

N
A-

ÜLO LUMISTE

DIFERENTSIAAL- GEOMEETRIA

Teine, täiendatud trükk

Eesti NSV Kõrg- ja Keskerihariduse Ministeerium lubab kasutada
õpikuna kõrgkoolis matemaatika erialal

TÜ MATEMAATIKA-
INFORMAATIKATEADUSKOND

TALLINN «VALGUS» 1987

Kaane kujundanud V. Jeršov

Tegemist on sama autori 1963. a. ilmunud õpiku ümbertöötatud ja tunduvalt laiendatud väljaandega. Endiselt peetakse silmas esmajoones TRÜ matemaatika-teaduskonna vajadusi, kusjuures arvestatakse aine mahu ja ulatuse laienemist uutes programmides. Õpik on üles ehitatud selliselt, et teda saab osaliselt kasutada ka TPedI-s ja TPI-s.

22.151

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
N

EESSÕNA

Käesoleva õpiku koostamisel on lähtunud autori sellealastest loengutest Tartu Riiklikus Ülikoolis ja arvestatud eelkõige matemaatika eriala programmi nõudeid. Raamatu üksikud osad (eeskätt II ja III peatükk) on kasutatavad ka teistel täppisteaduslikel ja insener-tehnilistel erialadel. Lugejalt eeldatakse analüütilise geomeetria, kõrgema algebra ning diferentsiaal- ja integraalarvutuse põhimaterjali tundmist. Kui käsitluses vajatakse mõnda üksikulemust, antakse alati täpne viide eestikeelsele õpikule, kust selle leida võib. Näiteks [1] või ([1], lk. 64) tähendab viidet raamatu lõpus toodud kirjanduse loetelu 1. õpikule või selle leheküljele 64. Paragrahvide lõpus esitatakse harjutusülesanded, mis kas illustreerivad teoreetilist materjali või süvendavad seda.

Diferentsiaalgeomeetria tekkis 17. sajandi lõpul koos diferentsiaalarvutusega. Esialgu oli tegemist selle arvutuse rakendustega tasandiliste joonte ja nende parvede juures. Järgmisel sajandil laienesid rakendused ka ruumilistele joontele ja pindadele, kuni 19. sajandi teiseks veerandiks oli diferentsiaalgeomeetria, tänu eriti G. Monge'i ja tema õpilaste ning C. Fr. Gaussi töödele, arenenud iseseisvaks uurimisvaldkonnaks. Uus kvalitatiivne muutus toimus 1870-ndail aastail, kui N. Lobatševski, B. Riemanni, F. Kleini jt. töödes tekkisid mitteeukleidilised geomeetriad n -mõõtmelistes ruumides. Uusi matemaatilisi kontseptsioone rakendas hiilgavalt A. Einstein 20. sajandi esimestel kümnenditel loodud eri- ja üldrelatiivsusteoorias. Tähelepanu keskmesse tõusid tensorväljad, Riemanni kõverruumi omadused ja uudse analüütilise aparaadina välisvormide arvutus, millele nüüd on leitud tähtsaid rakendusi teoreetilise füüsika teisteski valdkondades.

Käesolevas kursuses leiab kõik see valgustamist. Joone- ja pinnateoorias esitatakse kogu oluline materjal. Kõverruumi geomeetriaiga tutvumine algab sfäärilisest ja elliptilisest geomeetriast; arendatakse ka sfäärilist trigonomeetriat, mida vajatakse eriti astronoomias. Ühe mudeli — Minkowski aegruumis võetud pseudo-sfääri — varal käsitletakse üsna põhjalikult Lobatševski geomeetriat. Tensorite ja tensorväljade üldkäsitlust illustreerivad kaks rakenduslikult tähtsat põhijuhtu: Riemanni meetrika kui teatav sümmeetriline tensorväli ja välisvormid kui kaldsümmeetrilised tensorväljad. Õpiku mahtu ja kehtivat programmi arvestades on

kaasaegsemate osade esitamisel piiratud kõige olulisemaga, kusjuures käsitlus on püütud teha algajale jõukohaseks. Need vanemate kursuste üliõpilased ja spetsialistid, kes vajavad aine sügavamalt tundmist (matemaatikud, füüsikateoreetikud jt.), peavad kasutama erikursuste ja täiendava kirjanduse abi.

Autori varasem samanimeline õpik (Tln., ERK, 1963) haarab eelmärgitust üksnes joone- ja pinnateooria. Vahepeal toimunud programmi tunduv laiendamine ja kaasajastamine tingis rohke uue materjali lisamise ja peaaegu kogu endise materjali uuestikirjutamise. Sellega seoses tuli teha mõningaid kärpeid, mistõttu joone- ja pinnateooria on varasemas õpikus esitatud kohati isegi põhjalikumalt (näiteks evolutsioonid, eri tüüpi jooned ja pinnad, joonevõrgud, pinna sfääriline kujutus, Petersoni valemid jm.). Aine sügavamalt huvitatud lugejal soovitame seda silmas pidada.

Eraldi tuleb rääkida käesoleva õpiku esimesest peatükist. Diferentsiaalgeomeetria selles veel pole, käsitletakse vaid n -mõõtmeteliste ruumide analüütilist geomeetria ja isomeetriarühmi nendes ruumides. Sellest materjalist on abi IV ja V peatüki läbitöötamisel ning see annab ühtlasi teistest käsitlustest sõltumatu aluse joone- ja pinnateooria esitamiseks II ja III peatükis. Lugeja, kes on huvitatud üksnes õpiku viimati mainitud osadest, võib kolmemõõtmelise ruumiga piirdudes kohe nende juurde asuda ning pöörduda I peatüki poole ainult vajaduse korral. Muu materjali omandamisel on kasulik juhendada raamatu osade sõltuvuse skeemist.

Autori siiras tänu kuulub õpiku käsikirja retsenseerinud akad. H. Keresele ja kolleegidele TPedI matemaatikakateedrist eesotsas dots. R. Koldega. Nende märkused aitasid oluliselt kaasa raamatu lõplikul viimistlemisel. Palju tänu ka töökaaslastele TRÜ algebra ja geomeetria kateedrist mitmete arutelude eest ning M. Lõhmusele püüdliku töö eest käsikirja tehnilisel vormistamisel.

Tartu, 1983

Autor

SISUKORD

Eessõna — 3

I. Eukleidilised ja pseudoeukleidilised ruumid — 9

§ 1. Eukleidilise n -mõõtmelise ruumi geomeetria — 9

1. Hüpertasandid ja vektorid — 9
2. Sirged ja m -tasandid — 14
3. Kaugused — 18
4. Pindala ja ruumala — 21
5. Nurgad — 23
- Harjutusülesanded 1—9 — 26

§ 2. Aegruum ja pseudoeukleidiline geomeetria — 26

6. Aegruumi geomeetriad ja pseudoeukleidiline ruum — 27
7. Sfäärid ja ortogonaalsus — 32
8. Minkowski ruumi geomeetriast — 36
- Harjutusülesanded 10—14 — 38

§ 3. Isomeetrilised teisendused — 39

9. Ristbaasid ja -reeperid — 39
10. Eukleidiliste ruumide isomeetriad — 41
11. Afiinsete teisenduste rühm ja selle alamrühmad — 45
12. Minkowski ruumi isomeetriad — 48
13. Poincaré ja Lorentzi rühmad — 52
- Harjutusülesanded 15—18 — 56

II. Joon eukleidilises või pseudoeukleidilises ruumis — 57

§ 4. Joon ja selle puutuja — 57

14. Joone mõiste ja võrrandid — 57
15. Peano jooned ja Jordani jooned — 62
16. Joone puutuja — 66
17. Jooneparve mähisjoon — 69
- Harjutusülesanded 19—33 — 72

§ 5. Kaare pikkus — 74

18. Kaare pikkuse mõiste — 74
19. Kaare pikkuse arvutamine — 77

- 20. Loomulik parameeter — 79
Harjutusülesanded 34—36 — 81
- § 6. Joon kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis — 81
 - 21. Kooldumistasand ja liikuv kanooniline teljestik — 81
 - 22. Bartelsi—Frenet' valemid — 84
 - 23. Kõverus — 86
 - 24. Vääne — 89
 - 25. Joone lokaalne ehitus — 92
 - 26. Joone loomulikud võrrandid — 96
 - 27. Üleminek loomulikelt võrranditelt parameetrilistele — 99
Harjutusülesanded 37—46 — 102
- § 7. Joon n -mõõtmelises ruumis ($n > 3$) — 103
 - 28. Joon eukleidilises ruumis E_n — 103
 - 29. Punkti kinemaatika, maailmajoon ja omaaeg — 106
 - 30. Joone kõverus Minkowski ruumis — 110
Harjutusülesanded 47—48 — 113
- III. Pind kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis — 114**
 - § 8. Pind ja selle puutujatasand — 114
 - 31. Pinna mõiste ja võrrandid — 114
 - 32. Puutujatasand — 119
 - 33. Skalaarvälja tasemepinnad — 121
 - 34. Pinnaparve mähispind — 125
 - 35. Torsid ja kanalpinnad — 127
Harjutusülesanded 49—57 — 130
 - § 9. Pinna kõverused — 131
 - 36. Pinna kaks ruutvormi — 131
 - 37. Dupini indikatriss ja Euleri valem — 136
 - 38. Peasihid ja peakõverused — 139
 - 39. Täis- ja keskmine kõverus — 141
 - 40. Kõverusjooned — 145
 - 41. Asümptootjooned — 147
Harjutusülesanded 58—72 — 151
 - § 10. Pinna liikuv kanooniline teljestik — 152
 - 42. Kanooniline teljestik ja Darboux'—Cartani valemid — 152
 - 43. Joone geodeetiline kõverus pinnal — 156
 - 44. Väliskorrutis ja välisdiferentsiaal — 159
 - 45. Gaussi—Bonnet' ja Petersoni võrrandid — 163
 - 46. Pindade isomeetria ja põhiteoreem — 167
Harjutusülesanded 73—78 — 172
 - § 11. Pinna painutamine ja sisegeomeetria — 172
 - 47. Painutamise mõiste ja näited — 172
 - 48. Sisegeomeetria ning Mindingu ja Gaussi teoreemid — 177
 - 49. Geodeetiline joon — 182

- 50. Geodeetilised jooned kui lühimad jooned — 185
- 51. Gaussi—Bonnet' valem — 188
- 52. Konstantse kõverusega pinna sisegeomeetria — 193
Harjutusülesanded 79—86 — 199

IV. Mitteeukleidilised ruumid — 201

- § 12. Sfääriline geomeetria ja elliptiline ruum — 201
 - 53. Sfääri sisegeomeetria — 201
 - 54. Sfääriline trigonomeetria — 205
 - 55. Elliptiline ruum ja elliptiline geomeetria — 211
Harjutusülesanded 87—94 — 213
- § 13. Lobatševski ruumi geomeetria — 214
 - 56. Geomeetria Minkowski ruumi pseudosfääril — 215
 - 57. Hüperboolne trigonomeetria — 219
 - 58. Beltrami—Kleini mudel — 223
Harjutusülesanded 95—103 — 233
- § 14. Mitteeukleidiliste geomeetria stereograafilised mudelid — 234
 - 59. Stereograafiline projektsioon — 234
 - 60. Stereograafilise kujutuse konformsus — 238
 - 61. Lobatševski geomeetria Poincaré mudel — 240
 - 62. Geomeetria ruumi E_3 pseudosfääril — 244
Harjutusülesanded 104—106 — 248
- § 15. Mõnda diferentsiaalgeomeetria mitteeukleidilistes ruumides — 249
 - 63. Joon mitteeukleidilises ruumis — 249
 - 64. Pind mitteeukleidilises ruumis — 252
 - 65. Ümaruspinnad ja nende sisegeomeetriad — 255
 - 66. Cliffordi pinna sisegeomeetria — 261
Harjutusülesanded 107—113 — 264

V. Tensorväljad muutkonnal — 266

- § 16. Tensorid ja tensorväljad — 266
 - 67. Tensori mõiste — 266
 - 68. Vektorruumi tensoralgebra — 270
 - 69. Tensori koordinaadid — 272
 - 70. Tensorväli — 278
Harjutusülesanded 114—119 — 284
- § 17. Riemanni meetrika — 285
 - 71. Meetriline tensorväli — 285
 - 72. Lihthüperpind — 291
 - 73. Riemanni geomeetria põhijooni — 297
 - 74. Rööpülekanne ja kõverusteisendus — 304
 - 75. Riemanni—Christoffeli tensor — 310
 - 76. Lõikekõverus — 315

- 77. Mitteeukleidilised ruumid Riemanni muutkondadena — 322
Harjutusülesanded 120—128 — 325
- § 18. Välisdiferentsiaalvormid — 326
 - 78. Välisvormid ja Grassmanni algebra — 326
 - 79. Välisdiferentsiaalvormid ja välisdiferentseerimine — 332
 - 80. Üldine Stokesi valem — 336
 - 81. Välisdiferentsiaalvormid ja väljateooria — 346
 - 82. Välisdiferentsiaalvormid Riemanni geomeetrias — 351
Harjutusülesanded 129—137 — 358
- § 19. Diferentseeruvad muutkonnad ja globaalanalüüs — 359
 - 83. Diferentseeruva muutkonna mõiste — 359
 - 84. Globaalanalüüs — 367
Harjutusülesanded 138—143 — 372
Harjutusülesannete vastused ja selgitused — 373
Kirjandus — 385
Nimeregister — 386
Aineregister — 388

I. EUKLEIDILISED JA PSEUDOEUKLEIDILISED RUUMID

§ 1. EUKLEIDILISE n -MÕÕTMELISE RUUMI GEOMEETRIA

Kolmemõõtmeline eukleidiline¹ ruum E_3 , mille matemaatilisel range käsitlus antakse analüütilise geomeetria kursuses (vt. näit. [6]), on reaalse füüsikalise ruumi kõige lihtsam matemaatiline mudel. Ta kirjeldab selle ruumi geomeetrilist struktuuri igapäevase praktika jaoks vajalikus ulatuses väga suure täpsusega. Seejuures on temas peidus veel paljugi huvitavat, mida esitame ka käesolevas kursuses, kui arendame joonte ja pindade üldist teooriat.

Kuid matemaatika rakendused on ammuigi tekitanud vajaduse tundma õppida ka kõrgema mõõtmega ruume. Algust on sellega tehtud kõrgema algebra kursuses [1] vektorruume käsitledes, samuti kasutatakse mitmemõõtmelisi ruume matemaatilise analüüsi kursuses ([3], § 10) mitme muutuva funktsioonide juures. Need on osutunud kasulikuks ka diferentsiaalvõrrandite puhul [8] ja teoreetilises mehaanikas [4]. Väga olulisi rakendusi leiab neljamõõtmelise ruumi geomeetria füüsikalise aegruumi uurimisel (lähemalt vt. § 2).

Alljärgnevalt esitame n -mõõtmelise eukleidilise ruumi E_n lühikäsitluse, milles lugeja võib leida mõndagi tuttavat. Huvi võib pakkuda asjaolu, et ruumi E_n geomeetria esitatakse üksnes reaalarvude aritmeetikale tuginedes. Loomuliku üldistuse saavad ruumi E_3 sellised mõisted, nagu punkt, sirge ja tasand, samuti kaugused ja nurgad ning pind- ja ruumalad. Neid üldistusi rakendatakse ja üldistatakse edasi kursuse järgmistes osades.

Kuigi käesolevas paragrahvis kõik geomeetrilised mõisted defineeritakse ning väited põhjendatakse, on esitus kohati jäetud teadlikult üsna kokkusurutuks, sest eesmärgiks on siin mitte ruumi E_n analüütilise geomeetria põhjalik arendamine (see nõuaks eraldi raamatut), vaid aluse kujundamine diferentsiaalgeomeetria edasisele käsitlemisele (vt. «Eessõna»).

1. Hüpertasandid ja vektorid. Eukleidilist ruumi E_n on võimalik käsitleda mitmeti, kuid kõik käsitlused on taandatavad järgmisele lihtsale mudelile, mis ei vaja oma ülesehitamiseks muud kui reaalarvude teooriat ([2], § 1 ja § 2).

¹ Vanakreeka õpetlase Eukleidese (—3. saj.) järgi, kes oma teoses «Elementid» andis plani- ja stereomeetria ulatusliku süstemaatilise käsitluse.

Tähistame reaalarvude järjestatud korpuse $\mathbf{R}$ ja moodustame hulga

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}}_{n \text{ korda}} = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}, i=1, \dots, n\}.$$

Punkti hulka M_n , mida saab üksüheselt kujutada hulgale $\mathbf{R}^n$, s.t. mille korral eksisteerib bijektsioon

$$\varphi : M_n \rightarrow \mathbf{R}^n,$$

nimetatakse n -mõõtmeliseks *algmuutkonnaks*. Kui $x \in M_n$ ja $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, siis reaalarve $x_1, \dots, x_n$ nimetatakse punkti x koordinaatideks koordinaatkujutuse φ korral.

Algmuutkonda M_n koordinaatkujutusega φ nimetatakse n -mõõtmeliseks *eukleidiliseks ruumiks* ja tähistatakse E_n , kui tema iga kahe punkti x ja y jaoks on defineeritud nende punktide vaheline kaugus $d(x, y)$ valemiga

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}, \quad (1.1)$$

kus $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\varphi(y) = (y_1, \dots, y_n)$.

Hüpertasandiks ruumis E_n nimetatakse iga sellist ruumi E_n alamhulka, mida saab esitada mingist kahest erinevast fikseeritud punktist a ja b võrdsetel kaugustel olevate punktide hulgana

$$H = \{x : d(x, a) = d(x, b), a \neq b\}.$$

Kui $\varphi(a) = (a_1, \dots, a_n)$ ja $\varphi(b) = (b_1, \dots, b_n)$, siis tingimus $d(x, a) = d(x, b)$ on (1.1) põhjal samaväärne nõudega

$$(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 = (x_1 - b_1)^2 + \dots + (x_n - b_n)^2;$$

millest omakorda tuleneb temaga ekvivalentne võrrand

$$A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = 0, \quad (1.2)$$

kus

$$2A_0 = (a_1^2 + \dots + a_n^2) - (b_1^2 + \dots + b_n^2),$$

$$A_i = b_i - a_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Et $a \neq b$, siis vähemalt üks kordajatest A_i on nullist erinev.

Vastupidi, iga võrrand kujul (1.2), kus vähemalt üks A_i on nullist erinev, määrab hüpertasandi H ; tarvitseb vaid H definitsioonis võtta a ja b selliselt, et kui $A_0 \neq 0$, siis

$$\varphi(a) = (0, \dots, 0), \quad \varphi(b) = (\lambda A_1, \dots, \lambda A_n), \quad \text{kus}$$

$$\lambda = -2A_0(A_1^2 + \dots + A_n^2)^{-1},$$

kui aga $A_0 = 0$, siis $\varphi(a) = (A_1, \dots, A_n)$, $\varphi(b) = (-A_1, \dots, -A_n)$. Seejuures tuleb muidugi arvestada, et võrrand

$$(\lambda A_0) + (\lambda A_1)x_1 + \dots + (\lambda A_n)x_n = 0, \quad (1.4)$$

kus $\lambda \neq 0$, on samaväärne võrrandiga (1.2) ning määrab seetõttu sama hüpertasandi.

Seoses hüpertasandi võrrandiga (1.2) on kasulik defineerida järgmised uued mõisted, mis lihtsustavad hüpertasandite ja üldse

ruumi E_n geomeetria edasist uurimist. Seosed (1.3) viivad mõttele vaadelda punktide a ja b järjestatud paari omaette objektina $\overrightarrow{ab}$, lugedes seejuures, et $\overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ab}$ alati, kui

$$d_i - c_i = b_i - a_i; \quad i = 1, \dots, n,$$

kus $\varphi(c) = (c_1, \dots, c_n)$ ja $\varphi(d) = (d_1, \dots, d_n)$. Selline objekt määratakse antud koordinaatkujutuse φ korral täielikult arvusüsteemiga (1.3); seda nimetatakse *vektoriks* $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd} = \dots$, kusjuures arve $A_i = b_i - a_i = d_i - c_i = \dots$ nimetatakse vektori $\overrightarrow{m}$ koordinaatideks.

Kui nüüd võtta vaatluse alla selline punkt $o \in E_n$, et $\varphi(o) = (0, \dots, 0)$, ja nimetada seda koordinaatide alguspunktiks, siis saab punktiga x siduda vektori $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{ox}$, mida nimetatakse selle punkti *kohavektoriks* ja millel on samad koordinaadid $x_i - 0 = x_i$ mis punktil x endal. Võrdused (1.3) kujutavad nüüd endast teata-

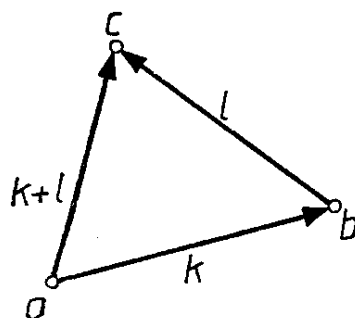
vaid seoseid vektori $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{ab}$ ja punktide a ja b kohavektorite $\overrightarrow{a}$ ja $\overrightarrow{b}$ koordinaatide vahel. Nende kompaktsaks väljendamiseks on kasulik vektorite $\overrightarrow{k}$ ja $\overrightarrow{l}$ puhul defineerida nende summa $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l}$ ja vektori $\overrightarrow{k}$ korrutis $\lambda \overrightarrow{k}$ reaalarvuga λ järgmiselt: kui $\overrightarrow{k}$ ja $\overrightarrow{l}$ koordinaatideks on vastavalt k_i ja l_i , siis summaks $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l}$ loetakse vektor koordinaatidega $k_i + l_i$ ja korrutiseks $\lambda \overrightarrow{k}$ vektor koordinaatidega λk_i ; $i = 1, \dots, n$. Arvestades võimalust määrata vektoreid punktipaaride abil, saame järgmise lihtsa reegli: kui $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{ab}$ ja $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{bc}$, siis $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{l} = \overrightarrow{ac}$; tõepoolest, sel korral $k_i = b_i - a_i$, $l_i = c_i - b_i$ ja $k_i + l_i = (b_i - a_i) + (c_i - b_i) = c_i - a_i$. Juhul kui $n \leq 3$, tuleneb siit analüütilisest geomeetriast tuntud kolmnurga reegel vektorite liitmiseks (joon. 1; [6], lk. 9, 31).

Vektorit $\overrightarrow{k} + (-1)\overrightarrow{l}$ nimetatakse vektorite $\overrightarrow{k}$ ja $\overrightarrow{l}$ *vaheks* ning tähistatakse $\overrightarrow{k} - \overrightarrow{l}$; selle koordinaatideks on $k_i + (-1)l_i = k_i - l_i$; $i = 1, \dots, n$. Seosed (1.3) näitavad nüüd, et vektor $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{ab}$ kujutab endast punktide b ja a kohavektorite $\overrightarrow{b}$ ja $\overrightarrow{a}$ vahet: $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$.

Võrrandis (1.2) esinev avaldis $A_1 x_1 + \dots + A_n x_n$ viib mõttele siduda iga kahe vektoriga $\overrightarrow{k}$ ja $\overrightarrow{l}$ reaalarv

$$kl = k_1 l_1 + \dots + k_n l_n, \quad (1.5)$$

kus k_i on vektori $\overrightarrow{k}$ ja l_i vektori $\overrightarrow{l}$ koordinaadid; $i = 1, \dots, n$. Arvu



Joonis 1

kl (mida sageli tähistatakse ka $\langle k, l \rangle$ või (k, l)) nimetatakse vekto-rite k ja l skalaarkorrutiseks; sel on samad (kergeasti kontrollitava-
vad) omadused mis reaalarvude korrutisel:

$$kl = lk, \quad (\lambda k)l = \lambda(kl), \quad k(l+m) = kl + km; \quad (1.6)$$

eesliidet «skalaar-» kasutatakse seepärast, et kl pole mitte vektor nagu tegurid k ja l ; vaid reaalarv (ehk skalaar). Erijuhuks on vektori skalaarruut $k^2 = kk$.

Vahetu arvutusega on lihtne kontrollida, et kehtib nn. Lagrange'i¹ samasus

$$k^2 l^2 - (kl)^2 = \sum_{i < j} (k_i l_j - k_j l_i)^2; \quad (1.7)$$

paremal pool on summeerimine üle kõigi selliste naturaalarvupaa-ride (i, j) , kus $1 \leq i < j \leq n$. Tulemuse mittenegatiivsusest (summeeritakse teatavate reaalarvude ruudud) järeldub nn. Cauchy² võrratus

$$(kl)^2 \leq k^2 l^2. \quad (1.8)$$

Lagrange'i samasusest tuleneb, et kui $k^2 l^2 - (kl)^2 = 0$, siis kas $l = \lambda k$ (kui $k \neq 0$) või $k = 0$, sest sel korral kõik $k_i l_j - k_j l_i = 0$, järelikult vektorite k ja l koordinaatidest moodustatud kaherealise maatriksi kõik teist järku miinorid on nullid ja read on lineaarselt sõltuvad (vt. [1], lk. 64); siin 0 tähendab muidugi vektorit koordinaatidega $(0, \dots, 0)$.

Skalaarkorrutamist kasutades saab nüüd võrrandis (1.2) esineva avaldise kirjutada järgmiselt:

$$A_1 x_1 + \dots + A_n x_n = m x$$

ja kogu võrrand (1.2) omandab kompaktse kuju:

$$A_0 + m x = 0. \quad (1.9)$$

Hüpertasand H on niisiis ruumi E_n parajasti selliste punktide x hulk, mille kohavektorid x rahuldavad võrrandit (1.9), kus $m \neq 0$.

Fikseerime hüpertasandi H mingi punkti x_0 kohavektoriga x_0 ; sel korral $A_0 + m x_0 = 0$. Tehes siit asenduse $A_0 = -m x_0$ võrrandisse (1.9), saame sellele kuju

$$m(x - x_0) = 0, \quad (1.10)$$

mis on samaväärne tingimusega $\overrightarrow{mx_0 x} = 0$.

Üldiselt, kui mingi kahe vektori k ja l korral $kl = 0$, siis öeldakse, et k ja l on risti ehk ortogonaalsed ja tähistatakse $k \perp l$.

Võrrandiga (1.2) ehk (1.10) määratud hüpertasand on nüüd kirjeldatav kui punktide x hulk ruumis E_n , mis koos fikseeritud punktiga x_0 määravad nullist erineva vektoriga m ristuvad vekto-

¹ Joseph Louis de Lagrange [lagraⁿž] (1736—1813) — prantsuse matemaatik, Torino, Berliini ja Prantsuse TA liige.

² Augustin Louis Cauchy [košii] (1789—1857) — prantsuse matemaatik, Prantsuse TA liige.

rid $\overrightarrow{x_0x}$. Vektorit m nimetatakse selle hüpertasandi *normaalvektori*ks; kõneldakse ka vektoriga m ristuvast ja punkti x_0 läbivast hüpertasandist. Et seos (1.4), kus $\lambda \neq 0$, määrab sama hüpertasandi, siis võib öelda, et koos vektoriga m on antud hüpertasandi normaalvektori ka iga vektor λm , kus $\lambda \neq 0$.

Sellest määramatusest vabanemiseks on kasulik sisse tuua vektori pikkuse mõiste ja viimase abil omakorda ühikvektori mõiste. Vektori k pikkuseks nimetatakse reaalarvu $|k| = \sqrt{k^2}$. Kahe punkti x ja y vahelise kauguse avaldis (1.1) on nüüd kirjutatav kujul

$$d(x, y) = |\overrightarrow{xy}| = |x - y|. \quad (1.11)$$

Cauchy võrratusest (1.8) järelduvad kolmnurga võrratused

$$|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad (1.12)$$

Tõepoolest, suvalise kahe vektori k ja l korral on võrratus (1.8) samaväärne võrratusega

$$-|k||l| \leq kl \leq |k||l|.$$

Korrutades siin arvuga 2 ja liites $|k|^2 + |l|^2$, saame

$$|k|^2 - 2|k||l| + |l|^2 \leq k^2 + 2kl + l^2 \leq |k|^2 + 2|k||l| + |l|^2$$

ehk

$$(|k| - |l|)^2 \leq (k + l)^2 \leq (|k| + |l|)^2,$$

millest

$$||k| - |l|| \leq |k + l| \leq |k| + |l|. \quad (1.13)$$

Võrratuse (1.12) saamiseks tuleb asendada $k = x - z$ ja $l = z - y$, mistõttu $k + l = x - y$, ning arvestada võrdust (1.11).

Vektorit pikkusega 1 nimetatakse *ühikvektori*ks. Nullist erineva vektori m kordsete λm seas on kindlasti ka ühikvektor, sest nõue $|\lambda m| = 1$, olles samaväärne nõudega $|\lambda||m| = 1$, on rahuldatud nii $\lambda = |m|^{-1}$ kui ka $\lambda = -|m|^{-1}$ korral; seega on kõnesolevaid ühikvektoreid koguni kaks ja nad erinevad parajasti skalaarteguri -1 poolest.

Üldiselt nimetatakse vektoreid m ja λm *samasihilisteks*; vektorite hulka $\{\lambda m\}$ fikseeritud $m \neq 0$ ja suvalise reaalarvu λ korral nimetatakse *sihiks*. Kui seejuures $\lambda > 0$, siis vektoreid m ja λm nimetatakse *samasuunalisteks*, juhul $\lambda < 0$ aga *vastassuunalisteks*; ühel sihil saab seega määrata kaks suunda. Üleminekut vektorilt $m \neq 0$ temaga samasuunalisele ühikvektorile nimetatakse vektori m *normeerimiseks*.

Minnes nüüd võrrandilt (1.2) üle võrrandile (1.4) ja valides sobivalt λ väärtuse, võime saada hüpertasandi sellise võrrandi $nx + p = 0$, kus uus normaalvektor n on juba ühikvektor ja $p \leq 0$. Niisugust võrrandit nimetatakse hüpertasandi *normaalvõrrandiks*. Kerge on kontrollida, et punkt x_0 kohavektoriga $|p|n$ asub sellel hüpertasandil.

2. **Sirged ja m -tasandid.** Ruumi E_n teooria arendamist on otstarbekas jätkata esialgu erijuhul, mil $n=3$. Hüpertasandit ruumis E_3 nimetatakse lihtsalt *tasandiks*.

Sirgeks ruumis E_3 nimetatakse iga mittetühja punktihulka, mis osutub mingi kahe erineva tasandi ühisosaks. Seega sirge iga punkti x koordinaadid x_1, x_2, x_3 peavad rahuldama korraga mingit kaht võrrandit

$$\begin{aligned} A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 &= 0, \\ B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

mis ei tohi olla samaväärsed. Viimasest nõudest tuleneb, et ei saa olla $B_i = \lambda A_i$; $i=1, 2, 3$, sest siis peaks olema ka $B_0 = \lambda A_0$ (muidu oleks vaadeldavate tasandite ühisosa tühi) ja tasandid ühtiksid, mis praegu pole lubatud. Järelikult determinantidest $A_iB_j - A_jB_i$, $i < j$ vähemalt üks on nullist erinev. Vajaduse korral koordinaate ümber nummerdades võib saavutada, et $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ ning sel korral on võimalik süsteemist (2.1) avaldada (vrd. [6], lk. 204)

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + \lambda_1 x_3, \\ x_2 &= q_2 + \lambda_2 x_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kus

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (A_2B_3 - A_3B_2) : (A_1B_2 - A_2B_1), \\ \lambda_2 &= (A_3B_1 - A_1B_3) : (A_1B_2 - A_2B_1). \end{aligned}$$

Seejuures uus süsteem (2.2) on samaväärne esialgse süsteemiga (2.1), määrates seega sama punktihulga. Et taastada kõigi koordinaatide samaväärsus, on kasulik võtta vabalt arv a_3 ning tähistada $A_1B_2 - A_2B_1 = k_3 \neq 0$ ja $t = (x_3 - a_3) \cdot k_3^{-1}$. Siin t on uus muutuja, kusjuures

$$x_3 = a_3 + tk_3.$$

Pärast asendust võrrandisse (2.2) saame kokkuvõttes

$$x_i = a_i + tk_i, \quad (2.3)$$

kus praegu $i=1, 2, 3$. Et süsteemid (2.2) ja (2.1) on samaväärsed, siis saadud avaldiste asendamisel võrrandisse (2.1) saame ka siin samasused. Seega *uued võrrandid* (2.3); kus t on vabalt kogu reaalteljel $\mathbb{R}$ muutuv parameeter, määravad sama sirge mis esialgne süsteem (2.1).

Kui arvestame võrrandite (2.2) kordajate λ_1 ja λ_2 ülalleitud avaldisi, saame võrdused

$$k_1 = A_2B_3 - A_3B_2, \quad k_2 = A_3B_1 - A_1B_3, \quad k_3 = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (2.4)$$

Meenutame, et A_i ja B_i ; $i=1, 2, 3$ on võrranditega (2.1) antud tasandite normaalvektorite m ja n koordinaadid. Nendest moodustatud arvud (2.4) on teatava uue vektori k koordinaadid. Seda vektori k nimetatakse vektorite m ja n *vektorkorrutiseks* ja tähistatakse $k = m \times n$ (vt. [6], lk. 131). Vektorkorrutisel on järgmised lihtsasti kontrollitavad omadused:

$$\begin{aligned} m \times n &= -n \times m; & (m+n) \times p &= m \times p + n \times p; & (\lambda m) \times n &= \lambda(m \times n); \\ m \times n &\perp m; & m \times n &\perp n; & (k \times l)^2 &= k^2 l^2 - (kl)^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Seejuures viimane neist ühtib Lagrange'i samasusega (1.7) juhul $n=3$, mistõttu tingimusest $k \times l = 0$ järeldeb kas $l = \lambda k$ (kui $k \neq 0$) või $k=0$.

Võrrandite (2.3) järgi saab defineerida ka sirge ruumis E_n . Sirgeks ruumis E_n nimetatakse iga punktihulka

$$s = \{x : x = a + tk\}, \quad (2.6)$$

kus x on punkti x kohavektor, a ja $k \neq 0$ konstantsed vektorid ja t parameeter, mis omandab kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi. Seejuures a on väärtusele $t=0$ vastava punkti $a \in s$ kohavektor, mistõttu $\vec{ax} = x - a = tk$. Vektorit k , mis on samasihiline vektoriga $\vec{ax}$, nimetatakse vaadeldava sirge s *sihivektoriks*; vektorite hulka $\{tk : t \in \mathbb{R}\}$ — *sirge sihiks*.

Et sirge s definitsioonis (2.6) esinev võrrand on samaväärne võrranditega (2.3), kus nüüd $i=1, \dots, n$, siis võib sirge s määrata ka võrrandite (2.3) abil.

Sirge s saab ruumis E_n defineerida otseselt punktidevahelise kauguse kaudu. Osutub nimelt, et

$$s = \{x : d(b, x) = |d(b, a) \pm d(a, x)|, a \neq b\} \quad (2.7)$$

($\pm$ tähendab, et märk võib olla kas $+$ või $-$).

Tõestuseks esitame tingimuse (2.7) kujul

$$|x - b| = ||a - b| \pm |x - a||$$

ning arvestame, et vasakul pool võib võtta $x - b = (x - a) + (a - b)$. Tõstes seejärel pooled ruutu, saame pärast koondamisi

$$(a - b)(x - a) = \pm |a - b| |x - a|.$$

Pärast veelkordset ruutu tõstmist leiame, et vektorite $k = a - b$ ja $l = x - a$ korral Lagrange'i samasuse (1.7) vasak pool on võrdne nulliga; et praegu $k \neq 0$, siis $l = tk$. Seega $x - a = t(a - b)$ ja siit $x = a + t(a - b)$.

Vastupidiselt arutledes on kerge veenduda, et viimasest võrdusest omakorda järeldeb tingimus (2.7). Seega (2.7) defineerib tõepoolest sirge s , mis läbib punkti a sihivektori $k = a - b$ sihis.

Sirge üldistuseks on m -tasand ruumis E_n , mis defineeritakse kui punktihulk

$$T_m = \{x : x = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m\}, \quad (2.8)$$

kus vektorid $k_1, \dots, k_m$ on lineaarselt sõltumatud (vt. [1], lk. 57) ja $t_1, \dots, t_m$ on parameetrid, mis omandavad üksteisest sõltumatult kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi.

Vektorite hulka $R_m = \{t_1 k_1 + \dots + t_m k_m : t_\alpha \in \mathbb{R}; \alpha = 1, \dots, m\}$ nimetatakse vaadeldava m -tasandi m -rihiks.

Vahetult on selge, et $T_1 = s$ ja et 1-riht on sirge siht.

Osutub, et $T_{n-1} = H$; s. t. $(n-1)$ -tasanditeks on parajasti hüper-tasandid.

Tõestuseks võtame vabalt $x \in T_{n-1}$, s. t.

$$x - a = t_1 k_1 + \dots + t_{n-1} k_{n-1}. \quad (2.9)$$

Määrame vektorite $k_1, \dots, k_{n-1}$ järgi uue vektori m , mis üldistab vektorkorrutist järgmises mõttes: m koordinaadid A_i määrame seost

$$A_1\xi_1 + \dots + A_n\xi_n = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n-1,1} & k_{n-1,2} & \dots & k_{n-1,n} \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

kui algebraliste muutujate ξ_i kordajad; $i=1, \dots, n$. Et nad on vektorite $k_1, \dots, k_{n-1}$ koordinaatide maatriksi $(n-1)$ -st järku miinorid, siis vektorite lineaarse sõltumatuse tõttu vähemalt üks neist on nullist erinev, s.t. $m \neq 0$. Kui kõnesolevas samasuses ξ_i asendada vektori k_α koordinaadiga $k_{\alpha i}$, saame

$$mk_\alpha = 0; \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

sest paremal pool tekib determinant, mille mingid kaks rida on võrdsed. Pärast seose (2.9) poolte skalaarkorrutamist vektoriga m on tulemuseks võrrand $m(x-a)=0$, mis näitab, et x kuulub teatavale hüpertasandile H . Seega $x \in T_{n-1} \Rightarrow x \in H$, mistõttu $T_{n-1} \subset H$.

