadisüsteem	18
3.3	Polaarkoordinaadid	20
4	Skalaarkorrutis	21
5	Vektorkorrutis	25
5.1	Vektorkorrutise definitsioon ja omadused	25
5.2	Vektorkorrutis koordinaatides	29
5.3	Kahekordne vektorkorrutis	33
6	Vektorite segakorrutis	34
7	Sirge võrrandid	40
7.1	Sirge võrrand ruumis	41
7.2	Sirge võrrand tasandil	42
7.3	Punkti kaugus sirgeni	43
8	Tasandi võrrandid	45
8.1	Tasandi parameetrilised võrrandid	45
8.2	Tasandi ilmutamata võrrandid	46
8.3	Üleminek ühelt võrrandilt teisele	47
8.4	Tasandite vastastikune asend. Tasandite lõikesirge	48
8.5	Punkti kaugus tasandini	51
9	Baasiteisendused	52

1 Sissejuhatus

2 Tehted vektoritega

Üks analüütilise geomeetria tähtsamaid mõisteid on vektori mõiste. See mõiste on lugejale tuttav koolimatemaatika algeomeetriast. Enne kui anname vektori täpse definitsiooni, teeme mõned üldisemad märkused. Peame silmas seda geomeetrilist ruumi, milles vektorid asuvad. Eeldame, et see ruum on Eukleidiline, see tähendab, et selles ruumis kehtivad kõik Eukleidese aksioomid. Sellest järelduvad kaks olulist omadust, mida me edaspidi kasutame. Esiteks, iga lõigu korral on määratud selle pikkus, st mittenegatiivne arv, kusjuures see arv on null parajasti siis, kui lõigu otspunktid langevad kokku, st lõik taandub punktiks. Teiseks, iga kahe ühest punktist lähtuva kiire korral on määratud nende vaheline nurk φ . Täpsuse huvides eeldame, et nurgad mõõdetakse radiaanides. Käesolevas kursuses mõistetakse nurga all seda nurka, mis tekib ühe kiire pööramisel teisega kokkulangemiseni lühimat teed pidi. Sellest definitsioonist tuleneb, et nurk rahuldab võrratust $0 \leq \varphi \leq \pi$.

2.1 Vektori mõiste

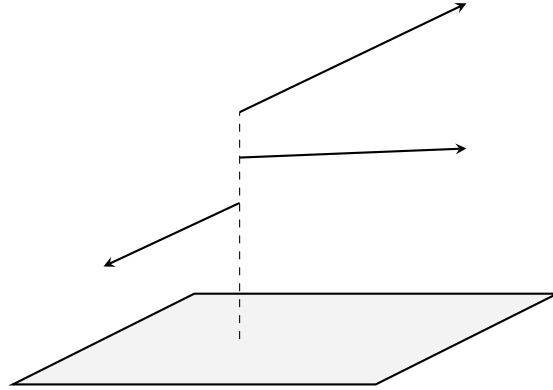
Tähistame Eukleidilist ruumi tähega $\mathcal{E}$. Olgu P ja Q selle ruumi kaks punkti. Kaks punkti määravad lõigu PQ . Kui sellele lõigule on määratud suund punktist P punkti Q , siis nimetame lõiku vektoriks ja tähistame seda kui $\overrightarrow{PQ}$. Seega on vektori tähises esimesele kohale kirjutatud punkt vektori alguspunktiks ning teisele kohale kirjutatud punkt vektori lõpp-punktiks. Võime öelda, et vektoriks on Eukleidilise ruumi punktide järjestatud paar, kus punktide järjestus määrab lõigu suuna. Lõigul PQ on olemas ka teine, esimesega vastassuunaline suund, nimelt suund punktist Q punkti P . Seega saame moodustada ka teise vektori $\overrightarrow{QP}$, mis erineb vektorist $\overrightarrow{PQ}$ oma suuna poolest. Vektorit $\overrightarrow{QP}$ nimetame vektorile $\overrightarrow{PQ}$ *vastandvektoriks*. Juhul, kui punktid P ja Q langevad kokku, nimetame vektorit $\overrightarrow{PP}$ nullvektoriks, sõltumata sellest, milline on punkt P .

Oluline lõigu omadus on selle pikkus. Vektori pikkuseks loeme teda määratleva lõigu pikkuse ja tähistame seda kui $|\overrightarrow{PQ}|$. Seega kehtib $|\overrightarrow{PQ}| \geq 0$, kusjuures vektori pikkus on võrdne nulliga parajasti siis, kui tegemist on nullvektoriga. Lisaks tuleneb vastandvektori $\overrightarrow{QP}$ definitsioonist, et $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}|$.

Vektoreid nimetatakse *kollineaarseteks*, kui nad asuvad kas ühel ja samal sirgel või paralleelsetel sirgetel. Kui $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{SR}$ on kollineaarsed vektorid, siis seda tähistame järgmiselt $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{SR}$. Kaht kollineaarset vektorit nimetame *samasuunalisteks* ja tähistame $\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{SR}$, kui neil on üks ja sama suund, ning *vastassuunalisteks* ja tähistame $\overrightarrow{PQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{SR}$, kui neil on vastassuunalised suunad. On ilmne, et vektor ja temale vastandvektor on vastassuunalised vektorid. Kuna nullvektoril puudub suund, loetakse ta kollinearseks mistahes vektoriga.

Veel üks tähtis mõiste on *vektorite kollineaarsus*. Vektoreid nimetatakse komp-

lanaarseteks, kui leidub tasand, millega nad on paralleelsed. Erijuhul, kui kompla-naarsete vektorite alguspunktid ühtivad, tähendab vektorite komplanaarsus seda, et nad asuvad ühes ja samas tasandis. On ilmne, et vektorite komplanaarsusest saab rääkida ainult kolmemõõtmelises ruumis.



Joonis 1: Vektorite komplanaarsus

Üheks keskseks mõisteks vektoriarvutuses on võrdsete vektorite mõiste.

Definitsioon 1. Kaks vektorit $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{SR}$ nimetatakse võrdseteks, mida tähistame

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR},$$

kui täidetud on järgmised tingimused:

$$\overrightarrow{PQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{SR}, \quad |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{SR}|.$$

See tähendab, et vektorid on samasuunalised ja võrdse pikkusega.

Märgime, et vektorite võrdsus erineb lugejale tuttavast arvude võrdsusest. Kaks võrdsed arvu on sisuliselt üks ja sama arv. Vektorite puhul see aga nii ei ole, kaks võrdset vektorit ei ole üldjuhul üks ja sama vektor, kuna ühe alguspunkt võib erineda teise alguspunktist. Seega on meil olemas hulk omavahel võrdseid vektoreid. Selle hulga põhjal võiksime sisse viia abstraktse vektori mõiste. Kuid sellise käsitlemise korral oleks vektorite teooria korrektseks ülesehitamiseks vaja kasutada hulgateoreetilisi mõisteid, nagu ekvivalentsiseos, ekvivalentsiklassid ja nende omadused. Et seda vältida ja säilitada geomeetriliste konstruktsioonide näitlikus ja konkreetsus, meie hakkame valida igast võrdsete vektorite hulgast ühe kindla vektori. Seda vektori valikut nimetame *vektori rakendamiseks punktist*. Selgitame, mida see tähendab. Olgu antud vektor $\overrightarrow{PQ}$. Edaspidi tähistame vektoreid väikeste ladina tähtedega, mille kohal on nool. Nullvektorit tähistame sümboliga $\vec{0}$. Tähistame vektorit $\overrightarrow{PQ}$ sümboliga $\vec{a}$, st $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$. Võtame nüüd mingi teise punkti P' ,

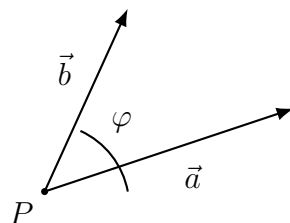
mis erineb punktist P . On ilmne, et punktis P' saab konstrueerida ainsa vektori $\overrightarrow{P'Q'}$, mis on võrdne vektoriga $\overrightarrow{PQ}$. Kuna vektorid $\overrightarrow{PQ}$ ja $\overrightarrow{P'Q'}$ on võrdsed, võime kirjutada $\vec{a} = \overrightarrow{P'Q'}$. Nüüd ütleme, et vektor $\vec{a}$ on rakendatud punktist P , kui me peame silmas vektorit $\overrightarrow{PQ}$, ja, et vektor $\overrightarrow{P'Q'}$ on vektor $\vec{a}$, rakendatud punktist P' .

Vektori rakendamine punktist on tihedalt seotud teise vektoritega tehtava operatsiooniga, mida nimetatakse *vektori paralleellükkeks* ühest ruumpunktist teise. Vektori $\overrightarrow{PQ}$ paralleellükkeks punktist P punkti P' nimetatakse sellist vektori üleviimist ühest punktist teise, mille käigus säilib nii vektori suund kui ka pikkus. Seega, kui teostame vektori $\overrightarrow{PQ}$ paralleellükke punktist P punkti P' , saame temaga võrdse vektori $\overrightarrow{P'Q'}$. Edaspidi kasutame mõnikord vektori rakendamise punkti asemel sellega ekvivalentset operatsiooni - paralleellüket ühest punktist teise. On ilmne, et vektorit saab paralleellükke abil viia ükskõik millisesse ruumpunkti. Peale seda, paralleellükkel Eukleidilises ruumis on tähtis omadus, nimelt, paralleellükke tulemus ei sõltu sellest, millist teed mööda vektorit lükatakse.

Lõpetuseks märgime, et vektorite võrdsuse mõiste võimaldab lihtsustada kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõisteid. Vektoreid nimetame kollineaarseteks, kui pärast paralleellüket ühte ja samasse punkti asetsevad kõik vektorid ühel ja samal sirgel. Analooiliselt nimetame vektoreid komplanaarseteks, kui pärast nende paralleellüket ühte ja samasse punkti asetsevad nad ühes ja samas tasandis. Sellise kollineaarsete ja komplanaarsete vektorite definitsiooni korral võime väita, et, kui kolmest vektorist vähemalt kaks on kollineaarsed, siis kõik kolm vektorit on komplanaarsed. Tõepoolest, viime kõik kolm vektorit paralleellükke abil ühte ja samasse punkti. Seejärel kaks kollineaarset vektorit asuvad ühel sirgel. Sirge, millele jääb kolmas vektor (eeldades, et ta ei ole kollineaarne esimese kahega), lõikab esimest sirget. Kaks teineteist lõikuvat sirget määravad üheselt tasandi, milles siis asetsevad kõik kolm vektorit. Kui kolmas vektor on samuti kollineaarne esimestega, asuvad kõik kolm ühel sirgel ning iga tasand, mis selle sirge kaudu läbib, sisaldab kõiki kolme vektorit. Seega on kõik kolm vektorit igal juhul komplanaarsed.

Tuletame meelde, et vektorile $\overrightarrow{PQ}$ vastandvektoriks on vektor $\overrightarrow{QP}$. Kasutades uusi tähistusi, võime vektorit $\overrightarrow{PQ}$ tähistada sümboliga $\vec{a}$. Sel juhul tema vastandvektorit, st vektorit $\overrightarrow{QP}$, tähistame sümboliga $-\vec{a}$. Seega kehtib $-\vec{a} = \overrightarrow{QP}$.

Lõpetame selle paragrahvi kahe vektori vahelise nurga mõistega. Olgu antud kaks nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}, \vec{b}$. Rakendame mõlemad vektorid suvaliselt valitud punktist P . Siis nimetatakse vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vaheliseks nurgaks väiksemat kahest nurgast, mille haaradeks on vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka tähistame $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

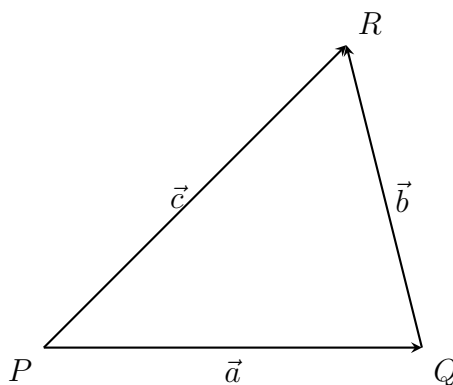


Joonis 2

2.2 Vektorite liitmine

Olgu $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorid Eukleidilises ruumis $\mathcal{E}$.

Definitsioon 2. Rakendame vektori $\vec{a}$ suvaliselt valitud punktist P ja tähistame saadud vektori kui $\overrightarrow{PQ}$. Seejärel rakendame vektori $\vec{b}$ punktist Q ja tähistame saadud vektori kui $\overrightarrow{QR}$. Siis nimetatakse vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ *summaks* vektorit $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$ ja kirjutatakse $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.



Joonis 3: Vektorite liitmine

Juhime tähelepanu sellele, et esimese liidetava vektori $\overrightarrow{PQ}$ lõpp-punkt langeb kokku teise liidetava vektori $\overrightarrow{QR}$ alguspunktiga. Seega moodustavad kolm punkti P, Q, R üldjuhul kolmnurga tipud, mistõttu eeltoodud vektorite liitmise definitsiooni nimetatakse sageli *kolmnurga reegliks*.

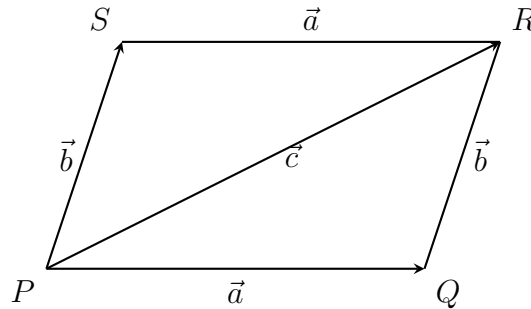
Toome välja vektorite liitmise mõned olulised geomeetrilised omadused.

- Kui vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$ ei ole kollineaarsed, siis vektor $\vec{a} + \vec{b}$ asub samas tasandis, kus asuvad vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Seega vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$ on alati komplanäärsed.
- Kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on kollineaarsed, siis ka nende summa $\vec{a} + \vec{b}$ on kollineaarne nii $\vec{a}$ kui ka $\vec{b}$.

Näitame, millised algebralised omadused on vektorite liitmisel.

1. Vektorite liitmine on *kommutatiivne*, see tähendab, et suvaliste vektorite korral kehtib

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

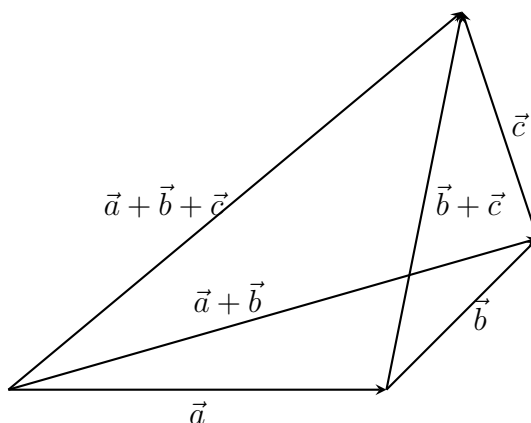


Joonis 4: Rööpkülik

Vektorite liitmise kommutatiivsuse tõestus on toodud joonisel 4. Sellel joonisel näitab kolmnurk tippudega P, Q, R , kuidas toimub liitmine $\vec{a} + \vec{b}$. Selleks et leida summa $\vec{b} + \vec{a}$, järgime kolmnurga reeglit. Kõigepealt rakendame vektori $\vec{b}$ punktist P , saades vektori $\vec{PS}$, mis on võrdne vektoriga $\vec{QR}$. Seejärel rakendame vektori $\vec{a}$ punktist S . Kuna rakendatav vektor peab olema võrdne vektoriga $\vec{PQ}$, siis vektori $\vec{a}$, rakendatuna punktist S , lõpp-punkt langeb kokku punktiga R . Seega on summa $\vec{b} + \vec{a}$ võrdne sama vektoriga $\vec{c} = \vec{PR}$, mis ka summa $\vec{a} + \vec{b}$. On ilmne, et nelinurk $PQRS$ on rööpkülik. Nimetame sellist rööpkülikut rööpkülikuks, mis on ehitatud vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, pidades seejuures silmas, et need vektorid on rakendatud ühest ja samast punktist. Joonis illustreerib veel üht geomeetrilist reeglit vektorite liitmiseks, nii nimetatud *rööpküliku reeglit*. Selle reegli kasutamisel peavad liidetavad vektorid olema rakendatud ühest ja samast punktist. Seejärel ehitatakse nendele vektoritele rööpkülik ning selle rööpküliku diagonaal PR , suunaga punktist P punkti R , annab liitmise tulemuse. Märkime, et kahe vektori liitmisel ei ole sisuliselt vahet, millist reeglit kasutada, kas kolmnurga reeglit või rööpküliku reeglit. Küll aga, kui liidetavate vektorite arv on suurem kui kaks, siis on kolmnurga reegel märksa lihtsam kasutada kui rööpküliku reegel.