Võtame vastupidiselt $x \in H$; siis $m(x-a)=0$, kus $m \neq 0$. Koordinaate vajaduse korral ümber nummerdades võib alati saavutada, et $A_n \neq 0$. Määrame vektorid k_α koordinaatidega

$$(k_{\alpha 1}, k_{\alpha 2}, \dots, k_{\alpha n}) = (0, \dots, 0, -A_n, 0, \dots, 0, A_\alpha), \quad (2.11)$$

kus $-A_n$ on α -nda koordinaadi kohal; $\alpha=1, \dots, n-1$. Vahetu kontroll näitab, et $mk_1=0, \dots, mk_{n-1}=0$. Lisades siia H võrrandi $m(x-a)=0$, saame n seost, mida võib vaadelda, kui nad kirjutada välja koordinaatide abil, n vektori $k_1, \dots, k_{n-1}$, $x-a$ koordinaatidest moodustatud $n \times n$ -maatriksi veergude lineaarse sõltuvuse tingimustena. Selle maatriksi determinant on seega võrdne nulliga, mistõttu ka read on lineaarselt sõltuvad. Et $k_1, \dots, k_{n-1}$ on lineaarselt sõltumatud (kontrollida!), siis

$$x-a = t_1 k_1 + \dots + t_{n-1} k_{n-1}.$$

Seega x kuulub teatavale $(n-1)$ -tasandile T_{n-1} , mistõttu $H \subset T_{n-1}$. Varasemast aga järeldub, et $T_{n-1} \subset H$, sest (2.11) asendamisel võrdusse (2.10) tekib tõesti samasus, nagu on kerge kontrollida. Kokkuvõttes $T_{n-1} = H$, mida oligi tarvis tõestada.

Veelgi üldisemalt võib näidata, et iga m -tasand T_m on $n-m$ hüpertasandi ühisosa:

$$T_m = H' \cap H'' \cap \dots \cap H^{(n-m)};$$

erijuhul sirge $s = T_1$ on $n-1$ hüpertasandi ühisosa.

Tõepoolest, T_m on määratud võrranditega

$$x_i - a_i = t_1 k_{1i} + \dots + t_m k_{mi}; \quad i = 1, \dots, n.$$

Mingist m võrrandist saab siit üheselt avaldada suurused $t_1, \dots, t_m$

kui mingi m koordinaadi x_i lineaarfunktsioonid, sest vektorite $k_1, \dots, k_m$ lineaarse sõltumatuse tõttu vähemalt üks m -järku determinant nende vektorite koordinaatidest on nullist erinev. Saadud avaldiste asendamisel ülejäänud $n-m$ võrrandisse saame $n-m$ lineaarvõrrandit, mis seovad koordinaate $x_1, \dots, x_n$. Igaühes neist võrrandeist on vähemalt ühe koordinaadi (võrdusmärgist vasakul pool oleva) ees nullist erinev kordaja. Järelikult m -tasand on nende võrranditega määratud $n-m$ hüpertasandi ühisosa.

Vastupidi, kui on antud $n-m$ hüpertasandit lineaarselt sõltumatute normaalvektoritega, siis nende ühisosa on teatav m -tasand. Tõepoolest, nende hüpertasandite võrrandid

$$A'_0 + m'x = 0, \quad A''_0 + m''x = 0, \quad \dots, \quad A_0^{(n-m)} + m^{(n-m)}x = 0$$

moodustavad x koordinaatide $x_1, \dots, x_n$ jaoks $n-m$ lineaarselt sõltumatust võrrandist koosneva süsteemi, mille lahend x avaldub ühe erilahendi a ja vastava homogeense süsteemi üldlahendi $t_1 k_1 + \dots + t_m k_m$ summana (2.8), kus $k_1, \dots, k_m$ moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi, s.t. on lineaarselt sõltumatud (vt. [1], lk. 75–79).

Osutub, et iga m -tasand T_m ruumis E_n on ise ruum E_m . Selles veendumiseks teisendame mõnevõrra vektorite $k_1, \dots, k_m$ süsteemi, võrrandiga (2.9) määratud punkti hulka T_m muutmata. Võtame $l_1 = k_1$, seejärel $l_2 = k_2 - \lambda_1 l_1$ nii, et $l_2 \perp l_1$ ehk $(k_2 - \lambda_1 l_1) l_1 = 0$, mistõttu $\lambda_1 = (k_2 l_1) |l_1|^{-2}$. Selliselt jätkates võtame üldiselt

$$l_\alpha = k_\alpha - \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2 - \dots - \lambda_{\alpha-1} l_{\alpha-1}; \quad \alpha = 3, \dots, m,$$

nii et $l_\alpha \perp l_\beta$, $\beta < \alpha$ ehk

$$(k_\alpha - \lambda_1 l_1 - \lambda_2 l_2 - \dots - \lambda_{\alpha-1} l_{\alpha-1}) l_\beta = 0, \quad \beta < \alpha,$$

mistõttu

$$\lambda_\beta = (k_\alpha l_\beta) |l_\beta|^{-2}. \quad (2.12)$$

Niiviisi järjest toimides leiame paarikaupa ristuvad (ehk ortogonaalsed) vektorid $l_1, \dots, l_m$ selliselt, et $k_1, \dots, k_m$ on nende teatavad lineaarkombinatsioonid. Kirjeldatud protsessi nimetatakse *Grami*¹—*Schmidt*² *ortogonaliseerimisprotsessiks* (vt. [1], lk. 421). Seejuures ei saa ükski l_α olla nullvektor, sest see tooks kaasa vektorite $k_1, \dots, k_m$ lineaarse sõltuvuse, mis on praegu võimatu. Võttes nüüd $f_\alpha = |l_\alpha|^{-1} l_\alpha$, saame paarikaupa ristuvate ühikvektorite $f_1, \dots, f_m$ süsteemi, kusjuures $k_1, \dots, k_m$ on endiselt nende lineaarkombinatsioonid.

Tehes asendused võrrandis (2.9), saame sellele esialgsega samaväärse uue kuju

$$x - a = u_1 f_1 + \dots + u_m f_m.$$

Seades siin punktile x vastavusse $\mathbf{R}^m$ elemendi $(u_1, \dots, u_m)$, s.t. määrates bijektsiooni $\varphi: T_m \rightarrow \mathbf{R}^m$ nii, et $\varphi(x) = (u_1, \dots, u_m)$, muu-

¹ Jørgen Pedersen Gram (1850–1916), taani matemaatik.

² Erhard Schmidt (1876–1959), saksa matemaatik, Tartu ülikooli kasvandik, Saksa DV TA liige.

dame m -tasandi T_m m -mõõtmeliseks algmuutkonnaks. Võttes veel teise punkti y koordinaatidega $v_1, \dots, v_m$, saame

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{[(u_1 - v_1)f_1 + \dots + (u_m - v_m)f_m]^2}$$

ning et siin $f_1^2 = \dots = f_m^2 = 1$, $f_\alpha \cdot f_\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$), siis

$$d(x, y) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \dots + (u_m - v_m)^2}.$$

Võrdlus valemiga (1.1) näitabki, et tõesti m -tasand ruumis E_n on ise ruum E_m . Erijuhul on ruumi E_n hüpertasand $H = T_{n-1}$ seega teatav ruum E_{n-1} .

3. Kaugused. Olgu ruumis E_n antud kaks alamhulka (kujundit) M ja N . Võtame vabalt punktid $x \in M$ ja $y \in N$ ning moodustame reaalarvude hulga $\{d(x, y) : x \in M, y \in N\}$. See on alt tõkestatud, sest $0 \leq d(x, y)$. Järelikult sellel hulgal on olemas alumine raja ([2], lk. 18). *Alamhulkade M ja N vaheline kaugus* defineeritaksegi kui see raja

$$d(M, N) = \inf_{x \in M, y \in N} d(x, y).$$

Sageli raja ka saavutatakse kui teatavate punktide $x_0 \in M$ ja $y_0 \in N$ vaheline kaugus. Sel korral $d(M, N) = d(x_0, y_0) = \min_{x \in M, y \in N} d(x, y)$.

Vaatleme esimese näitena olukorda, kus M on punkt x_0 ja N on normaalvõrrandiga

$$nx + p = 0$$

antud hüpertasand H . Näitame, et $d(x_0, H) = d(x_0, y_0)$, kus y_0 on hüpertasandi H niisugune punkt, et $y_0 - x_0$ on samasihiline normaalvektoriga n , s.t. $y_0 - x_0 = t_0 n$. Tõepoolest, hüpertasandi suvalise punkti y korral

$$d(x_0, y) = |y - x_0| = |(y - y_0) + (y_0 - x_0)| = |(y - y_0) + t_0 n|,$$

kus $n(y - y_0) = 0$. Seetõttu

$$\begin{aligned} [d(x_0, y)]^2 &= [(y - y_0) + t_0 n]^2 = (y - y_0)^2 + t_0^2 \geq \\ &\geq t_0^2 = (y_0 - x_0)^2 = [d(x_0, y_0)]^2, \end{aligned}$$

kusjuures $\geq$ asemel on $=$ parajasti siis, kui $y = y_0$, s.t.

$$d(x_0, y_0) = \min_{y \in N} d(x_0, y) = d(x_0, H).$$

Seejuures tingimusest $ny_0 + p = 0$ ehk $n(x_0 + t_0 n) + p = 0$ järeldub, et $t_0 = -(nx_0 + p)$, mistõttu

$$d(x_0, H) = |t_0| = |nx_0 + p| \quad (3.1)$$

(vrd. [6]; lk. 223, kus see tulemus on saadud ruumi E_3 puhul).

Järgnevalt vaatleme olukorda, kus M on endiselt punkt x_0 , kuid N on m -tasand T_m võrrandiga

$$x - a = t_1 k_1 + \dots + t_m k_m.$$

Kõigepealt näitame, et leidub punkt $y_0 \in T_m$ kohavektoriga $y_0 = a + t_{01}k_1 + \dots + t_{0m}k_m$ selliselt, et $x_0 y_0 = y_0 - x_0$ on risti m -tasandiga T_m , s.t. $(y_0 - x_0) \perp k_\alpha$ ehk $(y_0 - x_0)k_\alpha = 0$; $\alpha = 1, \dots, m$. Siin tekivad $t_{01}, \dots, t_{0m}$ leidmiseks võrrandid

$$[(a - x_0) + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m] k_\alpha = 0,$$

mis moodustavad lineaarvõrrandisüsteemi

[illegible]

Selle süsteemi determinant on moodustatud paarikaupa võetud vektorite $k_1, k_2, \dots, k_m$ skalaarkorrutistest. Sellist determinanti $\det |k_\alpha k_\beta|$ nimetatakse *Grami determinandiks*. Vaatleme nüüd m -tasandit T_m kui ruumi E_m ja võtame kasutusele k_α koordinaadid $k_{\alpha 1}, \dots, k_{\alpha m}$ ruumis E_m (vt. eelmise artikli lõppu). Meid huvitava Grami determinandi saame, kui korrutame determinantide korrutamise eeskirja järgi (read ridadega; vt. [1], lk. 44) järgmise determinandi iseendaga:

$$K = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mm} \end{vmatrix}.$$

Siin α -nda rea korrutis β -nda reaga on

$$k_{\alpha_1}k_{\beta_1}+k_{\alpha_2}k_{\beta_2}+\dots+k_{\alpha_m}k_{\beta_m}=k_{\alpha}k_{\beta},$$

mistõttu tõesti $K^2 = \det |k_\alpha k_\beta|$.

Et meil praegu $k_1, \dots, k_m$ on lineaarselt sõltumatud vektorid, siis $K \neq 0$ ja seega ka $\det |k_\alpha k_\beta| \neq 0$. Süsteemi (3.2) puhul on niisiis tegemist Crameri peajuhuga, mistõttu ([1], lk. 52—54)

$$t_{01} = \frac{D_1}{\det |k_\alpha k_\beta|}, \quad t_{02} = \frac{D_2}{\det |k_\alpha k_\beta|}, \quad \dots, \quad t_{0m} = \frac{D_m}{\det |k_\alpha k_\beta|}, \quad (3.3)$$

kus D_α on determinant, mis saadakse determinandist $\det |k_\alpha k_\beta|$, kui selle α -s veerg vahetatakse vabaliikmete veeruga. Sellega on soovitud punkt $y_0 \in T_m$ määratud.

Edasi näitame, et $d(x_0, T_m) = d(x_0, y_0)$. Selleks veendume, et $d(x_0, y_0) = \min_{y \in T_m} d(x_0, y)$. Vabalt võetud $y \in T_m$ korral $y = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m$, seega

$$y - x_0 = (y - y_0) + (y_0 - x_0) = (y_0 - x_0) + [(t_1 - t_{01})k_1 + \dots + (t_m - t_{0m})k_m],$$

mistõttu

$$\begin{aligned} d(x_0, y)^2 &= \{(y_0 - x_0) + [(t_1 - t_{01})k_1 + \dots + (t_m - t_{0m})k_m]\}^2 = \\ &= (y_0 - x_0)^2 + [(t_1 - t_{01})k_1 + \dots + (t_m - t_{0m})k_m]^2 \geq \\ &\geq (y_0 - x_0)^2 = d(x_0, y_0)^2, \end{aligned}$$

sest $(y_0 - x_0)k_\alpha = 0$; $\alpha = 1, \dots, m$. Seejuures $k_1, \dots, k_m$ lineaarse sõltumatuse tõttu on $\geq$ asemel $=$ parajasti siis, kui $t_1 = t_{01}, \dots, t_m = t_{0m}$, s.t. kui $y = y_0$, mida oligi vaja näidata.

Ühtlasi selgub, et

$$\begin{aligned} d(x_0, T_m)^2 &= (y_0 - x_0)^2 = (y_0 - x_0) [(a - x_0) + t_{01}k_1 + \dots + t_{0m}k_m] = \\ &= (y_0 - x_0)(a - x_0) = [(a - x_0) + t_{01}k_1 + \dots + t_{0m}k_m](a - x_0) = \\ &= \frac{1}{\det |k_\alpha k_\beta|} \{ \det |k_\alpha k_\beta| \cdot (a - x_0)^2 + D_1 k_1 (a - x_0) + \dots \\ &\quad \dots + D_m k_m (a - x_0) \} \end{aligned}$$

ja siit

$$\begin{aligned} d(x_0, T_m)^2 &= \\ &= \frac{\begin{vmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 & \dots & k_1 k_m & k_1(a - x_0) \\ k_1 k_2 & k_2^2 & \dots & k_2 k_m & k_2(a - x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 k_m & k_2 k_m & \dots & k_m^2 & k_m(a - x_0) \\ k_1(a - x_0) & k_2(a - x_0) & \dots & k_m(a - x_0) & (a - x_0)^2 \end{vmatrix}}{\det |k_\alpha k_\beta|}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

sest sulgudes $\{ \}$ on parajasti lugejas oleva determinandi arendis viimase veeru elementide järgi.

Erijuhul, mil $m=1$, on tegemist punkti x_0 kaugusega sirgest $T_1=s$ ruumis E_n :

$$d(x_0, s)^2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1^2 & k_1(a - x_0) \\ k_1(a - x_0) & (a - x_0)^2 \end{vmatrix}}{k_1^2}. \quad (3.5)$$

Kui lisaks $n=3$, saab lugejas olevale avaldisele Lagrange'i samasuse (2.5) põhjal anda kuju

$$k_1^2 (a - x_0)^2 - [k_1(a - x_0)]^2 = [k_1 \times (a - x_0)]^2$$

ning tulemuseks on ([6], lk. 220)

$$d(x_0, s) = \frac{|k_1 \times (a - x_0)|}{|k_1|}. \quad (3.6)$$

Paljuski on analoogiline sellise juhu käsitus, kus M on p -tasand T_p ja N on q -tasand T'_q , mis olgu määratud vastavalt võrranditega

$$x = a + t_1 k_1 + \dots + t_p k_p, \quad x = b + v_1 l_1 + \dots + v_q l_q.$$

Tähistame $p+q=m$, $v_1 = -t_{p+1}, \dots, v_q = -t_m$, $l_1 = k_{p+1}, \dots, l_q = k_m$. Kõigepealt näitame, et üldjuhul leiduvad punktid $x_0 \in T_p$ ja $y_0 \in T'_{m-p}$, nii et

$(x_0 - y_0) \perp k_\alpha$; $\alpha=1, \dots, m$; s.t. nii et $y_0 x_0$ on risti nii p -tasandiga T_p kui ka $(m-p)$ -tasandiga T'_{m-p} . Siin

$$x_0 - y_0 = (a - b) + t_{01}k_1 + \dots + t_{0p}k_p + t_{0,p+1}k_{p+1} + \dots + t_{0m}k_m,$$

mistõttu tingimused $(x_0 - y_0)k_\alpha = 0$ viivad samuti süsteemini (3.2), kus nüüd on x_0 asemel b . Üldjuhul $\det |k_\alpha k_\beta| \neq 0$ ja süsteemil on parajasti üks lahend (3.3), s.t. leidub parajasti üks paar meie tingimusi rahuldavaid punkte $x_0 \in T_p$, $y_0 \in T'_{m-p}$.

Osutub, et $d(x_0, y_0) = \min_{x \in T_p, y \in T'_{m-p}} d(x, y)$. Tõepoolest, suvaliste $x \in T_p$ ja $y \in T'_{m-p}$ korral

$$x = x_0 + (t_1 - t_{01})k_1 + \dots + (t_p - t_{0p})k_p,$$

$$y = y_0 - (t_{p+1} - t_{0,p+1})k_{p+1} - \dots - (t_m - t_{0m})k_m$$

ja seega

$$d(x, y)^2 = (x - y)^2 = \{(x_0 - y_0) + [(t_1 - t_{01})k_1 + \dots + (t_m - t_{0m})k_m]\}^2.$$

Edasine kordab eelnevat ning viib $d(T_p, T_{m-p})$ jaoks samasuguse valemmini nagu (3.4), ainukese erinevusena on selle paremas pooles nüüd x_0 asemel b .

Näiteks juhul $p = m - p = 1$ saame valemi kahe sirge s ja s' vahelise kauguse jaoks ruumis E_n :

$$d(s, s')^2 = \frac{\begin{vmatrix} k^2 & kl & k(a-b) \\ kl & l^2 & l(a-b) \\ k(a-b) & l(a-b) & (a-b)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k^2 & kl \\ kl & l^2 \end{vmatrix}}. \quad (3.7)$$

Ruumis E_3 saab parema poole lugeja kui Grami determinandi esitada vektorite k, l ja $a - b$ koordinaatidest moodustatud determinandi ruuduna, nimetaja aga on Lagrange'i samasuse (2.5) põhjal $(k \times l)^2$. Tekib lihtne avaldis $d(s, s') = h$ jaoks ([6], lk. 226).

4. Pindala ja ruumala. Järgnevalt näitame, kuidas valemi (3.4) ja selle erijuhtude abil esmalt defineerida ning seejärel ka avaldada niisugused suurused nagu rööpküliku pindala, rööptahuka ruumala jne., üldiselt m -rööptahuka m -ruumala.

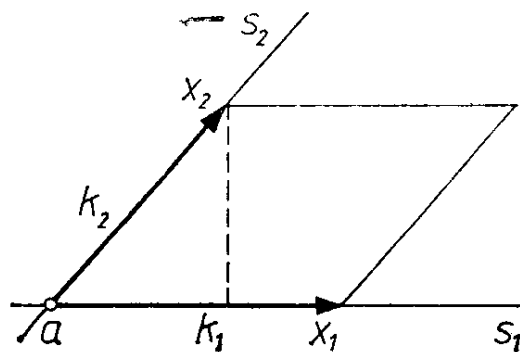
Olgu ruumis E_n antud punkt a ja kaks lineaarselt sõltumatut vektorit k_1 ja k_2 . Ruumi E_n alamhulka, mis koosneb punktidest x kohavektoritega

$$x = a + t_1 k_1 + t_2 k_2, \quad 0 \leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1, \quad (4.1)$$

nimetatakse *rööpnelinurgaks*. Alamhulki, mille korral siin ühe $\leq$ asemel on $=$, nimetatakse *külgedeks*; kui kahe $\leq$ asemel on $=$, siis saadakse punktid, mida nimetatakse *tippudeks*. Kõigi nelja tipu ja nelja külje ühendit nimetatakse *rööpkülikuks*.

Tähistame $x_0^{(2)} = a + k_2$, see on teatava tipu $x_0^{(2)}$ kohavektor. Vaatleme külge, mis asub sirgel s_1 võrrandiga $x = a + t_1 k_1$. Valemi (3.5) kohaselt

$$|k_1| \cdot d(x_0^{(2)}, s_1) = \sqrt{k_1^2 k_2^2 - (k_1 k_2)^2}. \quad (4.2)$$



Joonis 2

Et siin parem pool k_1 ja k_2 vahetamisel ei muutu, siis on sama omadus ka vasakul poolel, mistõttu ta on samal ajal ka $|k_2| \cdot d(x_0^{(1)}, s_2)$, kus $x_0^{(1)}$ on tipp kohavektoriga $x_0^{(1)} = a + k_1$ ja s_2 — sirge võrrandiga $x = a + t_2 k_2$ (joon. 2, millel $x_0^{(i)}$ on tähistatud X_i).

Mittenegatiivset reaalarvu (4.2) ehk «aluse» $|k_i|$ ja «kõrguse» $d(x_0^{(2)}, s_i)$ korrutist, kus i on 1 või 2, nimetatakse vaadeldava rööpnelinurga pindalaks ja tähistatakse $S(k_1, k_2)$. Seega

$$S(k_1, k_2)^2 = \begin{vmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Ruumi E_3 korral Lagrange'i samasuse (2.5) põhjal $k_1^2 k_2^2 - (k_1 k_2)^2 = (k_1 \times k_2)^2$, mistõttu siin ([6], lk. 124, 131)

$$S(k_1, k_2) = |k_1 \times k_2|. \quad (4.4)$$

Üldiselt ruumi E_n alamhulka, mis koosneb punktidest x kohavektoritega

$$x = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m + t_{m+1} k_{m+1}, \quad 0 \leq t_\xi \leq 1, \quad (4.5)$$

kus a on antud vektor, $\xi = 1, \dots, m+1$ ja $k_1, \dots, k_{m+1}$ on lineaarselt sõltumatud fikseeritud vektorid, nimetatakse $(m+1)$ -rööptahukaks (ka $(m+1)$ -paralleel-epipeediks).

Näitame, kuidas defineerida ja avaldada $(m+1)$ -rööptahuka $(m+1)$ -ruumala eeldusel, et juba on defineeritud ja avaldatud m -rööptahuka m -ruumala $V_m(k_1, \dots, k_m)$ valemiga

$$V_m(k_1, \dots, k_m)^2 = \det |k_\alpha k_\beta|; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

mis on valemi (4.3) üldistus (sümbol S samastatakse sümboliga V_2 ; ühtlasi märgime, et $V_1(k_1) = |k_1|$).

Selleks vaatleme eespool defineeritud $(m+1)$ -rööptahuka punkti (tippu) x_0 kohavektoriga $x_0 = a + k_{m+1}$. Võtame m -tasandil T_m võrrandiga $x = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m$ m -rööptahuka, mis määratakse võrratustega $0 \leq t_\alpha \leq 1$ ja mille m -ruumalaks on eelduse kohaselt (4.6). Valemist (3.4) järeldub, et

$$d(x_0, T_m) \cdot V_m(k_1, \dots, k_m) = \sqrt{\det |k_\xi k_\eta|}.$$

Seda suurust — «kõrguse» $d(x_0, T_m)$ ja «alustahu» m -ruumala kor-

rutist, mis, nagu näitab parem pool, ei muutu vektorite $k_1, \dots, k_{m+1}$ vahetamisel (s. t. ei sõltu sellest, millisele $(m+1)$ -rööptahuka «alustahule» on «kõrgus» võetud) — nimetataksegi vaa-
deldava $(m+1)$ -rööptahuka $(m+1)$ -ruumalaks ja tähistatakse $V_{m+1}(k_1, \dots, k_{m+1})$. Seega

$$V_{m+1}(k_1, \dots, k_{m+1})^2 = \det |k_\xi k_\eta|; \quad \xi, \eta = 1, \dots, m+1.$$

Tulemus näitab, et valemi (4.6) kehtivusest m mingi konkreetse väärtuse korral järeldub sama valemi kehtivus ka $m+1$ korral. Alustades nüüd väärtusest $m=2$, s. t. $S(k_1, k_2) = V_2(k_1, k_2)$ avaldisest (4.3) võib tõesti samm-sammult teha kindlaks valemi (4.6) kehtivuse m suvalise väärtuse korral, $2 \leq m \leq n$.

5. Nurgad. Nurga mõiste ruumis E_n defineeritakse kõigepealt kahe nullist erineva vektori k ja l jaoks. Võrratusest (1.8) järeldub, et

$$|kl| \leq |k| |l|. \quad (5.1)$$

Seega leidub parajasti üks reaalarv φ , nii et $0 \leq \varphi \leq \pi$ ja

$$\cos \varphi = \frac{kl}{|k| |l|}. \quad (5.2)$$

Seda reaalarvu φ nimetatakse vektorite $k \neq 0$ ja $l \neq 0$ vaheliseks *nurgaks* (radiaanmõõdus). Siit järeldub, et k ja $-k$ vaheline nurk on π , ristuvate vektorite k ja l vaheline nurk aga $\frac{\pi}{2}$.

Selleks et meil ei tekiks loogiline ring, eriti $n=3$ puhul (s. t. et ruumi E_3 geomeetria ülesehitamine ei tugineks selle geomeetria enda sees tuletatava koosinus-funktsiooni mõistele), tuleb $\cos \varphi$ defineerida näiteks reaksarendusega ([3], lk. 76)

$$\cos \varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots$$

Siit tulenevalt on $\cos \varphi$ kogu reaalteljel $\mathbf{R}$ määratud pidev funktsioon ([3], lk. 68), mis koos analoogiliselt reaksarenduse abil defineeritava funktsiooniga

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

rahuldab samasust

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

ning seetõttu ka võrratust $-1 \leq \cos \varphi \leq 1$; seejuures $\cos \varphi$ on lõigul $[0, \pi]$ rangelt monotoonne (kahanev), omandades kõiki väärtusi lõigul $[-1, 1]$ parajasti üks kord ([2], lk. 29). Et võrduse (5.2) parema poole väärtused on (5.1) põhjal lõigul $[-1, 1]$, siis leidub tõesti parajasti üks tingimust (5.2) rahuldav reaalarv φ , nii et $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Kui $k \neq 0$ on antud sirge mingi sihivektor, siis koos temaga on selle sirge sihivektor ka $-k$. Täpselt samuti on antud hüpertasandi normaalvektoriks koos vektoriga m ka vektor $-m$.

Nurgaks kahe sirge vahel nimetatakse nurka nende sirgete sihivektorite k ja l vahel, kusjuures sihivektorid valitakse niimoodi, et

$kl \geq 0$. Nurgaks kahe hüpertasandi vahel nimetatakse nurka nende hüpertasandite normaalvektorite m ja n vahel, eeldusel, et $mn \geq 0$. Kui nurk on 0, siis kahe sirge või kahe hüpertasandi puhul öeldakse, et nad on *samasihilised* (vastavalt *samarihilised*); kui nad on ühispunktita, siis kõneldakse, et nad on *paralleelsed*.

Nurgaks sirge ja hüpertasandi vahel nimetatakse reaalarvu $\pi/2 - \varphi$, kus φ on nurk sirge sihivektori k ja hüpertasandi normaalvektori m vahel eeldusel, et $km \geq 0$.

Kõikidel ülaldefineeritud juhtudel nurk kui teatav reaalarv on lõigus $[0, \pi/2]$. Kui nurk on $\pi/2$, siis kõneldakse *ristumisest* (ehk *ortogonaalsusest*).

Ühtlasi on defineeritud ka nurk m -tasandi T_m ja temaga ühispunkti omava sirge s vahel ruumis E_n . Osutub nimelt, et sel juhul s ja T_m on teatavas $(m+1)$ -tasandis T_{m+1} . Tõepoolest, kui ühispunkt on a , siis s ja T_m on esitatavad vastavalt vörranditega $x = a + tk$ ja $x = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m$. Kui nüüd vaadelda $(m+1)$ -tasandit T_{m+1} , mis on määratud vörrandiga

$$x = a + t_1 k_1 + \dots + t_m k_m + t_{m+1} k_{m+1},$$

kus lineaarselt sõltumatute $k_1, \dots, k_m, k$ korral võetakse $k_{m+1} = k$, sõltuvuse $k = \lambda_1 k_1 + \dots + \lambda_m k_m$ korral aga k_{m+1} valik on vaba, siis T_m ja s on tasandi T_{m+1} alamhulgad. T_m määratakse tingimusega $t_{m+1} = 0$, s aga eraldatakse vastavalt kas $t_1 = \dots = t_m = 0$ või $t_{m+1} = 0$, $t_1 = \lambda_1 t$, $\dots$, $t_m = \lambda_m t$ poolt. Samal ajal T_{m+1} on ruum E_{m+1} (vt. art. 2), mistõttu meil on tegemist sirge ja hüpertasandiga ruumis E_{m+1} ja me võime rakendada ülaltoodud definitsiooni.

Vajaliku arvutuseeskirja saamiseks vaatleme veelgi üldisemat juhtu ning uurime k -tasandi T_k ja l -tasandi T_l vahelisi nurki. Siin tuleb kasutada mitme muutuja funktsiooni tinglike ekstreemumite tingimusi ([3], lk. 225—227).

Võtame T_k ja T_l vastavalt k - ja l -rihtides vabalt ühikvektorid

$$k = t_1 k_1 + \dots + t_k k_k, \quad l = u_1 l_1 + \dots + u_l l_l.$$

Nendevahelise nurga φ puhul $\cos \varphi = kl$ ja see osutub $t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_l$ funktsiooniks lisatingimustel $|k| = |l| = 1$.

Selle funktsiooni tinglike ekstreemumite leidmiseks (need on ühtlasi ka φ ekstreemumid) tuleb Lagrange'i meetodi kohaselt moodustada funktsioon

$$\Phi = kl + \lambda(k^2 - 1) + \mu(l^2 - 1).$$

Et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_i} = k_i l + 2\lambda k k_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_j} = k l_j + 2\mu l l_j,$$

siis statsionaarsete väärtuste korral

$$\begin{aligned} k_i l + 2\lambda k k_i &= 0, \\ k l_j + 2\mu l l_j &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Korrutades esimeste vörduste pooli vastavalt suurustega t_i ; $i=1, \dots, k$ ja summeerides tulemused, ning tehes sama teiste vördustega, ainult seekord korrutades suurustega u_j ; $j=1, \dots, l$, saame φ statsionaarse väärtuse andvad ühikvektorid k ja l :

$$\begin{aligned} kl + 2\lambda &= 0, \\ kl + 2\mu &= 0, \end{aligned}$$

millest $2\lambda = 2\mu = -kl = -\cos \varphi$.

Nagu selgus art-s 2, võib üldisust kitsendamata eeldada, et $k_1, \dots, k_k$ on vaadeldava k -rihi ja $l_1, \dots, l_l$ on vaadeldava l -rihi paarikaupa ristuvad ühikvektorid (vajaduse korral tuleb eelnevalt rakendada Grami—Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi). Sel eeldusel saab (5.3) esitada kujul

$$\begin{aligned} \sum_j (k_i l_j) u_j - t_i \cos \varphi &= 0, \\ \sum_i (k_i l_j) t_i - u_j \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Elimineerides siit kord $u_1, \dots, u_l$, kord $t_1, \dots, t_k$, saame

$$\begin{aligned}\sum_{j,i'} (k_i l_j) (k_i l_j) t_{i'} &= t_i \cos^2 \varphi, \\ \sum_{i,j'} (k_i l_j) (k_i l_j) u_{j'} &= u_j \cos^2 \varphi.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Selgub, et niimoodi määratav $\mathbf{k} = \sum_i t_i \mathbf{k}_i$ on k -tasandi T_k k -rihis teatava sümmeetrilise maatriksi $A = \|A_{ii'}\|$ omaväärtusele $\cos^2 \varphi$ vastav omavektor, kus $A_{ii'} = \sum_j (k_i l_j) (k_i l_j)$. Samamoodi saadud $\mathbf{l} = \sum_j u_j \mathbf{l}_j$ on l -tasandi T_l l -rihis teatava sümmeetrilise maatriksi $B = \|B_{jj'}\|$ samale omaväärtusele $\cos^2 \varphi$ vastav omavektor. Seejuures meenutame, et $\cos \varphi = \mathbf{k} \mathbf{l}$ on siin nurga φ mingi statsionaarse väärtuse koosinus. Teatavasti sümmeetrilise maatriksi erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid on risti (vt. [1], lk. 434). Seega erinevate statsionaarsete nurkade φ ja φ' puhul on vastavad vektorid $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{k}'$ ning samuti vektorid $\mathbf{l}$ ja $\mathbf{l}'$ risti, kusjuures $\mathbf{k} \mathbf{l} = \cos \varphi$, $\mathbf{k}' \mathbf{l}' = \cos \varphi'$. Osutub aga, et ka $\mathbf{k} \perp \mathbf{l}'$, $\mathbf{k}' \perp \mathbf{l}$. Tõepoolest, (5.4) kohaselt

$$\begin{aligned}\mathbf{k} \cos \varphi &= \sum_i k_i (\mathbf{k}_i \mathbf{l}), \\ \mathbf{l}' \cos \varphi' &= \sum_j l_j (\mathbf{k}' \mathbf{l}_j),\end{aligned}\tag{5.6}$$

mistõttu

$$(\mathbf{k}' \mathbf{l}') \cos \varphi \cos \varphi' = \sum_{i,j} (k_i l_j) (k_i l_j) (\mathbf{k}' \mathbf{l}_j).$$

Siin (5.5) järgi

$$\begin{aligned}\sum_i (k_i l_j) (k_i l_j) &= u_j \cos^2 \varphi, \\ \sum_j (k_i l_j) (k_i l_j) &= t_i \cos^2 \varphi',\end{aligned}$$

ja seega

$$(\mathbf{k}' \mathbf{l}') \cos \varphi \cos \varphi' = (\mathbf{k}' \mathbf{l}) \cos^2 \varphi = (\mathbf{k}' \mathbf{l}) \cos^2 \varphi'$$

ehk

$$(\mathbf{k}' \mathbf{l}) (\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi') = 0,$$

millest $\mathbf{k}' \mathbf{l} = 0$. Täpselt sama saab teha vektorite $\mathbf{k}$ ja $\mathbf{l}'$ puhul ja leida analoogiliselt, et $\mathbf{k} \mathbf{l}' = 0$.

Kokkuvõttes $\mathbf{k} \mathbf{k}' = \mathbf{k} \mathbf{l}' = \mathbf{l} \mathbf{k}' = \mathbf{l} \mathbf{l}' = 0$, mistõttu $(\kappa \mathbf{k} + \lambda \mathbf{l}) (\kappa' \mathbf{k}' + \lambda' \mathbf{l}') = 0$ suvaliste reaalarvude κ, λ, κ' ja λ' korral. Niisiis rihid, milles realiseeruvad erinevad statsionaarsed nurgad φ ja φ' tasandite T_k ja T_l vahel, on sellised, et iga vektor ühest on risti iga vektoriga teisest. Sellise omadusega rihte nimetatakse *täielikult ristuvaks*. Praegu saadud täielikult ristuvaid rihte nimetatakse k -tasandi T_k ja l -tasandi T_l *juhtrihtideks*. Alati võib lugeda, et $k \leq l$, vajaduse korral vahetades k ja l osad. Üldjuhul on siis k erinevat statsionaarset nurka, millest igaüks kujutab endast nurka mingis juhtrihis asuvate ning tasandite T_k ja T_l rihtidesse kuuluvate ühikvektorite vahel. Kui statsionaarne nurk $\varphi \neq 0$, siis juhtriht on 2-riht, kui aga $\varphi = 0$, siis $\mathbf{l} = \pm \mathbf{k}$ ja vastav juhtriht kidub 1-sihiks.

Erijuhul võib olla tegemist kordse statsionaarse nurgaga, mille puhul vastav juhtriht ei ole määratud üheselt. Sel korral muutuva juhtrihi ühisosa kummagi vaadeldava tasandi rihiga täidab kummalgi neist q -rihi, kus q on omaväärtuse $\cos^2 \varphi$ kordsus. Erilist huvi pakub järgmine äärmuslik erijuht.

Kui kahe m -tasandi korral nende kõik statsionaarsed nurgad on võrdsed, s.t. omaväärtus $\cos^2 \varphi$ on m -kordne, siis nimetatakse neid m -tasandeid isokliinseteks ja statsionaarsete nurkade ühist väärtust nende m -tasandite vaheliseks nurgaks φ . Kui $\varphi = \pi/2$, siis nimetatakse isokliinseid m -tasandeid *täielikult ristuvaks*. Nagu eespool selgus, on sellised näiteks juhtrihid.

Jääb veel kindlaks teha, et eeltoodud k - ja l -tasandite vaheliste nurkade käsitlemise tulemused on kooskõlas sirge ja hüpertasandi vahelise nurga definitsiooniga. Viimasel juhul $k=1$ ja $l=n-1$; vektorid $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{n-1}$ moodustavad siin koos hüpertasandi normaalühikvektoriga $\mathbf{n} = \mathbf{l}_n$ ortonormeeritud baasi ruumi E_n n -rihis ning on võimalik avaldada $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{l}_1 + \dots + k_n \mathbf{l}_n$, kus $k_J = \mathbf{k} \mathbf{l}_J$; $J=1, \dots, n$.

Et k on ühikvektor, siis $1 = k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2 + k_n^2$. Süsteemi (5.5) põhjal, kus nüüd $i = i' = 1$, on praegu tegemist üheainsa omaväärtusega

$$\cos^2 \varphi = (kl_1)^2 + \dots + (kl_{n-1})^2 = k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2 = 1 - k_n^2 = 1 - (kn)^2,$$

millest

$$(kn)^2 = 1 - \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi,$$

nagu ongi fikseeritud sirge ja hüpertasandi vahelise nurga definitsioonis.

Analoogiliselt saab näidata käsitluste kooskõla ka kahe hüpertasandi puhul, kui eelnevalt valida vektorid $k_1, \dots, k_{n-1}$ ja $l_1, \dots, l_{n-1}$, nii et $k_2 = l_2, \dots, k_{n-1} = l_{n-1}$ on hüpertasandite ühisosa $(n-1)$ -rihis. Edasise jätame lugeja teha.

Harjutusülesanded

1. Ruumis E_4 on antud punktid a ja b koordinaatidega vastavalt $(-1, 1, 0, 2)$ ja $(3, 0, 1, -1)$. Koostada a) nendest punktidest võrdsetel kaugustel olevate punktide hulga (hüpertasandi) võrrand; b) neid punkte läbiva sirge võrrandid.

2. Ruumis E_4 on antud kaks 2-tasandit, millest üks läbib punkte $(0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(2, 0, 0, 2)$ ja teine punkte $(1, 0, -1, 0)$, $(-1, 2, 2, 0)$ ja $(0, 0, 0, \lambda)$. Koostada nende 2-tasandite võrrandid ja selgitada, millises vastastikusel asendis on need 2-tasandid sõltuvalt λ väärtusest.

3. Arvutada punkti $(0, 0, 0, \lambda)$ kaugus eelmise ülesande esimesest 2-tasandist.

4. Veenduda Lagrange'i samasuse (1.7) kehtivuses, tehes vajalikud arvutused.

5. Kontrollida, et kui seose (2.10) abil määratud vektor m tähistada $m = [k_1 k_2 \dots k_{n-1}]$, siis on rahuldatud vektorkorrutise omadustega (2.5) analoogilised seosed:

$$[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_{n-1}] = -[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_{n-1}],$$

$$[k_1 \dots (\kappa k_i) \dots k_{n-1}] = \kappa [k_1 \dots k_i \dots k_{n-1}],$$

$$[k_1 \dots (k'_i + k''_i) \dots k_{n-1}] = [k_1 \dots k'_i \dots k_{n-1}] + [k_1 \dots k''_i \dots k_{n-1}].$$

6. Näidata, et $[k_1 k_2 \dots k_{n-1}] k_n$ on vektorite $k_1, \dots, k_n$ koordinaatidest moodustatud n -realne determinant.

7. Tõlgendada geomeetriliselt Grami—Schmidt'i ortogonaliseerimisprotsessi, rakendades kõik vektorid mingist punktist $a \in T_m$ ning veendudes, et l_α on selle punkti ja vektoritega $k_\alpha, l_1, \dots, l_{\alpha-1}$ määratud α -tasandi T_α (kui ruumi E_α) teatava hüpertasandi normaalvektor.

8. Kui $(m+1)$ -rööptahuka definitsioonis (4.5) kõigi $\leq$ asemel peale ühe on $=$, siis nimetatakse saadavat punktihulka selle $(m+1)$ -rööptahuka servaks. Kui kõik servad on paarikaupa risti, siis kõneldakse $(m+1)$ -risttahukast. Näidata, et $(m+1)$ -risttahuka $(m+1)$ -ruumala on servapikkuste korrutis.

9. Näidata, et ruumis E_4 antud 2-tasandi ja seda lõikava sirge korral läheb läbi selle sirge üldjuhul kaks 2-tasandit, mis on isokliinsed antud 2-tasandiga.

§ 2. AEGRUUM JA PSEUDOEUKLEIDILINE GEOMEETRIA

Kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi E_3 üldistustest on raketiduslikult tähtsaim neljamõõtmeline aegruum, mis moodustab geomeetrilise aluse ajas muutuvate nähtuste käsitlemiseks.

Kolmele koordinaadile ruumis E_3 lisandub neljandana aeg kui uus reaalarvuline muutuja, seejuures eelissuunaga minevikust tulevikku. Nähtusi kirjeldava mehaanika — kas klassikalise või relativistliku — valikust sõltub aegruumile omistatav geomeetria.

Käesolevas paragrahvis arendame erirelatiivsusteooria aegruumi geomeetriat, mis erineb eukleidilise ruumi E_4 geomeetriast selle poolest, et kahe punkti vahelise kauguse valemis on neljandate koordinaatide vahe ruut mitte märgiga $+$, vaid märgiga $-$. Vastavalt sellele pole vektori skalaarruudu avaldis enam positiivselt määratud ruutvorm vektori koordinaatidest. Saadav ruum, nn. Minkowski¹ ruum 1E_4 , on erijuht üldmõistest «pseudoeukleidiline ruum hE_n ». Viimase erinevus ruumist E_n seisneb selles, et vektori skalaarruudu avaldises on tema puhul k viimase koordinaadi ruudu ees märk $+$ asendunud märgiga $-$. Ruumi hE_n geomeetriat (erijuhul Minkowski ruumi 1E_4 geomeetriat) nimetatakse pseudoeukleidiliseks geomeetriaks. Alljärgnevas käsitleme seda küllaldase põhjalikkusega, kuid meil ei ole võimalik pikemalt peatuda nendel füüsikaprobleemidel, mis on tinginud vajaduse pseudoeukleidilise geomeetria järele. Asjast sügavamalt huvitunud lugeja leiab lisamaterjali teosest [7] ja selles soovitatud kirjandusest.

6. Aegruumi geomeetriad ja pseudoeukleidiline ruum. Aja lisandumisel omalaadse neljanda koordinaadina kujuneb algmõisteks *elementaarsündmus*, mille all mõistetakse ruumi E_3 punkti X ja ajahetke t paari (X, t) — punktis X olemist hetkel t . Seejuures eeldatakse, et t võib omandada kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi. Kõigi elementaarsündmuste hulka nimetatakse (klassikaliseks) aegruumiks $M_4 = E_3 \times \mathbb{R}$.

Vaatleme ruumi E_3 teatavat koordinaatkujutust $\varphi: E_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mille puhul $\varphi(X) = (x_1, x_2, x_3)$ ning kahe punkti X ja Y vaheline kaugus avaldub valemiga

$$d(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}. \quad (6.1)$$

Määrame aegruumi M_4 koordinaatkujutuse $\psi: M_4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ järgmiselt:

$$\psi(X, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

kus $x_4 = ct$; c on teatav konstant, mis fikseerib ajaühiku valiku ruumis E_3 määratud kauguse suhtes. Nagu näha, *kujutab aegruum M_4 endast neljamõõtmelist almuutkonda*.

Koordinaatkujutuse φ jaoks on teada ([6], lk. 248, 122, 123), et kahe punkti vaheline kaugus avaldub valemiga (6.1) ka lõpmata paljude teiste analoogiliste koordinaatkujutuste puhul. Kui näiteks $\varphi'(X) = (x'_1, x'_2, x'_3)$, kus

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_j + c_i; \quad i=1, 2, 3, \quad (6.2)$$

ja maatriks $C = \|c_{ij}\|$ on ortogonaalmaatriks, s. t. $C^{-1} = C^T$, siis, täpselt samuti nagu valemis (6.1),

$$d(X, Y) = \sqrt{(x'_1 - y'_1)^2 + (x'_2 - y'_2)^2 + (x'_3 - y'_3)^2}.$$

¹ Hermann Minkowski (1864—1909), saksa matemaatik ja füüsik.

Seetõttu ei ole ühel koordinaatkujutusel φ mingit eelist teise samalaadse φ' ees ruumi E_3 geomeetria arendamisel.

Aegruumi M_4 geomeetria kujundamisel on samuti oluline fikseerida, missugused koordinaatkujutused ψ ja ψ' loetakse samaväärseteks, missugused mitte. Ruumi E_3 geomeetriast tuleb üle minna mehaanikasse, sest haaratud on ka aeg. Klassikalisel mehaanikas, kus ruumile omistatakse absoluutne tähendus ([7], lk. 47), säilitatakse aegruumi M_4 lahutus ruumiks ja ajaks: $M_4 = E_3 \times \mathbf{R}$. Ajakoordinaat x_4 saab sel juhul teiseneda ainult omaette: kui ajaühikut ei muudeta, siis

$$x'_4 = x_4 + c_4, \quad (6.3)$$

kus c_4 mõõdab alghetke muutumist. Valemeisse (6.2) aga lisanduvad ajakoordinaadiga liikmed:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 c_{ij}x_j + c_{i4}x_4 + c_i; \quad i=1, 2, 3, \quad (6.4)$$

mis, nagu osutub, näitavad ruumis E_3 toimuva liikumise kiirust. Tõepoolest, kui võtta kaks elementaarsündmust, mis ψ seisukohalt toimuvad samas punktis $A(a_1, a_2, a_3)$, kuid eri aegadel t ja τ , ning tähistada nende koordinaadid ψ' puhul ühel sündmusel (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) , teisel (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) , siis (6.3) põhjal

$$x'_4 - y'_4 = x_4 - y_4 = ct - c\tau = c(t - \tau),$$

kuid (6.4) järgi

$$x'_i - y'_i = c_{i4}(x_4 - y_4) = c_{i4} \cdot c(t - \tau).$$

Moodustades nüüd vektori

$$v = \left(\frac{x'_1 - y'_1}{t - \tau}, \frac{x'_2 - y'_2}{t - \tau}, \frac{x'_3 - y'_3}{t - \tau} \right) = (cc_{14}, cc_{24}, cc_{34}),$$

leiame, et v pikkus

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{x'_1 - y'_1}{t - \tau} \right)^2 + \left(\frac{x'_2 - y'_2}{t - \tau} \right)^2 + \left(\frac{x'_3 - y'_3}{t - \tau} \right)^2} = \frac{d(X', Y')}{|t - \tau|}$$

on punktide vahelise kauguse $d(X', Y')$ ja ajavahemiku $|t - \tau|$ suhe, seega liikumise kiirus. Punkti $A \in E_3$ valikust see vektor v ei sõltu. Teda nimetatakse kiirusvektoriks. Seejuures valemeisse (6.4) lisandunud liikmete kordajad on, nagu näha, vektori $\frac{1}{c}v$ koordinaadid.

Valemitega (6.4) ja (6.3) aegruumis M_4 määratud teisendust nimetatakse *Galilei¹ teisenduseks*. Kõik Galilei teisendused moodus-

¹ Galileo Galilei (1564–1642), itaalia füüsik ja astronoom.

tavad teisenduste rühma ([1], lk. 356; [6], lk. 277). Et kõnesolevad teisendusvalemid on lineaarsed ja nende maatriks regulaarne, siis on see rühm afiinsete teisenduste rühma alamrühm ([6], lk. 258, 597). Kleini printsiibi kohaselt ([6], lk. 601) võib öelda, et Galilei teisenduste rühm määrab aegruumi teatava geomeetria, mida nimetatakse *Galilei geomeetriaks*. See on aegruumi geomeetria klassikalise mehaanika jaoks. Käesolevas kursuses me sellel pikemalt ei peatu.

Kui valemite (6.3) ja (6.4) puhul alghetk ja koordinaadid ruumis E_3 jätta muutmata, siis $c_4=0$, $c_i=0$ ning maatriks C on ühikmaatriks. Piirdudes liikumistega esimese koordinaattelje sihis, saame need valemid järgmisel lihtsal kujul:

$$x'_1 = x_1 + vt, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = t. \quad (6.5)$$

Valemitega (6.5) määratud aegruumi teisendust nimetatakse *Galilei eriteisenduseks* ([7], lk. 50); v on liikumise kiirus.

Erirelatiivsusteoorias vaadeldakse aegruumi seostatud tervikuna ning ei peeta ruumiks ja ajaks lahutust $M_4 = E_3 \times \mathbb{R}$ absoluutseks. Galilei eriteisendused (6.5) asendatakse *Lorentzi¹ eriteisendustega*:

$$x'_1 = \frac{x_1 + vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad t' = \frac{t + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (6.6)$$

milles aeg on seatud sõltuvusse ka ruumikoordinaadist. Märgime, et kui $c \rightarrow \infty$, siis valemid (6.6) annavad uuesti Galilei eriteisenduse valemid (6.5). Samal ajal nähtub valemist (6.6), et $\frac{v}{c} < 1$;

s.t. $v < c$. Seega erirelatiivsusteooria järgi ei saa kiirused ruumis ületada teatavat tõket c , mis kujutab endast kõikvõimalike kiiruste piirkiirust; füüsikas on selleks piirkiiruseks valguse kiirus ([7], lk. 54).

Lorentzi eriteisenduste puhul on põhilise tähtsusega asjaolu, et kahe elementaarsündmuse (x_1, x_2, x_3, t) ja (y_1, y_2, y_3, τ) puhul jääb muutumatuks suurus

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - c^2(t - \tau)^2. \quad (6.7)$$

Kahe keskmise liikme osas järeldub see vahetult kahest keskmisest valemist (6.6). Kahe äärmise liikme summa puhul on kontroll järgmine:

$$\begin{aligned} (x'_1 - y'_1)^2 - c^2(t' - \tau')^2 &= \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1} \left\{ [(x_1 - y_1) + v(t - \tau)]^2 - \right. \\ &\quad \left. - c^2 \left[(t - \tau) + \frac{v}{c^2} (x_1 - y_1) \right]^2 \right\} = \\ &= \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{-1} \left\{ \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] (x_1 - y_1)^2 + (v^2 - c^2)(t - \tau)^2 \right\} = \\ &= (x_1 - y_1)^2 - c^2(t - \tau)^2. \end{aligned}$$

¹ Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), hollandi füüsik.

Ruutjuurt suurusest (6.7), kus võib veel asendada $c^2(t - \tau)^2 = (x_4 - y_4)^2$, tõlgendatakse erirelatiivsusteoorias ülalmainitud kahe elementaarsündmuse kui aegruumi punktide vahelise *kaugusena*¹

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 - (x_4 - y_4)^2}. \quad (6.8)$$

Erinevus; võrreldes kauguse valemiga (1.1) eukleidilise ruumi E_4 juhul, seisneb selles, et märk $+$ liikme $(x_4 - y_4)^2$ ees on nüüd asendunud märgiga $-$. Üldiselt võib selliseid märgivahetamisi lubada ka rohkem. Me jõuame järgmise definitsioonini, mis üldistab eukleidilise ruumi E_n mõistet.

Algmuutkonda M_n koordinaatkujutusega $\psi: M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ nimetatakse n -mõõtmeliseks *pseudoeukleidiliseks ruumiks* (indeksiga k) ja tähistatakse kE_n , kui tema iga kahe punkti x ja y jaoks on defineeritud nende punktide vaheline kaugus $d(x, y)$ valemiga

$$d(x, y) = \{ (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-k} - y_{n-k})^2 - (x_{n-k+1} - y_{n-k+1})^2 - \dots - (x_n - y_n)^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (6.9)$$

kus $\psi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, $\psi(y) = (y_1, \dots, y_n)$.

Eukleidiline ruum E_n on niisiis pseudoeukleidiline ruum indeksiga 0, s.t. $E_n = {}^0E_n$. Tavaliselt siiski kasutatakse nimetust «pseudoeukleidiline ruum» üksnes juhtudel, mil $k > 0$, s.t. mil ruumi E_n kauguse valemis (1.1) on tõesti osa $+$ -märke asendunud märkidega $-$; asjaolu, et valemis (6.9) on miinusmärk viimase k liikme ees, pole siin oluline, sest vajaduse korral võib koordinaadid sobivalt ümber nummerdada.

Vastavalt relatiivsusteooriale on aegruumi geomeetriaks valemi (6.8) põhjal ruumi 1E_4 geomeetria. Seda ruumi 1E_4 — neljamõõtmelist pseudoeukleidilist ruumi indeksiga 1 — nimetatakse *Minkowski ruumiks*.

Alljärgnevalt pseudoeukleidilisi ruume uurides piirdume ruumidega 1E_n . Üleminek juhule, mil $k > 1$, ei valmista erilisi raskusi, kuid selle järgi meil käesolevas kursuses vajadust ei teki.

Ruumis 1E_n määratud kaugusel on see iseärasus, et ta võib osutada puhtimaginaararvuks ([1], lk. 170). Kui näiteks valemi (6.8) puhul $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, siis

$$d(x, y) = \sqrt{-(x_4 - y_4)^2} = i|x_4 - y_4|.$$

Et ruumi 1E_n uurimisel imaginaarsusest nagunii ei pääse, siis on otstarbekas viimase koordinaadi x_n asemel kasutusele võtta puhtimaginaarne koordinaat

$$x_n^* = ix_n.$$

¹ Seda kaugust nimetatakse sageli ka elementaarsündmuste vaheliseks *intervalliks* (vt. [7], lk. 65, kus on üksikasjalikumalt selgitatud põhjusi, mis tingivad sellise suuruse kasutuselevõtu aegruumi geomeetrias, lähtudes erirelatiivsusteooria nõuetest).

Sel juhul saab valemile (6.9), kus praegu $k=1$, anda sama algebralise kuju, mis on kahe punkti vahelise kauguse valemil ruumi E_n korral:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 + (x_n^* - y_n^*)^2}. \quad (6.10)$$

Selline samm võimaldab pseudoeukleidilise ruumi 1E_n geomeetria arendamisel kasutada sama teed, mis on meil juba läbi käidud ruumi E_n puhul, muidugi silmas pidades, et koordinaadid $x_1, \dots, x_{n-1}$ on küll endiselt reaalarvud, kuid x_n asemel on nüüd puhtimaginaararv x_n^* .

Vektorite sissetoomisel ei ole art-s 1 esitatuga võrreldes muid erinevusi kui viimase koordinaadi puhtimaginaarsus. Seepärast avaldub vektorite k ja l skalaarkorrutis reaalsete koordinaatide abil järgmiselt:

$$kl = k_1l_1 + \dots + k_{n-1}l_{n-1} - k_nl_n, \quad (6.11)$$

kusjuures tal on endiselt omadused (1.6). Vektoreid k ja l , mille korral $kl=0$, nimetatakse endiselt ortogonaalseteks.

Kehtib ka Lagrange'i samasus (puhtimaginaarsete koordinaatidega k_n^* ja l_n^*), kuid et selle paremal pool kõik arvud pole enam reaalarvud, siis Cauchy võrratus (1.8) ei ole ruumi 1E_n korral enam üldkehtiv.

Oluliselt tuleb täiendada vektori pikkuse ja ühikvektori käsitlust. Skalaarruudu avaldisest

$$k^2 = k_1^2 + \dots + k_{n-1}^2 - k_n^2 \quad (6.12)$$

järeldub, et nullist erineva vektori k korral on võimalik $k^2=0$ või koguni $k^2<0$, näiteks kui vektori koordinaatideks on vastavalt $(0, \dots, 0, 1, 1)$ või $(0, \dots, 0, 1)$. Seetõttu võib pikkus $|k| = \sqrt{k^2}$ olla 0 ka siis, kui $k \neq 0$, samuti võib $|k|$ olla puhtimaginaararv.

Üldiselt vektorit $k \neq 0$, mille korral $k^2=0$, nimetatakse *isotroopseks vektoriks* (ta on «pikkusega» 0), tema poolt määratud sihti *isotroopseks sihiks*. Eirelatiivsusteooria aegruumi matemaatiliseks mudeliks oleva Minkowski ruumi 1E_4 puhul nimetatakse vektorit $k \neq 0$ ja tema sihti kas *ruumi-* või *ajasarnaseks* vastavalt sellele, kas $k^2>0$ või $k^2<0$, s.t. kas ta on reaalse või imaginaarse pikkusega.

Kahe punkti x ja y vaheline kaugus avaldub vektori $\overrightarrow{xy}$ pikkuse kaudu täpselt samuti nagu valemis (1.11):

$$d(x, y) = |\overrightarrow{xy}|.$$

Seetõttu võib kahe punkti vaheline kaugus olla puhtimaginaararv (nagu juba eespool märgitud), kuid ta võib kahe erineva punkti korral olla ka 0.

7. Sfäärid ja ortogonaalsus. Eukleidilises ruumis E_n nimetatakse $(m-1)$ -sfääriks selliste punktide x hulka teataval m -tasandil, et

$$d(c, x) = r, \quad (7.1)$$

kus c on selle m -tasandi fikseeritud punkt ja r on konstantne reaalarv; viimaseid nimetatakse vastavalt $(m-1)$ -sfääri keskpunktiks c ja raadiuseks r . Et $d(c, x) \geq 0$, siis $(m-1)$ -sfäär on mittetühi hulk üksnes juhul, kui $r \geq 0$, kusjuures $r=0$ korral on ta üksainus punkt c .

Ruumi E_n $(n-1)$ -sfääri nimetatakse ka *hüpersfääriks*; sel korral ühtib n -tasand kogu ruumiga E_n . Et m -tasand ise on ruum E_m , siis on tegelikult ka iga $(n-1)$ -sfäär ühtlasi hüpersfääriks, ainult ruumis $E_m \subset E_n$.

Hüpersfääri jaoks saame tingimusest (7.1) võrrandi

$$\sum_{i=1}^n (x_i - c_i)^2 = r^2 \quad (7.2)$$

ehk kohavektorite abil

$$(x - c)^2 = r^2. \quad (7.3)$$

Pseudoeukleidilises ruumis 1E_n defineeritakse $(m-1)$ -sfäär täpselt samuti tingimusega (7.1), kus vasakul on kaugus ruumi 1E_n punktide c ja x vahel. Hüpersfääri puhul saame kohavektori x jaoks endiselt võrrandi (7.3), mis aga koordinaatide abil väljendub nüüd kujul

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} (x_\alpha - c_\alpha)^2 - (x_n - c_n)^2 = r^2. \quad (7.4)$$

Kõige olulisem erinevus eeltooduga võrreldes on see, et kaugus tingimuse (7.1) vasakul pool võib ruumis 1E_n olla puhtimaginaarne, mistõttu $(m-1)$ -sfäär on mittetühi hulk ka siis, kui $r = iq$, $q \in \mathbb{R}$. Seega võrrandites (7.3) ja (7.4) võib r^2 omandada kõikvõimalikke reaalarvulisi väärtusi, ka negatiivseid, vastav hüpersfäär on ikka mittetühi punktihulk ruumis 1E_n .

Hüpersfäärid (üldiselt $(m-1)$ -sfäärid) ruumis 1E_n jagunevad niisiis reaalse raadiusega, imaginaarse raadiusega ja nullraadiusega hüpersfäärideks (vastavalt $(m-1)$ -sfäärideks).

Kõigi nende juhtude jaoks, kaasa arvatud hüpersfäär ruumis E_n , võib defineerida puutujahüpertasandi (vastavalt puutuva $(m-1)$ -tasandi) mõiste ja näidata selle seost ortogonaalsusega. Valime hüpersfääril punkti x_0 kohavektoriga x_0 ja vaatleme seda läbivat sirget võrrandiga

$$x = x_0 + tk. \quad (7.5)$$

Selle sirge punkt x on hüpersfääril, kui tema kohavektor rahuldab võrrandit (7.3):

$$[(x_0 + tk) - c]^2 = r^2.$$

Pärast teisendusi saame siit t suhtes võrrandi

$$t^2 k^2 + 2tk(x_0 - c) = 0, \quad (7.6)$$

sest $(x_0 - c)^2 = r^2$. Lahend $t=0$ määrab punkti x_0 . Vaatame olu-

korda, kus ka teine lahend määrab sama punkti x_0 , s.t. see lahend on samuti $t=0$. Sel juhul on tegemist sirgega, millel on hüpersfääriga kaks ühtelangevat ühispunkti. Sellist sirget nimetatakse hüpersfääri *puutujaks* ja ühispunkti *puutepunktiks* (antud juhul on selleks x_0). Võrrandist (7.6) tuleneb, et niisuguse sirge puhul on rahuldatud tingimus

$$k(x_0 - c) = 0. \quad (7.7)$$

Korrutades selle võrduse pooli parameetriga t , asendades tk võrrandist (7.5) ning tähistades $m = x_0 - c$, saame tingimusele kuju

$$m(x - x_0) = 0; \quad (7.8)$$

siit näeme, et kõik puutujad puutepunktis x_0 on hüpertasandil, mis määratakse võrrandiga (7.8) ja mille normaalvektoriks on seega

$\vec{m} = x_0 - c = cx_0$. Seda hüpertasandit nimetatakse hüpersfääri *puutujahüpertasandiks* punktis x_0 . Tingimus (7.7) näitab, et $km = 0$, s.t. iga puutuja ja seega ka puutujahüpertasand on risti ehk ortogonaalne hüpersfääri keskpunktist c puutepunkti x_0 mineva vektoriga.

Ruumi E_n korral on tulemus kooskõlas nende näitlike kujutlustega, mis on tuttavad juhtudest $n=2$ ja $n=3$ ([6], lk. 290). Oluks analüüsida ruumi E_n puhul on kasulik alustada just analoogiliste lihtsate juhtude uurimisest. Käsitluse lihtsustamiseks valime $c=0$; üldjuhu saame pärast lihtsat teisendust, kus kõik punktid kantakse edasi konstantse vektori c võrra, s.t. pärast teatavat lüket (vrd. [6], lk. 227).

Juhul kui $n=2$ ja $c_i=0$, saame võrrandi (7.4) kujul

$$x_1^2 - x_2^2 = r^2.$$

Tõlgendades seda eukleidilise tasandi E_2 geomeetria termineis ([6], lk. 337), võime öelda, et juhtudel $r=q$ ja $r=iq$, kus q on positiivne reaalarv, saame teineteise kaashüperboolid võrranditega $x_1^2 - x_2^2 = q^2$, $x_1^2 - x_2^2 = -q^2$, kui aga $r=0$, saame võrrandi $(x_1 - x_2) \times (x_1 + x_2) = 0$, mis määrab nende ühiste asümptootide paari.

Sellisel juhul on siis tõlgendatavad reaalse, imaginaarse ja nullraadiusega 1-sfäärid (ehk «ringjooned») pseudoeukleidilisel tasandil E_2 . Seejuures kaashüperboolid oma ühiste asümptootidega kuuluvad õieti tasandi afiinsesse geomeetrias; viimane ei sõltu üldse sellest, kas tasand on $d(x, y)$ teatava täiendava määramisega muudetud ruumiks E_2 või E_2 (vt. [6], lk. 424, 429).

Juhul $n=3$ on võrrandil (7.4), kus $c_i=0$, kuju

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = r^2.$$

Tõlgendus eukleidilise ruumi E_3 termineis ([6], lk. 347, 359) annab pöördhüperboloidid, mis saadakse kõnesolnud kaashüperboolide pöörlemisel selle telje ümber, mis lõikab imaginaarse raadiusega

1-sfääri kujutavat hüperbooli. Asümptootide paar tekitab seejuures nende pöördhüperboloidide ühise asümptootilise koonuse, mis vastab väärtusele $r=0$.

Seega reaalse raadiusega 2-sfäär ruumis 1E_3 on tõlgendatav ruumi E_3 geomeetria termineis ühekattelise pöördhüperboloidina, imaginaarse raadiusega 2-sfäär kahekattelise pöördhüperboloidina. Nullraadiusega 2-sfäär on pöördkoonus.

Vastavalt eelöeldule saab näitlikult tõlgendada ka ortogonaalsust pseudoeukleidilisel tasandil 1E_2 ja ruumis 1E_3 . Joonisel 3 kujutatud vektor $\vec{m} = \vec{cx}_0$ ja puutuja sihivektor $\vec{k}$ on 1E_2 seisukohalt ortogonaalsed. Paneme tähele, et punkti x_0 liikumisega ringjoonel saab panna $\vec{k}$ sihi lähenema $\vec{m}$ sihile ja piirjuhul viia need sihid ühtima asümptoodi sihiga. See on kooskõlas asjaoluga, et asümptoodi punkti x korral 1E_2 seisukohalt $d(c, x) = |\vec{cx}| = 0$, s.t. $\vec{cx}^2 = \vec{cx} \cdot \vec{cx} = 0$; niisiis asümptoodi siht, olles isotroopse vektori $\vec{l} = \vec{cx}$ siht, on pseudoeukleidilisel tasandil iseendaga ortogonaalne.

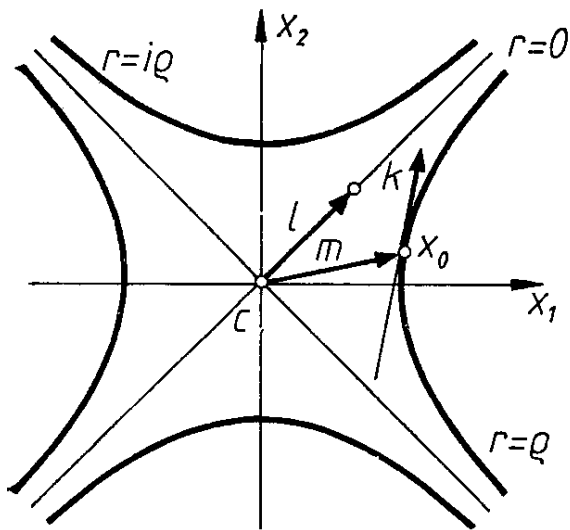
Analoogilisi tõlgendusi saab kasutada ka pseudoeukleidilise ruumi 1E_3 puhul. Kui $\vec{l} = \vec{cx}$ on isotroopne vektor, siis $d(c, x) = |\vec{cx}| = 0$ ja x asub nullraadiusega 2-sfääril, mis ruumi E_3 seisukohalt on pöördkoonus. Seetõttu nullraadiusega 2-sfääri keskpunktiga c nimetatakse ka ruumi 1E_3 isotroopseks koonuseks punktis c . Punktid x , mis on imaginaarsel (või realsel) kaugusel punktist c , on afiinse geomeetria seisukohalt selle koonuse sees (vastavalt välisosas), sest igaüks neist on teataval imaginaarse (vastavalt reaalse) raadiusega 2-sfääril, mis afiinse geomeetria teatava kahe- (vastavalt ühe-) kattelise hüperboloidina on oma asümptootilise koonuse sees (vastavalt välisosas).

Tasandeid, mis läbivad punkti c , saab liigitada selle järgi, kuidas nad asetsevad punktis c võetud isotroopse koonuse suhtes. Neil, mis asetsevad välisosas, on kõik kaugused reaalarvud ja nad osutuvad ruumideks E_2 . Sellise tasandi määrab näiteks võrrand $x_3 = c_3$, sest sellel

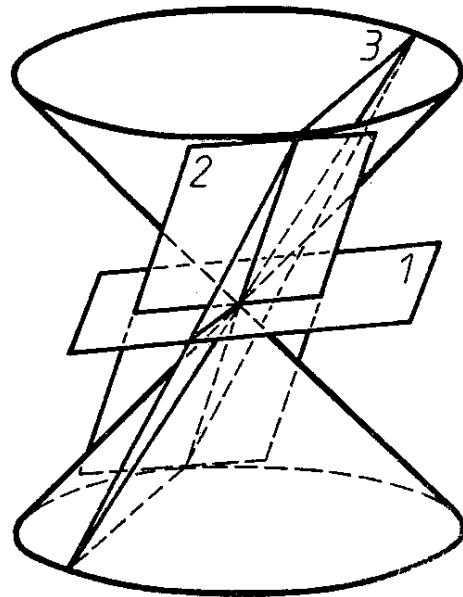
$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 - (c_3 - c_3)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Seda tüüpi tasandeid ruumis 1E_3 nimetatakse eukleidilisteks (joon. 4, 1); nende normaalvektorid on isotroopse koonuse sees ja seega imaginaarse pikkusega.

Kui 2-tasand on isotroopse koonuse puutujatasand puutepunktis x_0 , siis tema normaalvektor $\vec{m} = \vec{x}_0 - \vec{c}$ on isotroopne: $\vec{m}^2 = 0$, sest x_0 on nullraadiusega 2-sfääril võrrandiga $(\vec{x} - \vec{c})^2 = 0$. Seetõttu $\vec{m}(\vec{c} - \vec{x}_0) = \vec{m}(-\vec{m}) = 0$ ja seega tasand võrrandiga $\vec{m}(\vec{x} - \vec{x}_0) = 0$ läbib ka punkti c . Tema normaalvektor $\vec{m}$ on ühtlasi tema kaht punkti x_0 ja c ühendav vektor, olles isotroopse koonuse selle moodustaja sihivektor, mida mööda puutumine toimub. Olukorda võib näitlikult illustreerida piirprotsessi abil, võttes näiteks imaginaarse



Joonis 3



Joonis 4

raadiusega 2-sfääril punkti x_0 , mis tõkestamatult kaugeneb (ruumi E_3 seisukohalt) mööda seda 2-sfääri, ja vaadeldes selles punktis x_0 võetud puutujatasandi muutumist.

Tasandit isotroopse normaalkvektoriga (s.t. isotroopse koonuse puutujatasandit) ruumis 1E_3 nimetatakse *isotroopseks tasandiks* (joon. 4, 2). Selle võrrandist $m(x - x_0) = 0$ nähtub, et temal asuv isotroopne normaalkvektor m on ortogonaalne iga teise vektoriga sellel tasandil.¹

Kui tasandil asetsevad isotroopse koonuse kaks erinevat sirgjoonelist moodustajat, siis on tal punkte nii koonuse sees kui väljas ja ta on seetõttu ruum 1E_2 . Sel juhul nimetatakse teda pseudo-eukleidiliseks tasandiks (joon. 4, 3); tema normaalkvektor on reaalse pikkusega. Sellise tasandi määrab näiteks võrrand $x_2 = c_2$.

Eelnevast analüüsist selgub, et kui ruumis 1E_3 kahe nullist erineva vektori k ja l ortogonaalsuse korral k on imaginaarse pikkusega, siis l on reaalse pikkusega, kui k on nullpikkusega (isotroopne), siis l on reaalse või nullpikkusega (viimast juhul kui $l = \lambda k$), kui aga k on reaalse pikkusega, siis l võib olla nii reaalse, imaginaarse kui nullpikkusega.

¹ Valides selle tasandi rihis baasi $\{k_1, k_2\}$ nii, et $k_2 = m$ ja $k_1^2 = 1$, saame tasandi suvalise vektori $l = \xi_1 k_1 + \xi_2 k_2$ jaoks

$$l^2 = (\xi_1 k_1 + \xi_2 k_2)^2 = \xi_1^2 k_1^2 + 2\xi_1 \xi_2 k_1 k_2 + \xi_2^2 k_2^2 = \xi_1^2$$

ja tasandi suvalise kahe punkti x ja y jaoks

$$d(x, y) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2} = |u_1 - v_1|.$$

Isotroopne tasand ruumis 1E_3 pole seega ei E_2 ega 1E_2 ; öeldakse, et ta on *kidunud meetrikaga*.

8. **Minkowski ruumi geometriast.** Ruumi 1E_4 puhul defineeritakse m -tasand täpselt samuti nagu art-s 2. Seejuures 2-tasandit nimetatakse tasandiks, 3-tasandit hüpertasandiks. Iga hüpertasandi saab esitada võrrandiga

$$A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 - A_4x_4 = 0 \quad (8.1)$$

ehk

$$A_0 + mx = 0. \quad (8.2)$$

Selles veendumiseks tuleb analoogiliselt seose (2.10) kasutamisega määrata reaalarvud B_i seosest

$$B_1\xi_1 + \dots + B_4\xi_4 = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \end{vmatrix}$$

ning seejärel võtta $A_1=B_1$, $A_2=B_2$, $A_3=B_3$, $A_4=-B_4$, vektorite (2.11) asemel aga võtta

$$\begin{aligned} k_1 &= (A_4, 0, 0, A_1), \\ k_2 &= (0, A_4, 0, A_2), \\ k_3 &= (0, 0, A_4, A_3), \end{aligned}$$

et saada $mk_\alpha=0$; $\alpha=1, 2, 3$. Muus osas korduvad art-s 2 kasutatud mõttekäigud.

Iga hüpertasandi saab esitada kui ruumi 1E_4 alamhulga, mis koosneb mingist kahest erinevast fikseeritud punktist a ja b võrdsetel kaugustel olevatest punktidest x . Põhjendus kordab art-s 1 antut üheainsa erinevusega. Kui võrrandi (8.1) puhul $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - A_4^2 = 0$ ja $A_0 \neq 0$, siis ei saa kasutada art-s 1 esitatud võtet: λ avaldise nimetaja tuleb 0! Sel puhul aga $A_4 \neq 0$ (sest vastupidisel juhul oleksid kõik A_i nullid; $i=1, 2, 3, 4$) ning punktid a ja b võib valida nii, et

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (0, 0, 0, A_0A_4^{-1}), \\ \varphi(b) &= (A_1, A_2, A_3, A_4 + A_0A_4^{-1}). \end{aligned}$$

Võttes hüpertasandil punkti x_0 kohavektoriga x_0 , võime võrrandi (8.2) esitada kujul

$$m(x - x_0) = 0,$$

mis tähendab, et vektorid $\overrightarrow{m}$ ja $\overrightarrow{x_0x} = x - x_0$ on ortogonaalsed.

Ruumi 1E_4 puhul ei ole enam võimalik ortogonaalsuse analüüsimisel kasutada näitlikke kujutlusi nagu eelmises artiklis. Nullraadiusega hüpersfäär võrrandiga $(x - c)^2 = 0$ on ka siin teatav hüperkoonus, mis koosneb punkti c läbivatest sirgetest. Tõepoolest,

kui punkt x_0 asub sellel hüpersfääril, siis vektori $\overrightarrow{k} = cx_0 = x_0 - c$ korral $k^2 = 0$ ja määrates nüüd sirge võrrandiga $x = c + tk$, leiame, et $(x - c)^2 = t^2k^2 = 0$, mistõttu sirge iga punkt x on sellel hüpersfääril. Seda hüperkoonust nimetatakse *isotroopseks hüperkoonuseks* punktis c .