2. Vektorite liitmine on *assotsiatiivne*, see tähendab, et suvaliste kolme vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ korral kehtib omadus

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

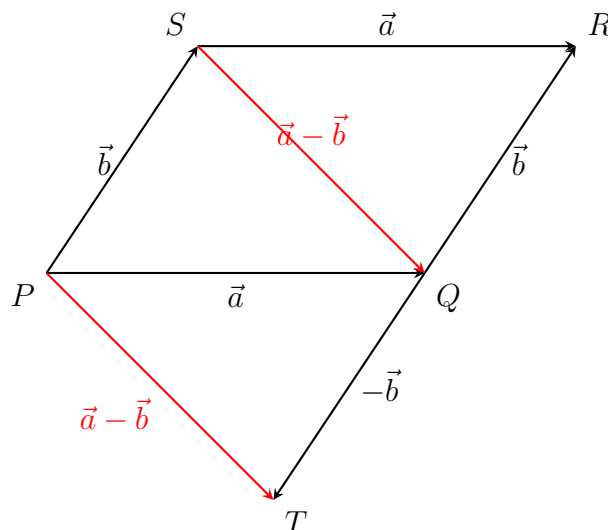


Joonis 5: Liitmise assotsiatiivsus

Assotsiatiivsuse tõestus on näidatud joonisel 5. Tõepoolest, kui rakendada järjestikku kolmnurga reeglit summa $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ leidmiseks, saame murdjoone, milleks on järjestikused vektorid $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Vektor, mis ühendab selle murdjoone alguspunkti ja lõpp-punkti, ongi vektorite summa $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$. Joonisel on näha, et ka teise järjestuse korral, st kui liidame esmalt $\vec{b} + \vec{c}$ ja seejärel $\vec{a}$, st arvutame $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, viib kolmnurga reegli rakendamine täpselt sama murdjooneni. Seega saame mõlemal juhul ühe ja sama vektori, mis tõestab, et vektorite liitmine on assotsiatiivne.

3. Suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. See vektorite liitmise omadus tuleneb otseselt nullvektori definitsioonist ning vektorite liitmise reeglist.
4. Suvalise vektori $\vec{a}$ korral kehtib $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. See omadus tuleneb kergesti vastandvektori definitsioonist ja vektorite liitmise reeglist.

Vektorite lahutamine ei ole iseseisev tehe ning tavaliselt defineeritakse see liitmise kaudu. Olgu $\vec{a}$, $\vec{b}$ kaks vektorit. Vektori $\vec{b}$ lahutamist vektorist $\vec{a}$ tähistame $\vec{a} - \vec{b}$ ja defineerime valemiga $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$, kus $-\vec{b}$ on vektori $\vec{b}$ vastandvektor.



Joonis 6: Graafiline esitus ühe vektori lahutamisest teisest.

Joonisel 6 on näidatud, kuidas toimub vektori $\vec{b}$ lahutamine vektorist $\vec{a}$, see on graafiline esitus vektorite lahutamisest. Seega näitab joonis, et vahe $\vec{a} - \vec{b}$ leidmiseks tuleb mõlemad vektorid rakendada ühisest punktist P . Seejärel on vektor, mis ühendab vektori $\vec{b}$ lõpp-punkti (olgu see S) vektori $\vec{a}$ lõpp-punktiga (olgu see Q), st vektor $\vec{SQ}$, vektorite vahe, st

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{SQ}.$$

2.3 Vektori korrutamine arvuga

Teiseks algebralise tehteks vektoritega on vektori korrutamine reaalarvuga. Seega on vektori korrutamine reaalarvuga tehe, mis seab vastavusse paarile $(\alpha, \vec{a})$, kus α on reaalarv ja $\vec{a}$ on vektor, üheselt määratud vektori, mida tähistame sümboliga $\alpha \vec{a}$. Enne kui anname vektori korrutamise arvuga definitsiooni, märkigem, et vektor on üheselt määratud, kui on teada tema suund ja pikkus. See tuleneb vahetult võrdsete vektorite definitsioonist. Seega, kui me räägime vektori ühesest määratusest, peame silmas, et vektor on määratud kuni võrdsete vektoriteni.

Definitsioon 3. Vektori $\vec{a}$ korrutiseks reaalarvuga α nimetatakse vektorit $\alpha \vec{a}$, mis on määratud järgmiste tingimustega:

1. Vektori $\alpha \vec{a}$ pikkus on võrdne vektori $\vec{a}$ pikkuse ja arvu α absoluutväärtuse korrutisega, st

$$|\alpha \vec{a}| = |\alpha| |\vec{a}|.$$

2. Kui $\alpha > 0$, siis vektor $\alpha \vec{a}$ on kollineaarne vektoriga $\vec{a}$ ja samasuunaline temaga, st

$$\alpha \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}.$$

Kui $\alpha < 0$, siis vektor $\alpha \vec{a}$ on samuti kollineaarne vektoriga $\vec{a}$, kuid vastasuunaline, st

$$\alpha \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

Märgime, et juhul kui $\alpha = 0$, siis vektori korrutis arvuga 0 on alati nullvektor $\vec{0}$, mis tuleneb definitsiooni esimesest punktist. Seega $0 \vec{a} = \vec{0}$.

Nii nagu vektorite liitmise puhul, toome ka vektori korrutamise reaalarvuga korral välja selle olulisimad omadused. Kuna need omadused on kergesti tõestatatavad, siis me ei too tõestusi, vaid jätame need lugejale endale läbimõtlemiseks.

1. Vektori korrutamine arvuga on assotsiatiivne, st $(\alpha\beta) \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$. Selle omaduse tõestus on vektorite võrdsuse tõestus. Seega peame näitama, et vektorid $(\alpha\beta) \vec{a}$ ja $\alpha(\beta \vec{a})$ on võrdse pikkusega ja on samasuunalised. Kehtib

$$|(\alpha\beta) \vec{a}| = |\alpha\beta| |\vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|,$$

ja

$$|\alpha(\beta \vec{a})| = |\alpha| |\beta \vec{a}| = |\alpha| |\beta| |\vec{a}|.$$

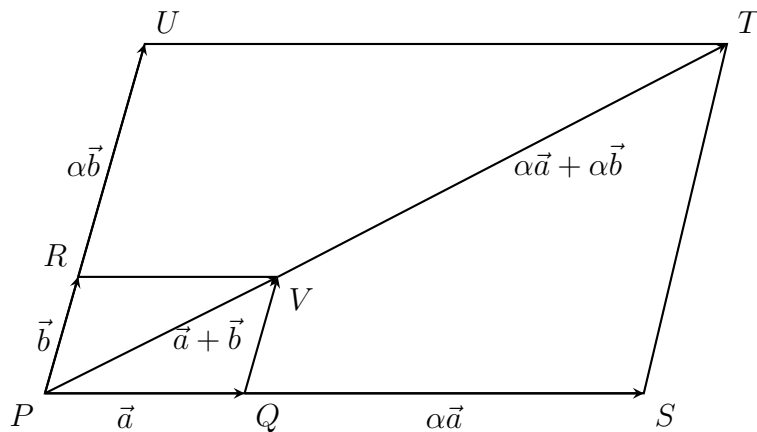
Seega, pikkused on võrdsed.

Kuna vektorite $(\alpha\beta) \vec{a}$ ja $\alpha(\beta \vec{a})$ suund sõltub arvude α ja β märkidest, peame läbi vaatama kolm juhtumit:

- a) Mõlemad arvud on positiivsed $\alpha > 0, \beta > 0$. Siis korrutis $\alpha\beta > 0$, mistõttu vektori $(\alpha\beta) \vec{a}$ suund ei muutu võrreldes $\vec{a}$ -ga. Samuti, kui korrutame esmalt $\vec{a}$ arvuga β , ja seejärel tulemuse arvuga α , jääb suund samaks, sest mõlemad arvud on positiivsed. Seega $(\alpha\beta) \vec{a} \uparrow\uparrow \alpha(\beta \vec{a})$, millest järeldub, et vektorid $(\alpha\beta) \vec{a}$ ja $\alpha(\beta \vec{a})$ on võrdsed.
- b) Üks arv on positiivne, teine negatiivne (nt $\alpha > 0, \beta < 0$). Siis $\alpha\beta < 0$, mis tähendab, et vektori $(\alpha\beta) \vec{a}$ suund muutub $\vec{a}$ -ga võrreldes vastupidiseks. Kui korrutame $\vec{a}$ arvuga β , saame vastassuunalise vektori; edasine korrutamine positiivse arvuga α suunda enam ei muuda. Seega mõlemad vektorid jäävad vastassuunaliseks vektorile $\vec{a}$, mistõttu $(\alpha\beta) \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$.
- c) Mõlemad arvud on negatiivsed $\alpha < 0, \beta < 0$. Siis $\alpha\beta > 0$, nii et vektor $(\alpha\beta) \vec{a}$ saab samasuunaliseks $\vec{a}$ -ga. Kui esmalt korrutada $\vec{a}$ negatiivse arvuga β , saame vastassuunalise vektori; järgnev korrutamine samuti negatiivse arvuga α pöörab suuna tagasi, ja tulemuseks on algse vektori samasuunaline vektor. Järelikult $(\alpha\beta) \vec{a} = \alpha(\beta \vec{a})$.

2. Vektori korrutamine arvuga on distributiivne vektorite liitmise suhtes, st suvaliste reaalarvu α ja vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$ korral kehtib

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$



Joonis 7: Distributiivsus

Tõestame seda omadust juhul, kui $\alpha > 0$, sest juhul $\alpha < 0$ toimub tõestus analoogiliselt. Kasutame tõestamisel joonist 7 ja sellel näidatud tähistusi. Kõigepealt näeme jooniselt, et vektorid $\alpha(\vec{a} + \vec{b})$ ja $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ on sama-suunalised. Seega jääb üle näidata, et nende pikkused on võrdsed. Vektori korrutise arvuga definitsioonist järeldub, et

$$|\alpha(\vec{a} + \vec{b})| = \alpha|\vec{a} + \vec{b}|,$$

kus absoluutväärtuse märgi α ümbert jätsime ära, kuna eeldame, et $\alpha > 0$. Nüüd leiame vektori $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ pikkuse. Selleks märkame, et kolmnurgad PQV ja PST on sarnased (nad on samakujulised, sest vektoreid on lihtsalt skaleeritud faktoriga α). Sellest järeldub

$$\frac{|\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}|}{|\vec{a} + \vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Aga

$$\frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{\alpha|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha.$$

Seega

$$|\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}| = \alpha|\vec{a} + \vec{b}|,$$

mis tõestab, et vektoritel $\alpha(\vec{a} + \vec{b})$ ja $\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ on võrdsed pikkused. Järelikult nad on võrdsed vektorid.

3. Vektori korrutamine arvuga on distributiivne arvude liitmise suhtes, st, et suvaliste reaalarvude α, β ja vektori $\vec{a}$ korral kehtib

$$(\alpha + \beta) \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}.$$

Selle omaduse tõestuse jätame lugejale harjutuseks.

4. Vektori korrutamine arvuga üks ei muuda vektorit. See tähendab, et iga vektori $\vec{a}$ korral kehtib

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

Selle omaduse tõestuse jätame lugejale harjutuseks.

Tuletame meelde, et vektori $\vec{a}$ vastandvektorit tähistatakse sümboliga $-\vec{a}$. Oluline on mõista, et see on ainult sümboliline tähistus, kus miinusmärk tähistab vektori suuna pööramist vastupidiseks. Sellest järeldub, et kui pöörame suuna kaks korda, saame tagasi algse vektori $-(-\vec{a}) = \vec{a}$. Vektori korrutamine arvuga võimaldab meil nüüd väljendada vastandvektorit ka algebraliselt. Kehtib $-\vec{a} = (-1) \vec{a}$, kus paremal pool on mõeldud vektori $\vec{a}$ korrutamist arvuga -1 . Varem märkisime, et vektor ja tema vastandvektor omavad võrdset pikkust. Vektori korrutamine arvuga -1 ei muuda selle pikkust, kuid pöörab suuna vastupidiseks. Sellest järeldub, $-\vec{a} = (-1) \vec{a}$, nagu eespool väideti.

3 Baas, reeper, koordinaadid

Käesolev peatükk on pühendatud koordinaadisüsteemi mõistele ruumis, mis on analüütilise geomeetria põhistruktuur. Koordinaadisüsteemi sisseviimine ruumi võimaldab igale ruumipunktile vastavusse seada reaalarvude jada, mis määrab punkti üheselt. See loob võimaluse uurida ruumi geomeetrilisi objekte – näiteks sirgeid, tasandeid, jooni ja pindu – algebraliste meetodite abil. Koordinaadisüsteemid võib jagada kaheks suureks klassiks:

- Sirgjoonelised koordinaadisüsteemid,
- Kõverjoonelised koordinaadisüsteemid.

Alustame sirgjooneliste koordinaadisüsteemide kirjeldamisest. Nende süsteemide konstrueerimine on kõige mugavam vektorite abil. Selleks defineerime ruumi baasi ja reeperi mõisted. Kõverjoonelistest koordinaadisüsteemidest käsitleme polaarkoordinaate tasandil ja sfäärilisi ja silindrilisi koordinaate ruumis.

3.1 Baas

Eelmises peatükis defineerisime kaks vektoritega tehtavat algebralist tehet, vektorite liitmise ja nende korrutamise reaalarvudega. Neid tehteid järjestikku rakendades saame moodustada avaldisi kujul

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

kus $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ on reaalarvud ja $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on vektorid. Selliseid avaldisi nimetatakse *vektorite lineaarkombinatsioonideks*. Arve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ nimetatakse lineaarkombinatsiooni kordajateks. Kui vektorit $\vec{a}$ on esitatud kujul

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k,$$

siis öeldakse, et vektor $\vec{a}$ on arendatud vektorite $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ järgi ehk vektor $\vec{a}$ on esitatud nende vektorite lineaarkombinatsioonina.

Kui vektorid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on kollineaarsed, siis ka nende lineaarkombinatsioon on neile kollineaarne. Samamoodi, kui vektorid on komplanaarsed, siis ka nende mistahes lineaarkombinatsioon on komplanaarne samade vektoritega. Selles mõttes võib öelda, et kollineaarsete ja komplanaarsete vektorite hulga on kinnised lineaarkombinatsiooni moodustamise suhtes. Eelmises peatükis tõestatud vektorite liitmise ja arvuga korrutamise omadused võimaldavad lineaarkombinatsioone teisendada nagu tavalisi algebralisi avaldisi, st avada sulud, viia liikmeid võrrandi ühelt poolelt teisele vastupidise märgiga ja teha muid samalaadseid teisendusi.

Definitsioon 4. *Baasiks sirgel* nimetatakse selle sirge suvalist nullvektorist erinevat vektorit. *Baasiks tasandil* nimetatakse kahte mittekollineaarset vektorit, mis asuvad selles tasandis ja on võetud kindlas järjekorras. *Baasiks ruumis* nimetatakse kolme mittekomplooraarset vektorit, mis on samuti võetud kindlas järjekorras.

Vektoreid, mis moodustavad baasi, nimetame baasivektoriteks ning tähistame neid sümboliga $\vec{e}$, lisades alaindeksi, mis näitab baasivektori järjekorranumbrit. Sirge puhul koosneb baas ühest nullvektorist erinevast vektorist, mida tähistame lihtsalt $\vec{e}$. Tasandil koosneb baas kahest mittekollineaarsest vektorist, mis on antud kindlas järjekorras. Seetõttu tähistame tasandi baasivektoreid kujul $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, kusjuures nad peavad rahuldama tingimust $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$. Ruumis koosneb baas kolmest mittekomplooraarset vektorist, mida tähistame $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Baas ise märgitakse, pannes baasivektorid sulgudesse. Näiteks ruumi baas tähistatakse kujul $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Teoreem 1. *1. Olgu $\{\vec{e}\}$ baas sirgel ja $\vec{a}$ sama sirgega paralleelne vektor. Siis saab vektorit $\vec{a}$ esitada kujul $\vec{a} = \alpha \vec{e}$, kus α on üheselt määratud reaalarv.*

2. Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ baas tasandil. Siis võib iga vektor $\vec{a}$, mis on paralleelne selle tasandiga, olla esitatud kujul $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$, kus α_1 ja α_2 on üheselt määratud reaalarvud.

3. Olgu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ baas ruumis. Siis võib selle ruumi iga vektor $\vec{a}$ olla esitatud kujul $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, kus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ on üheselt määratud reaalarvud.

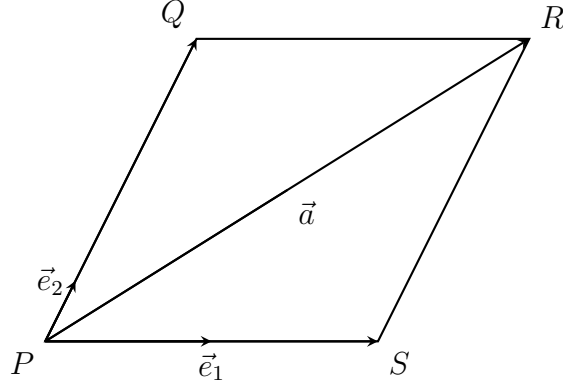
Tõestus. Vastavalt sirge baasivektori definitsioonile kehtib $\vec{e} \neq \vec{0}$. Sellest järeldub, et $|\vec{e}| \neq 0$. Peale selle on vektor $\vec{a}$ kollineaarne vektoriga $\vec{e}$, see tähendab $\vec{a} \parallel \vec{e}$. Määrame arvu α järgmise valemiga:

$$\alpha = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}, \quad \text{kui } \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}, \quad \text{ja} \quad \alpha = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}, \quad \text{kui } \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}.$$

Tõestame vektorivõrduse $\vec{a} = \alpha \vec{e}$. Selleks näitame, et need vektorid on võrdsed pikkuselt ja samasuunalised. Arvutame vektori $\alpha \vec{e}$ pikkuse

$$|\alpha \vec{e}| = |\alpha| \cdot |\vec{e}| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|} \cdot |\vec{e}| = |\vec{a}|.$$

Vektor $\alpha \vec{e}$ on kollineaarne vektoriga $\vec{e}$, seega on ta kollineaarne ka vektoriga $\vec{a}$. Arvu α definitsioonist järeldub, et vektorid $\vec{a}$ ja $\alpha \vec{e}$ on samasuunalised. Seega on nad võrdsed vektorid.