Ortogonaalsete vektorite puhul esinevate võimaluste analüüsi alustame juhust, mil tingimuse $\mathbf{mk} = 0$ puhul $\mathbf{m}$ on imaginaarse pikkusega ehk ajasarnane, s.t. $m^2 < 0$ ja $\mathbf{k} \neq 0$. Esitame tingimuse kujul

$$\mathbf{m}_* \mathbf{k}_* - m_4 k_4 = 0, \quad (8.3)$$

kus märk $*$ tähendab, et tegemist on ruumi E_3 vektoriga. Cauchy võrratuse (1.8) järgi

$$(m_4 k_4)^2 = (\mathbf{m}_* \mathbf{k}_*)^2 \leq m_*^2 k_*^2. \quad (8.4)$$

Kui nüüd $m^2 < 0$, siis $m_*^2 - m_4^2 < 0$, mistõttu $0 \leq m_*^2 < m_4^2$. Praegu ei saa olla $k_*^2 = 0$, sest siis oleks $\mathbf{k}_* = 0$ ja (8.3) põhjal ka $k_4 = 0$, s.t. $\mathbf{k} = 0$, mis on lubamatu. Pärast viimase võrratuse poolte korrutamist arvuga $k_*^2 > 0$ ja tulemuse arvestamist võrratuses (8.4), saame

$$m_4^2 k_4^2 < m_*^2 k_*^2$$

ja siit $k_4^2 < k_*^2$ ehk $k^2 = k_*^2 - k_4^2 > 0$.

Seega nullist erinev vektor $\mathbf{k}$, mis on ortogonaalne imaginaarse pikkusega vektoriga $\mathbf{m}$, on alati reaalse pikkusega. Siit tuleneb, et hüpertasand ruumis 1E_4 , mille normaalvektor on ajasarnane (s.t. imaginaarse pikkusega), on ruum E_3 , sest vabalt võetud lineaarselt sõltumatute vektorite süsteemile $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ võib tema rihis rakendada Grami—Schmidt'i ortogonaliseerimisprotsessi täpselt samuti, nagu art-i 2 lõpus. Seetõttu nimetatakse teda eukleidiliseks hüpertasandiks.

Kui tingimuse $\mathbf{mk} = 0$ puhul $m^2 = 0$, $\mathbf{m} \neq 0$, siis ei saa $\mathbf{k}$ olla imaginaarse pikkusega, sest $\mathbf{m}$ ja $\mathbf{k}$ osade vahetamisel tekiks vastuolu varasema tulemusega. Seega vektor $\mathbf{k}$, mis on ortogonaalne isotroopse vektoriga $\mathbf{m}$, on kas isotroopne või reaalse pikkusega. Seejuures isotroopne on ta parajasti siis, kui $\mathbf{k} = \lambda \mathbf{m}$. Tõepoolest, kui $\mathbf{mk} = m^2 = k^2 = 0$, siis $\mathbf{m}_* \mathbf{k}_* = m_4 k_4$, $m_*^2 = m_4^2$, $k_*^2 = k_4^2$; mistõttu $(\mathbf{m}_* \mathbf{k}_*)^2 = m_4^2 k_4^2 = m_*^2 k_*^2$ ja seega (1.7) põhjal $\mathbf{k}_* = \lambda \mathbf{m}_*$. Nüüd aga $m_4 k_4 = \mathbf{m}_* \mathbf{k}_* = \lambda m_*^2 = \lambda m_4^2$ ja siit $k_4 = \lambda m_4$. Kokkuvõttes tõesti $\mathbf{k} = \lambda \mathbf{m}$.

Kui võrrandiga $\mathbf{m}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ antud hüpertasandi puhul $\mathbf{m}$ on isotroopne, siis võttes punkti c nii, et $\mathbf{m} = \mathbf{x}_0 c = \mathbf{c} - \mathbf{x}_0$, saame $0 = m^2 = \mathbf{m}(\mathbf{c} - \mathbf{x}_0)$, s.t. c on hüpertasandil. Teiselt poolt, isotroopsel hüperkoonusel punktis c kui nullraadiusega hüpersfääril võrrandiga $(\mathbf{x} - \mathbf{c})^2 = 0$ on puutepunktis $\mathbf{x}_0$ puutujahüpertasand võrrandiga $(\mathbf{x}_0 - \mathbf{c})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ ja see, nagu näha, ühtib antud hüpertasandiga.

Niisiis, isotroopse normaalvektoriga hüpertasand on isotroopse hüperkoonuse puutujahüpertasand; teda nimetatakse

hüpertasandiks. Ta sisaldab oma normaalvektori $\mathbf{m} = \mathbf{x}_0 c$ kui tema kaht punkti ühendava vektori; kusjuures tema iga vektor $\mathbf{k}$ on selle vektoriga $\mathbf{m}$ ortogonaalne ning kui $\mathbf{k} \neq \lambda \mathbf{m}$, siis reaalse pikkusega. Valides viimast tüüpi vektorite seas kaks ortogonaalset ühikvektorit

k_1 ja k_2 ja lisades neile vektori $k_3 = m$, saame suvalise vektori $k = \xi_1 k_1 + \xi_2 k_2 + \xi_3 k_3$ jaoks $k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ ning kahe punkti x ja y vahelise kauguse jaoks

$$d(x, y) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

Öeldakse, et isotroopsel hüpertasandil on *kidunud meetrika*.

Kui vektorile x seatava tingimuse $mx = 0$ puhul $m^2 > 0$, siis saab näidata seda tingimust rahuldava imaginaarse pikkusega vektori l . Selleks tuleb juhul $m_4 = 0$ valida vektor $l = (0, 0, 0, 1)$, juhul $m_4 \neq 0$ aga vektor $l = (m_1, m_2, m_3, m_*^2 m_4^{-1})$; viimase skalaarruut on samuti nagu eelmise l puhul negatiivne:

$$l^2 = m_*^2 - \left(\frac{m_*^2}{m_4}\right)^2 = \frac{m_*^2}{m_4^2} (m_4^2 - m_*^2) = -\frac{m_*^2}{m_4^2} m^2 < 0.$$

Et hüpertasand normaalvektoriga l on ruum E_3 ja sisaldab vektori m , siis saab temas leida viimasega ortogonaalsed ühikvektorid k_1 ja k_2 , mis on ka omavahel ortogonaalsed. Kui neile lisada vektor $k_3 = \frac{l}{\sqrt{-l^2}}$, on tulemuseks selline vektorikolmik k_1, k_2, k_3 hüpertasandis normaalvektoriga m , et $k_1^2 = k_2^2 = 1$, $k_3^2 = -1$, $k_i k_j = 0$ ($i \neq j$). Nüüd suvalise vektori $k = \xi_1 k_1 + \xi_2 k_2 + \xi_3 k_3$ korral $k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$ ning viimase hüpertasandi suvalise kahe punkti x ja y korral

$$d(x, y) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 - (u_3 - v_3)^2}.$$

Seega hüpertasand ruumis 1E_4 , mille normaalvektor on ruumi-sarnane (s.t. reaalse pikkusega), on ruum 1E_3 . Seetõttu nimetatakse teda *pseudoeukleidiliseks hüpertasandiks*.

Edasi on kerge järeldada, et 2-tasand ruumis 1E_4 on kas eukleidi-line (s.t. ruum E_2), pseudoeukleidi-line (s.t. ruum 1E_2) või isotroopne, sest ta asetseb mingis hüpertasandis, mis on kas ruum E_3 , ruum 1E_3 või isotroopne. Esimese kahe ruumi 2-tasandite kohta on kõik teada (vt. art. 7), isotroopses hüpertasandis on aga üksainus isotroopsete vektorite siht, kõik teised vektorid on reaalse pikkusega. Seega isotroopses hüpertasandis saavad olla ainult isotroopsed ja eukleidilised 2-tasandid.

Harjutusülesanded

10. Näidata, et kõikvõimalikele kiirustele v vastavad Galilei eriteisendused (6.5) moodustavad rühma ning et kahe sellise eriteisenduse järjest sooritamisel kiirused liituvad.

11. Kontrollida, et Lorentzi eriteisendused (6.5) moodustavad rühma, ning tuletada kiiruste liitumise seadus erirelatiivsusteoorias:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}.$$

Veenduda, et kui siin $v' = c$, siis ka $v'' = c$ olenemata v väärtusest.

12. Teha kindlaks, et kui pseudoeukleidilisel tasandil 1E_2 on antud kaks sirget, mis läbivad teatava 1-sfääri keskpunkti, siis need sirged on ortogonaalsed parajasti siis, kui üks neist poolitab teisega paralleelsed 1-sfääri kõõlud (s. t. kui nad on kaassihilised).

13. Selgitada, missuguste λ väärtuste korral ruumis punkte $(1, 0, -1, 0)$, $(-1, 2, 2, 0)$ ja $(0, 0, 0, \lambda)$ läbiv 2-tasand on eukleidiline, pseudoeukleidiline või isotroopne. Näpunäide: leida kaks ortogonaalset vektorit sellel 2-tasandil.

14. Veenduda, et geomeetria isotroopsel hüpertasandil Minkowski ruumis 1E_4 on seotud Galilei geomeetriaga selles mõttes, et üleminekumatriks ühelt selle hüpertasandi baasilt $\{k_1, k_2, k_3\}$, kus $k_1^2 = k_2^2 = 1$, $k_3^2 = 0$, $k_i k_j = 0$ ($i \neq j$), teisele taolisele on just seda laadi nagu aegruumi Galilei teisenduse (6.4), (6.3) matriks.

§ 3. ISOMEETRILISED TEISENDUSED

Eukleidilise ruumi E_n ülalantud käsitlus tugineb üksnes kauguse mõistele, samuti nagu pseudoeukleidilise ruumi 1E_n oma. Paljudes võrrandis ja valemeis esineb küll ka vektorite skalaarkorrutis, kuid nagu peatselt selgub, on skalaarkorrutis avaldatav kauguste kaudu. Koos sellega avalduvad siis üksnes kauguste kaudu nurgad ning pind- ja ruumalad. Kõiki neid suurusi koos nimetatakse meetrilisteks suurusteks.

Teisendus ruumis E_n või 1E_n , mis säilitab iga kahe punkti vahelise kauguse, jätab muutumatuks ka kõik meetrilised suurused. Sellist teisendust nimetatakse seetõttu isomeetriliseks teisenduseks. Kõik isomeetrilised teisendused moodustavad teisenduste rühma, mis koos oma mitmesuguste alamrühmadega iseloomustab ruumi sisemist sümmeetriat. Viimase arvestamisel kaotab oma erilise osa see koordinaatkujutus, mis oli meil aluseks eukleidilise ruumi E_n või pseudoeukleidilise ruumi 1E_n defineerimisel kauguse valemile (1.1) või (6.9) tuginedes. Selle asemel omandavad tähtsa koha ristbaasi ja -reeperi mõisted, mis annavad uue aluse vektorite ja punktide koordinaatide defineerimiseks ning geomeetria arendamiseks nende abil ruumis E_n või 1E_n .

9. Ristbaasid ja -reeperid. Nii ruumi E_n kui ka ruumi 1E_n puhul on kõigi vektorite hulgas defineeritud kahe vektori k ja l summa ja vektori k korrutis reaalarvuga λ — vastavalt vektorid $k+l$ ja λk . Seejuures on rahuldatud vektorruumi postulaadid ([1], lk. 337; [6], lk. 489), mistõttu nii E_n kui 1E_n korral kõik vektorid moodustavad *n-mõõtmelise vektorruumi* V_n (üle reaalarvude korpuse R ; [1]; lk. 341).

Vektorruumi V_n baasiks nimetatakse iga järjestatud hulka $\{e_1, \dots, e_n\}$, mis koosneb n lineaarselt sõltumatu vektorist ([1], lk. 345; [6], lk. 491). Vektorite skalaarkorrutis (1.5) või (6.11) võimaldab kõigi baaside seast välja eraldada *ortogonaalsed baasid*; need on baasid, mille iga kaks vektorit on ortogonaalsed ([1], lk. 419).

Piirdume järgnevalt mõnda aega eukleidilise ruumiga E_n . Et ükski baasivektor ei saa olla nullvektor ([1], lk. 340), siis võib

kõik baasivektorid normeerida (s.t. teha nad oma pikkusega jagamise teel ühikvektoreiks). Tulemuseks on selline baas $\{e_1, \dots, e_n\}$, kus

$$e_i e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (9.1)$$

Sel juhul kõneldakse *ortogonaalsest normeeritud baasist* ehk lühemalt *ristbaasist* (vrd. [6], lk. 107, 121). Niisugune on näiteks antud *koordinaatkujutuse* $\varphi: E_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ *algbaas*, mis koosneb vektoritest $i_1, i_2, \dots, i_n$ vastavalt koordinaatidega

$$i_1 : (1, 0, \dots, 0),$$

$$i_2 : (0, 1, \dots, 0),$$

$$i_n : (0, 0, \dots, 1).$$

See pole aga ainus. Asendame ühikmaatriksi $E = \|\delta_{ij}\|$, mille moodustavad algbaasi vektorite koordinaadid, vabalt võetud $n \times n$ -ortogonaalmaatriksiga. Nii nimetatakse teatavasti ([1], lk. 440; [6], lk. 240) maatriksit A , mille transponeeritud maatriks A^T ühtib pöördmaatriksiga A^{-1} , teisiti öeldes, mille korral $AA^T = E$. Kui $A = \|A_{ij}\|$, siis $A^T = \|A_{ji}\|$ ning maatriksite korrutise definitsiooni kohaselt ([1], lk. 89)

$$AA^T = \left\| \sum_{k=1}^n A_{ik} A_{jk} \right\|.$$

Tingimus $AA^T = E$ on seega samaväärne võrdustega

$$\sum_{k=1}^n A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}, \quad (9.2)$$

mis näitavadki, et vektorid

$$e_i : (A_{i1}, \dots, A_{in})$$

— ortogonaalmaatriksi A reavektorid — moodustavad ristbaasi. Seejuures on ortogonaalmaatrikseid lõpmata palju, sest tingimused (9.2), olles sümmeetrilised indeksite i ja j suhtes, seavad maatriksi A n^2 elemendile $\frac{1}{2}n(n+1)$ seost, mistõttu vabalt valitavaks jääb

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad (9.3)$$

elementi. Märkime lisaks, et vastavus ristbaaside ja ortogonaalmaatriksite vahel on üksühene, sest tingimused (9.1) ja (9.2) on samaväärsed. Seega (9.3) määrab ka ristbaaside valiku vabaduse.

Ortogonaalmaatriksid (ja vastavalt neile ka ristbaasid) jagunevad kahte klassi. Selle jaotuse saamiseks tähistame maatriksi A determinandi $|A|$, edasi arvestame, et $|A^T| = |A|$, ning läheme seoses $AA^T = E$ üle determinantidele. Tulemuseks on $|A|^2 = 1$, mistõttu ühte klassi satuvad ortogonaalmaatriksid A , mille puhul $|A| = 1$, teise klassi need, mille korral $|A| = -1$.

Kui nüüd võtta suvaline vektor x ja lisada selle koordinaadid $x_1, \dots, x_n$ veel ühe reana mingi ristbaasi vektorite $e_1, \dots, e_n$ koordinaatidest moodustatud ortogonaalmaatriksile A , saame $n+1$ reast ja n veerust koosneva maatriksi, mille astak on n , sest $|A| \neq 0$. Sel juhul on uus rida n varasema rea lineaarkombinatsioon, mis tähendab seda, et leiduvad reaalarvud ξ_i ; $i=1, \dots, n$, nii et

$$x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n. \quad (9.4)$$

Seejuures kordajad $\xi_1, \dots, \xi_n$ osutuvad võrdseteks teatavate skalaarkorrutistega. Tõepoolest, kui viimase võrdluse pooli korrutada skalaarselt vektoriga e_i , siis tulemuse

$$x e_i = \xi_1 e_1 e_i + \dots + \xi_n e_n e_i$$

paremal pool (9.1) põhjal on ainus nullist erinev tegur $e_i e_i = 1$, mistõttu tõesti

$$\xi_i = x e_i; \quad i=1, \dots, n. \quad (9.5)$$

Saadud reaalarve $\xi_1, \dots, \xi_n$, mis antud ristbaasi $\{e_1, \dots, e_n\}$ korral on vektori x poolt üheselt määratud valemitega (9.5) ja mis (9.4) järgi ise määravad vektori x üheselt, nimetatakse *vektori x koordinaatideks ristbaasil $\{e_1, \dots, e_n\}$* . Vektori x koordinaadid art-i 1 mõttes on vektori x koordinaatideks algbaasil $\{i_1, \dots, i_n\}$. Tõepoolest, kui $x: (x_1, x_2, \dots, x_n)$, siis on vahetult näha, et

$$x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n.$$

Punkti $x \in E_n$ koordinaatide saamiseks tuleb ristbaasile $\{e_1, \dots, e_n\}$ lisada alguspunkt a . Sel juhul defineeritakse punkti x koordinaadid kui selle punkti kohavektori $\overrightarrow{ax}$ koordinaadid antud ristbaasil. Täpsemalt öeldes on siin tegemist punkti x koordinaatidega ristreeperis ehk -teljestikus $\{a; e_1, \dots, e_n\}$ — kordajatega avaldises

$$\overrightarrow{ax} = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n. \quad (9.6)$$

Punkti x koordinaadid art-i 1 mõttes on erijuht, mil $a=0$ ja ristbaas on algbaas $\{i_1, \dots, i_n\}$: kui $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$, siis

$$\overrightarrow{0x} = x_1 i_1 + \dots + x_n i_n.$$

Ristreeperit $\{0; i_1, \dots, i_n\}$ nimetatakse *koordinaatkujutuse φ algreeperiks*.¹

10. Eukleidiliste ruumide isomeetriad. Olgu antud kaks eukleidilist ruumi E_n ja E'_n (näiteks n -tasand ja n' -tasand mingis eukleidilises ruumis E_N ; $N > n, N > n'$). Kujutust $f: E_n \rightarrow E'_n$ nimetatakse

¹ Märkime, et punkti koordinaadid saab defineerida ka sellise reeperi järgi, mille puhul vektorite baas ei ole ristbaas (vrd. [6], lk. 44). Sel korral nimetatakse ülalkäsitletud koordinaate täpsemalt *ristkoordinaatideks* (vrd. [6], lk. 121).

isomeetriliseks kujutuseks, kui iga kahe punkti $x \in E_n$ ja $y \in E_n$ korral

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad (10.1)$$

kus vasakul on kaugus ruumis E_n ja paremal kaugus ruumis E'_n . Isomeetiline kujutus on niisiis kõiki kaugusi säilitav kujutus. Kauguse definitsioonist (1.1) järeldub, et $d(x, y) = 0$ parajasti siis, kui $x = y$, mistõttu (5.2) põhjal erinevate x ja y korral pole võimalik, et $f(x) = f(y)$. Seega isomeetiline kujutus on üksühene kujutus ehk injeksioon.

Järgnevalt näitame, et kui $n' \leq n$, siis isomeetiline kujutus f on sürjektsioon, s.t. iga $x' \in E'_n$ on teatava $x \in E_n$ kujutis ning $n' = n$.

Kõigepealt teeme kindlaks, et isomeetrilise kujutuse korral jääb muutumatuks suvalise kahe vektori x ja y skalaarkorrutis xy . Selleks võtame vabalt punkti a ja leiame punktid x ja y selliselt, et $\overrightarrow{x} = a\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y} = a\overrightarrow{y}$. Sel korral

$$d(x, y)^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2yx + x^2 = d(a, y)^2 - 2xy + d(a, x)^2$$

ja siit

$$xy = \frac{1}{2} [d(a, x)^2 + d(a, y)^2 - d(x, y)^2]. \quad (10.2)$$

Paremal pool on isomeetrilise kujutuse korral muutumatu suurus, järelikult on muutumatu ka vasak pool.

Võtame nüüd vabalt ristbaasi $\{e_1, \dots, e_n\}$ ja vektori x , mis kujutugu isomeetrilises kujutuses vastavalt vektorite hulgaks $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ja vektoriks x' . Skalaarkorrutise säilimisest ja valemist (9.1) järeldub, et $e'_i e'_j = \delta_{ij}$, s.t. ristbaas kujutub jälle ristbaasiks, mistõttu $n' = n$. Seejuures vektori x koordinaadid ξ_i sellel baasil — kordajad avaldises (9.4) — on ühtlasi skalaarkorrutised (9.5). Skalaarkorrutise säilimise tõttu on nad vektori x' ja ristbaasi $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ korral täpselt samad:

$$x' e'_i = x e_i = \xi_i,$$

ning järelikult

$$x' = \xi_1 e'_1 + \dots + \xi_n e'_n. \quad (10.3)$$

Niisiis, kui teatava isomeetrilise kujutuse puhul üheaegselt kujutada vektorit ja ristbaasi, siis vektori koordinaadid sellel baasil jäävad muutumatuks.

Suvalise vektori x' ruumis E'_n saab avaldada kujul (10.3). Määrares nüüd samade kordajatega ξ_i vektori x ruumis E_n valemiga (9.4), leiamegi, et x' on x kujutis. Seega isomeetiline kujutus $f: E_n \rightarrow E'_n$ määrab ruumi E_n vektorite hulga sürjektsiooni ruumi E'_n vektorite hulga.

Siit on lihtne järeldada, et ka $f: E_n \rightarrow E'_n$ ise on sürjektsioon. Selleks võtame vabalt punkti $a \in E_n$ ja tähistame $f(a) = a'$. Ruumi

E'_n suvalisse punkti x' kujutub nüüd niisugune punkt $x \in E_n$, mille korral $\overrightarrow{x'} = \overrightarrow{a'x'}$ on $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{ax}$ kujutis.

Eespool on juba kindlaks tehtud, et iga isomeetriline kujutus on injektsioon. Kokkuvõttes leiame, et *isomeetriline kujutus* $f: E_n \rightarrow E'_n$ on *bijektsioon*.

Isomeetrilist kujutust $f: E_n \rightarrow E'_n$ nimetatakse sageli eukleidiliste ruumide E_n ja E'_n *isomeetriaks*.

Järgnevalt vaatleme olukorda, kus $E'_n = E_n$. Sel juhul nimetatakse isomeetrilist kujutust $f: E_n \rightarrow E_n$ *isomeetriliseks teisenduseks ruumis* E_n ehk *ruumi* E_n *isomeetriaks*. Tuletame valemid, mis antud koordinaatkujutuse $\varphi: E_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ korral võimaldavad punkti $x \in E_n$ koordinaatide x_i järgi arvutada tema kujutise $f(x)$ koordinaate x'_i .

Olgu niisiis

$$\overrightarrow{ox} = x_1 \mathbf{i}_1 + \dots + x_n \mathbf{i}_n, \quad \overrightarrow{of(x)} = x'_1 \mathbf{i}_1 + \dots + x'_n \mathbf{i}_n. \quad (10.4)$$

Algbaasi vektorite $\mathbf{i}_k$ kujutised $\mathbf{i}'_k$ moodustavad, nagu eespool selgus, uue ristbaasi, kusjuures esimesest võrdusest saame pärast isomeetria f rakendamist seose

$$\overrightarrow{f(o)f(x)} = x_1 \mathbf{i}'_1 + \dots + x_n \mathbf{i}'_n.$$

Seejuures

$$\mathbf{i}'_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} \mathbf{i}_j, \quad (10.5)$$

kus $A = \|A_{ij}\|$ on ortogonaalmatriks. Tähistades veel $f(o)$ koordinaadid A_i , saame kokkuvõttes

$$\begin{aligned} \overrightarrow{of(x)} &= \overrightarrow{of(o)} + \overrightarrow{f(o)f(x)} = \sum_{j=1}^n A_j \mathbf{i}_j + \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} \mathbf{i}_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(A_j + \sum_{i=1}^n x_i A_{ij} \right) \mathbf{i}_j \end{aligned}$$

ning et teiselt poolt (10.4) järgi $\overrightarrow{of(x)} = \sum_{j=1}^n x'_j \mathbf{i}_j$; siis

$$x'_j = A_j + \sum_{i=1}^n x_i A_{ij}. \quad (10.6)$$

Seega, ruumi E_n iga isomeetria on koordinaatide abil määratud valemitega (10.6), kus matriks $A = \|A_{ij}\|$ on ortogonaalmatriks.

Kehtib ka vastupidine väide: kujutus $f: E_n \rightarrow E_n$, mis on määratud valemitega (10.6), kus A on ortogonaalmatriks, on isomeetria.

Tõepoolest, võttes punktile x lisaks teise vabalt valitud punkti y ning kirjutades ka selle jaoks välja valemid (10.6), saame

$$x'_j - y'_j = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) A_{ij}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n (x'_j - y_j)^2 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) A_{ij} \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) A_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^n (x_k - y_k) A_{kj} \right) = \\ &= \sum_{i,k=1}^n (x_i - y_i) (x_k - y_k) \sum_{j=1}^n A_{ij} A_{kj}\end{aligned}$$

ning et (9.2) põhjal

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} A_{kj} = \delta_{ik},$$

siis paremal tuleb $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$. Võttes mõlemast poolest ruutjuure, leiame tõesti, et $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, s. t. f on isomeetria.

Isomeetriaid kasutades saab lahendada järgmise põhimõtteliselt tähtsa küsimuse. Eukleidilise ruumi E_n struktuur algmuutkonnas M_n on määratud teatava koordinaatkujutuse $\varphi: M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vahendusel (vt. art. 1). Viimaseks võib aga olla valitud ka mingi teine bijektsioon $\varphi': M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Millal see määrab sama eukleidilise ruumi struktuuri mis esialgne φ ?

Kahe bijektsiooni φ ja φ' abil saab määrata bijektsiooni $f: M_n \rightarrow M_n$, võttes $f = \varphi^{-1} \circ \varphi'$. Sel korral $\varphi' = \varphi \circ f$, s. t.

$$\varphi'(x) = \varphi(f(x)). \quad (10.7)$$

Olgu $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$ ja $\varphi'(x) = (x'_1, \dots, x'_n)$. Siin φ määrab ruumi E_n struktuuri valemi (1.1) kohaselt ja φ' määrab ruumi E'_n struktuuri valemiga

$$d'(x, y) = \sqrt{(x'_1 - y'_1)^2 + \dots + (x'_n - y'_n)^2}. \quad (10.8)$$

Samal ajal on (10.7) põhjal punkti x φ' -koordinaadid x'_i ühtlasi punkti $f(x)$ φ -koordinaatideks ning samuti on see muidugi punkti y korral. Valemi (10.8) järgi seega

$$d'(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Saadud seos koos tingimusega (10.1) annab nüüd järgmise tulemuse:

bijektsioonid φ ja φ' määravad sama eukleidilise ruumi struktuuri (s. t. $d'(x, y) = d(x, y)$) parajasti siis, kui bijektsioon $f = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ on isomeetria.

Iga bijektsiooniga φ on üksüheselt seotud tema algreeper $\{o; i_1, \dots, i_n\}$. Vastupidi, iga ristreeper $\{a; e_1, \dots, e_n\}$ määrab ühe bijektsiooni φ' , nii et $f = \varphi^{-1} \circ \varphi'$ on isomeetria. Tõepoolest, tingimustest (9.1) järeldub, et vektori (9.4) skalaarruut avaldub kujul

$$x^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

ning et $d(x, y) = \sqrt{xy^2}$, siis valemiga (9.6) määratud bijektsioon φ' , mille korral $\varphi'(x) = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, rahuldab seatud nõudeid.

Sellest järeldub, et valemite (10.5) tuletamisel kasutatud reeperiks $\{o; i_1, \dots, i_n\}$ ja $\{o'; i'_1, \dots, i'_n\}$, kus $o' = f(o)$; võivad olla kaks suvalist ristreeperit ruumis. Ühtlasi selgub siit, et *iga kahe ristreeperi korral ruumis E_n leidub parajasti üks ruumi E_n isomeetria, mis kujutab esimese neist teiseks* — kordajad A_j ja A_{i_j} vastavalt valemis $\overrightarrow{oo'} = \sum_{j=1}^n A_j i_j$ ja (10.5) võimaldavad kohe välja kirjutada selle isomeetria valemid (10.6).

Ortogonaalmaatriksi A korral kas $|A| = 1$ või $|A| = -1$. Vastavalt sellele nimetatakse valemitega (10.5) seotud ristreepereid kas *samasuguselt või erisuguselt orienteerituteks* ning valemitega (10.6) määratud isomeetriat kas *orientatsiooni säilitavaks* või *muutvaks*. (Orientatsiooni mõiste lähem analüüs juhtudel $n=2$ ja $n=3$ on antud õpikus [6], lk. 71—76, 246—247.)

Ruumi E_n orientatsiooni säilitavat isomeetriat nimetatakse ka *liikumiseks* ruumis E_n . (Liikumiste põhjalikum analüüs juhtudel $n=2$ ja $n=3$ on antud õpikus [6], § 9.)

11. Afiinsete teisenduste rühm ja selle alamrühmad. Eukleidi-lise ruumi E_n isomeetria lihtne üldistus on bijektsioon $f: E_n \rightarrow E_n$, mis määratakse selliste valemitega (10.6), kus maatriks $A = \|A_{ij}\|$ ei tarvitse enam olla ortogonaalmaatriks.

Seame punktile $x \in E_n$ koordinaatidega x_i vastavusse punkti $f(x)$, mille koordinaadid x'_j avalduvad üldist laadi valemitega (10.6), ning näitame, et *saadud kujutus $f: E_n \rightarrow E_n$ on bijektsioon parajasti siis, kui $|A| \neq 0$* . Tõepoolest, kui $|A| \neq 0$, siis süsteem (10.6) on iga x'_j korral tundmatute x_i suhtes üheselt lahenduv, sest tegemist on Crameri peajuhuga ([1], lk. 54). Kui aga $|A| = 0$, siis sellel süsteemil kas pole lahendeid (kui astakutingimus pole rahuldatud) või neid on lõpmata palju ([1], lk. 70, 74). Seega ühese lahenduvuse korral, vastupidi, $|A| \neq 0$.

Üldiselt, mingi hulga M bijektsiooni $f: M \rightarrow M$ iseendale nime-tatakse selle hulga *teisenduseks*. Teisenduste f' ja f korrutis $f' \circ f$ defineeritakse valemiga $(f' \circ f)(x) = f'(f(x))$ ja teisenduse f pöörd-teisendus f^{-1} järgmiselt: $f^{-1}(x) = x'$ parajasti siis, kui $f(x') = x$. Et teisenduste korrumine on alati assotsiatiivne: $f'' \circ (f' \circ f) = (f'' \circ f') \circ f$, ja et teisendus $e = f^{-1} \circ f$, mis jätab kõik punktid $x \in M$ paigale, käitub korrumisel ühikuna ([1], lk. 355, [6], lk. 276—277); siis hulga M kõik teisendused moodustavad algebra mõttes *rühma* ([1], lk. 132).

Selle rühma iga alamrühma, s.t. teisenduste alamhulka, mis 1) koos iga oma kahe teisendusega f' ja f sisaldab ka nende kor-rutise $f' \circ f$ ja 2) koos iga oma teisendusega f sisaldab ka selle pöördteisenduse f^{-1} , nimetatakse hulga M *teisenduste rühmaks* (vrd. [6], lk. 277, kus M on kas E_2 või E_3).

Veendume, et bijektsioonid $f: E_n \rightarrow E_n$, mis on antud valemitega (10.6), kus $|A| \neq 0$, moodustavad teisenduste rühma. Selleks vaatleme punkti koordinaatide süsteemi üherealise maatriksina

$$\xi = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$$

ning kirjutame valemid (10.6) kompaktsel kujul

$$\xi' = \alpha + \xi A, \quad (11.1)$$

kus $\alpha = (A_1 A_2 \dots A_n)$. Kui nüüd on antud veel teine taoline teisendus valemiga $\xi'' = \beta + \xi' B$, siis nende korrutamisel saadava teisenduse valemiks tuleb

$$\xi'' = \beta + (\alpha + \xi A) B = (\beta + \alpha B) + \xi (AB),$$

kus $|AB| = |A| |B| \neq 0$, sest $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$. Valemiga (11.1) antud teisenduse pöördteisenduse määramisel aga leiame, et

$$\xi = -\alpha A^{-1} + \xi' A^{-1},$$

kus $|A^{-1}| = |A|^{-1} \neq 0$. Seega nõuded 1) ja 2) on rahuldatud.

Et valemiga (11.1) ja tingimusega $|A| \neq 0$ antud teisenduse puhul on tegemist ainult koordinaatidega, mitte aga eukleidilise ruumi struktuuri määrava kaugusega, siis on see teisendus sisuliselt algmuutkonna M_n teisendus (art. 1). Seda teisendust nimetatakse algmuutkonna M_n *afiinseks teisenduseks*. Tekib *afiinsete teisenduste rühm*, mida tähistatakse $Af M_n$.

Algmuutkonda M_n sellel antud rühmaga $Af M_n$ nimetatakse *n-mõõtmeliseks afiinseks ruumiks* ja tähistatakse A_n . Selle ruumi geomeetria ehk *afiinse geomeetria* moodustavad ruumi A_n alamhulkade (kujundite) kõik need omadused ja neid omadusi siduvad laused, mis jäävad invariantseks rühma $Af M_n$ teisenduste puhul. Afiinse geomeetria üksikasjalikum käsitus mõõtmete $n=2$ ja $n=3$ korral kuulub analüütilise geomeetria kursusesse ([6], §§ 6–8, 10, 11, 17). Siinkohal piirdume mõningate kõige iseloomulikumate asjaolude tutvustamisega, mis kehtivad iga mõõtme n puhul.

Afiinses geomeetrias saab käsitleda vektoreid täpselt samuti punktipaaridena nagu art-s 1. Näiteks kui $\vec{z} = \overrightarrow{xy}$, siis z koordinaadid on

$$z_i = y_i - x_i.$$

Afiinse teisenduse (10.6) korral kujutub z vektoriks z' , mille koordinaadid on

$$z'_j = \sum_{i=1}^n z_i A_{ij}.$$

ehk kompaktselt

$$Z' = ZA.$$

Selles teisenduses jäävad invariantseks kahe vektori summa $z+w$ ja korrutise λz mõisted, sest

$$(Z+W)A = ZA + WA, \quad (\lambda Z)A = \lambda(ZA).$$

Järelikult on tegemist vektorite hulga lineaarteisendusega ([1], lk. 359).

Eukleidilise geomeetria mõistetest ja tulemustest jäävad afiinses geomeetrias püsima kõik need, mis on formuleeritavad vektoralgebra äsjamärgitud kahe tehte abil. Sellised mõisted on näiteks sirge ja m -tasand, sellised omadused aga näiteks kahe sirge omadus olla ühes või teises vastastikusel asendis. Samal ajal mõisted ja suurused, mida ei saa defineerida vektorite skalaarkorrutiste abita, lähevad kaotsi, kui minna eukleidiliselt geomeetrialt üle afiinsele. Niisugused on näiteks kaugused, nurgad, pind- ja ruumalad. Kaovad ka ristbaasi ja -reeperi mõisted, kuid näiteks kahe reeperi sama- või erisuguselt orienteerituse mõiste jääb püsima, sest üleminekumaatriksi A korral on endiselt kaks võimalust: kas $|A| > 0$ või $|A| < 0$.

Märgime veel, et afiinne geomeetria sisaldab ruumi E_n eukleidilise geomeetria ja ruumi 1E_n pseudoeukleidilise geomeetria ühisosa. Just see võimaldaski pseudoeukleidilise ruumi teatavaid vahekordi tõlgendada eukleidilise ruumi geomeetria termineis, sest kasutusel oli tegelikult mõlema ruumi geomeetria ühine osa — afiinne geomeetria.

Afiinsete teisenduste rühmal AfM_n on mitmed tähtsad alamrühmad. Ühe sellise moodustavad orientatsiooni säilitavad afiinsed teisendused, mille korral $|A| > 0$, sest kui ka $|B| > 0$, siis $|AB| = |A||B| > 0$ ja $|A^{-1}| = |A|^{-1} > 0$. Teise alamrühma moodustavad need afiinsed teisendused, mille korral $|A| = \pm 1$, sest kui $|B| = \pm 1$, siis on $|AB| = |A||B| = \pm 1$ ja $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \pm 1$. Seda teist alamrühma nimetatakse *ekviafiinsete teisenduste rühmaks*.

Eukleidilises ruumis E_n on ekviafiinseid teisendusi kerge ära tunda, sest nad jätavad invariantseks n -rööptahuka ruumala. (Selle väite põhjendus juhtudel $n=2$ ja $n=3$, mis on antud [6], lk. 264, on art-te 3 ja 4 tulemusi kasutades ilma eriliste raskusteta üle kantav ka suvalise n juhule.)

Et ruumi E_n isomeetria (10.6) korral A on ortogonaalmaatriks ja seega $|A| = \pm 1$, siis iga isomeetria on ühtlasi ekviafiinne teisendus. Seejuures kõik isomeetriad moodustavad rühma. See järeldub otseselt isomeetria definitsioonist, sest kui ruumi E_n kaks bijektsiooni iseendale säilitavad kaugused, siis teeb seda ka nende korrutis ja kummagi bijektsiooni pöördkujutus. Sama järeldus tuleneb ka asjaolust, et ortogonaalmaatriksid moodustavad korrutamise suhtes rühma ([1], lk. 441).

Liikumiste kui orientatsiooni säilitavate isomeetriaate puhul leiab aset võrdus $|A| = 1$, mistõttu ka need moodustavad rühma.

Alamrühmi saab määrata ka, nõudes ühe punkti, näiteks punkti o paigalejäämist. Sel juhul peab võrdustest $x_i = 0$ järelduma $x'_j = 0$, mistõttu valemeis (10.6) $A_j = 0$; punkti o nimetatakse siin *püsipunktiks*.

Afiinseid teisendusi püsipunktiga o nimetatakse *tsentroafiinseteks teisendusteks*; need moodustavad samuti rühma. Sellesse rühma kuuluvaid ruumi E_n isomeetrilisi teisendusi nimetatakse *ortogonaal-*

teisendusteks (püsipunktiga o), nende rühm on isomorfne ortogonaalmaatriksite rühmaga. Orientatsiooni säilitavaid ortogonaalteisendusi, teisiti öeldes, liikumisi püsipunktiga o , nimetatakse pöörteks punkti o ümber. Ka need moodustavad rühma.

Minkowski ruumi 1E_n isomeetriaid, nende rühma ja selle olulisemaid alamrühmi, millel on suur tähtsus nii geomeetrias kui teoreetilises füüsikas, uurime kahes järgnevas artiklis.

12. Minkowski ruumi isomeetriad. Eukleidilise ruumi E_n isomeetriaite käsitlemist saab mõningate modifikatsioonidega üle kanda pseudoeukleidilise ruumi hE_n juhule. Alljärgnevas piirdume Minkowski ruumiga 1E_4 kui aegruumi geomeetrilise mudeliga. Seejuures ilmneb küllalt selgesti, mis laadi modifikatsioonidega on siin üldiselt tegemist.

Minkowski ruumi 1E_4 isomeetriaks nimetatakse kujutust $f: {}^1E_4 \rightarrow {}^1E_4$, mis säilitab iga kahe punkti x ja y vahelise kauguse:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Valemist (10.2), mis kehtib ruumis 1E_4 täpselt samuti nagu ruumis E_n , järeldub, et isomeetria korral säilib ka suvalise kahe vektori k ja l skalaarkorrutis kl .

Mõnevõrra tuleb modifitseerida ristbaasi mõistet. Ortogonaalne baas ruumis 1E_4 defineeritakse samuti nagu art-s 9: tema iga kaks vektorit peavad olema ortogonaalsed. Niisugused baasid on olemas; näiteks vektorid:

$$\begin{aligned} i_1 &: (1, 0, 0, 0), \\ i_2 &: (0, 1, 0, 0), \\ i_3 &: (0, 0, 1, 0), \\ i_4 &: (0, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

moodustavad ühe sellise. Siin (6.11) põhjal tõesti $i_\mu i_\nu = 0$, kui $\mu \neq \nu$; $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, ning samal ajal (6.12) järgi $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1$, $i_4^2 = -1$.

Näitame üldise meetodi ortogonaalse baasi konstrueerimiseks ruumis 1E_4 . Võtame vabalt mitteisotroopse vektori a_1 , s.t. sellise, et $a_1^2 \neq 0$. Art-s 8 selgus, et niisuguse vektoriga ortogonaalne hüper-tasand on kas eukleidiline ruum E_3 (kui $a_1^2 < 0$) või pseudoeukleidiline ruum 1E_3 . Selles võime valida jälle mitteisotroopse vektori a_2 ning vaadelda temaga ortogonaalset tasandit kõnesolnud ruumis E_3 või 1E_3 . Jääb võtta sellel tasandil mitteisotroopne vektor a_3 ning viimasega ortogonaalse sirge mingi sihivektor a_4 .

Konstruksioonist on selge, et $a_\mu a_\nu = 0$, kui $\nu \neq \mu$ ning $a_\mu^2 \neq 0$. Kui μ mingi fikseeritud väärtuse korral $a_\mu^2 > 0$, siis võib a_μ normeerimisega saada ühikvektori

$$i'_\mu = \frac{1}{\sqrt{a_\mu^2}} a_\mu.$$

Kui aga $a_v^2 < 0$, siis tuleb normeerimine teha järgmiselt:

$$i'_v = \frac{1}{\sqrt{-a_v^2}} a_v. \quad (12.1)$$

Esimesel juhul $i_\mu'^2 = 1$, teisel juhul $i_v'^2 = -1$. Siin on teisel juhul i'_v pikkus i . Üldiselt vektorit pikkusega i nimetatakse *imaginaarühikvektoriks*; selline on näiteks ka i_4 .

Osutub, et i'_1, i'_2, i'_3, i'_4 seas, täpselt samuti nagu i_1, i_2, i_3, i_4 seas, on kolm ühikvektorit ja üks imaginaarühikvektor. Tõepoolest, kui oletada, et imaginaarühikvektoreid on näiteks kaks ja tähistada nad i'_3 ja i'_4 , siis nende lisamine ühikvektoreile i_1, i_2, i_3 annab viis vektorit, mis on ruumis 1E_4 lineaarselt sõltuvad. Sellele sõltuvusele võib anda kuju

$$\lambda_1 i_1 + \lambda_2 i_2 + \lambda_3 i_3 = \mu_3 i'_3 + \mu_4 i'_4.$$

Vaatleme nüüd võrduse poolte skalaarruute, mis on samuti võrdsed. Et $i_1 i_2 = i_2 i_3 = i_3 i_1 = 0$, $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = 1$ ja $i'_3 i'_4 = 0$, $i_3'^2 = i_4'^2 = -1$, siis

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = -\mu_3^2 - \mu_4^2.$$

Et sõltuvuse kõik kordajad pole nullid, siis tekib vastuolu: võrduse pooled on vastandmargilised reaalarvud, kusjuures vähemalt üks neist ei ole null.

Teiselt poolt ei saa kõik vektorid i'_μ olla ühikvektorid, sest siis oleks suvalise vektori

$$x = x'_1 i'_1 + x'_2 i'_2 + x'_3 i'_3 + x'_4 i'_4$$

korral $x^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \geq 0$, mis aga ruumi 1E_4 puhul on võimatu.

Niiviisi oleme jõudnud järgmise tulemuseni. Kui ruumi 1E_4 suvalise ortogonaalse baasi vektorid normeerida, siis saadud ristbaas koosneb alati kolmest ühikvektorist ja ühest imaginaarühikvektorist. Seejuures võib selle baasi vektorid nummerdada selliselt, et imaginaarühikvektor on i'_4 . Eeltoodud konstruktsioonist selgub ühtlasi, missuguse vabadusega on ristbaas ruumis 1E_4 valitav.

Seda valikuvabadust võib selgitada teisiti. Avaldame saadud uue ristbaasi vektorid esialgse ristbaasi vektorite kaudu:

$$i'_\mu = \sum_{v=1}^4 A_{\mu v} i_v. \quad (12.2)$$

Arvestades tingimusi

$$i'_\mu i'_v = {}^1\delta_{\mu v} = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mu = v \neq 4, \\ -1, & \text{kui } \mu = v = 4, \\ 0, & \text{kui } \mu \neq v, \end{cases} \quad (12.3)$$

mis kehtivad ka i_1, i_2, i_3 ja i_4 puhul, saame

$$\sum_{i=1}^3 A_{\mu i} A_{v i} - A_{\mu 4} A_{v 4} = {}^1\delta_{\mu v}. \quad (12.4)$$

Neid seoseid saab kompaktselt esitada maatriksalgebra abil, analoogiliselt sellega, nagu seosed (9.2) väljendavad maatriksi A ortogonaalsust. Selleks tuleb võrduste (12.2) kordajate maatriksi

$$A = \|A_{\mu\nu}\|$$

puhul defineerida uus maatriks

$$A'^T = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & -A_{41} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & -A_{42} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & -A_{43} \\ -A_{14} & -A_{24} & -A_{34} & A_{44} \end{vmatrix},$$

mis erineb A transponeeritud maatriksist A^T selle poolest, et on muudetud märgid viimase rea ja viimase veeru elementide ees (nende ühine element A_{44} saab siis tagasi esialgse märgi). Nagu kerge kontrollida; on seosed (12.4) nüüd samaväärsed seosega

$$AA'^T = E.$$

Maatriksit A , mis rahuldab saadud tingimust, s.t. mille korral $A^{-1} = A'^T$, nimetatakse *pseudoortogonaalmaatriksiks*. Sellest tingimusest järeldub, et $|A||A'^T| = |E|$ ning et $|A'^T| = |A|$ ja $|E| = 1$, siis $|A|^2 = 1$, seega $|A| = \pm 1 \neq 0$.

Pseudoortogonaalmaatriksi võib ühtlasi defineerida kui maatriksi A , mille abil korraldatakse valemite (12.2) järgi üleminek ühelt ristbaasilt teisele Minkowski ruumis 1E_4 . Vastupidiselt arutledes saame, et *kui algselt ristbaasilt minna pseudoortogonaalmaatriksi A abil valemite (12.2) järgi uuele baasile, siis see osutub samuti ristbaasiks*. Järelikult on ristbaaside ja pseudoortogonaalmaatriksite vahel korraldatav üksühene vastavus.

Pseudoortogonaalmaatriksi $4 \cdot 4 = 16$ elementi on seotud $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$ seosega (12.4), seega vabalt valitavaks jääb 6 elementi. Sel line on siis ka ristbaasi valiku vabadus Minkowski ruumis 1E_4 .

Olgu nüüd antud mingi vektor x ruumis 1E_4 . Selle saab tema koordinaatide järgi avaldada kujul

$$x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 + x_4 i_4.$$

Kui viimase võrduse pooli korrutada skalaarselt baasivektoritega i_1 ja i_4 ning arvestada seoseid (12.3) saame, analoogiliselt valemiga (9.5), et

$$x_i = x i_i, \quad x_4 = -x i_4; \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.5)$$

Ruumi 1E_4 isomeetria rakendamisel nii vektorile x kui ka algse ristbaasi vektoreile saame skalaarkorrutise säilimise põhjal seoste (12.3) järgi, et selle baasi vektorite kujutised i'_μ moodustavad samuti ristbaasi, kusjuures (12.5) järgi vektori x kujutise x' koordinaatideks sellel uuel baasil on samad

$$x_i = x i_i = x' i'_i,$$

$$x_4 = -xi_4 = -x'i'_4,$$

seega

$$x' = x_1 i'_1 + x_2 i'_2 + x_3 i'_3 + x_4 i'_4.$$

Edasi on lihtne tuletada valemid, mis Minkowski ruumi 1E_4 isomeetria f puhul võimaldavad iga punkti $x \in {}^1E_4$ koordinaatide x_μ järgi arvutada selle punkti kujutise $f(x)$ koordinaate x'_μ sama koordinaatkujutuse puhul. Olgu niisiis

$$\overrightarrow{ox} = \sum_{\mu=1}^4 x_\mu i_\mu, \quad \overrightarrow{of(x)} = \sum_{\mu=1}^4 x'_\mu i_\mu.$$

Esimesest võrdusest saame pärast isomeetria f rakendamist

$$\overrightarrow{f(o)f(x)} = \sum_{\mu=1}^4 x_\mu i'_\mu$$

ning siit valemite (12.2) järgi

$$\overrightarrow{f(o)f(x)} = \sum_{\mu=1}^4 x_\mu \left(\sum_{\nu=1}^4 A_{\mu\nu} i_\nu \right).$$

Kui tähistada veel

$$\overrightarrow{of(o)} = \sum_{\nu=1}^4 A_\nu i_\nu, \quad (12.6)$$

on tulemuseks

$$\begin{aligned} \overrightarrow{of(x)} &= \overrightarrow{of(o)} + \overrightarrow{f(o)f(x)} = \sum_{\nu=1}^4 A_\nu i_\nu + \sum_{\mu,\nu=1}^4 x_\mu A_{\mu\nu} i_\nu = \\ &= \sum_{\nu=1}^4 \left(A_\nu + \sum_{\mu=1}^4 x_\mu A_{\mu\nu} \right) i_\nu. \end{aligned}$$

Võrdlus $\overrightarrow{of(x)}$ varasema avaldisega annabki soovitud valemid:

$$x'_\nu = A_\nu + \sum_{\mu=1}^4 x_\mu A_{\mu\nu}, \quad (12.7)$$

kus maatriks $A = \|A_{\mu\nu}\|$ on pseudoortogonaalmaatriks. Selgub, et Minkowski ruumi 1E_4 isomeetria on selle ruumi afiinse teisenduse erijuht.

Osutub, et ruumi 1E_4 isomeetria võib defineerida kui afiinse teisenduse f , mille valemis (12.7) kordajate $A_{\mu\nu}$ maatriks A on pseudoortogonaalne. Tõepoolest, võttes punktile x lisaks teise vabalt valitud punkti $y \in {}^1E_4$ ning kirjutades ka selle jaoks välja valemid (12.7), saame

$$x'_\nu - y'_\nu = \sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) A_{\mu\nu}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (x'_i - y'_i)^2 - (x'_4 - y'_4)^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) A_{\mu i} \right)^2 - \\ &- \left(\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) A_{\mu 4} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) A_{\mu i} \right) \left(\sum_{v=1}^4 (x_v - y_v) A_{vi} \right) - \\ &- \left(\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) A_{\mu 4} \right) \left(\sum_{v=1}^4 (x_v - y_v) A_{v4} \right) = \\ &= \sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) (x_v - y_v) \left(\sum_{i=1}^3 A_{\mu i} A_{vi} - A_{\mu 4} A_{v4} \right). \end{aligned}$$

Rakendades seoseid (12.4) leiame, et vaadeldav avaldis on

$$\sum_{\mu=1}^4 (x_\mu - y_\mu) (x_v - y_v) {}^1\delta_{\mu v} = \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 - (x_4 - y_4)^2.$$

Võttes arendise esimesest ja viimasest poolest ruutjuured, saame (6.8) põhjal, et $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, s.t. vaadeldav afiinne teisendus f on ruumi 1E_4 isomeetria.

Samuti nagu eukleidilise ruumi E_n korral nimetatakse ka siin punktist o' ja ristbaasist $\{i'_1, i'_2, i'_3, i'_4\}$ koosnevat süsteemi $\{o'; i'_1, i'_2, i'_3, i'_4\}$ ristreeperiks ehk -teljestikuks. Ruumi 1E_4 iga isomeetria kujutab ristreeperi teatavaks teiseks ristreeperiks. Seejuures iga kahe ristreeperi puhul leidub parajasti üks ruumi 1E_4 isomeetria, mis kujutab esimese neist teiseks — kordajad A_v ja $A_{\mu v}$ valemis (12.6) ja (12.2) võimaldavad kohe välja kirjutada valemid (12.7).

13. Poincaré ja Lorentzi rühmad. Minkowski ruumi 1E_4 kõik isomeetriad — valemite (12.7) abil määratud teisendused pseudoortogonaalmaatriksiga $A = \|A_{\mu v}\|$ — moodustavad rühma. Tõepoolest, kahe isomeetria korrutis kui kaugusi säilitav kujutus on jälle isomeetria. Et valemis $|A| = \pm 1 \neq 0$, siis on neist avaldatavad x_μ , seega igal isomeetrial on olemas pöördkujutus, mis samuti kaugusi säilitades osutub isomeetriaks.

Minkowski ruumi 1E_4 kõigi isomeetriaate rühma nimetatakse *Poincaré¹ rühmaks*. Valemist (12.7) selgub, missuguse vabadusega on valitav selle rühma element: kuuetele parameetrile, millest sõltub pseudoortogonaalmaatriks A , lisandub veel neli parameetrit — vabaliikmed A_1, A_2, A_3 ja A_4 . Kokku sõltub Poincaré rühma element seega kümnest parameetrist.

Samuti nagu art-s 11 teisenduse (11.1) analüüsimisel võib ka nüüd teha kindlaks, et ruumi 1E_4 kahe isomeetria korrutamisel korrutuvad nende valemite (12.7) olevad pseudoortogonaalmaatriksid ning et üleminekul isomeetrialt tema pöördkujutusele asendub pseudoortogonaalmaatriks oma pöördmaatriksiga. Et mõlemal juhul on tulemuseks jälle isomeetria, siis järeldub siit, et pseudoortogonaalmaatriksid moodustavad rühma.

¹ Henri Poincaré [puäⁿkaree] (1854—1912), prantsuse matemaatik ja füüsik, Prantsuse TA liige.

Vaadeldes ruumi 1E_4 isomeetriaid, mille valemeis (12.7) kõik $A_v=0$, s.t. mis jätavad paigale ristreeperi alguspunkti o , leiame, et nad on üksüheses vastavuses kordajate pseudoortogonaalmatriksitega, kusjuures selliste isomeetriaite korrutamisel korrutuvad need matriksid. Järelikult pseudoortogonaalmatriksite rühm on isomorfne ruumi 1E_4 punkti o paigale jätvate isomeetriaite rühmaga. Viimane kujutab endast Poincaré rühma teatavat alamrühma, mida nimetatakse *Lorentzi üldrühmaks*.

Omaette rühma moodustavad need Lorentzi üldrühma teisendused, mille korral $|A|=1$. (Põhjendus kordab art-s 11 toodud mõttekäike.) Seda rühma nimetatakse *Lorentzi rühmaks*, tema teisendusi — *Lorentzi teisendusteks*. Lorentzi eriteisendus (6.6), kus

nüüd tähistame $ct=x_4$, $ct'=x'_4$ ja $\left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^{-1}=\lambda$, on erijuht, mil

$$A = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{c}\lambda & 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix}. \quad (13.1)$$

Nimelt võib vahetult kontrollida, et tingimused (12.4) on sellise A puhul rahuldatud ning et $|A|=1$.

Osutub, et Lorentzi üldrühmas saab lihtsa tingimusega välja eraldada ka sellised alamrühmad, millega analoogilisi ruumi E_n ortogonaalteisenduste rühmas ei leidu. Nimelt, kui seoses (12.4) võtta $\mu=v=4$, saame

$$A_{44}^2 = \sum_{i=1}^3 A_{4i}^2 + 1 \neq 0. \quad (13.2)$$

Seega kas $A_{44} > 0$ või $A_{44} < 0$. Osutub, et saadud tingimuste tähendus on järgmine: *imaginaarse pikkusega vektori x korral esimesel juhul $x'_4 : x_4 > 0$, teisel juhul $x'_4 : x_4 < 0$.*

Tõestuseks võtame valemeist (12.7) viimase, mil $\mu=4$, eeldades, et $A_v=0$, nagu see on Lorentzi üldrühma korral:

$$x'_4 = x_1 A_{14} + x_2 A_{24} + x_3 A_{34} + x_4 A_{44}.$$

Nagu öeldud, piirdume punktidega x , mille kohavektor x on imaginaarse pikkusega, s.t. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 < 0$. Siit $x_4 \neq 0$ ja $\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 < 1$, kus $\xi_i = x_i/x_4$. Eelmisest võrdusest järeldame, et

$$\frac{x'_4}{x_4} = A_{44} + \sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4}. \quad (13.3)$$

Järgnevalt on vaja teatavaid seostega (12.4) analoogilisi võrdusi. Nende seoste matrikskuju on $AA^T = E$. Korrutades siin võrduse pooli vasakult maat-

riksiga A^{-1} ja paremalt maatriksiga A , saame $A'^T A = E$, ning et $A = (A'^T)^T$, siis koos maatriksiga A on ka A'^T pseudoortogonaalmaatriks. Seega ka tema ridade puhul kehtivad seosed (12.4), mistõttu

$$\sum_{i=1}^3 A_{i\mu} A_{iv} - A_{4\mu} A_{4v} = \delta_{\mu\nu}. \quad (13.4)$$

Siit $\mu = \nu = 4$ puhul

$$\sum_{i=1}^3 A_{i4}^2 - A_{44}^2 = -1 < 0,$$

millest $\sum_{i=1}^3 A_{i4}^2 < A_{44}^2$. Korrutades selle võrratuse pooled läbi võrratuse $\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 < 1$ vastavate pooltega, saame

$$\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^3 A_{i4}^2 \right) < A_{44}^2.$$

Vasak pool ei saa Cauchy võrratuse järgi olla väiksem kui $\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4} \right)^2$, niisiis

$$\left(\sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4} \right)^2 < A_{44}^2$$

ehk

$$-|A_{44}| < \sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4} < |A_{44}|.$$

Juhul $A_{44} > 0$ saame siit $A_{44} + \sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4} > 0$ ja (13.3) põhjal $x'_4/x_4 > 0$, juhul

$A_{44} < 0$ aga, vastupidi, $A_{44} + \sum_{i=1}^3 \xi_i A_{i4} < 0$ ja $x'_4/x_4 < 0$.

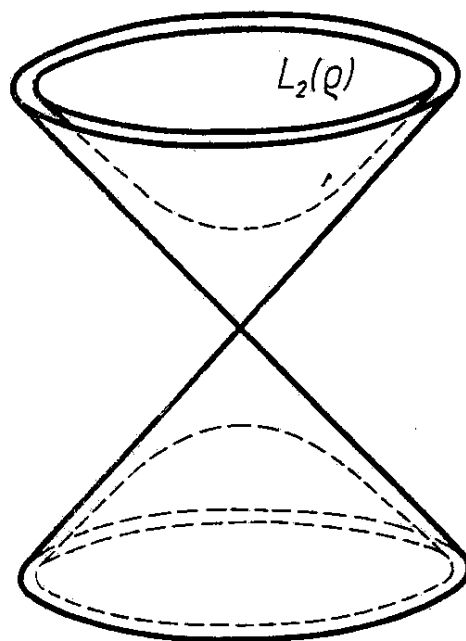
Tingimuste $A_{44} > 0$ või $A_{44} < 0$ ehk nendega samaväärsete $x'_4/x_4 > 0$ või $x'_4/x_4 < 0$ geomeetrilise tähenduse selgitamiseks vaatleme hüpersfääri, mille keskpunkt on o ja raadius puhtimaginaararv $r = iq$. Selle hüpersfääri võrrandist

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -q^2$$

järeldub, et $x_4^2 - q^2 \geq 0$, s.t. kas $x_4 \geq q > 0$ või $x_4 \leq -q < 0$. Hüpersfäär koosneb seega kahest eraldi seisvast osast; millest kumbagi nimetatakse üheks *katteks*. (Võrdluseks meenutame art-i 7 tulemust, mille kohaselt imaginaarse raadiusega 2-sfäär ruumis 1E_3 on selle ruumi afiinse geomeetria seisukohalt kahekatteline hüperboloid; joon. 5).

Lorentzi üldteisenduse kui ruumi 1E_4 punkti o paigale jätva isomeetria korral teiseneb kõnesolev hüpersfäär — punktist o kaugusel $r = iq$ olevate punktide hulk — iseendaks. Nüüd on selge, et juhul $A_{44} > 0$, mil eeltoodu põhjal x_4 ja x'_4 on samamärgilised, teiseneb selle hüpersfääri kumbki kate iseendaks, s.t. katted säilivad, kuid juhul $A_{44} < 0$, mil x_4 ja x'_4 on erimärgilised, need katted vahetuvad.

Kõik esimese juhu alla käivad Lorentzi üldteisendused moodustavad ilmselt rühma, sest kui kate säilib kahe teisenduse korral, siis säilib ta ka nende korrutise ja kummagi pöördteisenduse korral.



Joonis 5

Seda rühma nimetatakse *hüperboolseks rühmaks*; tingimus $x_4 > 0 \Rightarrow x'_4 > 0$, mis selle alamrühma Lorentzi üldrühmas määrab, väljendab võrduste $x_4 = ct$, $x'_4 = ct'$ tõttu lihtsat füüsikalist tõde: aegruumis, mille mudeliks E_4 on, jääb aja suund muutumatuks. Märkime, et Lorentzi eriteisendus, mille puhul maatriksil on kuju (13.1), kuulub hüperboolsesse rühma.

Hüperboolne rühm toimib imaginaarse raadiusega hüpersfääri kummalgi kattel selliselt, et selle katte iga punkti x võib sobiva teisendusega viia sama katte igaks teiseks punktiks x' . Selles veendumiseks valime vabalt kaks ristreeperit $\{o; i'_\mu\}$ ja $\{o; i''_\mu\}$ algus-

punktiga o selliselt, et $\overrightarrow{ox} = x = q i'_4$ ja $\overrightarrow{ox'} = x' = q i''_4$. Kummagi korral leidub ruumi E_4 isomeetria, mis viib lähtereeperi $\{o; i'_\mu\}$ üheks teist ristreepereist. Korrutades nüüd esimese pöördteisenduse teisega, saamegi tulemuseks vajaliku hüperboolse rühma teisenduse.

Väärib veel märkimist, et vaadeldava reeperi kolm esimest vektorit i'_i (samuti i''_i); $i = 1, 2, 3$, olles ortogonaalsed vektoriga $\overrightarrow{ox}$

(vastavalt vektoriga $\overrightarrow{ox'}$), asuvad art-i 7 ühe tulemuse põhjal vaadeldava hüpersfääri puutujahüpertasandil puutepunktiga x (vastavalt x'). Nende valiku osas jääb meile täielik vabadus. Kõnesolnu leiab kasutamist art-s 56, kus käsitleme vaadeldava hüpersfääri üht katet kui Lobatševski ruumi (ehk hüperboolset ruumi) ja hüperboolset rühma tõlgendamise kui selle ruumi isomeetriliste teisenduste rühma.

Harjutusülesanded

15. Näidata, et maatriks

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

on ortogonaalmaatriks. Avaldada vektor $x=(1,1,1)$ selle maatriksi reavektorite e_1, e_2 ja e_3 — paarikaupa ortogonaalsete ühikvektorite — lineaarkombinatsioonina. Kontrollida, et kordajad — koordinaadid baasil $\{e_1, e_2, e_3\}$ — avalduvad skalaarkorrutistena xe_i ; $i=1, 2, 3$.

16. Kontrollida, et kujutus $f: E_3 \rightarrow E_3$, mis on määratud valemiga

$$x'_1 = \frac{11}{15}x_1 + \frac{2}{15}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 1,$$

$$x'_2 = \frac{2}{15}x_1 + \frac{14}{15}x_2 - \frac{1}{3}x_3 - 1,$$

$$x'_3 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + 2,$$

on ruumi E_3 isomeetria. Kas ta osutub liikumiseks?

17. Näidata, et maatriks

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

on pseudoortogonaalmaatriks. Arvutada vektori $x=(1,1,1,1)$ skalaarkorrutised selle maatriksi reavektoritega i'_1, i'_2, i'_3, i'_4 . Näidata, et saadud arvud $(xi'_i; i=1, 2, 3 \text{ ja } -xi'_4)$ on kordajateks vektori x avaldises lineaarkombinatsioonina vektoritest i'_μ ; $\mu=1, 2, 3, 4$.

18. Kontrollida, et kujutus $f: {}^1E_4 \rightarrow {}^1E_4$, mis on määratud valemitega

$$x'_1 = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4,$$

$$x'_2 = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4,$$

$$x'_3 = 5x_1 + 5x_2 + 7x_4,$$

$$x'_4 = 7x_1 + 7x_2 + x_3 + 10x_4$$

on nii Lorentzi rühma kui ka hüperboolse rühma element.

II. JOON EUKLEIDILISES VÕI PSEUDOEUKLEIDILISES RUUMIS

§ 4. JOON JA SELLE PUUTUJA

Eelmises, käesoleva kursuse jaoks sissejuhatavas peatükis käsitlesime n -mõõtmeliste ruumide geomeetria lihtsamaid mõisteid analüütilisele geomeetria omaste meetoditega — koordinaatide ja algebra vahendusel. Käesolevast peatükist algab tutvus diferentsiaalgeomeetria. Lihtsaim uurimisobjekt on siin joon. Nimetust joon kasutatakse ka analüütilises geomeetrias (näiteks teist järku jooned), samuti matemaatilises analüüsis diferentsiaalarvutuse geomeetriliste rakenduste juures (joon kui funktsiooni graafik jms.), kuid joone küllalt üldine käsitus antakse siiski alles diferentsiaalgeomeetrias.

Esimeseks üldistuseks on üleminek tasandil asetsevatelt joontelt kolmemõõtmelises ruumis E_3 paiknevatele joontele. Seejärel võetakse vaatluse alla jooned ka n -mõõtmelises ruumis. Viimase sammu vajalikkus selgub näiteks teoreetilise mehaanika ühe osa, nimelt punkti kinemaatika ülesannetest. Kui punkt liigub ruumis E_3 , siis tema jäljeks on joon, kuid ühtlasi tekib üks hulk elementaarsündmusi (vt. art. 6) — punkti paiknemisi teatavatel hetkedel selle joone vastavates punktides. See viimane hulk kujutab endast joont juba neljamõõtmelises aegruumis.

Kõiki eelmainitud erijuhte, samuti teisigi rakendusi silmas pidades alustame joone käsitlemist üldiselt vaatekohalt, et järgmistes paragrahvides kontsentreeruda eriti tähtsate ülesannete ja alajuhude lähemale uurimisele.

14. Joone mõiste ja võrrandid. Nii eukleidiline ruum E_n kui ka pseudoeukleidiline ruum hE_n (sealhulgas Minkowski ruum 1E_4 kui aegruumi matemaatiline mudel) on eelmises peatükis defineeritud algmuutkonna M_n mõiste abil. Ka joont on otstarbekas defineerida algul kui algmuutkonna M_n teatavat alamhulka.¹

Algmuutkond M_n on art-s 1 defineeritud punktihulgana, mille puhul eksisteerib bijektsioon (koordinaatkujutus)

$$\varphi : M_n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Teiselt poolt on joone mõiste andmiseks vajalik meenutada, mil-

¹ Lugeja, kes on huvitatud üksnes joontest harilikus ruumis, s. t. kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis E_3 , võib järgnevas M_n ossa võtta ruumi E_3 .

list $\mathbf{R}$ alamhulka on lepitud kokku nimetada *piirkonnaks* ([2], lk. 14): reaalarvude piirkond on kas

vahemik $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ või

lõik $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ või

poollõik $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$ või $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$ või

lõpmatu vahemik (a, ∞) või $(-\infty, b)$ või $(-\infty, \infty) = \mathbf{R}$ või

lõpmatu poollõik $[a, \infty]$ või $(-\infty, b]$.

Nüüd võime defineerida joone mõiste diferentsiaalgeomeetrias kasutatavas mahus.

Olgu antud algmootkond M_n koordinaatkujutusega $\varphi : M_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ja piirkond $T \subset \mathbf{R}$. Jooneks nimetatakse algmootkonna alamhulka

$$\gamma = \{x \in M_n : \varphi(x) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in T\}, \quad (14.1)$$

mille puhul

1° funktsioonidel $x_i(t)$; $i=1, \dots, n$ on olemas kuitahes kõrget järku tuletised piirkonnas T ;

2° iga $t \in T$ korral vähemalt üks esimest järku tuletistest $x'_i(t)$ on nullist erinev.

See definitsioon üldistab tasandilise joone käsitlust parameetris- liste võrrandite abil ([2], lk. 268).

Näiteks ruumis E_3 antud sirge, mis võrrandite (2.3) järgi on punktihulk

$$\{x \in E_3 : \varphi(x) = (a_1 + tk_1, a_2 + tk_2, a_3 + tk_3), t \in \mathbf{R}\},$$

kujutab endast joont.

Ellips ([6], lk. 327; [2], lk. 269)

$$\{x \in E_2 : \varphi(x) = (a \cos t, b \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$$

ning hüperbooli kumbki haru ([6], lk. 338)

$$\left\{x \in E_2 : \varphi(x) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t\right), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\} \quad (14.2)$$

ja

$$\left\{x \in E_2 : \varphi(x) = \left(\frac{a}{\cos t}, b \tan t\right), t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right\}$$

on jooned tasandil E_2 .

Kui ellipsi puhul $a=b$, on tegu ringjoonega ([6], lk. 285); sel korral t on

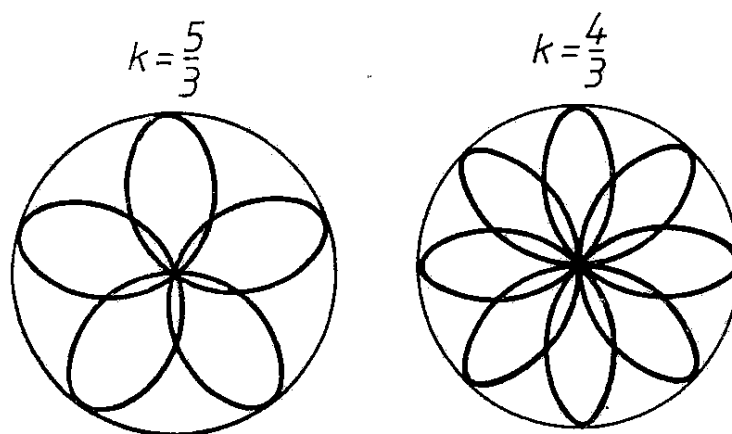
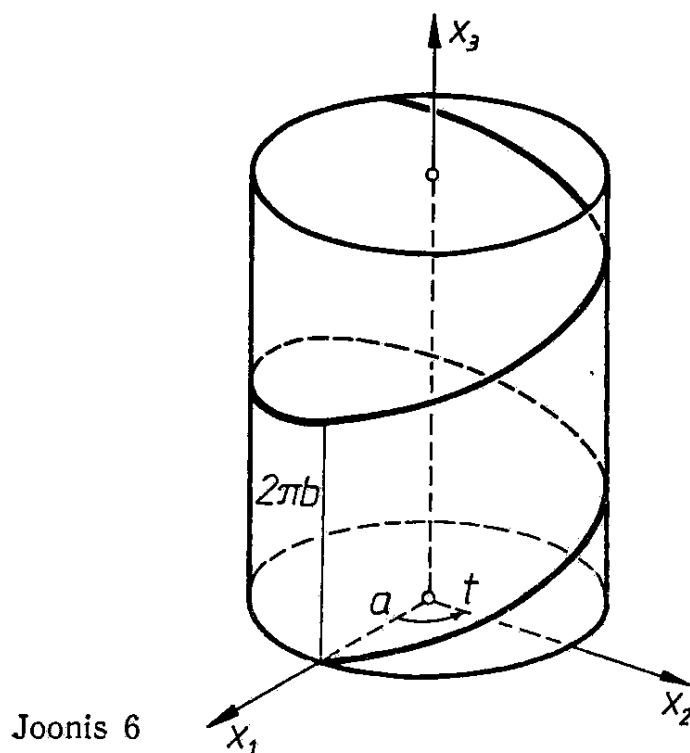
punkti x kohavektori ox pöördenurk x_1 -telje suhtes.

Kui ruumis E_3 toimub pöörlemine x_1x_2 -tasandil, millega kaasneb nihkumine x_3 -telje sihis võrdeliselt pöördenurgaga, siis on liikuva punkti jäljeks *kruvijoon*

$$\{x \in E_3 : \varphi(x) = (a \cos t, a \sin t, bt), t \in \mathbf{R}\} \quad (14.3)$$

(joon. 6). Suurust $2\pi b$, mille võrra muutub x_3 pärast täispööret, nimetatakse kruvijoone *sammuks*. Kui $b > 0$, siis kõneldakse parema käe kruvijoonest, kui aga $b < 0$, siis vasaku käe kruvijoonest.

Joone ülalantud definitsioon ei keela kordseid punkte. On täiesti lubatav, et erinevate $t_1 \in T$ ja $t_2 \in T$ korral $x_i(t_1) = x_i(t_2)$; $i = 1, \dots, n$. Kuigi väärtustele t_1 ja t_2 vastab sel korral joone kui



alamhulga $\mathcal{J}$ üks ja seesama punkt x , võib viimast siiski vaadelda kaks korda: üks kord vastavana väärtustele t_1 , teine kord väärtusele t_2 . Punkti kordsus võib olla muidugi ka suurem kui kaks.

Huvitav näide on roos ehk Grandi¹ joon

$$\mathcal{J} = \{x \in E_2 : \varphi(x) = (a \sin kt \cos t, a \sin kt \sin t), t \in T\},$$

kus $a = \text{const} > 0$, $k = \frac{m}{n}$ on positiivne ratsionaalarv ning kas $T = [0, \pi]$, kui m ja n on paaritud arvud, või $T = [0, 2\pi]$, kui üks neist on paarisarv (joon. 7). Näiteks $k=2$ korral väärtustele $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$ ja $t=\frac{3\pi}{2}$ vastab üks ja

¹ Luigi Guido Grandi (1671—1742), itaalia matemaatik.

seesama punkt o , kus $\varphi(o) = (0, 0)$. Kui $k=3$, siis see punkt o vastab väärtustele $t=0$, $t=\frac{\pi}{3}$ ja $t=\frac{2\pi}{3}$.

Üldistatud polaarkoordinaatides ([6], lk. 111) saab vaadeldava joone esitada võrrandiga

$$r = a \sin k\varphi.$$

Kui joonel $\mathcal{J}$ kordsed punktid puuduvad, s.t. kui vastavus $t \mapsto x$ on bijektsioon (ehk üksühene pealekujutus) $T \rightarrow \mathcal{J}$, ning T on lõik, siis nimetatakse joont *lihtkaareks*.

Kui T on lõik $[a, b]$ ja ainsaks kordseks punktiks joonel $\mathcal{J}$ on punkt, mis vastab korraga lõigu mõlemale otspunktile a ja b , siis nimetatakse joont $\mathcal{J}$ *kinniseks lihtjooneks*. Erijuhul, mil lõigu otspunktides a ja b on sama väärtusega mitte üksnes funktsioonid $x_i(t)$, millest oli juttu tingimuses 1°, vaid ka kõik nende tuletised, kõneldakse *kinnisest siledast lihtjoonest*. Selline on näiteks ellips (erijuhul ringjoon).