Joonis 8: Tasandi baas

Tõestame nüüd teoreemi teise väite. Kõigepealt märkame, et ükski baasivektoritest $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ei tohi olla nullvektor. Tõepoolest, kui vähemalt üks neist vektoritest oleks nullvektor, siis oleksid nad kollineaarsed, mis on vastuolus baasi definitsiooniga tasandil, kus baasivektorid peavad olema mittekollineaarsed. Kuna vektor $\vec{a}$ on tasandiga paralleelne, siis vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}$ on komplanaarsed. Rakendame kõik kolm vektorit ühest suvaliselt fikseeritud tasandi punktist P . Seejärel asuvad kõik kolm vektorit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a}$ ühes ja samas tasandis ning neil on ühine alguspunkt P . Joonestame läbi vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti R sirge, mis on paralleelne vektorile $\vec{e}_2$, ja tähistame selle lõikepunkti sirgega, mis läbib punkti P vektori $\vec{e}_1$ suunas, tähega S . Märkigem, et tehtud geomeetrilist konstruktsiooni nimetatakse vektori $\vec{a}$ *projekteerimiseks vektori $\vec{e}_1$ sihile paralleelselt vektoriga $\vec{e}_2$* . Vektorit $\vec{PS}$ nimetatakse vektori $\vec{a} = \vec{PR}$ projektsioonivektoriks vektori $\vec{e}_1$ sihile ja tähistatakse sümboliga $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$. Vektori $\vec{a}$ projektsiooni defineeritakse valemiga

$$\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a} = \begin{cases} |\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}|, & \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{e}_1, \\ -|\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}|, & \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{e}_1. \end{cases} \quad (1)$$

Samamoodi joonestame läbi punkti R teise sirge, mis on paralleelne vektorile $\vec{e}_1$, ning tähistame selle lõikepunkti sirgega, mis läbib punkti P vektori $\vec{e}_2$ suunas, tähega Q . Jooniselt 8 on näha, et

$$\vec{a} = \vec{PS} + \vec{PQ}. \quad (2)$$

Lisaks on vektor $\vec{PS}$ kollineaarne vektoriga $\vec{e}_1$ ja vektor $\vec{PQ}$ kollineaarne vektoriga $\vec{e}_2$. Eelnevalt tõestatud teoreemi esimese väite põhjal saame kirjutada:

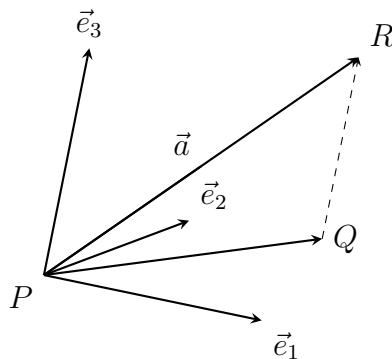
$$\vec{PS} = \alpha_1 \vec{e}_1 \quad \text{ja} \quad \vec{PQ} = \alpha_2 \vec{e}_2,$$

kus

$$\alpha_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}}{|\vec{e}_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}}{|\vec{e}_2|}. \quad (3)$$

Asendades need avaldised võrrandisse (2), saame

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2.$$



Joonis 9: Ruumi baas

Teoreemi kolmanda väite tõestus on toodud joonisel 9. Rakendame baasivektoreid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ning vektori $\vec{a}$ ühest suvaliselt valitud punktist P ruumis. Projekteerime vektori $\vec{a}$ lõpp-punkti R tasandile, mis on määratud baasivektoritega $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$, paralleelselt vektoriga $\vec{e}_3$. Tähistame saadud projektsioonipunkti tähega Q . Kehtib vektorvõrrand

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}. \quad (4)$$

Vaatleme vektorit $\overrightarrow{PQ}$. On ilmne, et vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \overrightarrow{PQ}$ on komplanäärsed. Kuna $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ moodustavad tasandi baasi, siis teoreemi eelneva väite põhjal saab kirjutada:

$$\overrightarrow{PQ} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2.$$

Vaatleme nüüd vektorit $\overrightarrow{QR}$ (joonisel näidatud punktirjoonega). See vektor on kollineaarne vektoriga $\vec{e}_3$, mistõttu $\overrightarrow{QR} = \alpha_3 \vec{e}_3$. Asendades need avaldised võrrandisse (4), saame

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3. \quad (5)$$

Antud juhul on meil samuti tegemist vektori $\vec{a}$ projektsiooniga, kuid ruumis projekteerime selle vektori $\vec{e}_1$ sihile tasandi abil, mis on paralleelne tasandiga, mida moodustavad vektorid $\vec{e}_2, \vec{e}_3$. Samamoodi nagu projekteerimisel tasandil, tähistame projektsioonivektorit sümboliga $\text{Pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$ ja projektsiooni $\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}$. Siis

$$\alpha_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1} \vec{a}}{|\vec{e}_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_2} \vec{a}}{|\vec{e}_2|}, \quad \alpha_3 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_3} \vec{a}}{|\vec{e}_3|}. \quad (6)$$

Näitame nüüd, et baasivektorite lineaarsete kombinatsioonide kordajad on üheselt määratud. Tõestame selle ainult ruumi baasi puhul. Sirge ja tasandi juhtumi

jätame lugejale harjutuseks. Oletame, et vektoril $\vec{a}$ on olemas teinegi esitus baasivektorite lineaarse kombinatsioonina

$$\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}_1 + \alpha'_2 \vec{e}_2 + \alpha'_3 \vec{e}_3.$$

Lahutame sellest võrrandist varem saadud võrrandi (5)

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 - \alpha'_3) \vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Oletame, et vähemalt üks kordajatest vasakul ei võrdu nulliga, näiteks $\alpha_1 - \alpha'_1 \neq 0$. Siis saame avaldada baasivektori $\vec{e}_1$ baasivektorite $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$ kaudu järgmiselt:

$$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2 - \alpha'_2}{\alpha_1 - \alpha'_1} \vec{e}_2 - \frac{\alpha_3 - \alpha'_3}{\alpha_1 - \alpha'_1} \vec{e}_3.$$

Kuid see on vastuolus teoreemi eeldustega, mille kohaselt vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ moodustavad ruumis baasi. Tõepoolest, sellisel juhul oleks vektor $\vec{e}_1$ lineaarne kombinatsioon vektoritest $\vec{e}_2$ ja $\vec{e}_3$, mis tähendab, et nad on kõik kolm komplanaarsed. Kuid ruumi baasivektorid ei tohi olla komplanaarsed. Tuletame meelde, et varem mainisime, et komplanaarsete vektorite hulk on kinnine lineaarkombinatsioonide moodustamise suhtes. $\square$

Tõestatud teoreem on väga tähtis. See näitab, et suvalist vektorit saab avaldada baasivektorite kaudu ning selle avaldise kordajad on üheselt määratud. Baasivektorite lineaarkombinatsiooni kordajaid nimetatakse vektori koordinaatideks. Seega, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ on tasandi baas, siis

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

kus x_1, x_2 on vektori koordinaadid. Seda kirjutame kujul $\vec{a} = (x_1, x_2)$. Analoogiliselt, kui $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ruumi baas, siis ruumi suvalise vektori $\vec{r}$ korral kehtib

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

ja kordajaid x_1, x_2, x_3 nimetatakse ruumi vektori koordinaatideks. Sellisel juhul kirjutame $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3)$. Vektorite liitmise ja korrutamise reaalarvudega omadustest järelduvad koordinaatide arvutamise valemid nii vektorite summa kui ka korrutamise arvudega jaoks

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{b} = (y_1, y_2, y_3), \quad \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3), \\ \alpha \vec{a} &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3), \end{aligned} \tag{7}$$

kus α on reaalarv.

Geomeetrilisest seisukohast on vektori koordinaadid tema projektsioonid baasivektorite sihtidele, st koordinaattelgedele. Ülaltoodud valemid tulenevad projektsioonivektori ja projektsiooni lineaarsuse omadusest

$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{Pr}_{\vec{e}} \vec{a} + \text{Pr}_{\vec{e}} \vec{b}, \quad \text{Pr}_{\vec{e}}(\alpha \vec{a}) = \alpha \text{Pr}_{\vec{e}} \vec{a}, \\ \text{pr}_{\vec{e}}(\vec{a} + \vec{b}) &= \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a} + \text{pr}_{\vec{e}} \vec{b}, \quad \text{pr}_{\vec{e}}(\alpha \vec{a}) = \alpha \text{pr}_{\vec{e}} \vec{a}. \end{aligned}$$

Definitsioon 5. Vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ nimetatakse lineaarselt sõltuvateks, kui vektorvõrrand

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k = \vec{0}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \quad (8)$$

omab mittetriviaalseid lahendeid. Teisisõnu, vektoreid nimetatakse lineaarselt sõltuvateks, kui leiduvad arvud $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, mis ei ole kõik korraga võrdsed nulliga, nii et tingimus (8) on täidetud. Kui tingimusest (8) järeldub, et $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, nimetatakse vektoreid $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltumatuteks.

Toome ilma tõestuseta välja lineaarselt sõltuvate vektorite põhiomadused.

1. Kui vektorsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sisaldab nullvektorit, siis on see vektorsüsteem lineaarselt sõltuv.
2. Kui vektorsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ sisaldab lineaarselt sõltuvat alamsüsteemi, siis on ka kogu süsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ lineaarselt sõltuv.
3. Vektorsüsteem $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui mõni selle süsteemi vektoritest on esitatav ülejäänud vektorite lineaarkombinatsioonina.

Lineaarse sõltuvuse mõiste on kollineaarsuse ja komplanaarsuse mõiste üldistus. Kehtib järgmine väide:

Lause 1. 1. Süsteem, mis koosneb kahest vektorist, on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui vektorid on kollineaarsed.

2. Süsteem, mis koosneb kolmest vektorist, on lineaarselt sõltuv parajasti siis, kui vektorid on komplanaarsed.

3. Neli vektorit kolmemõõtmelises ruumis on lineaarselt sõltuvad.

3.2 Reeper, koordinaadisüsteem

Selleks et konstrueerida sirgjooneline koordinaadisüsteem tasandil ja ruumis, võtame kasutusele mõiste *reeper*. Reeper tasandil koosneb punktist ja tasandi baasist, see tähendab kahest mittekollineaarsest vektorist sellel tasandil. Seega on reeper tasandil kujul $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Reeper määrab tasandi sirgjoonelise koordinaadisüsteemi järgmiselt. Tõmmatakse läbi punktist O kaks sirget nii, et esimese sirge sihivektori on baasivektor $\vec{e}_1$ ja teise sirge sihivektori baasivektor $\vec{e}_2$. Esimene sirge on abstsissitelg ja teine on ordinaattelg. Mõlemal teljel on positiivne suund, mille määravad baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$.

Olgu nüüd P mingi tasandi punkt. Vektorit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ nimetatakse punkti P kohavektoriks. Esitame kohavektori $\vec{r}$ baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ järgi

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2.$$

Arve x_1, x_2 nimetatakse punkti P koordinaatideks. Koordinaadid kirjutame sulgudesse vahetult punkti tähise järel $P(x_1, x_2)$.

Me tõime sisse punkti koordinaadid, kasutades Teoreemi 1, milles väidetakse, et suvaline tasandi vektor saab avaldada selle tasandi baasivektorite kaudu ning et kordajad on üheselt määratud. See on koordinaatide algebraline käsitlus.

Vaatame, kuidas koordinaadid määratakse geomeetriliselt. Teoreemi 1 tõestusest näeme, et geomeetriliselt määratakse punkti koordinaadid tema kohavektori projektsioonide abil baasivektorite sihtidele. Tavaliselt võetakse baasivektoriteks ühikvektorid, see tähendab $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. Sel juhul on punkti esimene koordinaat tema kohavektori projektsioon baasivektori $\vec{e}_1$ sihile. Samamoodi on teine koordinaat punkti kohavektori projektsioon teise baasivektori $\vec{e}_2$ sihile.

Sirgjooneline koordinaadisüsteem ruumis konstrueeritakse samal viisil. Reepeer ruumis koosneb punktist ja kolmest mittekomplanaarsest vektorist (ruumi baas), st $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, kus O on reeperi alguspunkt ja vektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ moodustavad ruumi baasi. Sirged, mis läbivad punkti O baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ suundades, on koordinaatteljed. Sirget sihivektoriga $\vec{e}_1$ nimetatakse abstsisssteljeks, sihivektoriga $\vec{e}_2$ ordinaatteljeks ja sihivektoriga $\vec{e}_3$ aplikaatteljeks.

Kui P on mingi ruumipunkt, siis vektorit $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ nimetatakse punkti P kohavektoriks. Esitame selle vektori baasvektorite kaudu järgmiselt

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

ning saame kolm arvu x_1, x_2, x_3 , mida nimetatakse punkti P koordinaatideks. Seda kirjutame kujul $P(x_1, x_2, x_3)$. Nagu ka tasandi juhul, saadakse punkti koordinaadid tema kohavektori projektsioonidena baasivektorite sihtidele.

Olgu ruumis antud reeper, st koordinaadisüsteem. Olgu $P(x_1, x_2, x_3)$ ruumipunkt ja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vektor. Rakendame vektori $\vec{a}$ punktist P . Tähistame vektori lõpp-punkti tähega Q . Kehtib vektorvõrdsus:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}.$$

Selles võrdsuses on $\overrightarrow{OQ}$ punkti Q kohavektor ja $\overrightarrow{OP}$ punkti P kohavektor. Vektorvõrdsusest leiame

$$\overrightarrow{OQ} = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3).$$

Seega $Q(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$. Järelikult, kui rakendame vektori $\vec{a}$ punktist P , siis lõpp-punkti Q koordinaatide leidmiseks tuleb punkti P koordinaatidele liita

vektori $\vec{a}$ koordinaadid. Samast vektorvõrdsusest järeldub, et kui $P(x_1, x_2, x_3)$ ja $Q(y_1, y_2, y_3)$ on kaks ruumipunkti, siis nendega määratud vektori koordinaadid arvutame järgmiselt

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3).$$

3.3 Polaarkoordinaadid

Et määrata tasandil polaarkoordinaatide süsteem, valime punkti O , mis on koordinaatide alguspunkt. Seda punkti nimetatakse polaarkoordinaatide süsteemi pooluseks. Seejärel valime poolusest lähtuva kiire, mida nimetatakse polaarteljeks. Nüüd on polaarkoordinaatide süsteem määratud. Näitame, kuidas määratakse punkt P polaarkoordinaadid selles süsteemis. Kõigepealt ühendame punkti P poolusega O . Lõigu pikkust $|OP|$ nimetatakse punkti P polaarraadiuseks ja see on punkti esimene koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Tähistame $r = |OP|$. Nurka, mis saadakse pöörates polaartelge vastupäeva kuni see ühtib lõiguga OP , nimetatakse punkti P polaarnurgaks ja tähistatakse φ . See on punkti P teine koordinaat polaarkoordinaatide süsteemis. Polaarkoordinaate kirjutatakse punkti taha sulgudesse kujul $P(r, \varphi)$.

Kui määrata tasandil ristkoordinaatide süsteem x, y nii, et selle alguspunkt asub polaarkoordinaatide pooluses, abstsissitelg on polaartelg ja ordinaattelg on polaarteljega risti ning läbib poolust, siis saab ristkoordinaadid x, y avaldada polaarkoordinaatide r, φ kaudu järgmiste valemitega:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \tag{9}$$

4 Skalaarkorrutis

Olgu antud kaks nullvektorist erinevat vektorit $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}$. Rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ ühest ja samast punktist O ja olgu $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vaheline nurk on nurk, mis tekib vektori $\overrightarrow{OA}$ pööramisel ümber punkti O **lühemat teed pidi** vektorile $\overrightarrow{OB}$. Teisisõnu, kahest nurgast, mille moodustavad kiired OA ja OB , loeme vektorite $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$ vaheliseks nurgaks selle, mis ei ületa nurka π . Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ vahelist nurka tähistame $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Seega $0 \leq \varphi \leq \pi$. Kui $\varphi = \frac{\pi}{2}$, siis öeldakse, et vektorid $\vec{a}, \vec{b}$ on teineteisega *risti* ehk *ortogonaalsed* ja seda tähistatakse $\vec{a} \perp \vec{b}$. Nullvektor on risti mistahes vektoriga.

Definitsioon 6. Vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu $|\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, kus $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ on vektorite pikkused. Skalaarkorrutist tähistatakse $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$. Seega

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (10)$$

Kasutades vektorite vahelise nurga tähistust $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ skalaarkorrutist võime kirjutada kujul

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

Loetleme skalaarkorrutise olulisemad omadused:

Teoreem 2 (Skalaarkorrutise omadused). *Suvaliste vektorite $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ja suvaliste arvude $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral kehtivad järgmised omadused:*

1. *Kommutatiivsus.* $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$,
2. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$, kusjuures $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ parajasti siis, kui $\vec{a} = \vec{0}$,
3. $\vec{a} \perp \vec{b}$ parajasti siis, kui $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$,
4. *Lineaarsus.* $\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$,
5. Kui $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ on ristreeper, siis kehtivad võrdused

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1, \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle &= \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Tõestus. Esimene ja teine omadus tulenevad otseselt skalaarkorrutise definitsioonist. Tõestame kolmanda omaduse. Tarvilikkuse tõestamiseks eeldame, et vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on risti. Tahame näidata, et sel juhul nende skalaarkorrutis on null. Mee-nutame, et nullvektor on risti suvalise vektoriga. Kui üks nendest vektoritest on

nullvektor, siis skalaarkorrutis võrdub nulliga definitsiooni kohaselt (sest nullvektori pikkus on null). Oletame, et $\vec{a} \neq \vec{0}$ ja $\vec{b} \neq \vec{0}$. Siis $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ (ristuvad vektorid) ja skalaarkorrutise definitsiooni kohaselt saame, et

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

sest $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Piisavuse tõestame järgmiselt. Eeldame, et vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis on null. Näitame, et need vektorid on risti. Kirjutame välja skalaarkorrutise definitsiooni

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0.$$

Kolme reaalarvu korrutis on null parajasti siis, kui vähemalt üks neist on null. Kui vektori $\vec{a}$ või vektori $\vec{b}$ pikkus on null, siis tegemist on nullvektoriga, mis on risti suvalise vektoriga. Kui $|\vec{a}| \neq 0$ ja $|\vec{b}| \neq 0$, siis $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, millest järeldub, et $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ ehk vektorid on risti.

Tõestame neljanda omaduse. Kui vektor $\vec{c}$ on nullvektor, siis teoreemi 4 väide on ilmne. Seetõttu eeldame, et $\vec{c} \neq \vec{0}$. Konstrueerime kolmemõõtmelisse ruumi baasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, võttes esimeseks baasivektoriks $\vec{c}$, st $\vec{e}_1 = \vec{c}$. Vektorid $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ valime nii, et nad oleksid ortogonaalsed vektorile $\vec{e}_1$ ja omavahel ortogonaalsed. Arvutame vektori $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ esimese koordinaadi selles baasis. Selleks kasutame eelmise paragrahvi valemit (6), st

$$x_1 = \frac{\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b})}{|\vec{e}_1|}. \quad (12)$$

Märkame, et vektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ortogonaalsuse tõttu on projektsioon ortogonaalne. Seega

$$\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = |\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}| \cos \varphi,$$

kus φ on nurk vektorite $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ ja $\vec{e}_1$ vahel. Niisiis saame projektsiooni avaldada skalaarkorrutise kaudu järgmiselt

$$\text{pr}_{\vec{e}_1}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Vektori $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ esimene koordinaat on nüüd esitatav kujul

$$x_1 = \frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Sarnaselt arvutame vektorite $\vec{a}, \vec{b}$ esimese koordinaadi. Saame

$$\frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}, \quad \frac{\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Eelmise paragrahvi valemi (7) kohaselt tuleb vektorite liitmisel ja arvudega korrutamisel sooritada samad tehteid nende koordinaatidega. Sellest järeldub, et

$$\frac{\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2} = \alpha \frac{\langle \vec{a}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2} + \beta \frac{\langle \vec{b}, \vec{e}_1 \rangle}{|\vec{e}_1|^2}.$$

Korrutades mõlemad pooled arvuga $|\vec{e}_1|^2$ ja asendades $\vec{e}_1$ vektoriga $\vec{c}$, saame

$$\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle.$$

□

Teisest omadusest järeldub, et vektori pikkuse võime arvutada kasutades valemit $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$. Viimase omaduse võrdused võime kirjutada kompaktsemal kujul, kui defineerime kahe alaindeksiga suurust (nn Kroneckeri sümbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kui } i = j, \\ 0 & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (13)$$

Sellega saame kirjutada viimase omaduse võrdused kujul $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$. Tuletame meelde, et (ortonormeeritud) ristbaasi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ korral kehtib valem (Loeng 2)

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2 + |\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_3.$$

Paneme tähele, et $|\vec{r}| \cos \angle(\vec{r}, \vec{e}_i) = \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Seega

$$\vec{r} = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle \vec{e}_2 + \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 \langle \vec{r}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i.$$

Järelikult ortonormeeritud baasi korral vektori $\vec{r} = (x, y, z)$ koordinaadid avalduvad järgmiselt:

$$x = \langle \vec{r}, \vec{e}_1 \rangle, \quad y = \langle \vec{r}, \vec{e}_2 \rangle, \quad z = \langle \vec{r}, \vec{e}_3 \rangle. \quad (14)$$

Olgu ruumis antud ristreeper $\mathfrak{r} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ja kaks vektorid $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, kus (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2$ on vektorite **ristkoordinaadid** antud reeperi suhtes.

Teoreem 3. *Vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ skalaarkorrutis on võrdne koordinaatide korrutiste summaga, kus summa esimene liidetav on esimeste koordinaatide korrutis, teine liidetav on teiste koordinaatide korrutis ja kolmas liidetav on kolmandate koordinaatide korrutis, st*

$$\langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (15)$$

Tõestus. Tänu koordinaatide definitsioonile kehtib võrdus $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$. Kasutades skalaarkorrutise lineaarsust ja kommutatiivsust leiame

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 \rangle &= \langle x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3, \vec{r}_2 \rangle \\ &= x_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle + y_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle + z_1 \langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Eespool tõestatud valemist (14) järeldub, et $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_1 \rangle = x_2$, $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_2 \rangle = y_2$ ja $\langle \vec{r}_2, \vec{e}_3 \rangle = z_2$. Seega on võrdus (15) tõestatud. $\square$

Tõestatud teoreemist järeldub, et ristkoordinaatides vektori $\vec{r} = (x, y, z)$ pikkus on võrdne

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (17)$$

Kui $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis kahe vektori vahelise nurga koosinuse arvutame kasutades valemit

$$\cos \angle(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (18)$$

Kui $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ on ruumi punktid, siis kauguse punktide vahel saame arvutada järgmiselt

$$|PQ| = |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (19)$$

NB! Valemid (17), (18) ja (19) kehtivad ainult ristkoordinaatides!

5 Vektorkorrutis

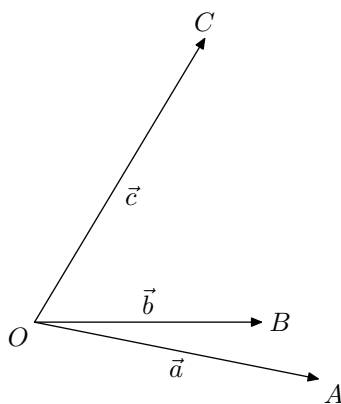
5.1 Vektorkorrutise definitsioon ja omadused

Vektorkorrutamine on algebraline operatsioon, mis seab kahele ruumivektorile vastavusse kolmanda vektori. Enne kui saame anda vektorkorrutise definitsiooni vajame mõningaid abimõisteid.

Definitsioon 7. Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{E}^3$ ruumivektorid. Fikseerime ruumis punkti O ning valime punktid A, B, C selliselt, et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ja $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (ehk rakendame vektorid $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ punktist O). Me nimetame kolmikut $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *komplanaarseks*, kui lõigud OA, OB ja OC asuvad ühel ja samal tasandil. Vastasel korral ütleme, et kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on *mittekomplanaarne*.

Anname nüüd ruumi orientatsiooni mõiste definitsiooni.

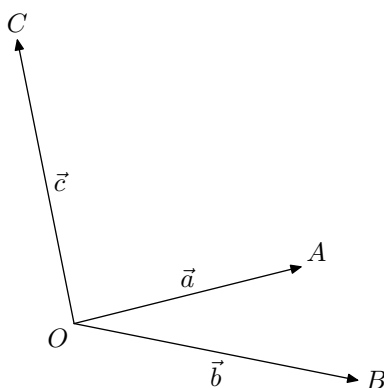
Definitsioon 8. Olgu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbf{E}^3$ mittekomplanaarsed ruumivektorid. Kolmikut $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ nimetatakse *parema käe kolmikuks* (*vasaku käe kolmikuks*), kui punktist C vaadelduna toimub vektori $\overrightarrow{OA}$ pööre lühimat teed pidi vektori $\overrightarrow{OB}$ kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas ehk vastupäeva (kellaosuti liikumise suunas ehk päripäeva).



Joonis 10: Parema käe kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Paneme tähele, et suunates parema käe nimetis- ja keskmise sõrme vastavalt vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ suunas näitab parema käe põial meie vektori $\vec{c}$ suuna juhul kui kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ moodustab parema käe kolmiku.

Analoogiliselt, suunates vasaku käe nimetis- ja keskmise sõrme $\vec{a}$ ning $\vec{b}$ suunas, osutab vasaku käe põial $\vec{c}$ suunas kui $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on vasaku käe kolmik.

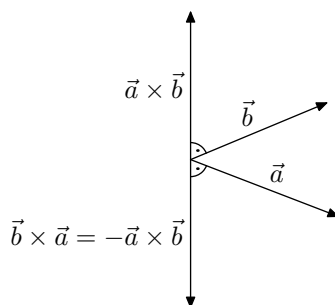


Joonis 11: Vasaku käe kolmik $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

Definitsioon 9 (Vektorkorrutis). Ruumivektorite $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ vektorkorrutiseks nimetatakse vektorit $\vec{a} \times \vec{b} \in \mathbf{E}^3$, mis on määratud kolme tingimusega:

1. (pikkus) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b})$,
2. (siht) $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ ja $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$,
3. (suund) kui vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on mittekollineaarsed, siis $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ on parema käe kolmik.

Paneme tähele, et vektori $\vec{a} \times \vec{b}$ suuna määramiseks saame kasutada parema käe reeglit.



Joonis 12: Vektorkorrutis

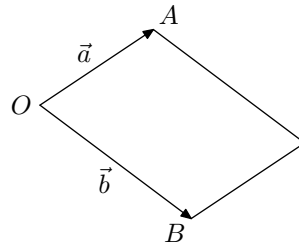
Definitsiooni esimesest tingimusest näeme, et kui $\vec{a} = \vec{0}$, siis $|\vec{a} \times \vec{b}| = 0$. Selge, et ainus vektor, mille pikkus on 0, on nullvektor ehk $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Niisiis nullvektori vektorkorrutis mistahes vektoriga on taaskord nullvektor. Osutub, et tegelikult kehtib isegi tugevam seos.

Teoreem 4 (Kollineaarsuse tarvilik ja piisav tingimus). Vektorid $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}^3$ on kollineaarsed parajasti siis kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.

Tõestus. Eeldame esiteks, et vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed, $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Siis $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$ ja mõlemal juhul $\sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Siis aga $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot 0 = 0$ ehk $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$.

Teisalt, kui $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$, siis vektorkorrutise definitsiooni 9 tingimuse 1. järgi kas $|\vec{x}| = 0$, $|\vec{y}| = 0$ või $\sin \angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Selge, et esimese kahe variandi korral on üks vektoritest nullvektor ja seega kollineaarsuse tingimus on täidetud. Kolmanda tingimuse korral $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ või $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$ ehk vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed. $\square$

Järeldus 1. Mistahes ruumivektori $\vec{x} \in \mathbf{E}^3$ korral $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$.



Joonis 13: Vektoritele $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ ehitatud rööpkülik

Olgu vektorid $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{E}^3$ mittekollineaarsed vektorid. Fikseerime punkti O ning leiame punktid A ja B nii, et $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Konstrueerides rööpküliku, mille lähiskülgedeks on lõigud OA ja OB ütleme, et saadud rööpkülik on ehitatud vektoritele $\vec{a}$ ning $\vec{b}$.

Teoreem 5 (Rööpküliku pindala). Kui $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}^3$ on mittekollineaarsed vektorid, siis vektoritele $\vec{x}, \vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala on võrdne servavektorite vektorkorrutise $\vec{x} \times \vec{y}$ pikkusega, so

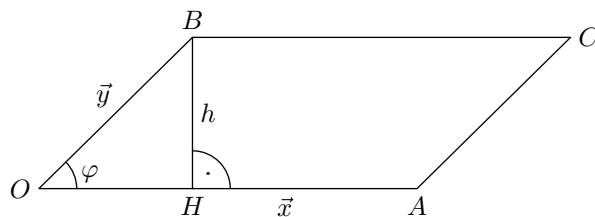
$$S = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

Tõestus. Olgu φ mittekollineaarsete vektorite $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{E}^3$ vaheline nurk. Ehitame nendele vektoritele rööpküliku $OABC$ (vt joonis 14). Teame, et rööpküliku $OABC$ pindala S on võrdne rööpküliku aluse OA pikkuse ja kõrguse h korrutisega

$$S = |OA|h.$$

Kuna $|OA| = |\vec{x}|$, siis $S = |\vec{x}|h$. Kolmnurk $\triangle OHB$ on täisnurkne ning $h = |BH|$, seega

$$h = |BH| = |OB| \sin \varphi = |\vec{y}| \sin \varphi.$$



Joonis 14: Vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ehitatud rööpküliku pindala

Kokkuvõttes oleme saanud

$$S = |\vec{x}|h = |\vec{x}||\vec{y}|\sin\varphi = |\vec{x} \times \vec{y}|.$$

□

Eelnevas nägime, et vektorkorrutise pikkuse geomeetriline tähendus on rööpküliku pindala. Kuid lisaks geomeetrilistele rakendustele on vektorkorrutis ka matemaatiline tehe, millel on kindlad algebralised omadused. Nende omaduste tundmine on oluline, et vektorkorrutisega efektiivselt arvutusi teostada, ilma et peaks iga kord geomeetrilist tõlgendust rakendama.

Lause 2 (Vektorkorrutise algebralised omadused). *Olgu $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ ruumivektorid ning $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ arvud. Vektorite vektorkorrutamisel on järgmised algebralised omadused:*

1. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, vektorkorrutis on kaldsümmeetriline,
2. $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) \times \vec{z} = \alpha\vec{x} \times \vec{z} + \beta\vec{y} \times \vec{z}$, vektorkorrutis on lineaarne.

Tõestus. Tõestame ainult esimese omaduse, teine omadus jääb iseseisvaks ülesandeks. Esiteks märgime, et kui vektorid $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ on kollineaarsed, siis Teoreemist 4 järeldub, et vektorkorrutised $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on nullvektorid, seega omadus kehtib. Eeldame nüüd, et vektorid on mittekollineaarsed, st $\vec{x} \nparallel \vec{y}$. Peame näitama, et vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $-\vec{y} \times \vec{x}$ on võrdsed vektorid, st peame näitama, et nende pikkused on võrdsed ja nad on samasuunalised.

- a) **Pikkus.** Teoreemis 5 tõestasime, et vektorite vektorkorrutise pikkus on võrdne nende vektoritele ehitatud rööpküliku pindalaga. On ilmne, et vektoritele $\vec{x}$ ja $\vec{y}$ ning vektoritele $\vec{y}$ ja $\vec{x}$ ehitatud rööpkülükud ühtivad, st tegemist on ühe ja sama rööpkülükuga. Järelikult vektorite $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $-\vec{y} \times \vec{x}$ pikkused on võrdsed.
- b) **Siht.** Vektorkorrutise definitsiooni kohaselt vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on risti vektoritega $\vec{x}$ ning $\vec{y}$. Seega kehtib $\vec{x} \times \vec{y} \parallel \vec{y} \times \vec{x}$ ehk vektorid on kollineaarsed.

- c) **Suund.** Parema käe reeglist (vt joonis 10) jäeldub, et vektorid $\vec{x} \times \vec{y}$ ja $\vec{y} \times \vec{x}$ on vastassuunalised.

Järelikult kehtib $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$. □

Vektorkorrutise algebralisi omadusi kasutades saame sageli olulisel määral arvutuskäike lihtsustada.

Näide 1. Olgu antud vektorid $\vec{a}, \vec{b}$, $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2$ ning $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\pi}{3}$. Leida $|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2$. Kasutades vektorkorrutise lineaarsuse omadust teisendame järgmiselt

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} + 2\vec{b} \times \vec{b}.$$

Nüüd arvestame, et vektorkorrutis on kaldsümmeetriline

$$2\vec{a} \times \vec{a} + 4\vec{a} \times \vec{b} + (-\vec{a} \times \vec{b}) + 2\vec{b} \times \vec{b} = 2\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b}$$

Nüüd kasutame Järeldusest 1, mis ütleb, et suvalise vektori korral kehtib $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$. Seega

$$2\vec{a} \times \vec{a} + 3\vec{a} \times \vec{b} + 2\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} + 3\vec{a} \times \vec{b} + \vec{0} = 3\vec{a} \times \vec{b}.$$

Järelikult

$$|(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|^2 = |3\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} = 9 \cdot 1 \cdot 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 27.$$

Vektorkorrutamine on algebraline tehe, st vektorkorrutamine seab igale paarile $(\vec{x}, \vec{y})$ vastavusse üheselt määratud vektori $\vec{x} \times \vec{y}$. Antud paragrahis oli tõestatud, et vektorkorrutamine on mittekommutatiiivne. Teame, et algebralise tehe üheks tähtsamaks omaduseks on assotsiatiivsus. Kas vektorkorrutamisel on assotsiatiivsuse omadus, st kas kehtib

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) ?$$

Osutub, et vastus on eitav, st vektorkorrutamine on mitteassotsiatiivne, so

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}).$$

5.2 Vektorkorrutis koordinaatides

Järgnevas uurime, kuidas saab vektorkorrutise arvutada kui ruumis on antud ristkoordinaadid. Selleks eeldame, et ruumis on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kuna vektorkorrutamise korral on oluline ka vektorite orientatsioon, siis eeldame järgnevas, et **kõik reeperid on parema käe ristreeperid**.