Joone $\mathcal{J}$ punkte eristab joone definitsiooni kohaselt see, et nende koordinaadid x_i antud koordinaatkujutuse $\varphi: M_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ korral on tingimusi 1° ja 2° rahuldavate funktsioonide $x_i(t)$ väärtused:

$$x_i = x_i(t); \quad i=1, \dots, n; \quad t \in T \subset \mathbb{R}. \quad (14.4)$$

Seoseid (14.4) käsitatakse kui joone $\mathcal{J}$ võrrandeid (antud koordinaatkujutuse φ korral). Argumenti t nimetatakse *parameetriks*, võrrandeid (14.4) — joone $\mathcal{J}$ *parameetrilisteks võrranditeks*.

Erisugused parameetrilised võrrandid võivad määrata ühe ja sellesama joone $\mathcal{J}$. Näiteks võib võrranditega (14.4) antud joone $\mathcal{J}$ puhul teha *parameetri teisenduse* $t=t(\tau)$, kus $t(\tau)$ on mingis piirkonnas $T' \subset \mathbb{R}$ määratud rangelt monotoonne diferentseeruv funktsioon väärtuste piirkonnaga T . Kui liitfunktsioonid $x_i(t(\tau))$ tähistada $x_i^*(\tau)$, siis on selge, et parameetrilised võrrandid

$$x_i = x_i^*(\tau), \quad \tau \in T' \subset \mathbb{R}; \quad (14.5)$$

määravad sama joone mis võrrandid (14.4). Liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja kohaselt

$$x_i^{*'} = x_i' \cdot t' \quad (14.6)$$

ning et $t(\tau)$ range monotoonsuse tõttu $t'(\tau) \neq 0$, $\tau \in T'$, siis funktsioonide $x_i^*(\tau)$ korral on tingimused 1° ja 2° endiselt rahuldatud.

Näiteks hüperbooli ühe haru (14.2) puhul võib võtta $t = \arctan \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)$.

Sel korral $\tan t = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)$,

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \frac{1}{4} \left(\tau - 2 + \frac{1}{\tau^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right)^2,$$

mistõttu hüperbooli selle haru saab esitada ka parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \frac{a}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right), \quad x_2 = \frac{b}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right), \quad \tau \in (0, \infty).$$

Kui võrrandite (14.4) paremates pooltes mõni funktsioonidest $x_i(t)$, näiteks funktsioon $x_1(t)$, on piirkonnas T rangelt monotoonne, siis võib võrrandist $x_1 = x_1(t)$ avaldada $t = t(x_1)$ samuti rangelt monotoonse funktsioonina mingis piirkonnas $T' \subset \mathbb{R}$ ([2], lk. 52) ning kasutada viimast seost parameetri teisendusvalemina ([2], lk. 182). Sel juhul saame ülejäänud võrrandeist (14.4)

$$x_\alpha = f_\alpha(x_1); \quad \alpha = 2, \dots, n. \quad (14.7)$$

Tekkinud võrrandeid nimetatakse vaadeldava joone γ *ilmutatud võrranditeks*.

Juhul $n=2$ on neid üksainus: $x_2 = f(x_1)$, ning joon γ on käsitletav funktsiooni $f(x)$ graafikuna tasandil E_2 . Funktsioon $f(x)$ võib olla antud ka ilmutamata kujul võrrandiga

$$F(x, y) = 0, \quad (14.8)$$

mille korral piirkonnas T' kehtib samasus $F(x, f(x)) \equiv 0$. Ilmutamata funktsiooni põhiteoreem koos oma täiendusega (vt. [3], lk. 197—199) väidab, et kui

1) funktsioonil $F(x, y)$ on olemas punkti (a, b) teatavas ümbruses pidevad osatuletised F_x ja F_y ,

2) $F(a, b) = 0$ ja

3) $F_y(a, b) \neq 0$,

siis leidub niisugune vahemik $T \subset \mathbb{R}$, mis sisaldab a , et võrrand (14.8) määrab punkti (a, b) läbiva joone γ parameetriliste võrranditega

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in T \subset \mathbb{R}, \quad (14.9)$$

kusjuures

$$f'(t) = -\frac{F_x(t, f(t))}{F_y(t, f(t))}, \quad t \in T. \quad (14.10)$$

Võrrandit (14.8) nimetatakse joone γ *ilmutamata võrrandiks*; see võrrand määrab vaadeldava joone täielikult, kui on näidatud ka x muutumispiirkond T kooskõlas ülalsõnastatud põhiteoreemiga.

Siit tuleneb võimalus joone üldisemaks mõistmiseks tasandil E_2 või üldiselt kahemõõtmelises almuutkonnas M_2 . Olgu antud kahe muutuja funktsioon $F(x, y)$, millel on olemas kõikjal pidevad osatuletised F_x ja F_y . Sel korral *jooneks* võrrandiga $F(x, y) = 0$ nimetatakse M_2 alamhulka

$$\{(x, y) : F(x, y) = 0\}.$$

Üldistus seisneb selles, et põhiteoreemi tingimused 2) ja 3) ei tarvitse olla rahuldatud. Näiteks funktsiooni $x^2 + y^2 + 1$ puhul pole rahuldatud tingimus 2), mistõttu vastav joon $\{(x, y) : x^2 + y^2 + 1 = 0\}$ on tühi alamhulk. Selline üldine vaatekoht on omane algebralisele geomeetriaale, kus eeldatakse, et $F(x, y)$ on kahe muutuja polünoom ([1], lk. 253) ja bijektsioon $\varphi : M_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ laiendatakse bijektsiooniks $\varphi_C : M_4 \rightarrow \mathbb{C}^2$, kus $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ja $\mathbb{C}$ on kompleksarvude korpus. Sel korral näiteks võrrand $x^2 + y^2 + 1 = 0$ ei määra enam tühja hulga, sest leidub teda rahuldavaid kompleksarvupaare (x, y) ; niisugune on näiteks paar $(i, 0)$. Kuigi algebralisel geomeetrial on mõningaid kokkupuutekohti diferentsiaalgeomeetriaga, on ta oma ülesannetelt ja meetoditelt viimasest siiski erinev ja seetõttu me teda käesolevas kursuses ei vaatle. (Juhime siinkohal vaid tähelepanu algebralise

joone ja selle järgu mõistele, nii nagu need on defineeritud õpikus [6], lk. 384—385.)

Ka siis, kui on rahuldatud tingimused 1) ja 2), ei tarvitse tingimus 3) olla rahuldatud. Olukord on lihtne, kui $F_x(a, b) \neq 0$; siis tuleb lihtsalt vahetada x ja y osad ning võrrand $F(x, y) = 0$ koos sobiva piirkonna näitamisega (nüüd y muutmiseks) määrab teatava joone. Üldistus tekib juhul, kui $F_x(a, b) = F_y(a, b) = 0$. Sel korral nimetatakse punkti (a, b) *iseäraseks punktiks* joonel võrrandiga $F(x, y) = 0$. Alamhulga $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ ehitust sellise iseärase punkti ümbruses on selgitatud raamatus [3], lk. 200—205.

Iseärastest punktidest kõneldakse ka algmuutkonna M_n sellise alamhulga puhul, mis üldistab joont $\tilde{\gamma}$ järgmises mõttes. Vaatleme M_n alamhulka

$$\tilde{\gamma}^* = \{x \in M_n : \varphi(x) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in T \subset \mathbb{R}\},$$

kus funktsioonide $x_i(t)$ puhul on rahuldatud joone definitsiooni tingimus 1°, kuid tingimus 2° ei tarvitse olla rahuldatud. Kui sel korral teatava $t_0 \in T$ puhul $x'_1(t_0) = \dots = x'_n(t_0) = 0$, siis punkti x_0 , kus $\varphi(x_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$, nimetatakse *alamhulga $\tilde{\gamma}^*$ iseäraseks punktiks*. Iga kahe järjestikuse iseärase punkti vahel alamhulk $\tilde{\gamma}^*$ osutub jooneks. Tema ehitust iseärase punkti ümbruses, kui selles punktis kohtuvad kaks joont, on uuritud raamatus [6], lk. 31—35 juhtudel, mil M_n on kas E_2 või E_3 .

15. Peano jooned ja Jordani jooned. Joone eespool antud definitsioon määrab joone mõiste diferentsiaalgeomeetrias. Kuigi see mõiste on üsna avar, pole ta siiski veel kõige üldisem. Lisaks algebralises geomeetrias kasutatavale suhteliselt lihtsale üldistusele, millest oli äsja juttu, on matemaatika teistes osades, näiteks topoloogias, vaja tegelda ka joone palju üldisema käsitusega.

Vaatleme algmuutkonnas M_n alamhulka

$$\tilde{\gamma} = \{x \in M_n : \varphi(x) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), t \in T \subset \mathbb{R}\},$$

kus funktsioonid $x_i(t)$ on pidevad piirkonnas T . Kui nende puhul on rahuldatud art-s 14 antud definitsiooni tingimus 1°, kuid mitte tingimus 2°, s. t. tegemist on eespool vaadeldud punktihulgaga $\tilde{\gamma}^*$, siis kõneleme *iseärasustega joonest*. Kui aga ka tingimus 1° pole rahuldatud selles mõttes, et funktsioonid $x_i(t)$ on piirkonnas T küll pidevad, ent mitte diferentseeruvad, siis kõneleme *mittesiledast joonest*.¹

Iseärasustega joone ehitus on küllalt lihtne: ta koosneb joontest, mis on ühendatud iseärase punktidega. Mittesile joon on palju keerukama ehitusega punktihulk. Nii tuntakse näiteks *Peano jooni* tasandil E_2 , mille puhul $\tilde{\gamma}$ on terve ruut $I^2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2\}$. Esimese sellise konstrueeris G. Peano² 1890. a.; alljärgneva mõnevõrra lihtsama konstruktsiooni idee andis 1891. a. D. Hilbert.³

Võtame piirkonnaks $T \subset \mathbb{R}$ ühiklõigu $I = [0, 1]$. Vabalt valitud arvu $t \in [0, 1]$ võib esitada kujul

$$t = \frac{s_1}{4} + \frac{s_2}{4^2} + \dots + \frac{s_n}{4^n} + \dots, \quad 0 \leq s_n \leq 3, \quad (15.1)$$

s. t. lõpliku või lõpmatu neljandmurruna. Talle vastava punkti $(x_1(t), x_2(t)) \in \tilde{\gamma}$ määrame järgmiselt.

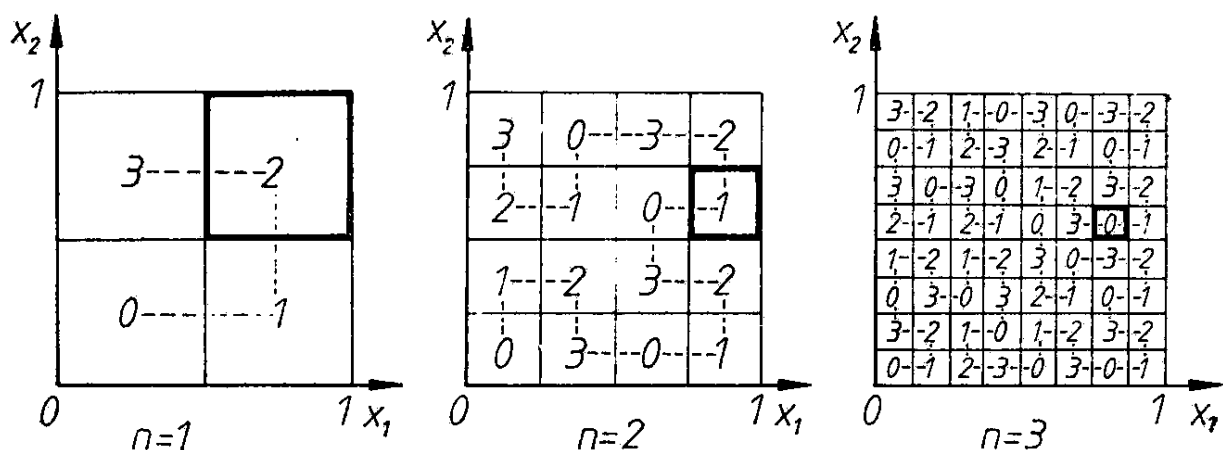
1. s a m m. Jagame ruudu I^2 neljaks võrdseks osaruuduks ja kirjutame osaruutudesse positiivses suunas numbrid 0, 1, 2, 3 (joon. 8, $n = 1$).

n-s s a m m. Vähendame $(n - 1)$ -se sammu järel saadud kujundit homoteetiselt kaks korda ning asetame ta 1. sammu järel saadud osaruutudesse järgmiselt:

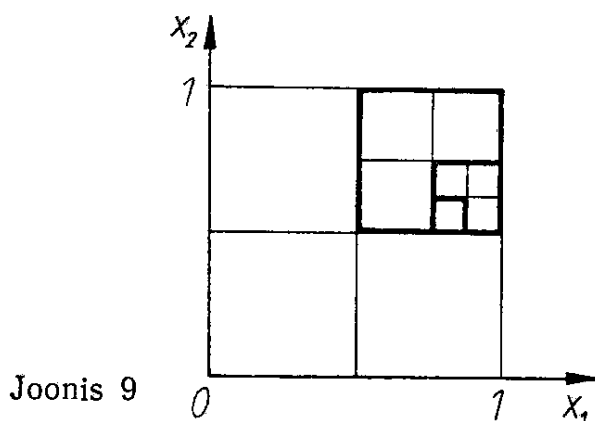
¹ Eelmises artiklis defineeritud joon on niisiis *sile joon*. Et edaspidi mitesiledatest joontest juttu peaaegu ei tule, siis jätkame siledete joonte nimetamist lihtsalt joonteks.

² Giuseppe Peano (1858—1932), itaalia matemaatik.

³ David Hilbert (1862—1943), saksa matemaatik.



Joonis 8



Joonis 9

osaruutudesse 1 ja 2 rööplükkega, osaruutudesse 0 ja 3 — rööplükkega, millele eelneb peegeldamine vastavalt tõusva või langeva diagonaali suhtes.

Joonisel 8 on näidatud kujundid, mis tekivad pärast teist ($n=2$) ja kolmandat ($n=3$) sammu. Siinjuures tuleb kujutleda, et iga kujund joonisel katab eelnevaid.

Sel viisil saame igale naturaalarvule n vastavusse seada ühikruudu alajaotuse 4^n osaruuduks. Osaruudud on varustatud numbritega 0, 1, 2, 3 niiviisi, et kõik need ruudukesed võib üks kord läbi käia, kui alustada alumisest vasakpoolsest ning sammuda ruudukesest 0, 1, 2 või 3 vastavalt ruudukesse 1, 2, 3 või 0. (Joonisel 8 on liikumistee juhtudel $n=1, 2, 3$ näidatud punktiirjoonega.)

Pöördudes nüüd tagasi arvu t esituse (15.1) juurde, võtame pärast esimest sammu (s. t. väärtusele $n=1$ vastavas alajaotuses) osaruudu numbriga s_1 , pärast teist sammu (s. t. väärtusele $n=2$ vastavas alajaotuses) eelmisest alajaotusest valitud osaruutu kuuluva osaruudu numbriga s_2 jne. Joonisel 8 ja 9 on näidatud osaruutude valik väärtustele $n=1, 2, 3$ vastavates alajaotustes arvu

$$t = \frac{4}{7} = \frac{36}{63} = \frac{36}{64} \cdot \frac{64}{63} = \left(\frac{2}{4} + \frac{1}{16} + \frac{0}{64} \right) \left(1 + \frac{1}{64} + \frac{1}{64^2} + \dots \right) =$$

$$= \frac{2}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{0}{4^3} + \frac{2}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{0}{4^6} + \dots$$

puhul ($s_1=2, s_2=1, s_3=0, \dots$).

Valitud osaruutude külgede projektsioonid ükskõik kummal koordinaatteljel moodustavad lõputult lühenevate lõikude jada, milles iga järgmine lõik sisaldub eelnevas. Vastava teoreemi kohaselt ([2], lk. 107) on otspunktide jadadel ühine

piirväärtus. Tähistame selle piirväärtuse x_1 -teljel $x_1(t)$, x_2 -teljel $x_2(t)$. Jooniselt on näiteks näha, et

$$x_1\left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3}\right) \left(1 + \frac{1}{2^3} + \dots\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{7} = \frac{6}{7}, \quad x_2 = \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2}.$$

Näitame, et sel teel saadud funktsioonid $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ on pidevad lõigul $[0, 1]$. Olgu lisaks arvule (15.1) antud veel teine arv $\tau \in [0, 1]$ neljandmurruna

$$\tau = \frac{\sigma_1}{4} + \frac{\sigma_2}{4^2} + \dots + \frac{\sigma_n}{4^n} + \dots, \quad 0 \leq \sigma_n \leq 3,$$

nii et

$$0 \leq t - \tau \leq \frac{1}{4^n}.$$

Sel juhul ([6], lk. 26) kas 1) t ja τ n esimest neljandkohta on ühesugused:

$$s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_2, \dots, s_n = \sigma_n,$$

või 2) neljandkohtade erinevus tekib juba varem, m -nda koha juures ($1 \leq m < n$), kuid see erinevus on 1, ja suurema arvu, näiteks t , järgmised neljandkohad kuni järguni n (*incl.*) on 0, samal ajal kui teise arvu τ puhul on nad 3:

$$s_1 = \sigma_1, \dots, s_{m-1} = \sigma_{m-1}, s_m = \sigma_m + 1,$$

$$s_{m+1} = \dots = s_n = 0, \sigma_{m+1} = \dots = \sigma_n = 3.$$

Sellest järeldub, et punktid $x_t = (x_1(t), x_2(t))$ ja $x_\tau = (x_1(\tau), x_2(\tau))$ on naturaalarvule n vastava alajaotuse kas 1) ühes ja samas osaruudus või 2) kahes kõrvutises osaruudus, mistõttu

$$|x_i(t) - x_i(\tau)| < \frac{1}{2^{n-1}}; \quad i = 1, 2.$$

Iga $\varepsilon > 0$ korral saab nüüd leida $\eta > 0$ nii, et

$$|x_i(t) - x_i(\tau)| < \varepsilon,$$

niipea kui $0 \leq t - \tau < \eta$. Selleks tuleb võtta naturaalarv N , mille korral $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$,

ja lugeda $\eta = \frac{1}{4^N}$. Seega funktsioonid $x_i(t)$ on tõesti pidevad lõigul $[0, 1]$.

Samal ajal vastav mittesile joon

$$\tilde{\mathcal{J}} = \{(x_1(t), x_2(t)) : t \in I = [0, 1]\}$$

täidab terve ühikruudu I^2 . Tõepoolest, iga $x \in I^2$ korral võib igas alajaotuses leida osaruudu, milles sisaldub x ; nende osaruutude numbrite järgi (15.1) kohaselt moodustatud arvule t vastab $\tilde{\mathcal{J}}$ punkt, mis ühtib punktiga x . Mingi alajaotuse nelja osaruudu ühine tipp vastab seejuures mitmele arvule. Nii näiteks esimese alajaotuse osaruutude ühine tipp $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vastab arvudele (joon. 8)

$$t_1^{(1)} = \frac{0}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{2}{4^n} + \dots = \frac{2}{4^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{6},$$

$$t_2^{(1)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{3}{4^n} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2},$$

$$t_3^{(1)} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{3}{4} + \frac{1}{4^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{5}{6}.$$

Naturaalarvule n vastava alajaotuse nelja osaruudu 0, 1, 2, 3 ühise tipu puhul tekib analoogiline olukord neljandmurru (15.1) n -dast kohast alates — see tipp vastab arvudele

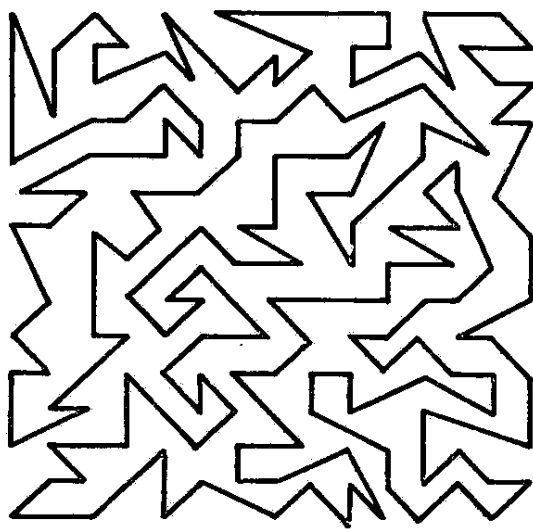
$$t_i^{(n)} = \frac{s_1}{4} + \dots + \frac{s_{n-1}}{4^{n-1}} + \frac{1}{4^{n-1}} \cdot t_i^{(1)}; \quad i=1, 2, 3.$$

Järelikult ühiklõigu I vaadeldav kujutus ühikruutu $I^2 = \tilde{\mathcal{J}}$ on küll pidev, kuid mitte üksühene. Rõhutame veel kord, et ühiklõigu I kujutiseks on siin terve ruut I^2 .

Huvi pakub see, et kui endiselt vaadelda lõigu I pidevat kujutust ruutu $I^2 \subset \mathbb{R}^2$, ent seada nõudeid ka üksühesuse osas, siis muutub olukord tunduvalt. Kui selline kujutus on üksühene kõikjal, välja arvatud lõigu otspunktid, mis kujutuvad üheks ja selleksamaks punktiks, siis kujutis osutub niinimetatud Jordani¹ jooneks (ta võib muidugi olla ka mittesile). Üldiselt defineeritakse *Jordani joon* kui ringjoone pidev üksühene kujutis hulka $\mathbb{R}$ (s. t. ei nõuta tingimata tema sisaldumist ruudus I^2).

Hulgateoreetilise topoloogia vanimaid teoreeme, C. Jordani poolt 1893. a. tõestatud teoreem väidab, et iga *Jordani joon tasandil $\mathbb{R}^2$ jaotab selle tasandi kaheks sidusaks osaks, millele joon on ühine raja*. Üks neist osadest on tõkestatud ja seda nimetatakse Jordani joone *sisemuseks* (ka tõkestatud ühelisidusaks piirkonnaks; vrd. [3], lk. 346), joont ennast selle rajaks.

Kui Jordani joon asetseb ruudus I^2 , siis ei saa ta eeltoodu põhjal täita kogu seda ruutu, sest viimases on koos joonega ka selle joone sisemus (vähegi keerukamatel juhtudel aga pole see sisemus kuigi kergesti eristatav ülejäänust; vt. näit. joon. 10).



Joonis 10

Ruudus I^2 paiknevaid Peano jooni ja Jordani jooni võrreldes täheldame, et mõlemad on käsiteldavad lõigu I pidevate kujutuste abil ruutu I^2 . Esimesed tekitavad, kui kujutused on sürjektiivsed, ent pole injektiivsed, teiste puhul, vastupidi, kujutused on injektiivsed, välja arvatud lõigu I otspunktides, kuid pole sürjektiivsed.

Käesolevas kursuses Peano ja Jordani joontest rohkem juttu ei tule. Neid jooni, samuti joone mõiste veelgi üldisemaid käsitlusi vaadeldakse kaasaegses topoloogias.

¹ Camille Jordan [žordaaⁿ] (1838—1922), prantsuse matemaatik, Pariisi TA liige.

16. Joone puutuja. Diferentseeruva funktsiooni $y=f(x)$ graafikuna antud joone puutujat tasandil E_2 käsitletakse matemaatilise analüüsi kursuses ([2], lk. 170), kus näidatakse, et puutuja tõus argumendi väärtusele x_0 vastavas punktis on tuletise väärtus $f'(x_0)$. Parameetriliste võrranditega $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ antud joone puutuja puhul ([2], lk. 283) selgub, et puutuja sihivektoriks on $k=(\dot{x}, \dot{y})$, kus $\dot{x}=\frac{d\varphi}{dt}$ ja $\dot{y}=\frac{d\psi}{dt}$.

Viimane asjaolu osutub lihtsaimaks erijuhuks ühest üldisest tulemusest, mis kehtib joonte puhul nii eukleidilises ruumis E_n kui ka pseudoeukleidilises ruumis 1E_n ja mille käsitlemisele me järgnevalt asume. Märgime kohe, et äsjamainitud ruumide meetrikat pole meil käesolevas artiklis vaja, piisab lineaartehetest vektoritega, mistõttu esitatav joone puutuja käsitus kuulub õieti afiinsesse geometriasse.

Olgu antud joon γ parameetriliste võrranditega (14.4) kas ruumis E_n või ruumis 1E_n . Joone punkti x kohavektor

$$\overrightarrow{ox} = x = x_1 i_1 + \dots + x_n i_n$$

ehk edaspidi enam kasutatavas lühemas kirjaviisis

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

osutub võrrandite (14.4) kohaselt sõltuvaks parameetrist t :

$$x = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Seda asjaolu märgime lühidalt:

$$x = x(t);$$

seega

$$\gamma = \{x : \overrightarrow{ox} = x(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}.$$

Joone definitsiooni tingimuse 1° kohaselt eksisteerivad iga $t_0 \in T$ korral tuletised $x'_i(t_0)$. Tekib vektor koordinaatidega

$$(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)),$$

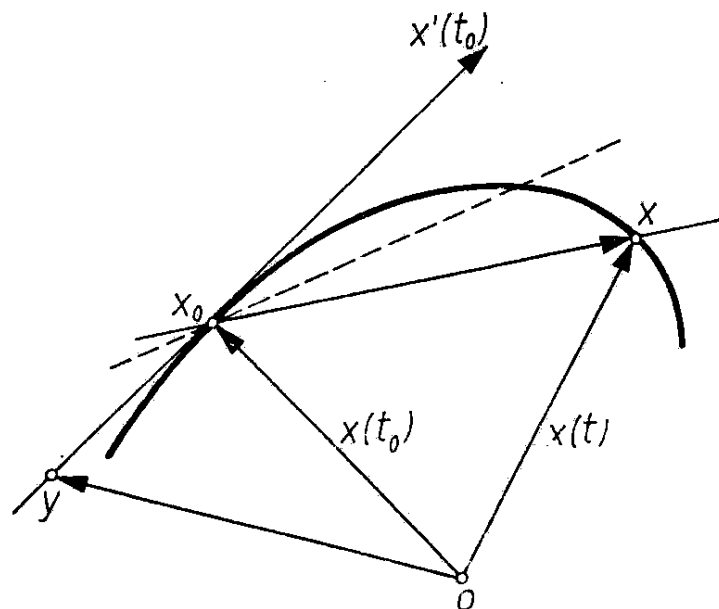
mida nimetatakse $x(t)$ tuletiseks punktis t_0 ja tähistatakse $x'(t_0)$. Et matemaatilisest analüüsist tuntud definitsiooni kohaselt ([2], lk. 172)

$$x'_i(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x_i(t) - x_i(t_0)}{t - t_0},$$

siis võib kirjutada:

$$x'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}.$$

Viimase võrduse paremas pooles on piirväärtuse märgi all vektor, mille koordinaatideks on eelmise võrduse piirväärtuse märgi all olevad avaldised, s.t. kahe vektori vahe $x(t) - x(t_0)$, mis on korru-



Joonis 11

tatud reaalarvuga $(t - t_0)^{-1}$. Muutuvate koordinaatidega vektori piirväärtusena, kui $t \rightarrow t_0$, mõistetakse muidugi konstantset vektorit, mille koordinaatideks on selle muutuva vektori koordinaatide piirväärtused, kui $t \rightarrow t_0$ (eeldusel, et need piirväärtused eksisteerivad, nagu praegusel juhul on). Võrduse parema poole geomeetriline tõlgendus viib meid joone puutuja mõiste juurde.

Siin $x(t) - x(t_0)$ kui joone kahe punkti x ja x_0 kohavektorite $\vec{ox} = x(t)$ ja $\vec{ox}_0 = x(t_0)$ vahe on tõlgendatav vektorina $\vec{x_0x}$ (nn. kõõlvektorina), sest $\vec{ox}_0 + \vec{x_0x} = \vec{ox}$ (joon. 11). Punkte x_0 ja x läbivat sirget x_0x on loomulik nimetada joone $\mathcal{J}$ lõikajaks, kusjuures piirväärtuse märgi all olev vektor $(t - t_0)^{-1} \vec{x_0x}$ on selle lõikaja sihivektor. Jääb veel anda tõlgendus piirprotsessile $t \rightarrow t_0$. Selle käigus funktsioonide $x_i(t)$ pidevuse tõttu $x_i(t) \rightarrow x_i(t_0)$, mistõttu $x(t) \rightarrow x(t_0)$ ja järelikult punkt x liigub mööda joont punktini x_0 . Defineerime nüüd joone $\mathcal{J}$ puutuja.

Joone $\mathcal{J}$ puutujaks punktis $x_0 \in \mathcal{J}$ nimetatakse selle joone lõikaja x_0x piirasendit punkti $x \in \mathcal{J}$ liikumisel mööda joont punktini x_0 .

Eeltoodust selgub, et vektor $x'(t_0)$ on tõlgendatav joone $\mathcal{J}$ puutuja sihivektorina, võttes puutuja punktis $x_0 \in \mathcal{J}$ kohavektoriga $x(t_0)$.

Joone $\mathcal{J}$ definitsiooni tingimus 2° on väljendatav nõudena, et tuletisvektor

$$x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$$

oleks joone igas punktis nullist erinev. Selle nõude kaudu saab tingimus 2° oma õige geomeetrilise tähenduse: ta garanteerib, et joonel $\mathcal{J}$ on igas punktis x_0 olemas puutuja, mis määratakse sihivektoriga $x'(t_0) \neq 0$. Ühtlasi on nüüd käes kõik vahendid kõnesoleva puutuja kui teatava sirge määramiseks järgmise punktihulgana:

$$\mathcal{J} = \{y : y = x(t_0) + \tau x'(t_0), \tau \in \mathbb{R}\}. \quad (16.1)$$

Vektoritevaheline seos tähendab siin õieti $y - x(t_0)$ ja $x'(t_0)$ kollineaarsust. Seega ruumi E_3 puhul võib puutuja nn. kanoonilised võrrandid ([6], lk. 202) esitada kujul

$$\frac{y_1 - x_1(t_0)}{x'_1(t_0)} = \frac{y_2 - x_2(t_0)}{x'_2(t_0)} = \frac{y_3 - x_3(t_0)}{x'_3(t_0)}. \quad (16.2)$$

Näiteks kruvijoone (14.3) korral $x = (a \cos t, a \sin t, bt)$, seega

$$x' = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

ning kruvijoone puutuja võrrandeks on

$$\frac{y_1 - a \cos t_0}{-a \sin t_0} = \frac{y_2 - a \sin t_0}{a \cos t_0} = \frac{y_3 - bt_0}{b}.$$

Märgime, et puutuja sihivektori x' ja vektori $i_3 = (0, 0, 1)$ vahelise nurga α jaoks saame

$$\cos \alpha = \frac{x' i_3}{|x'| |i_3|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{const.}$$

Seega kruvijoone lõikab konstantse nurga all selle pöördsilindri moodustajaid, millel ta asub (joon. 6).

Tasandi E_2 juhul järeldub eeltoodust matemaatilise analüüsi tuntud tulemus ([2], lk. 283): võrranditega $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ antud joone puutuja võrrandiks on

$$\frac{X - x}{\dot{x}} = \frac{Y - y}{\dot{y}},$$

kus (X, Y) on puutuja suvaline punkt ja parameetril t on mingi kindel väärtus t_0 ; funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja puhul $x = t$, $y = f(t)$ ja puutuja võrrandiks on

$$Y - f(x_0) = f'(x_0) (X - x_0).$$

Olgu tasandil E_2 antud joon võrrandiga $F(x, y) = 0$. Sel korral võib viimasesse puutuja võrrandisse teha asenduse valemist (14.10) ja esitada see võrrand kujul (vrd. [3], lk. 200)

$$F_x(x_0, y_0) (X - x_0) + F_y(x_0, y_0) (Y - y_0) = 0. \quad (16.3)$$

Siit on näha, et vektor¹

$$\nabla F = (F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0)),$$

olles risti puutuja kaht punkt² ühendava vektoriga $(X - x_0, Y - y_0)$, on puutuja normaalvektor joone punktis (x_0, y_0) .

Märgime, et iseärase punkti puhul $\nabla F = 0$ ja võrrandi (16.3) vasak pool on samaselt null; sel korral see võrrand puutujat ei määra.

Samuti saab selgeks, mis mõttes $x'(t_0) = 0$ iseloomustab iseärast punkti joone üldistusel $\mathfrak{F}^*$: ka selles punktis võrrandid (16.1) või (16.2) puutujat ei määra.

¹ Sümbolit ∇F loetakse «nabla ef», selle kohta lähemalt vt. allviitest lk. 122.

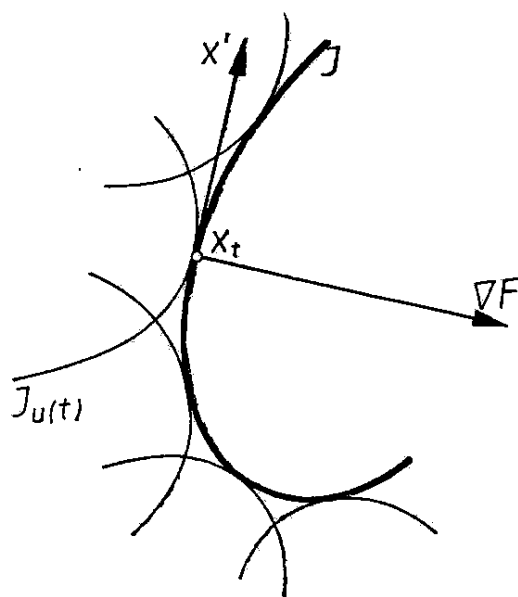
17. Jooneparve mähisjoon. Rakendustes on sageli tegemist mitte üheainsa joonega, vaid mingis piirkonnas $U \subset \mathbf{R}$ muutuvast parameetrist u sõltuva muutuva joone $\mathcal{J}_u$ asendite hulgaga, nn. üheparameetrilise jooneparvega. Sellega puutume kokku näiteks liikuva (ja üldjuhul ka deformeeruva) joone puhul, kui parameetris u on aeg, või näiteks mingist valguspunktist lähtunud ja kahe keskkonna lahutusjoonel peegeldunud või murdunud valguskiirte puhul (kui vaadelda tasandilist ülesannet, mil parameetris u võib võtta langeva kiire tõusunurga).

Üheparameetrilise jooneparve puhul leidub sageli joon, mis, piltlikult öeldes, «mähib» parve jooni.

Kõneldakse, et kaks ühispunktiga joont $\mathcal{J}_1$ ja $\mathcal{J}_2$ *puutuvad*, kui nende puutujad ühispunktis ühtivad. Seda ühispunkti nimetatakse joonte *puutepunktiks*; kõneldakse ka, et jooned puutuvad selles punktis. Joont $\mathcal{J}$ nimetatakse jooneparve $\{\mathcal{J}_u : u \in U\}$ *mähisjooneks*, kui ta igas oma punktis puutub üht parve joontest, ilma et tal oleks sellega ühist kaart (joon. 12).

Käsitleme järgnevalt G. W. Leibnizi¹⁵ poolt 1692. a. antud eeskirja mähisjoone leidmiseks sellisele jooneparvele, mis on esitatav tasandil E_2 võrrandiga $F(x_1, x_2, u) = 0$, kus vasakul on kõigi oma argumentide järgi pidevalt diferentseeruv funktsioon. (Võrrandiga $x = x(t, u)$ antud jooneparve puhul käsitletakse mähisjoone leidmist nii tasandi E_2 kui ruumi E_3 korral raamatus [5], § 4.)

Oletame, et kõnesoleval jooneparvel $\{\mathcal{J}_u : u \in U\}$ on olemas mähisjoon $\mathcal{J}$, mis on määratav parameetriliste võrranditega $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, $t \in T \subset \mathbf{R}$. Sel korral vastab parameetri t igale väärtusele piirkonnast T teatav punkt x_t mähisjoonel $\mathcal{J}$, sellele aga omakorda teatav joon $\mathcal{J}_u$ vaadeldavas parves — nimelt see, mis puutub mähisjoont punktis x_t . Tekib vastavus $t \mapsto u$, mis on määratud tingimusega $x_t \in \mathcal{J}_u$ ja mis näitab, et siin $u = u(t)$. Saadud



Joonis 12

¹⁵ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), saksa filosoof ja matemaatik.

funktsiooni $u(t)$ määramispiirkond on T ja muutumispiirkond sisal-
dub piirkonnas U . Seejuures tingimus $x_t \in \mathcal{J}_{u(t)}$ tähendab järgmise
samasuse kehtivust:

$$F(x_1(t), x_2(t), u(t)) \equiv 0. \quad (17.1)$$

Edasine analüüs on lihtne, kui eeldada funktsiooni $u(t)$ diferent-
seeruvust piirkonnas T . Sel korral tekib viimase samasuse diferent-
seerimisel t järgi samasus

$$F_{x_1} \cdot x'_1 + F_{x_2} \cdot x'_2 + F_u \cdot u' \equiv 0. \quad (17.2)$$

Nüüd tuleb arvestada, et parve joon $\mathcal{J}_{u(t)}$ ja oletatav mähisjoon $\mathcal{J}$
puutuvad nende ühises punktis x_t (joon. 12): esimese puutuja,
millel on normaalvektor $\nabla F = (F_{x_1}, F_{x_2})$, ja teise puutuja, millel on
sihivektor $x' = (x'_1, x'_2)$, on selles punktis üks ja seesama sirge,
mistõttu $\nabla F \perp x'$ ehk

$$\nabla F x' = F_{x_1} \cdot x'_1 + F_{x_2} \cdot x'_2 \equiv 0.$$

Viimasest kahest samasusest järeldub, et $F_u \cdot u' \equiv 0$. Siin pole
piirkonna T ühegi osalõigu $[\alpha, \beta]$ puhul võimalik, et $u' \equiv 0$ selle
osalõigu ulatuses, sest siis oleks $u = u_0 = \text{const}$ ja $x_t \in \mathcal{J}_{u_0}$, $t \in [\alpha, \beta]$,
s.t. mähisjoonel $\mathcal{J}$ ja parve joonel $\mathcal{J}_{u_0}$ oleks ühine kaar $\{x_t : t \in$
 $\in [\alpha, \beta]\}$, mis on mähisjoone definitsiooni järgi lubamatu. Siit
järeldub, et $u' \neq 0$ ja seega $F_u = 0$ peaaegu kõikjal piirkonnas T .
Et $F_u(x_1(t), x_2(t), u(t))$ on eelduse kohaselt pidev, siis

$$F_u(x_1(t), x_2(t), u(t)) \equiv 0,$$

kusjuures $t \in T$.