Teoreem 6 (Vektorkorrutise arvutusvalem ristkoordinaatides). *Olgu meil parema käe ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ning*

$$\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{ja} \quad \vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$$

suvalised vektorid. Siis vektorkorrutise $\vec{v} \times \vec{w}$ koordinaadid avalduvad

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (20)$$

Tõestus. Väite tõestamiseks arvutame esmalt vektorkorrutised $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$. Paneme tähele, et

$$|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2| = |\vec{e}_1| |\vec{e}_2| \sin \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Vektorkorrutise definitsiooni 9. järgi on vektorkorrutis $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ risti vektoritega $\vec{e}_1$ ja $\vec{e}_2$, st $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \perp \vec{e}_2$. Seega peab kehtima $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \parallel \vec{e}_3$. Edasi, rakendades definitsiooni kolmandat punkti, mis määrab vektorkorrutise suuna teame, et kolmik $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\}$ moodustab parema käe kolmiku ning järelikult $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \uparrow \uparrow \vec{e}_3$. Kuivõrd vektorite pikkused on samuti võrdsed, siis oleme näidanud, et

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3.$$

Analoogiliselt saame näidata (**iseseisvalt veenduda!**), et

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \text{ja} \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

Vektorkorrutise kaldsümmeetrilisuse põhjal

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2.$$

Selle abil saame kirja panna baasivektorite korrutamistabeli:

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}. \end{array}$$

Saadud korrutamistabeli, vektorkorrutise lineaarsuse ning -kaldsümmeetrilisuse kaudu saame arvutada otsitava vektorkorrutise $\vec{v} \times \vec{w}$ ristkoordinaatides. Kuna vektorite $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ koordinaadid on vastavalt (x_1, y_1, z_1) ja (x_2, y_2, z_2) , siis nende vektorite esitus baasivektorite lineaarkombinatsioonidena on

$$\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3 \quad \text{ja} \quad \vec{w} = x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3.$$

Saame

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= (x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3) \times (x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3) = \\
&= x_1 x_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + x_1 y_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1 z_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad y_1 x_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + y_1 y_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + y_1 z_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad z_1 x_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + z_1 y_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + z_1 z_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = \\
&= x_1 y_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + x_1 z_2 (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad y_1 x_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + y_1 z_2 (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad z_1 x_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + z_1 y_2 (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \\
&= (x_1 y_2 - y_1 x_2) (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \\
&\quad (y_1 z_2 - y_2 z_1) (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\
&\quad (z_1 x_2 - z_2 x_1) (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \\
&= (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_3 + (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{e}_1 + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Niisiis koordinaatides

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

□

Tõestuses panime muuhulgas kirja ka baasivektorite vektorkorrutamise tabeli. Meenutame, et ristreeperi baasivektorite $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ skalaarkorrutiste valem on

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

kus $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ja δ_{ij} on Kroneckeri sümbol. Osutub, et ristreeperi baasivektorite paarikaupa vektorikorrutised on samuti võimalik kompaktselt ühe valemiga kirja panna. Selleks kasutatakse *Levi-Civita* sümbolit

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (i, j, k) \text{ on } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ või } (3, 1, 2), \\ -1, & \text{kui } (i, j, k) \text{ on } (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ või } (1, 3, 2), \\ 0 & \text{kui vähemalt kaks indeksit on võrdsed.} \end{cases}$$

Siis on ristreeperi baasivektorite vektorkorrutiste tabel esitatud valemiga

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k.$$

Lisaks paneme tähele, et teoreemis esitatud valem (20) on võimalik samuti mõnevõrra kompaktsemalt kirja panna. Kui arvestame, et teist järku ruutmaatriksi A determinanti tähistatakse

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

siis saame valemi

$$\vec{v} \times \vec{w} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

kirjutada kujul

$$\vec{v} \times \vec{w} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

või

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3.$$

Arvestades saadud valemeid ja teoreemi 4. kollineaarsuse tarvilikkuse ja piisavuse kohta oleme tõestanud järgmise väite.

Teoreem 7. *Kaks vektorit $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ ja $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ on kollineaarsed parajasti siis, kui*

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Meenutame, et kolmandat järku ruutmaatriksi A determinandi arvutamiseks saame kasutada valemit

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

Kasutades ära teist järku determinandi arvutuseeskirja saame selle kirja panna kujul

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Arvestades ka eelnevas tõestatud valemit

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3,$$

saame kompaktse valemi vektorkorrutise arvutamiseks koordinaatides, mis tugineb kolmandat järku ruutmaatriksi determinandi arvutamisele:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

5.3 Kahekordne vektorkorrutis

Varasemas juba nägime, et sulgude paigutamine kahekordse vektorkorrutise juures on oluline ehk teisisõnu vektorkorrutise korral ei ole meil assotsiatiivsuse tingimus täidetud. Ent on siiski mõned omadused, mis ka kahekordse vektorkorrutise juures kehtivad.

Teoreem 8. *Suvaliste vektorite $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ korral kehtib valem*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}.$$

Tõestus. On selge, et kui vähemalt üks vektoreist $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ on nullvektor, siis valem kehtib. Niisiis üldsust kitsendamata eeldame, et $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ ja $\vec{c} \neq \vec{0}$.

Valime ruumi parema käe ristreeperi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ nii, et $\vec{e}_1 \uparrow \vec{c}$. Siis $\vec{c} = |\vec{c}| \vec{e}_1$ ja järelikult $\vec{c} = (|\vec{c}|, 0, 0)$. Olgu

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{ja} \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2).$$

Leima vektorkorrutise $\vec{a} \times \vec{b}$ kasutades vektorkorrutise arvutusvalemit koordinaatides:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Sama valemi teistkordsel rakendamisel saame

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = |\vec{c}| \left(0, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right).$$

Teisalt paneme tähele, et koordinaatides avaldub $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$ järgmiselt:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} &= |\vec{c}| x_1 (x_2, y_2, z_2) - |\vec{c}| x_2 (x_1, y_1, z_1) = \\ &= |\vec{c}| (0, x_1 y_2 - x_2 y_1, x_1 z_2 - x_2 z_1). \end{aligned}$$

Niisiis $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}$, nagu tarvis. □

Teoreemis tõestatud valemis vektorite järjestust muutes saame

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a}, \\ (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \vec{c} - \langle \vec{c}, \vec{a} \rangle \vec{b}, \\ (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} &= \langle \vec{c}, \vec{b} \rangle \vec{a} - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{c}. \end{aligned}$$

Liites vastavate võrrandite vasakud ja paremad pooled näeme, et skalaarkorrutise sümmeetrisuse tõttu paremal pool kõik liikmed koonduvad ning järele jääb

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Saadud samasust nimetatakse **Jacobi samasusesks**.

6 Vektorite segakorrutis

Varasemates peatükkides oleme juba tutvunud kahe vektori korrutistega: skalaarkorrutis andis tulemuseks arvu, mis kirjeldas vektorite omavahelist nurka ja pikkusi, ning vektorkorrutis andis tulemuseks uue vektori, mis oli risti mõlema algse vektoriga ja mille pikkus võrdus nende moodustatud rööpküliku pindalaga. Järgnevas vaatleme veel üht vektorite korrutist, ent seekord on korrutatavaid vektoreid kolm.

Segakorrutamise on matemaatiline tehe, mis ühendab endas nii skalaar- kui ka vektorkorrutise, andes tulemuseks ühe arvu. Kuid see arv pole suvaline, vaid kannab endas olulist geomeetrilist tähendust. Kolme vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ segakorrutise absoluutväärtus võrdub nimelt **rööptahuka ruumalaga**, mis on moodustatud nende kolme vektori poolt. Segakorrutis on niisiis otsekui laiendus vektorkorrutisele, mis aitab meil leida rööpküliku pindala.

Segakorrutis pakub meile võimsa vahendi ruumiliste kujundite ja nende omaduste analüüsimiseks. Järgmistes alapeatükkides õpime tundma selle arvutamise meetodeid, geomeetrilist interpretatsiooni ja praktilisi rakendusi, näiteks vektorite **komplanaarsuse** (ühel tasapinnal paiknemise) tuvastamisel.

Definitsioon 10. Ruumivektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ segakorrutiseks nimetatakse relaalarvu

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle. \quad (21)$$

Näitame nüüd, et kasutades segakorrutise definitsiooni on võimalik arvutada kolmele vektorile ehitatud rööptahuka ruumala.

Teoreem 9 (Rööptahuka ruumala). *Olgu vektorid $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ mittekomplanaarsed. Segakorrutise $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ absoluutväärtus on võrdne vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ehitatud rööptahuka ruumalaga ehk*

$$V = |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|. \quad (22)$$

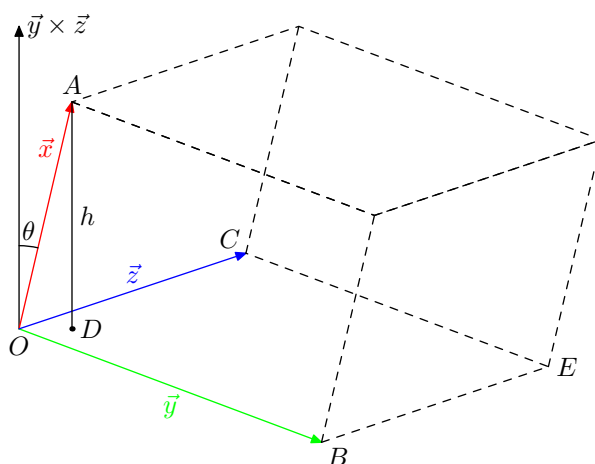
Vektorite segakorrutis on positiivne kui $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on parema käe kolmik, ning negatiivne kui $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ on vasaku käe kolmik.

Tõestus. Rööptahuka ruumala V on võrdne rööptahuka põhja pindala ning kõrguse korrutisega. Seega

$$V = S_{OBEC} \cdot h.$$

Kasutades teoreem 5. rööpküliku pindala kohta teame, et rööpküliku $OBEC$ pindala on võrdne teda moodustavate vektorite vektorkorrutise absoluutväärtusega

$$S_{OBEC} = |\vec{y} \times \vec{z}|.$$



Joonis 15: Rööptahuka $OABC$ ruumala

Jooniselt 15 näeme, et rööptahuka kõrguse $h = |DA|$ pikkuse saame leida trigonomeetria abil:

$$h = |\vec{x}| |\cos \theta|,$$

kus θ on nurk vektori $\vec{x}$ ja vektorkorrutise $\vec{y} \times \vec{z}$ vahel. Kokkuvõttes

$$\begin{aligned} V &= S_{OACB} \cdot h = |\vec{y} \times \vec{z}| |\vec{x}| |\cos \theta| = |\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| |\cos \theta| \\ &= | \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle | = |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|. \end{aligned}$$

□

Järeldus 2. Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ ehitatud tetraeedri ruumala on

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|.$$

Järeldus 3. Vektoritele $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ ehitatud prisma ruumala on

$$V = \frac{1}{2} |(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})|.$$

Eelneva teoreemi alusel on meil võimas tööriist rööptahuka ruumala leidmiseks. Tuletame meelde, et rööptahuka ruumala on null ainult siis, kui selle kõrgus on null. Selleks peab vektorite $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ poolt moodustatud aluspind ning vektori $\vec{x}$ lõpp-punktis asuv tipp asetsema ühel ja samal tasandil. See tähendab, et kõik kolm vektorit – $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ – on samal tasapinnal. Selliseid vektoreid nimetatakse komplanarseteks vektoriteks.

Seega, kui segakorrutise $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ väärtus osutub nulliks, peab ka vastava rööptahuka ruumala olema null. See on aga võimalik ainult juhul, kui vektorid $\vec{x}$, $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ asuvad samal tasapinnal.

Teoreem 10. Vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ segakorrutis võrdub nulliga parajasti siis, kui need vektorid on komplanaarsed.

Tõestus. Tähistame vektorite $\vec{x}$ ja $\vec{y} \times \vec{z}$ vahelise nurga $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y} \times \vec{z})$ ning vektorite $\vec{y}$ ja $\vec{z}$ vahelise nurga $\phi = \angle(\vec{y}, \vec{z})$. Väite tõestamiseks meenutame, et kolm vektorit on komplanaarsed, kui vähemalt kaks neist on kollineaarsed (vt alapeatükk 2.1).

Tarvilikkus. Olgu $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$. Seega $|\vec{x}| |\vec{y} \times \vec{z}| \cos \theta = 0$ ja järelikult kehtib üks kolmest väitest:

1. $|\vec{x}| = 0$,
2. $|\vec{y} \times \vec{z}| = 0$, või
3. $\cos \theta = 0$.

Ilmselt esimese ja teise võimaluse korral on vektorid komplanaarsed, kuna kaks neist on kollineaarsed. Kui aga $\cos \theta = 0$, siis θ on täisnurk ehk $\vec{x} \perp \vec{y} \times \vec{z}$. Viimane aga tähendabki, et vektorid on komplanaarsed.

Piisavus. Eeldame, et vektorid $\vec{x}, \vec{y}$ ja $\vec{z}$ on komplanaarsed. Sel juhul $\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \gamma \vec{z} = \vec{0}$, kus vähemalt üks kordajatest $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on nullist erinev.

Üldsust kitsendamata eeldame, et $\beta \neq 0$. Avaldame

$$\vec{y} = \alpha_1 \vec{x} + \gamma_1 \vec{z}, \quad \text{kus} \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad \gamma_1 = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

Leiame $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle$.

Paneme tähele, et võrduse paremal pool esinev vektorkorrutis on

$$\vec{y} \times \vec{z} = (\alpha_1 \vec{x} + \gamma_1 \vec{z}) \times \vec{z} = \alpha_1 \vec{x} \times \vec{z} + \gamma_1 \vec{z} \times \vec{z} = \alpha_1 \vec{x} \times \vec{z}.$$

Kuivõrd $\vec{x} \perp \vec{x} \times \vec{z}$, siis skalaarkorrutis $\langle \vec{x}, \vec{y} \times \vec{z} \rangle = 0$ ja kokkuvõttes oleme näidanud, et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$. $\square$

Järeldus 4. Kui segakorrutises on vähemalt kaks vektorit kollineaarsed, siis segakorrutis võrdub nulliga.

Lause 3 (Segakorrutise omadused). Segakorrutisel on järgmised algebralised omadused.

1. Suvaliste vektorite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{E}^3$ korral kehtib

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{z}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{y}, \vec{x}, \vec{z}) = -(\vec{x}, \vec{z}, \vec{y}) = -(\vec{z}, \vec{y}, \vec{x}).$$

2. Segakorrutis on lineaarne, st iga $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral

$$(\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}_1, \vec{y}, \vec{z}) + \beta(\vec{x}_2, \vec{y}, \vec{z}).$$

Tõestus. Lause 2. omadus on vahetu järeldus esimesest omadusest ning segakorrutise definitsioonist.

1. omaduse tõestamiseks märgime, et segakorrutise absoluutväärtus on võrdne rööptahuka ruumalaga ning järelikult ta ei sõltu vektorite järjestusest. Teisisõnu, kui vektorid segakorrutises ümber paigutada, siis segakorrutise absoluutväärtus sellest ei muutu.

Lisaks paneme tähele, et vektorite tsükliline permutatsioon ei muuda kolmiku $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ orientatsiooni, samas kui mittetsükliline permutatsioon muudab kolmiku orientatsiooni. Seega lause punktis 1. toodud võrdused kehtivad. $\square$

Siiani oleme segakorrutise mõistet kasutanud nõ geomeetriliselt, vaadeldes selle seoseid rööptahuka ruumalaga ja vektorite komplanaarsusega. Kuid matemaatiliste operatsioonide juures on tihti mugavam ja praktilisem kasutada koordinaatsüsteemi. Järgnevas uurime, kuidas arvutada segakorrutist, kui vektorid on antud koordinaatide kaudu. Nagu selgub, annab ka segakorrutise tehe meile kompaktse ja elegantse valemi, mis seob kokku kõik kolm vektori komponenti üheks arvuks.

Eeldame järgnevas, et ruumis on antud ristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Teoreem 11. *Vektorite*

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 &= x_1 \vec{e}_1 + y_1 \vec{e}_2 + z_1 \vec{e}_3, \\ \vec{a}_2 &= x_2 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + z_2 \vec{e}_3, \\ \vec{a}_3 &= x_3 \vec{e}_1 + y_3 \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_3\end{aligned}$$

segakorrutis on võrdne koordinaatidest moodustatud 3. järku determinandiga

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Tõestus. Leiame esmalt baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ segakorrutise $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Selleks märgime, et kehtib $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ ning järelikult

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = 1.$$

Eelnevat võrdust ning segakorrutise lineaarsust arvesse võttes saame arvutada vektorite $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ vektorkorrutise koordinaatides:

$$\begin{aligned}
(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) &= (x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3, x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3, x_3\vec{e}_1 + y_3\vec{e}_2 + z_3\vec{e}_3) = \\
&= x_1y_2z_3(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + y_1z_2x_3(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) + z_1x_2y_3(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) + \\
&\quad z_1y_2x_3(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) + y_1x_2z_3(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) + x_1z_2y_3(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) = \\
&= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) + \\
&\quad (z_1y_2x_3 + y_1x_2z_3 + x_1z_2y_3)(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = \\
&= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) - \\
&\quad (z_1y_2x_3 + y_1x_2z_3 + x_1z_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\
&= (x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - y_1x_2z_3 - x_1z_2y_3)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\
&= (x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2)(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

□

Näide 2. Olgu tetraeedri tippude koordinaadid $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 2)$, $C(5, 1, 1)$ ja $D(0, -1, 3)$. Leiame tipu C kauguse põhjast ABD kasutades segakorrutist.

Ilmselt on otsitav kaugus võrdne tetraeedri (või vastava rööptahuka) kõrgusega tipust C rööptahuka põhjale ABD . Tähistame selle kõrguse sümboliga h . Kõrguse h saame leida valemist $h = \frac{V}{S}$, kus S on vektoritele $\vec{AB}$ ja $\vec{AD}$ ehitatud rööpküliku pindala. Niisiis

$$h = \frac{|(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC})|}{|\vec{AB} \times \vec{AD}|}.$$

Tippude koordinaatide järgi saame küljevektorid $\vec{AC} = (3, 0, 2)$, $\vec{AB} = (1, -1, 3)$, $\vec{AD} = (-2, -2, 4)$, mille põhjal

$$(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Järelikult $V = |(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC})| = |-2| = 2$.

Analoogiliselt

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \right) = (2, -10, -4),$$

millest

$$|\vec{AB} \times \vec{AD}| = \sqrt{2^2 + (-10)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{30}$$

Seega tipu C kaugus põhjast ABD on $h = \frac{2}{2\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Kahest eelnevast teoreemist järeldub vahetult teoreem, mis annab piisava ja tarviliku tingimuse kolme vektori komplanarsuse määramiseks koordinaatides.

Teoreem 12. Kolm vektorit $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ja $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$ on komplanarsed parajasti siis, kui nende vektorite koordinaatidest moodustatud determinant on võrdne nulliga:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vaatleme peatüki lõpetuseks veel mõningaid olulisi vektorialgebra samasusi. Olgu $\vec{a}$, $\vec{b}$ ja $\vec{c}$ ruumivektorid, siis kehtivad

(1) Jacobi samasus

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0},$$

(2) Lagrange'i samasus

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix},$$

(3)

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2.$$

Tõestus. Tõestame neist Lagrange'i samasuse.

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \times \vec{d} \rangle &= (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \\ &= (\vec{d}, \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \\ &= \langle \vec{d}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \rangle = \\ &= \langle \vec{d}, \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle \vec{a} \rangle = \\ &= \begin{vmatrix} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \\ \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle & \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Märgime, et kui samasus (3) on kirjutatud kujul $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \times \vec{b}|^2$, siis järeldub sellest *Cauchy-Schwarz'i võrratus*

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|.$$

7 Sirge võrrandid

Selles ja järgmises peatükis tegeleme sirgete ja tasandite võrranditega. Sirge või tasandi võrrandi koostamiseks kasutame vektoreid ja tehteid vektoritega, st kasutame vektorite liitmist, korrutamist arvudega, skalaarkorrutist, vektorkorrutist, segakorrutist.

Sirge või tasandi kõige fundamentaalsem võrrand on selline, kus kasutame ainult vektoreid ja tehteid nendega, st me ei kasuta reeperit või koordinaadisüsteemi. Sellist võrrandit nimetatakse sirge või tasandi *vektorvõrrandiks*.

Kui sirge võrrandis esineb reaalarvuline parameeter (muutuv reaalarv) nii, et selle parameetri igale väärtusele vastab sirge üks ja ainult üks punkt, siis võrrandit nimetatakse *parameetriliseks võrrandiks*. Kui sirge või tasandi vektorvõrrand on koostatud ja uuritud, siis ruumi varustame **reeperiga** (koordinaadisüsteemiga) ja leiame **vektorvõrrandi kuju koordinaatides**.

Hermann Weyl'i aksiomaatikas sirge on punktihulk

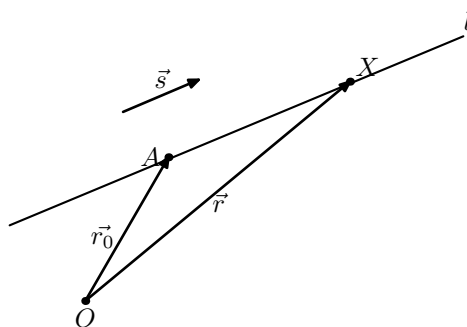
$$\mathcal{L} = \{X \in E : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}, O, A, B \in E, t \in \mathbb{R}\},$$

kus E on Eukleidiline ruum, O on ruumi E mingi fikseeritud punkt, A ja B on sirge fikseeritud punktid (kusjuures $A \neq B$), X on sirge muutuv punkt ja t on suvaline reaalarv (vaba parameeter). Tähistame $\vec{s} := \overrightarrow{AB}$. Sirge parameetrilise vektorvõrrand muutub järgmiseks

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\vec{s}.$$

Vektorit $\vec{s}$ nimetatakse sirge $\mathcal{L}$ *sihivektoriks*. Kui lisaks tähistame $\overrightarrow{OX} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0$, siis

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \quad (23)$$



Joonis 16: Sirge vektorvõrrandi tuletamine

Sama võrrandit saab tuletada geomeetriliselt kasutades tehteid vektoritega (vt Joonis 16). Olgu l sirge, A selle sirge fikseeritud punkt ning $\vec{s}$ sirgega l paralleelne vektor (sihivektor). Olgu X sirge l suvaline punkt. Tähistame punktide A ja X kohavektoreid vastavalt $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ ning $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$. Siis $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AX}$. Viimase vektori kohta teame, et $\overrightarrow{AX} \parallel \vec{s}$ ehk $\vec{r} - \vec{r}_0 \parallel \vec{s}$. Rakendame kollineaarsete vektorite tarviliku ja piisava tingimuse, saame et leidub $t \in \mathbb{R}$ selline, et $\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$ ehk $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$.

Märkus: Vastavus $t \in \mathbb{R} \leftrightarrow X \in l$ (reaalarv $\leftrightarrow$ sirge punkt) on üksühene, seega võime vaadelda parameetri t sirge l punktide koordinaatidena.

Definitsioon 11. Võrrandit (23) nimetatakse sirge *parameetriliseks vektorvõrrandiks*. Märgime, et sirge vektorvõrrandi kuju ei sõltu ruumi dimensioonist.

Kui ruumis on antud kaks sirget l_1, l_2 sihivektoritega vastavalt $\vec{s}_1$ ja $\vec{s}_2$, siis nende sirgete vaheliseks nurgaks nimetame nurka $\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2)$. Nüüd on lihtne leida nurka kahe etteantud sirge vahel skalaarkorrutise abil

$$\cos \angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = \frac{\langle \vec{s}_1, \vec{s}_2 \rangle}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}.$$

7.1 Sirge võrrand ruumis

Kirjutame sirge parameetrilise vektorvõrrandi kolmemõõtmelise ruumi koordinaatides. Selleks fikseerime ruumi $\mathbf{E}^3$ reeperit $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (siin me ei eelda, et $\mathcal{R}$ on ristreeper). Olgu sirge võrrandis (23) esinevate vektorite koordinaadid järgmised

$$\vec{r} = (x, y, z), \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad \vec{s} = (s_1, s_2, s_3).$$

Nüüd on lihtne näha, et sirge parameetriline vektorvõrrand on

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(s_1, s_2, s_3) = (x_0 + s_1t, y_0 + s_2t, z_0 + s_3t)$$

ehk

$$\begin{cases} x = x_0 + s_1t \\ y = y_0 + s_2t \\ z = z_0 + s_3t \end{cases} . \quad (24)$$

Seda võrrandit nimetame edaspidi *sirge parameetriliseks võrrandiks koordinaatides*.

Eeldusel, et sirge sihivektori koordinaadid on nullist erinevad, st $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0$ ja $s_3 \neq 0$ saame avaldada võrrandist (24), et

$$t = \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Võrrandit

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3} \quad (25)$$

nimetatakse sirge *kanooniliseks võrrandiks*.

Eelnevalt oleme eeldanud, et kõik sirge sihivektori koordinaadid on nullist erinevad. On ilmne, et suvalise sirge sihivektor on nullvektorist erinev, $\vec{s} \neq \vec{0}$, st kõik tema koordinaadid ei saa korraga võrduda nulliga. Laiendame sirge kanoonilise võrrandi kasutamist ka juhule, kus sihivektori mõned koordinaadid on nullid. Näiteks, kui mõne sirge sihivektor on kujul $\vec{s} = (s_1, s_2, 0)$ ($s_1, s_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), siis kirjutusviis

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{0},$$

tähendab olukorda, kus sirge võrrand on ekvivalentne järgmise võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{s_1} = \frac{y-y_0}{s_2} \\ z = z_0 \end{cases}$$

Sarnaselt võib käsitleda ülejaanud võimalusi.

7.2 Sirge võrrand tasandil

Analoogselt eelmisele alampeatükile kahemõõtmelises ruumis $\mathbf{E}^2$ (ehk tasandil) saab tuletada sirge parameetiline võrrand koordinaatides:

$$\begin{cases} x = x_0 + s_1 t \\ y = y_0 + s_2 t \end{cases}. \quad (26)$$

Sirge kanooniline võrrand näeb välja järgmiselt:

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}. \quad (27)$$

Seda saab tuletada sarnaselt võrrandile (25).

Uurime sirge võrrandit tasandil lähemalt. Kui eeldame, et võrrandis (26) $s_1 \neq 0$, siis saame avaldada süsteemi esimesest võrrandist $t = \frac{x-x_0}{s_1}$ ning asendades teise võrrandi saame, et

$$y - y_0 = \frac{s_2}{s_1}(x - x_0) \quad \text{või} \quad y = kx + b, \quad (28)$$

kus $k := \frac{s_2}{s_1}$ ja $b := y_0 - \frac{s_2 x_0}{s_1}$. Samamoodi nagu koolimatemaatikas nimetame kordajat k sirge *tõusuks*. Juhime tähelepanu, et sirge võrrand (28) omab mõtet ainult tasandil ning ainult eeldusel $s_1 \neq 0$ (st. see võrrand ei kata juhtu $x = x_0$).

Meenutame, et tasandiline sirge l on üheselt määratud järgmiste geomeetriliste andmetega:

- sirge punkt $A \in l$,
- sirge normaalvektor $\vec{N}$.

Tasandilise sirge *normaalvektoriks* nimetatakse vektorit $\vec{N} \neq \vec{0}$, mis on risti sirge mistahes sihivektoriga.

Fikseerime tasandi mingi punkti O . Olgu $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ punkti A kohavektor ning $\vec{r} = \overrightarrow{OX}$, kus $X \in l$ on sirge suvaline (muutuv) punkt. Kui $\vec{N}$ on sirge l normaalvektor, siis kehtib $\vec{r} - \vec{r}_0 \perp \vec{N}$. Järelikult (vt teoreem 2, 3. omadus)

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0. \quad (29)$$

Võrrandit (29) nimetatakse *tasandilise sirge vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu*.

Uurime selle võrrandi kuju koordinaatides. Esiteks, kasutades skalaarkorrutise lineaarsust saame esitada seda võrrandit kujul $\langle \vec{r}, \vec{N} \rangle + C = 0$, kus $C := -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Fikseerime tasandi **ristreeper** $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, olgu selles reeperis $\vec{r} = (x, y)$ ja $\vec{N} = (A, B)$. Siis eespool kirjutatud võrrandi (29) kuju koordinaatides on

$$Ax + By + C = 0. \quad (30)$$

Võrrandit (30) nimetatakse tasandilise sirge *üldvõrrandiks*.

Alapeatüki lõpuks vaatleme juhtu, kui tasandiline sirge l ei ole ühtegi baasivektoriga paralleelne, st sirge lõikab nii abtsiss- kui ordinaattelge. Olgu vastavad lõikepunktid x -teljel $A(a, 0)$ ja y -teljel $B(0, b)$. Siis vektor $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-a, b)$ sobib sirge l sihivektoriks ning kasutades võrrandeid (27) (võttes $\vec{s} = (-a, b)$ ja $A(a, 0)$) leiame, et sirge l võrrand on

$$\frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b} \Leftrightarrow \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Võrrandit

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (31)$$

nimetatakse sirge l *võrrandiks telglõikudes*, sest sellest saame leida sirge l lõikepunktid telgedega (nn telglõigud). Kui tasandiline sirge lõikab ainult ühte teljet, siis tema võrrand on kujul

$$x = a \quad \text{või} \quad y = b.$$

7.3 Punkti kaugus sirgeni

Peatükki lõpetuseks vaatleme üht geomeetria ülesannet: on antud sirge l ja ruumi punkt P . On vaja leida punkti P kaugus $d = d(P, l)$ sirgest l .

Lahendame ülesannet vektorkujul. Olgu $\vec{s}$ sirge l sihivektor, A mingi sirge punkt. Kauguse d leidmiseks kasutame vektorkorrutise rööpküliku pindala omadust (teoreem 5; rõhutame, et vektorkorrutist saame kasutada ainult kolmemõõtmelises ruumis). Vaatleme rööpkülikut, mis on ehitatud vektoritele $\vec{s}, \overrightarrow{AP}$ (vt. joonis ??). Näeme, et kaugus d on võrdne selle rööpküliku kõrgusega

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{s}|}.$$

Vektori $\overrightarrow{AP}$ saab avaldada punktide A, P kohavektorite kaudu kui $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Saame, et punkti P kauguse d sirgeni l arvutusvalem vektorkujul on

$$d = \frac{|\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0)|}{|\vec{s}|}. \quad (32)$$

Kirjutame välja seda valemit ristkoordinaatides. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ruumi ristreeper, $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ sihivektori koordinaadid, $A(x_a, y_a, z_a)$ ja $P(x_p, y_p, z_p)$ punktide A ja P koordinaadid vastavalt. Valem (32) koordinaatides võtab kuju

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} s_2 & s_3 \\ y_p - y_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_3 \\ x_p - x_a & z_p - z_a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ x_p - x_a & y_p - y_a \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}. \quad (33)$$

Lahendame sama ülesannet tasandil. Olgu $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tasandi ristreeper. Tahame leida punkti $P(x_p, y_p)$ kaugus sirgeni l . Olgu sirge antud üldvõrrandiga $l : Ax + By + C = 0$, ehk $\vec{N} = (A, B)$ on selle sirge normaalvektor. Olgu punkt $A(x_a, y_a)$ sirge l mingi punkt.

Selleks, et kasutada valemit (32) täiendame formaalselt reeperit vektoriga $\vec{e}_3$ selliselt, et $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ oleks kolmemõõtmelise ruumi $\mathbf{E}^3$ ristreeper. Uues reeperis meil on uued punktide koordinaadid $A(x_a, y_a, 0)$, $P(x_p, y_p, 0)$, seega $\vec{r} - \vec{r}_0 = (x_p - x_a, y_p - y_a, 0)$. Sirge l sihivektoriks valime vektori $\vec{s} = (-B, A, 0)$ (veenduge, et see vektor on risti vektoriga $\vec{N} = (A, B, 0)$, mistõttu see sobib vaadeldava sirge sihivektoriks). Nüüd saame arvutada (!)

$$\vec{s} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = (0, 0, -Ax_p - By_p - C).$$

Seega valemi (32) või (33) abil leiame

$$d = \frac{\sqrt{0^2 + 0^2 + (Ax_p + By_p + C)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_p + By_p + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (34)$$

8 Tasandi võrrandid

Selles peatükis vaatleme kolmemõõtmelist Eukleidilist ruumi $\mathbf{E}^3$. Peatüki uurimisobjekt on tasand ning põhiline eesmärk on kirjeldada ja uurida tasandit võrrandite abil mingis fikseeritud reeperis. Tasand on üheselt määratud, kui on antud:

- tasandi punkt A ,
- kaks *mittekollineaarset* vektorit $\vec{r}_1, \vec{r}_2$.

Leidub parajasti üks tasand $\mathfrak{B}$ selline, mis läbib punkti A ja on paralleelne vektoritega $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Vektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ moodustavad tasandi *rihi*.