Niisiis, mähisjoone parameetriliste võrrandite paremad pooled
koos funktsiooniga $u(t)$, kui eeldada selle diferentseeruvust, peavad
rahuldama järgmist kahe võrrandi süsteemi:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, u) &= 0, \\ F_u(x_1, x_2, u) &= 0. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Selline süsteem määrab tasandil E_2 üldiselt teatava joone (kuigi
on võimalikud ka erandolukorrad); selle joone parameetrilised vör-
randid $x_1 = x_1(u)$, $x_2 = x_2(u)$ võib saada näiteks süsteemi (17.3)
lahendamisel x_1 ja x_2 suhtes; ilmutamata võrrandi leidmiseks tuleb
kas neist parameetrilistest võrranditest või siis otse süsteemi (17.3)
võrrandeist elimineerida parameeter u .

Oletame, et on õnnestunud leida joon parameetriliste võrrandi-
tega $x_1 = x_1(u)$, $x_2 = x_2(u)$, mille puhul süsteem (17.3) on rahulda-
tud. Näitame, et kui $\nabla F = (F_{x_1}, F_{x_2})$ on piki seda joont nullist erinev,
siis on tegemist mähisjoonega. Tõepoolest, samasuse

$$F(x_1(u), x_2(u); u) \equiv 0$$

diferentseerimisel saame samasuse (17.2), kus praegu $u' = 1$, ja
sellest süsteemi (17.3) teise võrrandi põhjal

$$F_{x_1} \cdot x'_1 + F_{x_2} \cdot x'_2 \equiv 0$$

ehk $\nabla F x' \equiv 0$, mis tähendabki parve joone γ_u ja vaadeldava joone puutujate ühtimist nende ühises punktis, sest $\nabla F \perp x'$. Seega γ on mähisjoon.

Pole siiski välistatud, et γ võib olla mähisjoon ka siis, kui tema punktides $\nabla F = 0$, s.t. kui γ koosneb parve joonte iseärástest punktidest.

Lahtine on seni küsimus, kui oluline on süsteemi (17.3) saamiseks eeldus funktsiooni $u(t)$ diferentseeruvuse kohta. Kas selle eelduse árajátmisel ei lisandu mähisjooni, mille punktides $\nabla F \neq 0$ ja süsteem (17.3) pole rahuldatud? Osutub, et nii see pole.

Tõestuseks oletame vastuváiteliselt, et kehtib küll (17.1), kuid teatava $t_0 \in T$ korral

$$F_u(x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)) \neq 0$$

ja kas $F_{x_1}(x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)) \neq 0$ või $F_{x_2}(x_1(t_0), x_2(t_0), u(t_0)) \neq 0$. Ilmutamata funktsiooni olemasolu teoreemi kohaselt ([3], lk. 205) leidub niisugune riskülik keskpunktiga $(x_1(t_0), x_2(t_0))$, et võrrand $F(x_1, x_2, u) = 0$ määrab funktsiooni $u = f(x_1, x_2)$, mis on pidevalt diferentseeruv selle risküliku sees ja rahuldab tingimust $u(t_0) = f(x_1(t_0), x_2(t_0))$, kusjuures

$$f_{x_\alpha}(x_1, x_2) = - \frac{F_{x_\alpha}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}{F_u(x_1, x_2, f(x_1, x_2))}; \quad \alpha = 1, 2.$$

Punktis $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ on nüüd vähemalt üks tuletistest f_{x_1} või f_{x_2} nullist erinev; olgu náiteks $f_{x_2}(x_1(t_0), x_2(t_0)) \neq 0$. Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} y_1 - x_1 &= 0, \\ y_2 - f(x_1, x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Et võrrandite vasakute poolte osatuletised x_1 ja x_2 järgi moodustavad funktsionaaldeterminandi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ f_{x_1} & f_{x_2} \end{vmatrix} = f_{x_2},$$

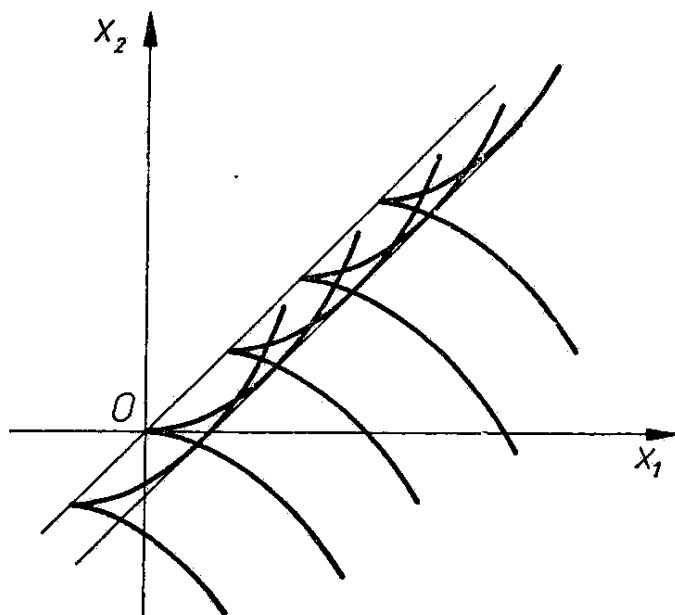
mis on punktis $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ nullist erinev, siis määrab see süsteem selle punkti teatavas ümbruses muutujad x_1 ja x_2 muutujate y_1 ja y_2 pidevalt diferentseeruvate funktsioonidena ([3], lk. 215). Järelikult süsteem (17.4) määrab vaadeldava punkti ümbruse sellise üksühese kujutuse tasandi teatavasse piirkonda, mille tekitavad diferentseeruvad funktsioonid $y_1 = x_1$, $y_2 = f(x_1, x_2)$ ja milles parve jooned γ_u kujutuvad joonteks võrranditega $y_2 = u$, seega y_1 -teljega paralleelsete sirgete osadeks. Viimaste parvel ei saa olla mähisjoont, sest selle puutuja peaks olema alati paralleelne y_1 -teljega, mistõttu tema korral $y_2' = 0$ ja seega $y_2 = \text{const}$,

see aga tähendaks mähisjoone ühtimist parve ühe joonega, mis on mähisjoone definitsiooni kohaselt lubamatu. Nagu kerge kontrollida, säilitab vaadeldav kujutus joonte puutumise, seepárást ei saa mähisjoont olla ka parvel $\{\gamma_u : u \in U\}$, mis on vastuolus eeldusega mähisjoone olemasolu kohta.

Niisiis, mähisjoone korral kas on rahuldatud süsteem (17.3) või $\nabla F \equiv 0$. Tegelikult ka see viimane tingimus, mis koos samasusega (17.1) annab süsteemi

$$F(x_1, x_2, u) = 0, \quad F_{x_1}(x_1, x_2, u) = 0, \quad F_{x_2}(x_1, x_2, u) = 0,$$

viib mähisjoone korral üldiselt $F_u(x_1, x_2, u) = 0$ kehtivuseni. Tõepoolest, kui see viimane süsteem tõesti määrab mingi joone, siis on tema mingist kahest võrrandist võimalik üldjuhul avaldada náiteks x_2 ja u kui x_1 diferentseeruvad funktsioonid. Kui asendada need süsteemi esimesse võrrandisse ning saadud samasust diferentseerida x_1 järgi teisi võrrandeid arvestades, on tulemuseks $F_u \cdot u' \equiv 0$ ja et mähisjoone korral peaaegu kõikjal $u' \neq 0$, siis $F_u \equiv 0$.



Joonis 13

Kogu eelneva analüüsi kokkuvõte: antud jooneparve $\{\gamma_u : u \in U\}$ puhul tuleb mähisjoon leida süsteemist (17.3), aga kui sellest süsteemist saadud joone punktides $\nabla F = 0$, siis ei või kindel olla, et tegu on mähisjoonega, vaid vajalik on lisaanalüüs.

Näide. Olgu jooneparv antud võrrandiga

$$2(x_1 - u)^3 - 3(x_2 - u)^2 = 0.$$

Lisame siia süsteemi (17.3) teise võrrandi

$$-6(x_1 - u)^2 + 6(x_2 - u) = 0.$$

Sellest avaldame $x_2 - u = (x_1 - u)^2$ ning asendame esimesse võrrandisse:

$$(x_1 - u)^3 [2 - 3(x_1 - u)] = 0.$$

Seega kas 1) $x_1 = u$ ja $x_2 = u$ või 2) $x_1 = u + \frac{2}{3}$ ja $x_2 = u + \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

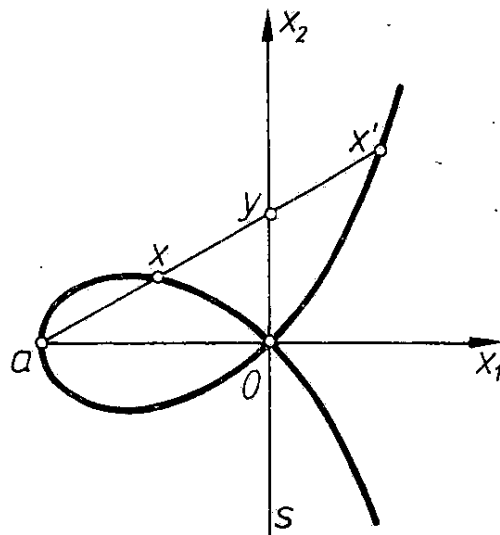
Praegu $\nabla F = (6(x_1 - u)^2, -6(x_2 - u))$ ja seega esimesel juhul, mil on tegemist sirgega $x_1 = x_2$, on $\nabla F = 0$, kuid teisel juhul, mil meil on sirge $x_1 - x_2 - \frac{2}{9} = 0$, on $\nabla F \neq 0$. Seega teine sirge on mähisjoon, samal ajal kui esimene sirge, koosnedes parve joonte iseärasest punktidest, ei ole mähisjoon (joon. 13).

Harjutusülesanded

19. Tuletada krüvijoone ilmutatud võrrandid, valides parameetriks x_3 .

20. Tasandil E_2 on antud punkt a ja seda mittesisaldav sirge s . Punkti a ümber pöörleval sirgel valitakse punktid x ja x' selliselt, et $d(x, y) = d(x', y) = d(o, y)$, kus $o \in s$, $y \in s$ ning a, x, y on ühel sirgel ja oa on sirge s normaalvektor (joon. 14). Punktide x ja x' hulka nimetatakse *strofoidiks* (kr. k. $\sigma\tau\phi\phi\sigma\zeta$ — keerduv). Koostada strofoidi parameetrilised võrrandid ja ilmutamata võrrand. Veenduda, et strofoidil on olemas kahekordne punkt.

21. Joon tasandil E_2 , mille kujundab mööda fikseeritud ring- või sirgjoont libisemiseta veereva ringjoone külge kinnitatud punkt x , nimetatakse *trohhoidiks* (kr. k. $\tau\phi\phi\chi\sigma\zeta$ — ratas). Kõneldakse epi- või hüpotrohhoidist (kr. k. $\epsilon\pi\iota$ — peal,



Joonis 14

$\nu\pi o$ — all) olenevalt sellest, kas veerev ringjoon on liikumatu ringjoone peal või sees. Kui x on ringjoonel, kõneldakse epi- või hüpotsükloidist (kr. k. $\kappa\upsilon\kappa\lambda o\varsigma$ — ring). Viimaste tähtsamad erijuhud (R ja r on vastavalt liikumatu ja veereva ringjoone raadius; sirget käsitatakse kui lõpmatu raadiusega ringjoont): $R=\infty$ — tsükloid, $r=\infty$ — ringjoone evolvent; hüpotsükloid $R=4r$ korral — astroid (kr. k. $\acute{\alpha}\sigma\tau\rho\nu\nu$ — täht); epitsükloid $R=r$ korral — kardioid (kr. k. $\kappa\alpha\rho\delta\iota\alpha$ — süda). Koostada trohhoidi parameetrilised võrrandid nii üldjuhul kui ka ülalmainitud erijuhtudel. Näidata, et ka ellips on hüpotrohhoidi teatav erijuht.

22. Tuletada astroidi ja kardioidi ilmutamata võrrandid, veendudes ühtlasi, et tegemist on algebraliste joontega. Leida nende joonte iseärased punktid.

23. Joont ruumis E_3 , mis tekib sfääri ja selle raadiusele kui diameetrile ehitatud pöördtsilindri lõikumisel, nimetatakse Viviani¹ jooneks. Koostada selle joone parameetrilised võrrandid. Veenduda, et joonel on olemas kahekordne punkt.

24. Logaritmiliseks spiraaliks koonusel (kr. k. $\sigma\pi\epsilon\iota\kappa\alpha$ — keerdunud) nimetatakse joont ruumis E_3 , mille kirjeldab punkt x järgmises liikumises: tasandi aob ühtlasel pöörlemisel sirge oa ümber ning punkti x samaaegsel liikumisel mööda sirget ob kiirusega, mis on võrdeline kaugusega $d(o, x)$. (Erijuhul $ob \perp oa$ saadavat joont tasandil nimetatakse logaritmiliseks spiraaliks.) Tuletada selle joone parameetrilised võrrandid.

25. Määrata nurk α , mille all Viviani joon lõikab iseennast.

26. Näidata, et logaritmiline spiraal koonusel lõikab koonuse moodustajaid konstantse nurga all.

27. Jooneparv tasandil E_2 koosneb sirgetest, mis lõikavad täisnurgast välja konstantse pindalaga kolmnurga. Leida mähisjoon.

28. Konstantse pikkusega lõigu otspunktid libisevad mööda kaht ristuvat sirget. Leida tekkiva lõiguparve mähisjoon.

29. Tasandil E_2 asetseva joone normaalide parve mähisjoont nimetatakse selle joone evoluuks (vrd. [2], lk. 291–293; [5], lk. 94). Tuletada parameetriliste võrranditega $x_1=x_1(t)$, $x_2=x_2(t)$ antud joone evoluu parameetrilised võrrandid. Leida ellipsi evoluu.

30. Mingist punktist lastakse kindlas püsttasandis välja mürsk konstantse algkiirusega v_0 mitmesuguste nurkade α all rõhtsihiga. Leida mürsu trajektoori parve mähisjoon (nn. ohutusjoon, millest kõrgemale mürsk ei tõuse ühegi väljatulistamisnurga korral; ohutakistust mitte arvestada).

31. Ring fikseeritud diameetriga veereb mööda sirget. Leida diameetri asendite parve mähisjoon.

32. Ringjoone suvaline raadius projitseeritakse kahele ristuvale diameetrile

¹ Vincenzo Viviani (1622–1703), itaalia matemaatik, G. Galilei ja E. Torricelli õpilane.

ja projektsioonidele kui pooltelgedele ehitatakse ellips. Leida ellipsite parve mähisjoon.

33. Lähtugu valguspunktist o kiirtekimp, mille kiired peegeldugu kimbu tasandis asetsevalt joonelt. Peegeldunud kiirte parve mähisjoont nimetatakse sel korral joone *kaustikaks* punkti o suhtes. Näidata, et ringjoone kaustika ringjoonel enesel asetseva punkti o suhtes on kardioid.

§ 5. KAARE PIKKUS

Tasandil E_2 antud joone kaare pikkuse mõistet ja arvutamist käsitletakse matemaatilise analüüsi kursuses, kus vaadeldakse ka sellekohaseid näiteid ([2], lk. 275—282, 414—415). Tulemused on ilma eriliste raskusteta ülekantavad joonele n -mõõtmelises eukleiidilises ruumis E_n . Rakenduslikult eriti tähtis on muidugi üldistuse esimene samm — üleminek tasandilt E_2 ruumi E_3 (vt. [5], art. 16), kuid ka edasisel üldistusel on täita oluline osa kaasaja geomeetria meetodite rakendustes. Käesolevas paragrahvis käsitleme joone kaare pikkust kohe üldseades — n -mõõtmelises eukleiidilises ruumis E_n .

18. **Kaare pikkuse mõiste.** Olgu antud joon γ eukleiidilises ruumis E_n :

$$\gamma = \{x : \overrightarrow{ox} = x(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$$

ning lõik $[a, b] \subset T$. Joone γ kaareks $\gamma_{[a,b]}$ nimetatakse alamhulka

$$\gamma_{[a,b]} = \{x : \overrightarrow{ox} = x(t), t \in [a, b]\};$$

punkte x_a ja x_b kohavektoritega $x(a)$ ja $x(b)$ nimetatakse kaare $\gamma_{[a,b]}$ *otspunktideks*.

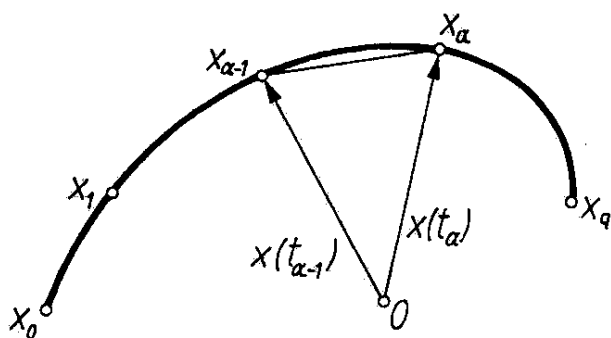
Jaotame lõigu $[a, b]$ punktidega $t_1, t_2, \dots, t_{q-1}$ q osaks selliselt, et

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{q-1} < t_q = b.$$

Joone γ punkti kohavektoriga $x(t_\alpha)$ tähistame x_α ; seejuures $x_0 = x_a, x_q = x_b$ (joon. 15). Positiivset reaalarvu

$$s(\Gamma) = \sum_{\alpha=1}^q d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) \quad (18.1)$$

nimetatakse kaare $\gamma_{[a,b]}$ *kõõlmurdjoone* $\Gamma = x_0 x_1 \dots x_q$ *pikkuseks*.



Joonis 15

Näitame, et sileda kaare $\tilde{\gamma}_{[a,b]}$ kõõlmurdjoonte pikkuste hulk on ülalt tõkestatud.

Lagrange'i keskvaartusteoreemi ([2], lk. 217) kohaselt

$$x_i(t_\alpha) - x_i(t_{\alpha-1}) = x'_i(\tau_\alpha^{(i)})(t_\alpha - t_{\alpha-1}),$$

kus $\tau_\alpha^{(i)} \in (t_{\alpha-1}, t_\alpha)$, mistõttu

$$x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1}) = p_\alpha(t_\alpha - t_{\alpha-1}), \quad (18.2)$$

kus

$$p_\alpha = (x'_1(\tau_\alpha^{(1)}), \dots, x'_n(\tau_\alpha^{(n)})).$$

Nüüd

$$d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) = |x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1})| = |p_\alpha|(t_\alpha - t_{\alpha-1}).$$

Et $x'_i(t)$ on pidev funktsioon piirkonnas T ja et iga lõigul $[a, b] \subset T$ pidev funktsioon on selles lõigus tõkestatud ([2], lk. 125), siis leidub konstant C_i nii, et $|x'_i(\tau_\alpha^{(i)})| \leq C_i$. Järelikult

$$|p_\alpha| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(\tau_\alpha^{(i)})]^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n C_i^2} = C$$

ning seega

$$d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) < C(t_\alpha - t_{\alpha-1}),$$

millest

$$s(\Gamma) = \sum_{\alpha=1}^q d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) < C \sum_{\alpha=1}^q (t_\alpha - t_{\alpha-1}) = C(b - a).$$

See ongi ühine tõke kõigi antud kaare $\tilde{\gamma}_{[a,b]}$ kõõlmurdjoonte pikkuste jaoks.

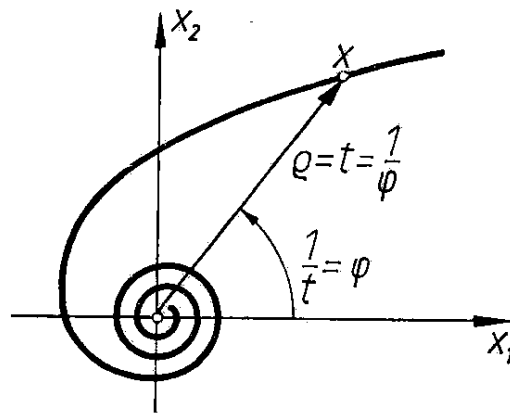
Igal ülalt tõkestatud reaalarvude hulgal on olemas ülemine raja ([2], lk. 16); seetõttu ka kaare $\tilde{\gamma}_{[a,b]}$ kõõlmurdjoonte pikkuste hulgal on olemas ülemine raja; seda nimetatakse selle kaare pikkuseks ja tähistatakse $s_{[a,b]}$.

Siin on oluline kaare siledus, sest muidu ei saaks rakendada Lagrange'i keskvaartusteoreemi. Kuid ka mittesiledal joonel $\tilde{\gamma}$ (vt. art. 15) võib olla kaari $\tilde{\gamma}_{[a,b]}$, mille kõõlmurdjoonte pikkuste hulk on tõkestatud; niisugusel juhul nimetatakse kaart sirgestuvaks kaareks. Sellegi pikkus $s_{[a,b]}$ defineeritakse kõnesoleva hulga ülemise rajana.

Huvipakkuv on, et sileduse nõue võib olla rikutud kasvõi kaare ühesainsas punktis ning kaar võib osutuda mittesirgestuvaks. Selle kohta saab tuua järgmise näite.

Vaatleme tasandi E_2 alamhulka $\tilde{\gamma}_{[0,b]} = \{x : \overrightarrow{ox} = x(t), t \in [0, b]\}$, kus $b = \frac{2}{\pi}$ ja

$$x(t) = \begin{cases} \left(t \cos \frac{1}{t}, t \sin \frac{1}{t} \right), & \text{kui } t \neq 0, \\ (0, 0), & \text{kui } t = 0. \end{cases}$$



Joonis 16

Siin $x(t)$ on pidev lõigul $[0, b]$, sest tema koordinaadid on pidevad (isegei diferentseeruvad) funktsioonid poollõigul $(0, b]$, kusjuures

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 0} t \cos \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow 0} t \sin \frac{1}{t} \right) = (0, 0) = x(0).$$

Samal ajal aga $x(t)$ ei ole diferentseeruv punktis $t=0$, sest vektorfunktsioonil

$$\frac{x(t) - x(0)}{t - 0} = \left(\cos \frac{1}{t}, \sin \frac{1}{t} \right)$$

ei ole piirväärtust, kui $t \rightarrow 0$, s. t. kui $\frac{1}{t} \rightarrow \infty$. Järelikult $\tilde{\gamma}_{[0, b]}$ on punktis $t=0$ mittesile kaar (joon. 16).

Näitame, et see kaar $\tilde{\gamma}_{[0, b]}$ on mittesirgestuv. Jagame lõigu $\left[0, \frac{2}{\pi} \right]$ q osaks punktidega

$$t_0=0, t_1=\frac{2}{q\pi}, \dots, t_\alpha=\frac{2}{(q+1-\alpha)\pi}, \dots, t_{q-1}=\frac{1}{\pi}, t_q=\frac{2}{\pi}.$$

Vastava kõõlmurdjoone pikkus on

$$s(\Gamma_q) = |x(t_1)| + \sum_{\alpha=2}^q |x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1})|.$$

Siin $\frac{1}{t_\alpha} = \frac{1}{t_{\alpha-1}} + \frac{\pi}{2}$; $\alpha=2, \dots, q$, mistõttu $x(t_{\alpha-1})$ ja $x(t_\alpha)$ on ristuvad vektorid, seega

$$|x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1})| \geq |x(t_\alpha)| = \frac{2}{(q+1-\alpha)\pi}.$$

Järelikult

$$s(\Gamma_q) \geq \frac{2}{\pi} \sum_{\alpha=1}^q \frac{1}{q+1-\alpha} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q} \right).$$

Et ([3], lk. 27)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{q} = \ln q + A_q,$$

kus $\lim_{q \rightarrow \infty} A_q = C = \text{const} > 0$ (Euleri¹ konstant) ning $\ln q$ kasvab q kasvades

¹ Leonhard Euler [oeler] (1707—1783), šveitsi päritoluga matemaatik, Peterburi ja Berliini TA liige.

tõkestamatult, siis $s(\Gamma_q)$ võib küllalt suure q väärtuse korral ületada igasuguse tõkke, s. t. vaadeldav kaar ei ole sirgestuv.

Märgime, et art-s 15 konstrueeritud Peano joon on niisugune mittesile joon, mille ükski kaar ei ole sirgestuv.

19. Kaare pikkuse arvutamine. Olgu antud joon $\vec{\gamma} = \{x : ox = x(t); t \in T\}$ ruumis E_n . Osutub, et selle joone kaare $\vec{\gamma}_{[a,b]}$ pikkus avaldub valemiga

$$s_{[a,b]} = \int_a^b |x'(t)| dt. \quad (19.1)$$

Tõestuseks kasutame suuruse $s(\Gamma)$ hindamisel Tayloriga valemit funktsiooni $x_i(t)$ jaoks, võttes selles valemis jääkliikme kohe järgul 2 ning Lagrange'i poolt antud kujul ([2], lk. 232):

$$x_i(t_\alpha) - x_i(t_{\alpha-1}) = x'_i(t_{\alpha-1})\Delta_\alpha + \frac{1}{2} x''_i(\varrho_\alpha^{(i)}) \Delta_\alpha^2,$$

kus $\varrho_\alpha^{(i)} \in (t_{\alpha-1}, t_\alpha)$ ja $\Delta_\alpha = t_\alpha - t_{\alpha-1}$. Vektorite jaoks saame siit

$$x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1}) = x'(t_{\alpha-1})\Delta_\alpha + \frac{1}{2} r_\alpha \Delta_\alpha^2,$$

kus

$$r_\alpha = (x''_1(\varrho_\alpha^{(1)}), \dots, x''_n(\varrho_\alpha^{(n)})).$$

Nüüd

$$d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) = |x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1})| = |x'(t_{\alpha-1})\Delta_\alpha + \frac{1}{2} r_\alpha \Delta_\alpha^2|.$$

Selle suuruse hindamiseks rakendame võrratust (1.13), võttes $k = x'(t_{\alpha-1})\Delta_\alpha$ ja $l = \frac{1}{2} r_\alpha \Delta_\alpha^2$. Me saame

$$|x'(t_{\alpha-1})|\Delta_\alpha - \frac{1}{2} |r_\alpha| \Delta_\alpha^2 \leq d(x_{\alpha-1}, x_\alpha) \leq |x'(t_{\alpha-1})|\Delta_\alpha + \frac{1}{2} |r_\alpha| \Delta_\alpha^2$$

ja seetõttu

$$\sum_{\alpha=1}^q |x'(t_{\alpha-1})|\Delta_\alpha - \alpha(\Gamma) \leq s(\Gamma) \leq \sum_{\alpha=1}^q |x'(t_{\alpha-1})|\Delta_\alpha + \alpha(\Gamma), \quad (19.2)$$

kus

$$\alpha(\Gamma) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^q |r_\alpha| \Delta_\alpha^2.$$

Siin $|x''_i(t)|$ kui pidev funktsioon on lõigus $[a, b]$ tõkestatud: $|x''_i(\varrho_\alpha^{(i)})| < K_i$, mistõttu

$$|r_\alpha| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x''_i(\varrho_\alpha^{(i)})]^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2} = K.$$

Tähistades $\max \Delta_\alpha = \Delta(\Gamma)$ ja asendades $\Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha \cdot \Delta_\alpha$ puhul esimese teguri suurusega $\Delta(\Gamma)$, saame

$$0 \leq \alpha(\Gamma) \leq \frac{1}{2} K \Delta(\Gamma) \sum_{\alpha=1}^q \Delta_\alpha = \frac{1}{2} K \Delta(\Gamma) (b - a). \quad (19.3)$$

Võrratused (19.2) ja (19.3) kehtivad suvalise kõõlmurdjoone pikkuse $s(\Gamma)$ korral. Järgnevalt näitame, et kaare pikkus $s_{[a,b]} = \sup s(\Gamma)$ osutub ühe sellise jada $s(\Gamma_1), s(\Gamma_2), \dots, s(\Gamma_k)$ piirväärtuseks, nii et $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(\Gamma_k) = 0$. Selleks võtame vabalt mingi positiivsete elementidega nulljada $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k, \dots$ ($\delta_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$).

Ülemise raja mõiste kohaselt võib δ_k korral leida $s(\Gamma_k)$, nii et $s_{[a,b]} - \delta_k \leq s(\Gamma_k) \leq s_{[a,b]}$. Seejuures võib alati saavutada, et $\Delta(\Gamma_k) \leq \delta_k$, sest kui see nii veel pole, tuleb $s(\Gamma_k)$ saamisel kasutatud jaotuspunkte $t_1, t_2, \dots, t_{q-1}$ täiendada vajaliku arvu lõigu $[a, b]$ uute sisepunktidega. Seejuures $s(\Gamma_k)$ avaldise (18.1) teatavad liidetavad asenduvad ühe või mitme taolise kauguse summaga, mistõttu $s(\Gamma_k)$ saab kolmnurga võrratuse (1.12) põhjal ainult suurened, ületamata siiski ülemist raja, s.t. jäädes ikkagi $s_{[a,b]} - \delta_k$ ja $s_{[a,b]}$ vahele. Kui nüüd $k \rightarrow \infty$, siis võrduse $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = 0$ tõttu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(\Gamma_k) = s_{[a,b]}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(\Gamma_k) = 0.$$

Võrratusest (19.3) järeldub nüüd, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\Gamma_k) = 0$ ja võrratuse (19.2) põhjal

$$s_{[a,b]} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\sum_{\alpha=1}^q |x'(t_{\alpha-1})| \Delta_{\alpha} \right].$$

Paremal pool piirväärtuse märgi all tunneme ära pideva funktsiooni

$$f(t) = |x'(t)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [x'_i(t)]^2} \quad (19.4)$$

Riemanni summa, mille abil defineeritakse funktsiooni $f(t)$ määratud integraal kui selle summa piirväärtus protsessis, kus $\max \Delta_{\alpha} \rightarrow 0$ ([2], lk. 351, 352). Et mingis lõigus pidev funktsioon on integreeruv selles lõigus ([2], lk. 361), siis kõnesoleva avaldise parem pool osutub just selleks määratud integraaliks, mis on tõestatava valemi (19.1) paremal pool, ja (19.1) seega tõesti kehtib.

Erijuhul, mil $n=2$, s.t. kui tegemist on joonega γ tasandil E_2 , järelduvad valemist (19.1) matemaatilise analüüsi kursusest tuttavad valemid ([2], lk. 414). Nimelt on siis võrranditega $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ antud joone korral $x'=(\dot{x}, \dot{y})$ ja $|x'|=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, kusjuures funktsiooni $y=f(x)$ graafiku puhul $x=t$, $y=f(t)$, mistõttu vastavalt

$$s_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad s_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Valemi (19.1) eelnevas tuletuses läks vaja funktsioonide $x_i(t)$ tuletiste $x_i''(t)$ olemasolu ja pidevust. See valem jääb aga tõeseks ka siis, kui eeldatakse ainult tuletiste $x_i'(t)$ olemasolu ja pidevust.

Tõestus lähtub valemist (18.2) ja tugineb vahe

$$p_\alpha - x'(t_\alpha) = z_\alpha$$

hindamisele. Selle vahe koordinaadid on

$$x'_i(\tau_\alpha^{(i)}) - x'_i(t_\alpha) = z_\alpha^{(i)}.$$

Et $x'_i(t)$ kui lõigus $[a, b]$ pidevad funktsioonid on seal ka ühtlaselt pidevad ([2], lk. 136), siis võib jadas $\{s(\Gamma_k)\}$ küllalt kaugemale minnes saavutada, et α iga väärtuse korral $|z_\alpha^{(i)}|$ on väiksem igast etteantud arvust $\varepsilon_i > 0$ ja seetõttu $|z_\alpha|$ on väiksem igast etteantud arvust $\varepsilon > 0$. Samal ajal

$$x(t_\alpha) - x(t_{\alpha-1}) = x'(t_\alpha)\Delta_\alpha + z_\alpha\Delta_\alpha.$$

Järelikult kehtivad võrratused (19.2), kus praegu

$$\alpha(\Gamma) = \sum_{\alpha=1}^q |z_\alpha| \Delta_\alpha.$$

Jadas $\{s(\Gamma_k)\}$ küllalt kaugemale minnes saame

$$0 \leq \alpha(\Gamma_k) < \sum_{\alpha=1}^q \varepsilon \Delta_\alpha = \varepsilon(b-a).$$

Siit järeldub, et $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(\Gamma_k) = 0$. Edasine kordab ülaltoodud tõestust.

20. Loomulik parameeter. Olgu eukleidilises ruumis E_n antud joon γ . Lähtudes valemist (19.1) defineerime funktsiooni $s(t) = s_{[a,t]}$, s. t.

$$s(t) = \int_a^t |x'(\tau)| d\tau \quad (20.1)$$

(paremal pool olev integraal on muutuva ülemise raja funktsioon). Sellel funktsioonil on selge geomeetriline tähendus: kui $t > a$, siis $s(t) = s_{[a,t]}$ on joone kaare $\gamma_{[a,t]}$ pikkus, kui aga $t < a$, siis $-s(t) = -\int_t^a |x'(\tau)| d\tau = s_{[t,a]}$ on kaare $\gamma_{[t,a]}$ pikkus. Selle funktsiooni väärtustel

$$s = s(t)$$

on seega joonel γ täita samasugune osa nagu näiteks muutuva abstsissi x väärtustel x -teljel. Tekib vastav väärtuste piirkond

$$S = \{s : s = s(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}.$$

Funktsiooni (20.1) saab kasutada parameetri teisendamiseks joonel γ , sest $s(t)$ kui integreeritava funktsiooni $|x'(t)|$ algfunktsiooni puhul

$$s'(t) = |x'(t)| > 0 \quad (20.2)$$

([2], lk. 371), mistõttu nii ta ise kui ka tema pöördfunktsioon $t =$

$=t(s)$ on pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Seejuures ([2], lk. 182)

$$\frac{d}{ds} t(s) = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\mathbf{x}'(t)|}. \quad (20.3)$$

Kui joone γ võrrandis $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ teha parameetri teisendus $t=$
 $=t(s)$, $s \in S \subset \mathbb{R}$; siis on tulemuseks sama joone γ uus võrrand
 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$,

kus $\mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(t(s))$ ja parameetril s on eespool selgitatud geomeet-
 riline tähendus. Seda uut parameetrit s nimetatakse joone γ *loomulikuks parameetriks*. Tema puhul jäävad vabalt valitavaks ainult
 punkt, kus $s=0$ (parameetri s alguspunkt, mis esialgse parameetri
 puhul vastab väärtusele $t=a$), ja kasvamise suund, ülejäänu mää-
 rab juba joon γ ise. Seega kõige üldisem teisendus üleminekuks
 ühelt loomulikult parameetrilt teisele on järgmine:

$$s' = \pm s + s_0.$$

Loomuliku parameetri s puhul on joone γ punkti $\mathbf{x}$ kohavektori
 $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ tuletistel teatavad eriomadused. Liitfunktsiooni diferentsee-
 rimise eeskirja kohaselt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= (x'_1(s), \dots, x'_n(s)) = (x'_1(t) \cdot t'(s), \dots, x'_n(t) \cdot t'(s)) = \\ &= \mathbf{x}'(t) \cdot t'(s) = \mathbf{x}'(t) \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}'(t)|}. \end{aligned} \quad (20.4)$$

Siit leiame, et

$$|\mathbf{x}'(s)| = |\mathbf{x}'(t)| \cdot \frac{1}{|\mathbf{x}'(t)|} = 1,$$

seega joone punkti kohavektori tuletis loomuliku parameetri järgi
 on ühikvektor. Sellest järeldub, et

$$\begin{aligned} 1 = |\mathbf{x}'(s_0)| &= \left\{ \sum_{i=1}^n [x'_i(s_0)]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x_i(s) - x_i(s_0)}{s - s_0} \right]^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i(s) - x_i(s_0)}{s - s_0} \right]^2 \right\}^{1/2} = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0)|}{|s - s_0|}. \end{aligned}$$

Paremal lugejas on joone teatava kõõlvektori pikkus (e. kõõlu pik-
 kus), nimetajas aga vastava kaare pikkus; niisiis, *joone hääbuva*
kõõlu pikkus ja vastava kaare pikkus on ekvivalentsed hääbuvad
suurused — nende suhte piirväärtus on 1. Erijuhul saame siit ring-
 joone sama omadust väljendava võrdsuse ([2], lk. 65)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1,$$

sest ringjoone kõõlu pikkus on $2r \sin \alpha$, vastava kaare pikkus aga
 $r \cdot 2\alpha$.

Koos tuletisega $\mathbf{x}''$ eksisteerib ka $\mathbf{x}''$ (viimane tähendab teist tuletist s järgi). Eespool saadud tulemuse järgi $\mathbf{x}'^2 \equiv 1$ ehk $\mathbf{x}_1'^2 + \dots + \mathbf{x}_n'^2 \equiv 1$. Siit saame s järgi diferentseerimisel

$$2\mathbf{x}_1' \cdot \mathbf{x}_1'' + \dots + 2\mathbf{x}_n' \cdot \mathbf{x}_n'' \equiv 0$$

ehk $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' \equiv 0$, ehk $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}'$. Seega joone punkti kohavektori teist järku tuletis loomuliku parameetri järgi on risti esimest järku tuletisega ehk joone puutuja sihiga.