8.1 Tasandi parameetrilised võrrandid

Tuletame tasandi $\mathfrak{B}$ parameetrilist vektorvõrrandit nende andmetega. Olgu X suvaline tasandi punkt ja $\vec{r}$ selle punkti kohavektor. Olgu $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. On ilmne, et vektor $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AX}$ on tasandi vektor. Seega

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2,$$

kus $u, v \in \mathbb{R}$ on üheselt määratud parameetrid. Tasandi $\mathfrak{B}$ *parameetriliseks vektorvõrrandiks* nimetatakse võrrandit

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{r}_1 + v\vec{r}_2. \quad (35)$$

Fikseerime ruumi mingi reeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Kui $A(x_0, y_0, z_0)$, $X(x, y, z)$, $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, siis tasandi parameetiline vektorvõrrand on samaväärne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x = x_0 + ux_1 + vx_2 \\ y = y_0 + uy_1 + vy_2 \\ z = z_0 + uz_1 + vz_2 \end{cases} \quad (36)$$

Võrrandisüsteemi (36) nimetatakse tasandi *parameetriliseks võrrandiks*. Seda võime kirjutada ka kujul

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + ux_1 + vx_2, y_0 + uy_1 + vy_2, z_0 + uz_1 + vz_2).$$

Tasandi parameetrilised võrrandid olid tuletatud tingimusel, et on antud tasandi $\mathfrak{B}$ punkt A ja selle rihivektorid $\vec{r}_1, \vec{r}_2$. Kolmikut $\{A; \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ võib vaadelda tasandi $\mathfrak{B}$ reeperina. Sel juhul parameetrid u, v on tasandi punktide koordinaadid.

8.2 Tasandi ilmutamata võrrandid

Kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{E}^3$ leidub parajasti üks tasand $\mathfrak{B}$, mis läbib etteantud punkti A ja mis on risti etteantud vektoriga $\vec{N}$. Vektorit $\vec{N}$ nimetatakse tasandi $\mathfrak{B}$ *normaalvektoriks*. Tuletame tasandi vektorvõrrandi, kui on antud selle tasandi mingi punkt A ja normaalvektor $\vec{N}$.

Olgu $\vec{r}$ suvalise tasandi punkti $X \in \mathfrak{B}$ kohavektor ja $\vec{r}_0$ punkti A kohavektor. Normaalvektori definitsioonist järeldub, et $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AX} \perp \vec{N}$. Järelikult

$$\langle \vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = 0. \quad (37)$$

Võrrandit (37) nimetatakse tasandi *vektorvõrrandiks normaalvektori kaudu*.

Paneme tähele, et kui on antud tasandi $\mathfrak{B}$ riht $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$, siis selle tasandi normaalvektoriks saab võtta rihivektorite vektorkorrutist $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Tõepoolest vektorkorrutis on risti nii vektoriga $\vec{r}_1$, kui ka vektoriga $\vec{r}_2$. Järelikult ta on risti tasandi mistahes vektoriga (veenduge selles võrrandi (35) abil). Seega tasandi suvalise punkti X korral kehtib

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0. \quad (38)$$

Võrrandit (38) nimetatakse tasandi *vektorvõrrandiks rihi kaudu*.

Fikseerime ruumi mingi ristreeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu selles reeperis punkti A kohavektori koordinaadid $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ja tasandi normaalvektori koordinaadid $\vec{N} = (A, B, C)$. Võttes tasandi suvalise punkti X kohavektori koordinaatideks $\vec{r} = (x, y, z)$ saame tasandi vektorvõrrandist normaalvektori kaudu (37) järgmist võrrandit

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Leitud võrrandit saab kirjutada kujul

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (39)$$

kus $D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Võrrandit (39) nimetatakse tasandi *üldvõrrandiks*.

Kui ruumi kolm punkti P, Q, R ei asu ühisel sirgel, siis need punktid määravad tasandit, st leidub parajasti üks tasand, mis läbib vastavaid punkte. Leiame selle tasandi üldvõrrandi, kui on antud nende punktide ristkoordinaadid $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$, $R(x_2, y_2, z_2)$. Tasandi üldvõrrandi koostamiseks kasutame tasandi vektorvõrrandit rihi kaudu (38). Kuna P, Q, R on tasandi vektorid, siis vektorid $\vec{r}_1 := \overrightarrow{PQ}$ ja $\vec{r}_2 := \overrightarrow{PR}$ on paralleelsed otsitava tasandiga. Eelduse kohaselt punktid P, Q, R ei asu ühel sirgel, järelikult vektorid $\vec{r}_1$ ja $\vec{r}_2$ ei ole kollineaarsed. Seega vektorid $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ moodustavad tasandi rihi. Tasandi alguspunktiks võtame

punkti P ja selle kohavektorit tähistame $\vec{r}_0$. Suvalise tasandi punkti $X(x, y, z)$ kohavektorit tähistame tavapäraselt $\vec{r}$. On lihtne leida, et

$$\begin{aligned}\vec{r} - \vec{r}_0 &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \\ \vec{r}_1 &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\ \vec{r}_2 &= (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0).\end{aligned}$$

Vektorvõrrandi (38) vasakpool on kolme vektori segakorrutis, mida oskame leida ristkoordinaatides kui kolmandat järku determinanti (vt teoreem (11)). Seega tasandi üldvõrrand on

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

8.3 Üleminek ühelt võrrandilt teisele

Eelnevalt oleme selgitanud, kuidas teostada üleminek tasandi parameetrilisest võrrandist (36) üldvõrrandile. Nimelt peame leidma tasandi rihivektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ koordinaadid, siis vektor $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ sobib tasandi normaalvektoriks ning võrrand (38) lahtikirjutatuna annab tasandi üldvõrrandi.

Nüüd näitame, kuidas teostada üleminekut tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrandist (39) tasandi parameetrilistele võrranditele. Olgu $Ax + By + Cz + D = 0$ tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand. Parameetrilise võrrandi koostamiseks peame leidam selle tasandi ühte punkti ja kaks mittekolleenaaret vektorit (tasandi riht). Tasandi punktide koordinaadid rahuldavad võrrandit $Ax + By + Cz + D = 0$, seega peame leida selle lahend.

Kuna tasandi normaalvektor $\vec{N} = (A, B, C)$ on nullvektorist erinev, siis vähemalt üks selle vektori koordinaat ei võrdu nulliga. Üldisust kitsendamata eeldame, et $A \neq 0$ (kui $B \neq 0$ või $C \neq 0$ arutleme analoogselt). Olgu $A \neq 0$. Leiame tasandi punkti, mille korral $y = z = 0$. Saame tasandi võrrandis $Ax + D = 0$, kust saame avaldada, et $x = -\frac{D}{A}$. Seega punkt $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ on tasandi punkt. Leiame tasandi kaks mittekolleenaarset vektorit. Tasandi $\mathfrak{B}$ mistahes vektor $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ on risti selle normaalvektoriga $\vec{N} = (A, B, C)$ ehk kehtib võrdus (vt teoreem 2)

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0.$$

See tähelepanek on üpris kasulik tasandite uurimisel ruumis. Tegelikult just selliselt leitakse tasandi rihi, kui on antud tasandi üldvõrrand. Sõnastame seda tulemust eraldi lausena:

Lause 4. Kui tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand on $Ax + By + Cz + D = 0$, siis kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{r}_1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{r}_2 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ sellised, et nende koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0$$

moodustavad tasandi $\mathfrak{B}$ rihi.

Tõestus. Eelnevas arutelus oleme näidanud, et iga tasandi vektori koordinaadid peavad rahuldava seda võrdust. Suvalised kaks mittekollineaarset vektorit tasandil $\mathfrak{B}$ moodustavad selle tasandi rihi. $\square$

Eeldusel $A \neq 0$ leiame, et

$$\alpha_1 = -\frac{B}{A}\alpha_2 - \frac{C}{A}\alpha_3$$

Arve α_2, α_3 võime vaadelda kui lahendi parameetreid. Seega võttes nt $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ ja $\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1$ leiame kaks tasandi $\mathfrak{B}$ mittekollineaarset vektorit $\vec{r}_1 = (-\frac{B}{A}, 1, 0)$ ja $\vec{r}_2 = (-\frac{C}{A}, 0, 1)$. Võttes kokku tasandi punkti $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$ ja kaks mittekollineaarset vektorit $\vec{r}_1 = (-\frac{B}{A}, 1, 0)$, $\vec{r}_2 = (-\frac{C}{A}, 0, 1)$ on lihtne koostada selle tasandi parameetrilised võrrandid (36)

$$\begin{cases} x = -\frac{D}{A} - \frac{B}{A}u - \frac{C}{A}v \\ y = u \\ z = v \end{cases}.$$

Ülejäänud juthumite käsitlemist jätame lugejale harjutuseks.

8.4 Tasandite vastastikune asend. Tasandite lõikesirge

Kolmemõõtmelises Eukleidilises ruumis $\mathbf{E}^3$ suvalise kahe tasandi $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ korral on kolm võimalust: need tasandid kas lõikuvad (sel juhul saame kätte tasandite lõikesirge) või on paralleelsed ($\mathfrak{B}_1 \parallel \mathfrak{B}_2$) või ühtivad ($\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$). Kusjuures olukorda, kui kaks tasandit ühtivat, saab teatud mõttes vaadelda tasandite paralleelsuse erijuhuna (st võib öelda, et iga tasand on paralleelne iseendaga). Järgmine teoreem annab tarvilikku ja piisava tingimuse sellele, et kaks tasandit oleksid paralleelsed.

Teoreem 13. Olgu antud kaks tasandit

$$\mathfrak{B}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \text{ja} \quad \mathfrak{B}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Need tasandid on paralleelsed ($\mathfrak{B}_1 \parallel \mathfrak{B}_2$) parajasti siis, kui leidub selline reaalarv λ , et

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1. \quad (40)$$

Need tasandid ühtivad parajasti siis, kui lisaks võrdustele (40) kehtib võrdus $D_2 = \lambda D_1$.

Tõestus. Tarvilikkus: Olgu tasandid $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ paralleelsed. Siis nende tasandite normaalvektorid on kollineaarsed, $\vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2$. Seega leidub selline reaalarv λ , et $\vec{N}_2 = \lambda \vec{N}_1$. Siit järelduvad võrdused (40).

Olgu tasandid $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ ühtivad. Siis need tasandid on ilmselt paralleelsed ja tänu eelmisele tulemusele teise tasandi $\mathfrak{B}_2$ võrrand on kujul $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$. Olgu $P \in \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$ nende ühtivate tasandite punkt koordinaatidega $P(x_0, y_0, z_0)$, ehk kehtivad võrdused

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0) + D_2 = 0.$$

Nendest võrdustest järeldub, et $\lambda(-D_1) + D_2$ ehk $D_2 = \lambda D_1$.

Piisavus: Kehtigu võrdused (40) (praegu me ei eelda, et $D_2 = \lambda D_1$). Eespool tõestatud lausest (4) järeldub, et tasandite rihivektorid rahuldavad võrrandit

$$A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3) = 0 \Leftrightarrow A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 = 0$$

Seega kui on leitud ühe tasandi rihivektorid, siis nad on ka teise tasandi rihivektorid. Seega tasandid on paralleelsed.

Kehtigu võrdused (40) ja $D_2 = \lambda D_1$ mingi reaalarvu λ korral. Siis suvalise ruumi punkti $P(x_0, y_0, z_0)$ korral

$$\begin{aligned} A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0 &\Leftrightarrow \lambda A_1x_0 + \lambda B_1y_0 + \lambda C_1z_0 + \lambda D_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) = 0 \\ &\Leftrightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0 \end{aligned}$$

ehk P on tasandi $\mathfrak{B}_2$ punkt parajasti siis, kui P on tasandi $\mathfrak{B}_1$ punkt. Järelikult need tasandid ühtivad. $\square$

Tasandite $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ paralleelsuse tingimuse (40) võime kirjutada nende normaalvektorite $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ abil kujul $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = 0$. Arvutades koordinaatides leiame, et kaks tasandit on paralleelsed parajasti siis, kui

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

Kui tasandid ei ole paralleelsed (ega ühti), siis nad lõikuvad ja kahe tasandi lõikejoon on sirge. Kui lõikuvate tasandite võrrandid on $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ja $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, siis nende lõikesirge punktid peavad rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Võrrandisüsteemi (41) nimetatakse *kahe tasandi lõikesirge võrrandiks*. Kui soovime esitada selle sirge võrrandit kanoonilisel kujul, siis meil on vaja leida selle sirge mingi punkt P ja sihivektor $\vec{s}$. Esiteks leiame sirge sihivektori. Tuletame meelde, et vektorid $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ja $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ on fikseeritud tasandite normaalvektorid, st *kõik* esimese tasandi vektorid on risti vektoriga $\vec{N}_1$ ja *kõik* teise tasandi vektorid on risti vektoriga $\vec{N}_2$. Lõikesirge sihivektor $\vec{s}$ osutub vektoriks, mis asub nii esimesel kui teisel tasandil, järelikult $\vec{s} \perp \vec{N}_1$ ja $\vec{s} \perp \vec{N}_2$. Siit järeldub, et normaalvektorite vektorkorrutis $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ on kollineaarne lõikesirge suvalise sihivektoriga $\vec{s}$. Seega vektor $\vec{N}_1 \times \vec{N}_2$ ise sobib sobib lõikesirge sihivektoriks. Sõnastame seda tulemust eraldi lausena:

Lause 5. *Olgu sirge kahe tasandi lõikesirge, st selle punktide koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Vektor

$$\vec{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

on lõikesirge sihivektor.

Tõestus. Selle lause tõestuse idee on kirjeldatud eespool. Arvutused ja muud detailid jätame lugejale harjutuseks. $\square$

Nüüd leiame lõikesirge (41) mingit punkti. Sisuliselt peame leidma võrrandisüsteemi (41) mingit lahendit, milleks on mitu erinevat viisi. Anname üht võimaliku eeskirja selle punkti leidmiseks. Eelduse kohaselt tasandid ei ole paralleelselt, seega kehtib

$$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

ehk vähemalt üks nendest teist järku determinantidest ei võrdu nulliga. Eeldame, et

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ülejäanud juhtumid võib käsitleda analoogselt. Antud juhul fikseerime võrrandisüsteemis (41) muutuja z mingi väärtuse, nt $z = 0$. Siis võrrandisüsteem lihtsustub kujule

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 \\ A_2x + B_2y = -D_2 \end{cases},$$

kusjuures lisaeelduse kohaselt selle süsteemi peadeterminant on nullist erinev. Järelikult sellel süsteemil leidub lahend ja see on ühene. Olgu selle süsteemi lahend x_0, y_0 , siis punkt $P(x_0, y_0, 0)$ on sirge (41) punkt. Teades lõikesirge sihivektorit $\vec{s}$ ja punkti P saame koostada selle sirge kanoonilist võrrandit.

8.5 Punkti kaugus tasandini

Olgu antud tasandi $\mathfrak{B}$ vektorvõrrand $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$ ja ruumi mingi punkt $M \notin \mathfrak{B}$ kohavektoriga $\vec{R}$. Leiame punkti M kauguse $d := d(M, \mathfrak{B})$ tasandini $\mathfrak{B}$. Selleks moodustame vektoritele $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööptahuka. Selle rööptahuka põhi on vektoritele $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ ehitatud rööpkülik. Kaugus d on võrdne rööptahuka kõrgusega. Kõrguse leidmiseks kasutame valemit

$$d = \frac{V}{S},$$

kus V on vaadeldava rööptahuka ruumala ja S on selle põhja (rööpküliku) pindala. Rööptahuka ruumala V on võrdne vektorite $\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ segakorrutise absoluutväärtusega (vt teoreem (9)) ja rööpküliku pindala S on võrdne vektorite $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ vektorkorrutise pikkusega (vt teoreem (5)). Seega

$$d = \frac{|(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2)|}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_2|}. \quad (42)$$

Eelnevas oleme näinud, et vektorkorrutis $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ on tasandi normaalvektor, tähistame $\vec{N} := \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Kasutades normaalvektorit saame valemit (42) kirjutada kujul

$$d = \frac{|\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle|}{|\vec{N}|} \quad (43)$$

Fikseerime ruumi ristreeperit $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Olgu selles reeperis normaalvektori koordinaadid $\vec{N} = (A, B, C)$ ja punkti M koordinaadid $M(x_1, y_1, z_1)$, st $\vec{R} = (x_1, y_1, z_1)$. Leiame skalaarkorrutise omaduste abil

$$\langle \vec{R} - \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle - \langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D,$$

kus $D = -\langle \vec{r}_0, \vec{N} \rangle$. Seega kauguse arvutusvalem on

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (44)$$

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et antud juhul võrrand $Ax + By + Cz + D = 0$ on tasandi $\mathfrak{B}$ üldvõrrand.

9 Baasiteisendused

Selles paragrahvis uurime, kuidas tasandi punkti koordinaadid teisenevad üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Antud paragrahvis me käsitleme ainult sirgjoonelisi koordinaadisüsteeme.

Tuletame meelde, et koordinaadisüsteem tasandil määratakse reeperi abil $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, kus O on reeperi alguspunkt, s.t. koordinaadisüsteemi alguspunkt, ja $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on baasivektorid. Tuletame meelde, et kaks tasandi vektorit on reeperi baasivektorid parajasti siis, kui nad ei ole kollineaarsed. Kui baasivektorid on teineteisega risti $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ja ühtlasi ühikvektorid $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$, siis nimetatakse reeperit $\mathcal{R}$ ristreeperiks. Sellisel juhul nimetatakse ka selle määratud tasandi koordinaadisüsteemi ristkoordinaadisüsteemiks.

Me alustame tasandi mingi joone uurimist algebraliste meetoditega, valides koordinaadisüsteemi ehk reperi $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Siis uuritav joon esitatakse vörrandiga. Sisuliselt uurime me joone geomeetrilisi omadusi, uurides tema vörrandit.

Ometi võime valida teise reeperi $\mathcal{R}' = \{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. On ilmne, et koordinaadisüsteem muutub ja koos sellega muutub ka joone vörrand. Võimalik, et uue reeperi valik osutub sobivamaks ning joone vörrand lihtsustub. Kuid selleks peame teadma, kuidas joone vörrand teiseneb üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele.

Kõigepealt leiame, kuidas teisenevad vektori $\vec{a}$ koordinaadid üleminekul uuele reeperile. Oletame, et meil on antud vektori koordinaadid reeperi $\mathcal{R}$ baasis, st $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$. Meie ülesanne on leida selle vektori koordinaadid uue reeperi $\mathcal{R}'$ baasis, st $\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2$, kus α'_1, α'_2 on vektori $\vec{a}$ uued koordinaadid. Selleks peame andma uue reeperi $\mathcal{R}'$ baasivektorite $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ koordinaadid algse reeperi $\mathcal{R}$ baasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Olgu

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2,\end{aligned}\tag{45}$$

kus $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ on mingid arvud. Juhime tähelepanu sellele, et uue reeperi baasivektorite koordinaadid on nummerdatud kahe alaindeksiga, kus esimene näitab koordinaadi järjekorranumbrit ja teine baasivektori järjekorranumbrit. Kahe indeksi suurus on kasulik esitada maatriksi kujul. Kirjutame uue reeperi baasivektorite koordinaadid teist järku ruutmaatriksina

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Maatriksit T nimetatakse *üleminekumaatriksiks* baasilt $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ baasile $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$. Baasi definitsioonist järeldub, et maatriks T on üleminekumaatriks parajasti siis, kui tema determinant on nullist erinev. Maatriksi T determinanti tähistame sümboliga $|T|$, s.t. $|T| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Seega $|T| \neq 0$. Tuletame meelde, et maatriksarvutuses nimetatakse nullist erineva determinantiga maatrikseid *regulaarseteks*.

Olgu α'_1, α'_2 vektori $\vec{a}$ koordinaadid uues baasis $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$, st $\vec{a} = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2$. Meie eesmärk on leida, kuidas vektori $\vec{a}$ ühed koordinaadid avalduvad teiste koordinaatide kaudu. Kõigepealt leiame, kuidas koordinaadid α_1, α_2 avalduvad koordinaatide α'_1, α'_2 kaudu. Kehtib vektorvõrdsus

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = \alpha'_1 \vec{e}'_1 + \alpha'_2 \vec{e}'_2.$$

Selle võrdsuse paremal poolel asendame uued baasivektorid $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ nende avaldistega (45) baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ kaudu. Saame

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 = (a_{11} \alpha'_1 + a_{12} \alpha'_2) \vec{e}_1 + (a_{21} \alpha'_1 + a_{22} \alpha'_2) \vec{e}_2.$$

Kaks vektorit on võrdsed parajasti siis, kui nende koordinaadid ühes ja samas baasis on võrdsed. Järelikult eelnevast vektorvõrdsusest saame

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11} \alpha'_1 + a_{12} \alpha'_2 \\ \alpha_2 &= a_{21} \alpha'_1 + a_{22} \alpha'_2 \end{aligned} \quad (46)$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi uute koordinaatide α'_1, α'_2 suhtes, leiame, kuidas uued koordinaadid avalduvad α_1, α_2 koordinaatide kaudu. Selleks, et lihtsustada valemite kirjanekut ja muuta see kompaktsemaks, on mugav kasutada maatriksarvutust, st selliseid mõisteid nagu maatriksite korrutamine ja pöördmaatriks. Võtame kasutusele üherealised maatriksid $(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2), (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2), (x \ y)$ ja üheveerulised maatriksid

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix}.$$

Siis saab valemid (45), (48) kirjutada maatriksikujul järgmiselt

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2) &= (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) T, \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (47)$$

Juhime lugeja tähelepanu sellele, et saadud valemite parematel pooltel on mõeldud üherealiste maatriksite korrutamist teist järku ruutmaatriksiga. Korrutades teise võrduse mõlemad pooled pöördmaatriksiga T^{-1} , kus

$$T^{-1} = \frac{1}{|T|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

saame avaldada uued koordinaadid α'_1, α'_2 koordinaatide α_1, α_2 kaudu järgmiselt

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Siit järeldub

$$\begin{aligned}\alpha'_1 &= \frac{1}{|T|}(a_{22}\alpha_1 - a_{12}\alpha_2), \\ \alpha'_2 &= \frac{1}{|T|}(-a_{21}\alpha_1 + a_{11}\alpha_2).\end{aligned}\tag{48}$$

Nüüd on meie eesmärk leida, kuidas tasandi punkti koordinaadid teisenevad üleminekul ühelt koordinaadisüsteemilt teisele. Reeper koosneb kahest osast: esimene osa on alguspunkt, teine osa on baas, mis tasandi korral koosneb kahest baasivektorist. Oleme fikseerinud uue reepri $\mathcal{R}'$ baasivektorite asendi algse reepri $\mathcal{R}$ baasivektorite suhtes üleminekumaatriksi T abil ja see võimaldas meil leida vektorite koordinaatide teisendusvalemid. Jäänud on fikseerida uue reepri $\mathcal{R}'$ alguspunkt O' koordinaadisüsteemis, mida määrab reeper $\mathcal{R}$. Olgu c_1, c_2 punkti O' koordinaadid reepri $\mathcal{R}$ koordinaadisüsteemis. Siis saab selle punkti kohavektori $\overrightarrow{OO'}$ kirjutada kujul

$$\overrightarrow{OO'} = c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2.\tag{49}$$

Olgu P mõni tasandi punkt ning x, y selle koordinaadid reeperi $\mathcal{R}$ koordinaadisüsteemis ja x', y' sama punkti P koordinaadid reeperi $\mathcal{R}'$ koordinaadisüsteemis. On hõlpsasti näha, et kehtib vektorvõrdsus

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}.\tag{50}$$

Punkti P kohavektorid avalduvad järgmiselt

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2,\tag{51}$$

$$\overrightarrow{O'P} = x' \vec{e}'_1 + y' \vec{e}'_2.\tag{52}$$

Kasutades valemit (48), kirjutame kohavektori $\overrightarrow{O'P}$ kujul

$$\overrightarrow{O'P} = (a_{11}x' + a_{12}y')\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y')\vec{e}_2.\tag{53}$$

Asendades avaldised (49), (51), (53) valemisse (50), saame

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{12}y' + c_1, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + c_2.\end{aligned}\tag{54}$$

Need valemid saab kirjutada ka maatriksikujul

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.\tag{55}$$

Kuna me ei eeldanud reeperil mingeid erisuguseid omadusi, on saadud valemid tasandi koordinaatide teisendamise kõige üldisemad valemid. Siiski edaspidi kasutame me ristkoordinaadisüsteeme, st reeperi $\mathcal{R}$ baas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on ortonormeeritud. See tõttu vaatleme ainult neid reeperi teisendusi, millede korral ortonormeeritud baas muutub ortonormeeritud baasiks. Sel juhul üleminekumaatriksit T nimetatakse *ortogonaalmaatriksiks*. Seega ortogonaalmaatriks teisendab ühe ortonormeeritud baasi teiseks ortonormeeritud baasiks. See tähendab, et teise baasi baasivektorid $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ on ühikvektorid ja nad on omavahel risti. Tuletame meelde, et nende vektorite koordinaadid on üleminekumaatriksi veerud, st esimese baasivektori $\vec{e}'_1$ koordinaadid asuvad üleminekumaatriksi esimeses veerus ja teise baasivektori $\vec{e}'_2$ koordinaadid asuvad teises veerus. Kuna algne baas $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on samuti ortonormeeritud, saame ülalnimetatud tingimused kirjutada kujul

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22} = 0. \quad (56)$$

Need tingimused on mugav kirjutada maatrikskujul

$$T^t T = I, \quad (57)$$

kus T^t tähistab maatriksi transponeerimist ja I on ühikmaatriks.

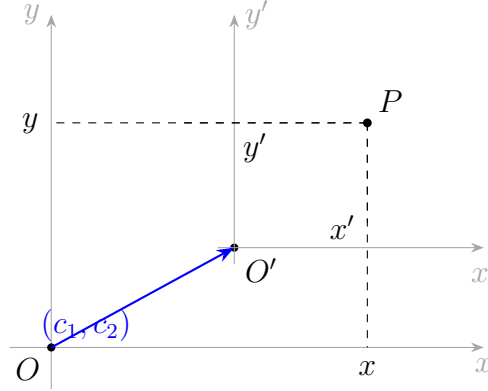
Lause 6. *Maatriks on ortogonaalmaatriks siis ja ainult siis, kui ta rahuldab tingimust (57). Ortogonaalmaatriksi determinant on kas $+1$ või -1 .*

Tõepoolest tingimusest (57) järeldub, et $|T^t T| = 1$. Determinandi omadustest järeldub $|T^t T| = |T^t| |T| = |T|^2$. Seega $|T|^2 = 1$, kust järeldub lause teine osa.

Seejuures lubame, et baasi (reeperi) orientatsioon võib muutuda. Paralleellüke, pööre ja peegeldus on need tasandi koordinaatide teisendused, millede korral ristkoordinaadisüsteem teiseneb ristkoordinaadisüsteemiks.

1. Olgu üleminekumaatriks T ühikmaatriks, s.t. $T = I$. Ühikmaatriks on ortogonaalmaatriks. Järelikult toimub üleminek ühelt ristkoordinaadisüsteemilt teisele ristkoordinaadisüsteemile. Valem (45) ühikmaatriksi korral on kujul $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$. Seega algse reeperi baas langeb kokku uue reeperi baasiga. Geomeetriliselt tähendab see, et algse koordinaadisüsteemi koordinaatteljed nihutatakse paralleelselt punkti O' koordinaatidega (c_1, c_2) koordinaadisüsteemis $\mathcal{R}$. Sellist tasandi koordinaatide teisendust nimetatakse *paralleellükkeks*. Sellel juhul teisenevad koordinaadid valemi järgi

$$x = x' + c_1, \quad y = y' + c_2. \quad (58)$$



Joonis 17: Koordinaadisüsteemi paralleellüke: $x = x' + c_1$, $y = y' + c_2$

2. Teiseks baasiteisenduseks, mis säilitab baasi ortonormeeruvuse, on pööramine. Mõtleme selle all, et baasivektorid $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ on rakendatud alguspunktist O ning neid pööratakse ümber punkti O positiivses suunas (tasandi orientatsiooni mõttes) nurga φ võrra. Seejuures alguspunkt O jääb paigale. Koordinaadisüsteemi pööramise üleminekumaatriks on kujul

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Lugeja võib veenduda, et maatriks (59) on ortogonaalmaatriks. Märkime, et pööramine ei muuda tasandi orientatsiooni. Koordinaadisüsteemi pööramisel teisenevad punkti P koordinaadid järgmise valemi järgi

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi x' - \sin \varphi y', \\ y &= \sin \varphi x' + \cos \varphi y'. \end{aligned} \quad (60)$$

3. Viimaseks teisenduseks, mis säilitab baasi ortonormeeruvuse, on peegeldus. Peegeldust võib kirjeldada järgmiselt. Kõigepealt valime tasandil sirge, mille tähistame $\mathcal{L}$. Olgu $\vec{s}$ sirge $\mathcal{L}$ sihivektor. Eeldame, et see on normeeritud, st $\vec{s}$ on ühikvektor $|\vec{s}| = 1$. Olgu $\vec{a}$ mingi tasandi vektor. Paigutame selle vektori alguspunkti suvalisse punkti Q sirgel $\mathcal{L}$ ning selle lõpp-punkti tähistame P , st $\vec{a} = \overrightarrow{QP}$. Tähistame punkti P ortogonaalprojektsiooni sirgele $\mathcal{L}$ tähega P' . Nüüd pikendame lõiku PP' punktist P' edasi sama pikkusega. Saadud punkti tähistame R . Siis vektorit $\overrightarrow{QR}$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{QP}$ peegelduseks sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Vektorit $\overrightarrow{QR}$ saab avaldada järgmiselt

$$\overrightarrow{QR} = 2 \langle \vec{a}, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{a}, \quad (61)$$

kus $\langle \vec{a}, \vec{s} \rangle$ on vektorite skalaarkorrutis. Olgu antud ortonormeeritud reeper $\mathcal{R} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ja sirge $\mathcal{L}$, mis läbib alguspunkti O ning mille sihivektoriks on ühikvektor $\vec{s}$. Moodustame uue reperi $\mathcal{R}' = \{O; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, mille baasivektorid on baasivektorite $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ peegeldused sirge $\mathcal{L}$ suhtes. Siis

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= 2 \langle \vec{e}_1, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 &= 2 \langle \vec{e}_2, \vec{s} \rangle \vec{s} - \vec{e}_2.\end{aligned}\tag{62}$$

Ei ole raske veenduda, et baas $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ on ortonormeeritud. Me ei hakka välja kirjutama üleminekumaatriksi ega koordinaatide teisenduse valemeid peegelduse korral sirge $\mathcal{L}$ suhtes, sest need valemid on mahukad ja edaspidi meil neid vaja ei lähe. Vaatleme erijuhtu, kus sirge $\mathcal{L}$ on koordinaadisüsteemi esimese veerandi nurgapoolitaja. Siis

$$\vec{s} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_2,$$

ning asendades selle vektori valemisse (62), saame $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2, \vec{e}'_2 = \vec{e}_1$. Vastav koordinaatide teisendus on

$$\begin{aligned}x &= y', \\ y &= x' .\end{aligned}\tag{63}$$

Seega koordinaadisüsteemi peegeldus esimese veerandi nurgapoolitaja suhtes taandub koordinaattelgede ümbernimetamisele, st x -telg muutub y' -teljeks ja vastupidi.

Kolmemõõtmelises ruumis toimub üleminek ühest reeperist teise baasivahetuse ja koordinaatide alguspunkti nihutamise abil. Üleminekumaatriks T , mis on sel juhul kolmanda järku maatriks, teostab baasi teisenduse järgmiselt

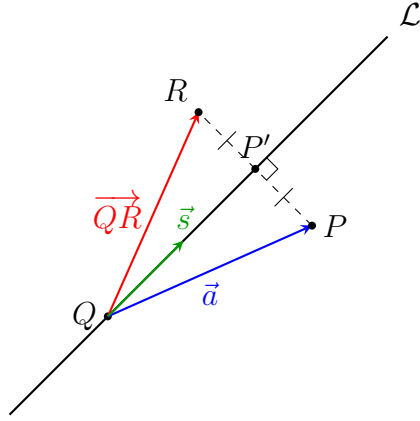
$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 + a_{31} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 + a_{32} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{13} \vec{e}_1 + a_{23} \vec{e}_2 + a_{33} \vec{e}_3,\end{aligned}$$

kus üleminekumaatriksiks nimetatakse maatriksit

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Kui koordinaatide alguspunkt nihutatakse punkti, mille koordinaadid on c_1, c_2, c_3 , siis muutuvad suvalise punkti koordinaadid vastavalt valemitele

$$\begin{aligned}x &= a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13} z' + c_1, \\ y &= a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23} z' + c_2, \\ z &= a_{31} x' + a_{32} y' + a_{33} z' + c_3.\end{aligned}\tag{64}$$



Joonis 18: Vektori peegeldamine sirge suhtes

Täpselt nagu tasandi korral, nimetatakse üleminekumaatriksit ortogonaalseks maatriksiks siis, kui ta teisendab ühe ortonormeeritud baasi teiseks ortonormeeritud baasiks. Samuti võib näidata, et kolmanda järku maatriks T on ortogonaalne maatriks parajasti siis, kui ta rahuldab tingimust $T^t T = I$. Sellest jäeldub, et ortogonaalse maatriksi determinant on kas -1 või $+1$. Kui üleminekumaatriksi determinant võrdub $+1$, siis säilitab selline maatriks ruumi orientatsiooni ja määrab koordinaattelgede pöörde. Siiski on selle maatriksi struktuur kolmemõõtmelises ruumis märksa keerukam kui pöördemaatriksi struktuur tasandil. Silmapaistev matemaatik Euler näitas, et iga koordinaattelgede pööret kolmemõõtmelises ruumis saab teostada kolmes etapis. Neid vastavaid pöördenurki nimetatakse nüüd Euleri nurkadeks ja tähistatakse $\varphi_1, \theta, \varphi_2$. Nendele vastavad pöördemaatriksite kujud on järgmised:

$$R_z(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$R_z(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seega on kolmemõõtmelises ruumis ristkoordinaadisüsteemi pöördemaatriks võrdne kolme maatriksi $R_z(\varphi_1)$, $R_x(\theta)$, $R_z(\varphi_2)$ korrutisega. Kokkuvõtteks märgime, et Euler võttis pöördenurgad esmakordselt kasutusele keerulise matemaatilise ülesande - vurrliikumise uurimise käigus. Tänapäeval kasutatakse Euleri nurki paljudes rakendustes, mis on seotud keha pöörlemisega kolmemõõtmelises ruumis, näiteks lennunduses.