Need tuletiste $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ eriomadused on tähtsad esmajoones teooria jaoks. Praktikas on üleminek loomulikule parameetrile s enamasti seotud tehniliste raskustega, mis võivad ilmnedagi nii integraali (20.1) avaldamisel kui ka funktsiooni $s=s(t)$ pöördfunktsiooni $t=t(s)$ leidmisel, mistõttu jooneteooria valemid tuleb edaspidi anda tingimata ka üldise parameetri jaoks.

Harjutusülesanded

34. Näidata, et logaritmiline spiraal koonusel on järgmise omadusega: tema kaare pikkus on võrdeline kaare otspunktide ja koonuse tipu vaheliste kauguste vahel.

35. Ruumis E_3 on antud joon parameetriliste võrranditega $x_1 = a \cos^3 t$, $x_2 = a \sin^3 t$, $x_3 = a \cos 2t$ (joon projitseerub x_1x_2 -tasandile astroidiks). Leida selle joone kaare pikkus kahe järjestikuse iseärase punkti vahel ning joone kogupikkus.

36. Ruumis E_3 on antud joon parameetriliste võrranditega $x_1 = t + \frac{1}{t}$, $x_2 = t - \frac{1}{t}$, $x_3 = 2 \ln t$ (joon projitseerub x_1x_2 -tasandile võrdhaarseks hüperbooliks: $x_1^2 - x_2^2 = 4$). Avaldada selle joone punkti x kohavektor $\mathbf{x}$ loomuliku parameetri kaudu ja veenduda, et $|\mathbf{x}'| = 1$, $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}'$.

§ 6. JOON KOLMEMÕÖTMELISES EUKLEIDILISES RUUMIS

Rakenduste seisukohalt tähtsaimad on ruumis E_3 paiknevad jooned. Neid läheb vaja näiteks teoreetilises mehaanikas punkti kineemaatika ja punktmassi dünaamika käsitlemisel, kus joon esineb liikuva punkti jäljena ehk trajektoarina ruumis, aga ka mehaanika mõnede teiste küsimuste käsitlemisel. Puutuja ja kaare pikkuse kõrval on siin kesksed mõisted joone kooldumistasand, kõverus ja vääne. Esmakordselt puutume kokku diferentsiaalgeomeetria ühe viljakaima meetodiga — liikuva teljestiku meetodiga.

21. Kooldumistasand ja liikuv kanooniline teljestik. Joone puutuja punktis x_0 on art-s 16 defineeritud kui joone lõikaja x_0x piirasend punkti x liikumisel mööda joont punktini x_0 . Seejuures selgus, et kui joone

$$\gamma = \{x : \overrightarrow{ox} = \mathbf{x}(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$$

punkti x_0 kohavektor on $x(t_0)$, siis puutuja sihivektor on $x'(t_0)$. Sellega on saanud geomeetrilise tähenduse joone punkti x kohavektori $x(t)$ tuletis $x'(t_0)$ — see vektor määrab puutuja sihi.

Käesoleva artikli ülesandeks on leida geomeetriline tähendus teist järku tuletisele $x''(t_0)$. Kuigi saab anda ka selle ülesande üldise käsitlemise ruumi E_n korral, jääme järgnevas siiski põhiliselt ruumi E_3 geomeetria piiridesse.

Definitsiooni kohaselt $x'' = (x')'$, seega

$$x''(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x'(t) - x'(t_0)}{t - t_0}. \quad (21.1)$$

Siin $x'(t_0)$ ja $x'(t)$ on joonel kohavektoritega $x(t_0)$ ja $x(t)$ määratud punktides x_0 ja x võetud puutujate sihivektorid. Vaatleme esimest puutujat läbivat tasandit, mis on paralleelne teise puutujaga (joon. 17). See tasand läbib punkti x_0 vektoritega $x'(t_0)$ ja $x'(t)$ määratud rihis. Teise neist vektoreist võib asendada nende vektorite vahelga $x'(t) - x'(t_0)$, selle aga korrutada reaalarvuga $(t - t_0)^{-1}$, ilma et me rihist välja läheksime. Seega saab vaadeldava tasandi rihi määrata ka vektoriga $x'(t_0)$ ja valemi (21.1) paremal pool piirväärtuse märgile järgneva vektoriga. Kui nüüd teha selle märgi all näidatud piirprotsess $t \rightarrow t_0$, samasugune nagu puutuja defineerimisel, mil punkt x liigub mööda joont punktini x_0 , saame vaadeldava tasandi piirasendina läbi punkti x_0 vektoritega $x'(t_0)$ ja $x''(t_0)$ määratud rihis mineva tasandi.

Seda tasandit — punktis x_0 võetud puutujat läbiva ja punktis x võetud puutujaga paralleelse tasandi piirasendit punkti x liikumisel mööda joont punktini x_0 — nimetatakse *joone kooldumistasandiks* punktis x_0 .

Kooldumistasand on üheselt määratud ainult joone sellistes punktides; kus tema rihti määravad vektorid x' ja x'' on mittekolliineaarsed. Üldiselt see muidugi nii ongi. Kui joonel leidub punkt, kus $x'(t_0) \parallel x''(t_0)$, siis seda punkti nimetatakse *joone sirgestuspunktiks*. Sirge puhul, mil $x = a + tk$ ning $x' = k = \text{const}$ ja $x'' = 0$, on iga punkt sirgestuspunkt. Õige on ka vastupidine väide: *joon, mille iga punkt on sirgestuspunkt, osutub sirgeks*.

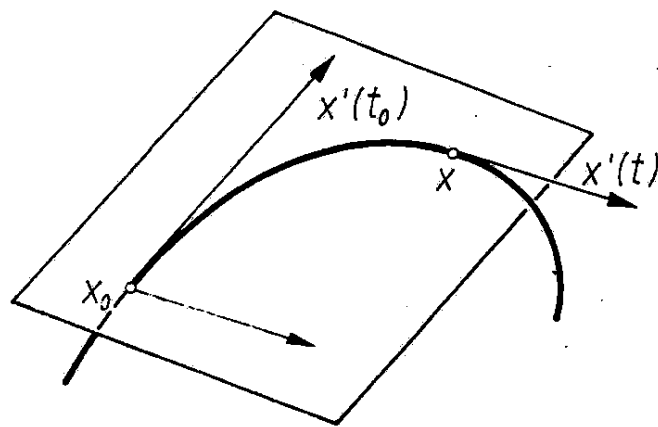
Tõestuseks läheme joonel üle loomulikule parameetrile, uurides eelnevalt, kuidas muutuvad tuletised x' ja x'' , kui teha joonel parameetri teisendus $t = t(\tau)$. Kooskõlas seostega (14.5) tähistame $x(t(\tau)) = x^*(\tau)$; siis (14.6) põhjal

$$x^{*'} = x' \cdot t'. \quad (21.2)$$

Rakendades jällegi liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja, saame

$$x^{*''} = (x' \cdot t')' = x'' \cdot t'^2 + x' \cdot t'' \quad (21.3)$$

(vrd. [2], lk. 203). Siit nähtub, et kui $x' \parallel x''$, siis ka $x^{*'} \parallel x^{*''}$, seega joone punkti osutumine sirgestuspunktiks on parameetrist sõltumatu asjaolu. Kui nüüd eeldada, et τ on joone loomulik parameeter s , siis art-i 20 tähistuste ja tulemuste alusel vektor $x^{*'} = x'$ on ühik-



Joonis 17

vektor ja vektor $x''=x''$ risti selle ühikvektoriga x' . Järelikult sirgestuspunktis, kus see ristuv vektor x'' on ühtlasi kollineaarne ühikvektoriga x' , on ainus võimalus $x''=0$. Kui joon koosneb ainult sirgestuspunktidest, siis kehtib samasus $x''=0$, seega $x'=k=\text{const}$ ja $x=ks+a$, s.t. joon on sirge.

Vaatleme tasandil E_2 sellist joont, mis on funktsiooni $y=f(x)$ graafik. Sel korral

$$x=(t, f(t)), \quad x'=(1, f'(t)), \quad x''=(0, f''(t)).$$

Sirgestuspunktis peavad x' ja x'' koordinaadid olema võrdelised, see aga leiab aset üksnes juhul, mil $f''(t)=0$, s.t. kui tegemist on graafiku käänupunktiga. Seega *sirgestuspunkti mõiste on graafiku käänupunkti mõiste üldistus kõrgema mõõtme juhule*. Edaspidisest käsitlusest jäävad sirgestuspunktid enamasti välja (kui neist just eraldi juttu ei tule).

Joone $\gamma \subset E_3$ iga punktiga, mis pole sirgestuspunkt, oleme sidunud teatava sirge — puutuja — ja teatava seda sirget läbiva tasandi — koondumistasandi. Nende alusel saab joone punktis määrata ristteljestiku, mille alguspunktiks on joone antud punkt, esimene telg ühtib puutujaga ja kahe esimese telje tasand ühtib kooldumistasandiga selles punktis. Mõnevõrra lahtiseks jääb telgede suundade valik. Puutujal pole suund joone γ kui punktihulga poolt määratud. Kui aga arvestada seda, et meil on joone käsitluse aluseks võrrand $x=x(t)$, mille paremal pool on parameetrist t sõltuv vektor, siis on loomulik suunaks puutujal võtta selle parameetri t kasvamise suund; viimane on ühtlasi vektori $x'(t)$ suund. Pärast mõnd lihtsat parameetri teisendust, kasvõi näiteks teisendust $\tau=-t$, muutub suund vastupidiseks ja seda asjaolu tuleb edaspidi silmas pidada. Mis puutub aga teise telje suunda, siis see osutub geomeetriliselt määratuks. Tõepoolest, valemist (21.3) nähtub, et x'' avaldises on vektori x'' kordaja t^2 alati positiivne. See tähendab, et kui x'' ja x''' rakendada joone punktist, siis suunduvad nad kooldumistasandil alati ühele poole puutujat. Seda pooltasandit, mille ääreks on puutuja ja millesse suundub parameetri valikust sõltumatult joone punkti kohavektori teist järku tuletis, nimetatakse joone *kooldumispooltasandiks*. Teise telje suuna valime nüüd muidugi selliselt, et positiivne pooltelg oleks kooldumistasandil.

Kolmandal, kahe eelmise teljega ristaval teljel valime suuna selliselt, et tekiks parema käe teljestik. Sellega on ristteljestik joone iga punkti jaoks täielikult fikseeritud (kui on teada parameetri kasvamise suund). Punkti liikumisel mööda joont puutuja ja kooldumistasand üldiselt muutuvad, mistõttu liigub ka vaadeldav ristteljestik. Seda ülalkirjeldatud viisil saadud teljestikku nimetatakse *joone liikuvaks kanooniliseks teljestikuks*.

Tema kolmest teljest esimene läheb nagu öeldud, mööda puutujat, esimese kahe telje tasand on kooldumistasand. Puutujaga ristuvat tasandit (s. t. teise ja kolmanda telje tasandit) nimetatakse joone *normaaltasandiks*, iga sirget sellel, mis läbib joone punkti — joone *normaaliks*. Kooldumistasandil asetsevat normaali nimetatakse *peanormaaliks* (see on teise telje sirge), normaali, mis on risti kooldumistasandiga (kolmanda telje sirget) — *binormaaliks*. Puutujat ja binormaali sisaldavat tasandit nimetatakse *sirgestus-tasandiks*.

Kanoonilise teljestiku baasivektoreid on lihtne avaldada siis, kui parameetriks joonel on loomulik parameeter s . Art-s 20 selgus, et tuletisvektoritel $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ loomuliku parameetri järgi on järgmised eriomadused: $|\mathbf{x}'|=1$, $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}'$. Kui ühikvektorid telgedel — puutujal, pea- ja binormaalil — tähistada vastavalt $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b}$, siis on kohe selge, et

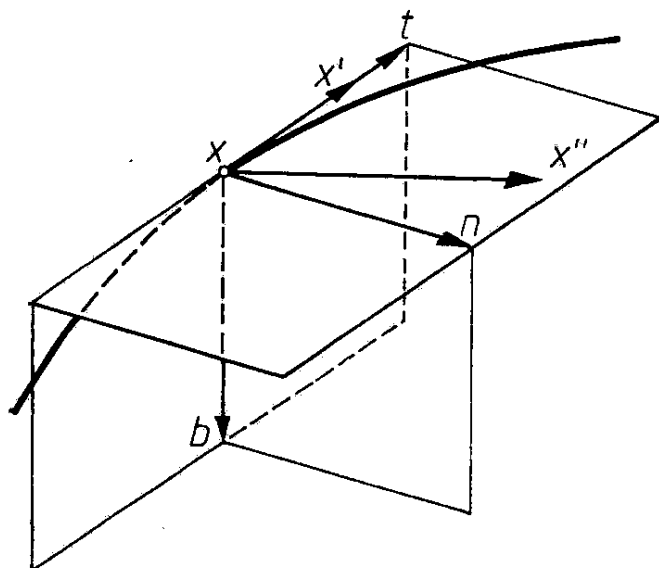
$$\mathbf{t} = \mathbf{x}', \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}''|}. \quad (21.4)$$

Üldise parameetri korral ei tarvitse $\mathbf{x}'$ olla ühikvektor. Et $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ on kooldumistasandi rihis ja $\mathbf{x}''$ suundub kooldumispooltasandisse, samuti nagu $\mathbf{n}$, siis $\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''$ on binormaali sihivektor, seejuures samasuunaline vektoriga $\mathbf{b}$ (joon. 18). Seega

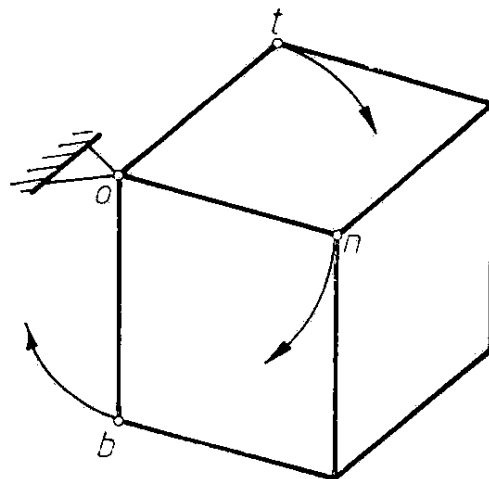
$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}; \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \frac{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \times \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''| |\mathbf{x}'|}. \quad (21.5)$$

Teades nüüd kanoonilise teljestiku telgede sihi- ja tasandite normaalvektoreid joone antud punktis, saame vajaduse korral leida ka nende telgede ja tasandite võrrandid.

22. Bartelsi—Frenet' valemid. Joone γ uurimisel ruumis E_3 on erilise tähtsusega valemid, mis määravad kanoonilise teljestiku telgede sihtide hetkpöörlemise punkti nihkumisel mööda joont. Nende tuletamiseks arvestame kõigepealt, et baasivektorid $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b}$ on valemite (21.4) järgi loomuliku parameetri s funktsioonid, sest nende valemite paremad pooled on seda. Kui need vektorid rakendada mingist fikseeritud punktist o , siis nende vabad otspunktid kirjeldavad ühiksfääril kolm joont, mille punktide $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b}$ kohavektorid on $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b}$ (joon. 19). Telgede sihtide hetkpöörde näitavad sel juhul nende joonte puutujate sihivektorid $\mathbf{t}'$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{b}'$ (neid võib tõlgendada punktide $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{b}$ kiirusvektoritena, kui joone loomulikku parameetrit s käsitada ajana). Ülalmärgitud valemid, mille tule-



Joonis 18



Joonis 19

tamisele kohe asume, annavad nende vektorite t' , n' ja b' avaldised baasivektorite t , n ja b lineaarkombinatsioonidena. On selge, et niisugused valemid on olemas (sest iga vektori ruumis E_3 saab avaldada t , n ja b lineaarkombinatsioonina), küsimus on ainult selles, milline on nende konkreetne kuju. Et $t = x'$, siis $t' = x''$, kuid (21.4) järgi $x'' = |x''|n$. Tähistades

$$k = |x''| \geq 0, \quad (22.1)$$

saame esimese valemi kujul

$$t' = kn.$$

Järgnevalt tuletame kolmanda valemi, s.t. b' avaldise. Et $b = t \times n$, siis on vaja eelnevalt leida vektorkorrutise diferentseerimise eeskiri.

Olgu antud $z = z(t)$ ja $w = w(t)$. Valemite (2.4) põhjal

$$z \times w = (z_2 w_3 - z_3 w_2) i_1 + (z_3 w_1 - z_1 w_3) i_2 + (z_1 w_2 - z_2 w_1) i_3,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} (z \times w)' &= [(z'_2 w_3 + z_2 w'_3) - (z'_3 w_2 + z_3 w'_2)] i_1 + \\ &+ [(z'_3 w_1 + z_3 w'_1) - (z'_1 w_3 + z_1 w'_3)] i_2 + \\ &+ [(z'_1 w_2 + z_1 w'_2) - (z'_2 w_1 + z_2 w'_1)] i_3 = \\ &= [(z'_2 w_3 - z'_3 w_2) i_1 + (z'_3 w_1 - z'_1 w_3) i_2 + (z'_1 w_2 - z'_2 w_1) i_3] + \\ &+ [(z_2 w'_3 - z_3 w'_2) i_1 + (z_3 w'_1 - z_1 w'_3) i_2 + (z_1 w'_2 - z_2 w'_1) i_3] = \\ &= z' \times w + z \times w'. \end{aligned}$$

Sellest

$$b' = t' \times n + t \times n' = (kn) \times n + t \times n' = t \times n'$$

ja siit $b' \perp t$. Teiselt poolt $|b| = 1$, seega $b^2 = 1$ ja $2bb' = 0$, s.t. $b' \perp b$. Järelikult b' , olles risti vektoritega t ja b , on kollineaarne vektoriga $t \times b = -n$ ja seega leidub kordaja κ ; nii et

$$b' = -\kappa n. \quad (22.2)$$

Teise valemi saab tuletada järgmisel viisil:

$$n' = (b \times t)' = b' \times t + b \times t' = (-\kappa n) \times t + b \times (\kappa n) = -\kappa t + \kappa b.$$

Esitame saadud valemid õiges järjekorras:

$$\begin{aligned} t' &= \kappa n, \\ n' &= -\kappa t + \kappa b, \\ b' &= -\kappa n \end{aligned} \quad (22.3)$$

ning pöörame tähelepanu kordajate maatriksile

$$\begin{vmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{vmatrix}.$$

Siin on tegemist kaldsümmeetrilise maatriksiga, milles ka kõrvaldiagonaalil on nullid. See tähelepanek lihtsustab tunduvalt valemite (22.3) meelepidamist.

Valemid (22.3) on tuntud Frenet' valemite nime all, kusjuures liikuvat kanoonilist teljestikku nimetatakse sageli ka Frenet' kolmtahuks.¹ On aga selgunud, et juba 1831. a. ilmus Tartus ülikooli matemaatikaprofessori Martin Bartelsi (1769—1836) juhendamisel kirjutatud K. E. Senffi auhinnatöö, milles joonte käsitlemisel ruumis E_3 leidis esmakordselt kasutamist Bartelsi poolt väljatöötatud liikuva kanoonilise teljestiku meetodika.² Töö sisaldab ka valemitega (22.3) samaväärsed valemid

$$t'n = -n't = \kappa, \quad n'b = -b'n = \kappa, \quad b't = t'b = 0.$$

Seda arvestades nimetame valemite (22.3) *Bartelsi—Frenet' valemiteks*.

Joonega seotud liikuva kanoonilise teljestiku ja Bartelsi—Frenet' valemite kasutamine kujutab endast liikuva teljestiku meetodi rakendamist lihtsaimal erijuhul — jooneteoorias.

23. Kõverus. Bartelsi—Frenet' valemid sisaldavad joone liikuva kanoonilise teljestiku baasivektorite t , n ja b ning nende tuletiste t' , n' , b' kõrval kaht kordajatena esinevat suurust κ ja κ . Et need baasivektorid ja loomulik parameeter, mille järgi on võetud tuletised, on joonega geomeetriliselt seotud, siis peab geomeetriline tähendus olema ka kordajail κ ja κ .

Selle selgitamist alustame kordajast κ . Seose (22.1) põhjal

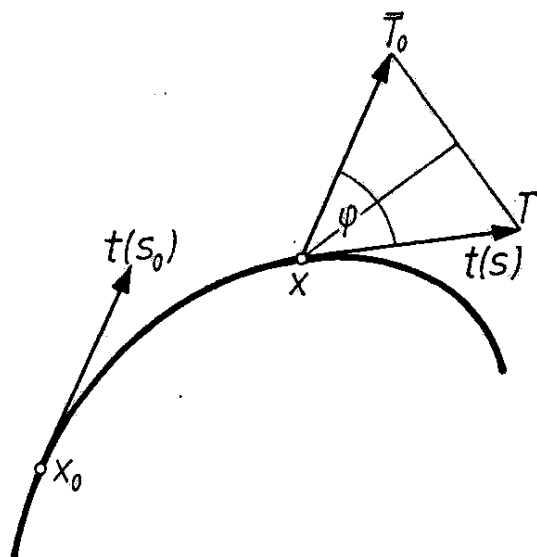
$$\kappa \neq |x''| = |t'|,$$

seega

$$\kappa(s_0) = |t'(s_0)| = \left| \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{t(s) - t(s_0)}{s - s_0} \right|.$$

¹ Prantsuse matemaatik Jean Frédéric Frenet [frenet] (1816—1900) avaldas need valemid 1847. aastal.

² Vt. Lumiste Ü. Tartu ülikool ja XIX sajandi geomeetria. — Teaduse ajaloo lehekülgi Eestist II. Tallinn, Valgus, 1976, lk. 36—68 (eriti lk. 41—43).



Joonis 20

Üldiselt, kui on tegemist muutuva vektoriga $z(s)$, siis

$$\begin{aligned} |\lim_{s \rightarrow s_0} z(s)| &= \sqrt{[\lim_{s \rightarrow s_0} z_1(s)]^2 + [\lim_{s \rightarrow s_0} z_2(s)]^2 + [\lim_{s \rightarrow s_0} z_3(s)]^2} = \\ &= \lim_{s \rightarrow s_0} \sqrt{[z_1(s)]^2 + [z_2(s)]^2 + [z_3(s)]^2} = \lim_{s \rightarrow s_0} |z(s)|, \end{aligned}$$

mistõttu

$$k(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{|t(s) - t(s_0)|}{|s - s_0|}.$$

Kui nurk vektorite $t(s_0)$ ja $t(s)$ vahel tähistada φ , siis, nagu selgub jooniselt 20,

$$|t(s) - t(s_0)| = |\overrightarrow{T_0T}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

sest $|t(s_0)| = |t(s)| = 1$, seega

$$k(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{|s - s_0|} = \lim_{s \rightarrow s_0} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \cdot \frac{\varphi}{|s - s_0|} \right).$$

Kui $s \rightarrow s_0$, siis $t(s)$ pidevuse tõttu $t(s) \rightarrow t(s_0)$ ja seega $\varphi \rightarrow 0$. Piirväärtuse omadusest saame $k(s_0)$ kahe piirväärtuse korrutisena, millest esimese väärtuseks on 1 ([2], lk. 65); niisiis

$$k(s_0) = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\varphi}{|s - s_0|}. \quad (23.1)$$

Siin φ on nurk, mille moodustavad puutujate sihid joone parametri väärtustele s_0 ja s vastavates punktides. Selle nurga suhet nende punktide vahelise kaare pikkusse $|s - s_0|$ nimetatakse kaare keskmiseks kõveruseks, sest ta mõõdab selle kaare kõverdumist keskmiselt kaareühiku kohta. Suurus $k(s_0)$ on kaare keskmise kõveruse piirväärtus protsessis, kus $x(s)$ pidevuse tõttu joone punkt x

kohavektoriga $\mathbf{x}(s)$ liigub mööda joont punktini x_0 . Seetõttu seda suurust $k(s_0)$ nimetatakse joone kõveruseks punktis x_0 . Vektorit

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{t}' = k\mathbf{n}, \quad (23.2)$$

mille pikkuseks on kõverus, sihiks peanormaali siht ja suund on joone punktist kooldumispooltasandisse, nimetatakse joone kõverusvektoriks vaadeldavas punktis. Et $k > 0$, siis tema sihi ja suuna määrab vektor $\mathbf{n}$, mille leidmiseks on eespool saadud valem (21.5).

Selleks et saada üldine valem kõveruse k arvutamiseks, meenu-tame seost (20.4):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}'$$

ja leiame siit, et

$$\mathbf{x}'' = (\mathbf{x}')' \cdot \mathbf{t}' + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}'' = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{t}^2 + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}''.$$

Valemi (22.1) põhjal $k = |\mathbf{x}''|$. Avaldise lihtsustamiseks on aga kasulik arvestada, et $|\mathbf{x}''| = |\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|$. See võrdus tõesti kehtib, sest $|\mathbf{x}'| = 1$ ja $\mathbf{x}'' \perp \mathbf{x}'$, mistõttu $|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|$ on ristküliku pindala, mille üks külge on 1; see pindala $|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|$ on niisiis võrdne teise külje pikkusega $|\mathbf{x}''|$. Et seejuures

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}') \times (\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{t}^2 + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}'') = (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{t}^3$$

ja (20.3) põhjal $\mathbf{t}' = \frac{1}{|\mathbf{x}'|}$, siis kokkuvõttes

$$k = \frac{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3}. \quad (23.3)$$

Kui jooneks on funktsiooni $x_2 = f(x_1)$ graafik x_1x_2 -tasandil, siis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (t, f(t), 0), \\ \mathbf{x}' &= (1, f', 0), \\ \mathbf{x}'' &= (0, f'', 0), \\ \mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' &= (0, 0, f'') \end{aligned}$$

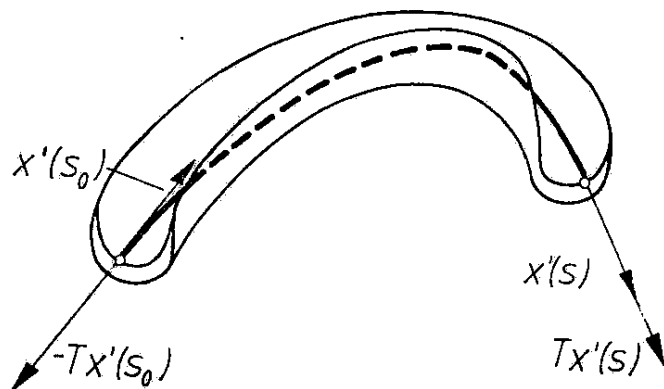
ning

$$k = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}}, \quad (23.4)$$

nii nagu see on tuttav matemaatilise analüüsi kursusest ([2]; lk. 287). Erinevus on vaid selles, et joone korral tasandil E_2 saab kõveruse varustada märgiga, lugedes ta negatiivseks, kus s kasvamisel puutuja siht pöörleb negatiivses suunas; nii enamasti tehaksegi ja sel korral tuleb viimase valemi lugejas ära jätta absoluutväärtuse märgid. Ruumis E_3 ei saa rääkida sihi pöörlemisest positiivses või negatiivses suunas ja seetõttu sel puhul $k \geq 0$.

Kõverusel on suur rakenduslik tähtsus. Näiteks punkti kinemaatikas ([4], § 8), kus vaadeldakse punkti liikumist ruumis ja kus punkti kohavektor $\mathbf{x}$ on aja t funktsioon $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, nimetatakse vektorit $\mathbf{v} = \mathbf{x}' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t}$ kiirusvektoriks ja vektorit

Joonis 21



$$w = x'' = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

kiirendusvektori.

Seejuures punktmassi dünaamikas kehtib Newtoni teine seadus ([4], lk. 127):

$$F = mw,$$

mis seob selle kiirendusvektori massiga m ja kiirendust esilekutsuva jõuvektoriga F .

Valemite (21.2)–(21.4) ja (23.2) järgi

$$v = x' = x' \cdot s' = t \cdot s', \quad (23.5)$$

$$w = x'' = x'' \cdot s'^2 + x' \cdot s'' = ts'' + n(kv^2), \quad (23.6)$$

kus $v = |s'|$ on liikumise kiirus. Seega liikuva punktmassi puhul on temale mõjuva jõu tangentsiaalkomponent $F_t = mw$, kus $w = s''$ on *tangentsiaalkiirendus*, normaalkomponendis $F_n = mkv^2$ aga esineb tegurina kõverus k ; seejuures mõjub see normaalkomponent piki peanormaali ja suundub kooldumispooltasandisse. Tegurit kv^2 nimetatakse *normaalkiirenduseks* ([4], lk. 119).

Kõverusega tuleb tegemist teha ka staatika ülesannetes. Olgu näiteks piki mingit joont (näiteks kõveras tunnelis või rennis) tõmmatud painduv ja praktiliselt kaalutu ning venimatu niit, mis asetsegu teatava pinge all tasakaalus. Oletame lihtsuse mõttes, et pinge suurus T on niidi igas punktis ühesugune (s.t. puudub niidi hõõrdumine aluse vastu). Määrame, milline on niidi rõhumine alusele joone mingis punktis x_0 .

Vastaku punkt x_0 loomuliku parameetri väärtusele s_0 . Vaatleme mõnele teisele väärtusele s vastavat punkti x , eeldades, et $s > s_0$. Punktides x_0 ja x mõjuvad niidile jõud $-Tx'(s_0)$ ja $Tx'(s)$ (joon. 21). Kui need jõud kanda ühte punkti, siis resultantjõuks on $T[x'(s) - x'(s_0)]$. Meid huvitav rõhumine p on keskmiselt kaareühiku kohta tuleva jõu piirväärtus, s.t.

$$p = T \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{x'(s) - x'(s_0)}{s - s_0} = Tx''(s_0) = Tkn.$$

Rõhumine p on niisiis suunatud piki peanormaali kooldumispooltasandisse, tema suurus on $|p| = Tk$.

24. Vääne. Bartelsi—Frenet' valemeis esinevat teist kordajat nimetatakse joone *väändeks* vaadeldavas punktis. Väände geomeetrilise tähenduse selgitamiseks näitame kõigepealt, et kui suurus κ on võrdne nulliga joone igas punktis, siis joon on tasandiline. Tõepoolest, kui $\kappa \equiv 0$, siis Bartelsi—Frenet' kolmandast valemist

$\mathbf{b}' \equiv 0$, s. t. $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 = \text{const.}$ Samasus $\mathbf{b}\mathbf{t} = 0$ laseb end nüüd, tänu seosele $\mathbf{t} = \mathbf{x}'$, kirjutada kujul

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{b}_0 \mathbf{x}) = 0,$$

millest

$$\mathbf{b}_0 \mathbf{x}(s) = p = \text{const.}$$

Siit ongi näha, et joon asetseb ühel kahest tasandist, mis on risti ühikvektori $\mathbf{b}_0$ sihiga ning paiknevad koordinaatide alguspunktist kaugusel $|p|$, sest joone punkti kohavektor $\mathbf{x}(s)$ rahuldab parametri s iga väärtuse korral selle tasandi normaalkõrrandit

$$\mathbf{b}_0 \mathbf{x} - p = 0.$$

Olgu joone teatavas punktis $\kappa \neq 0$. Bartelsi—Frenet' kolmandast valemist leiame, et

$$|\kappa| = |\mathbf{b}'|.$$

Et $|\mathbf{b}| = 1$, siis analoogiliselt valemiga (23.1)

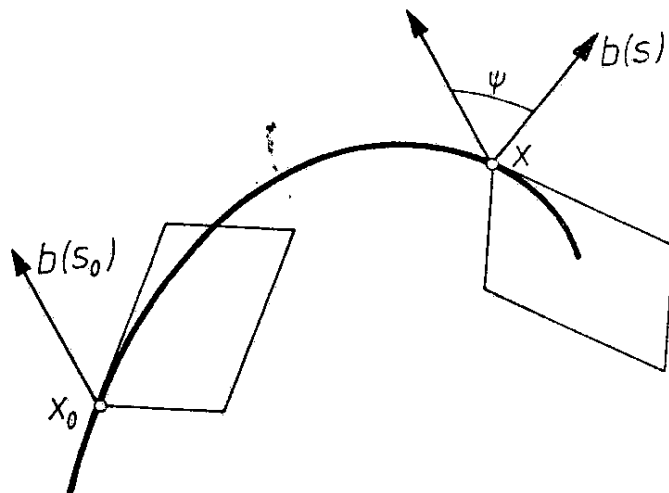
$$|\kappa| = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\psi}{|s - s_0|},$$

kus ψ on praegu nurk vektorite $\mathbf{b}(s)$ ja $\mathbf{b}(s_0)$ vahel (joon. 22).

Et vektorid $\mathbf{b}(s)$ ja $\mathbf{b}(s_0)$ on risti kooldumistasanditega, mis on võetud parametri väärtustele s ja s_0 vastavates joone punktides x ja x_0 , siis ψ on samal ajal ka nende kooldumistasandite vaheline nurk. Mis puutub nimetajasse $|s - s_0|$, siis see on nende punktide vahelise kaare pikkus.

Kogu piirväärtuse märgi all olev avaldis kujutab endast seega suurust, mis mõõdab, millisel määral keskmiselt kaareühiku kohta on joon, näitlikult kõneldes, välja väänatud tasandilisest asendist. Suuruse κ absoluutväärtus osutub selle avaldise piirväärtuseks $s \rightarrow s_0$ korral ning nimetus «vääne» on seega täiesti õigustatud.

Kokkuvõttes, *väände absoluutväärtus $|\kappa|$ punktis x_0 on joone punktides x ja x_0 võetud kooldumistasandite vahelise nurga ψ ja nende punktide vahelise kaare pikkuse suhte piirväärtus punkti x liikumisel mööda joont punktini x_0 . Väände κ märgi geomeetriline tähendus selgub art-s 25.*



Joonis 22

Järgnevalt tulevad lahendada väände κ arvutamiseks seotud küsimused. Selleks pöördume Bartelsi—Frenet' valemite (22.3) poole, millest saame loomuliku parameetri s korral joone punkti kohavektori $\mathbf{x}$ tuletiste jaoks järgmised avaldised:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \mathbf{t}, \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \\ \mathbf{x}''' &= \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{n}' = \kappa' \mathbf{n} + \kappa (-\kappa \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n}) = \\ &= -\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \mathbf{b}.\end{aligned}\quad (24.1)$$

Arvutame segakorrutise $\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''$. See suurus avaldub kolme segakorrutise summana, millest kaks esimest on võrdsed nulliga, sest kummaski neist esineb kaks võrdset tegurit. Seetõttu

$$\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}''' = \kappa^2 \kappa (t n b).$$

Et $t n b = 1$, siis

$$\kappa = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''}{\kappa^2} = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''}{\mathbf{x}'^2}.\quad (24.2)$$

See ongi valem väände arvutamiseks loomuliku parameetri korral.

Üldise parameetri korral kasutatava valemi saamiseks läheme kõigepealt üldiselt parameetrilt üle loomulikule parameetrile:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}(t(s)), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x}' \cdot t', \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{x}'' \cdot t'^2 + \mathbf{x}' \cdot t'', \\ \mathbf{x}''' &= \mathbf{x}''' \cdot t'^3 + 3\mathbf{x}'' \cdot t' t'' + \mathbf{x}' \cdot t'''.\end{aligned}$$

Suurus $\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''$ avaldub nüüd kuue segakorrutise summana, mille seast nullist erinev on ainult üks, sest ülejäänud korrutised sisaldavad vähemalt kaht võrdset tegurit. Seega,

$$\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}''' = (\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}''') \cdot t'^3,$$

kus valemi (20.3) põhjal $t' = \frac{1}{|\mathbf{x}'|}$. Kui tuletame meelde veel kõveruse κ avaldise (23.3), saame lõpuks soovitud valemi väände arvutamiseks:

$$\kappa = \frac{\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''}{(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')^2}.\quad (24.3)$$

Joone punkti, kus $\kappa = 0$, nimetatakse joone *tasandumispunktiks*; see on punkt, kus vektorid $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''$ ja $\mathbf{x}'''$ on komplanaarsed. Eespool selgus, et joon, mille iga punkt on tasandumispunkt, osutub tasandiliseks jooneks.

Valemite (23.3) ja (24.3) rakendusnäitena arvutame kruvijoone (14.3) kõveruse ja väände. Siin

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (a \cos t, a \sin t, bt), \\ \mathbf{x}' &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ \mathbf{x}'' &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ \mathbf{x}''' &= (a \sin t, -a \cos t, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2), \\ \mathbf{x}'^2 &= a^2 + b^2, \\ (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')^2 &= a^2(a^2 + b^2), \\ \mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}''' &= (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')\mathbf{x}''' = a^2b,\end{aligned}$$

seega

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const}, \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2} = \text{const}.$$

Tähendab, nii kruvijoone kõverus kui ka vääne on konstantsed. Art-s 26 näitame, et kruvijoone on ainuke selline joon, mille korral $k = \text{const}$, $\kappa = \text{const}$. Ühtlasi on näha, et parema käe kruvijoone ($b > 0$) vääne on positiivne, vasaku käe kruvijoone ($b < 0$) vääne aga negatiivne.

25. Joone lokaalne ehitus. Joone antud punktis võetud puutuja ja kooldumistasand, mille alusel määratakse joone kanooniline teljestik, on art-tes 16 ja 21 defineeritud teatavate piirseisudena. Puutuja seost joonega on lihtne näitlikult kujutada, kuid kooldumistasandi geomeetiline tähendus on seni lähemalt selgitamata. Seetõttu on kasulik uurida joone asendit antud punkti mingis ümbruses selles punktis võetud kanoonilise teljestiku suhtes. Uurimise käigus selgub ühtlasi väände märgi geomeetiline tähendus.

Uurimine tugineb matemaatilise analüüsi kursusest tuttavale Tayloriga valemile ([2], lk. 230), mille kohaselt saab joone punkti x kohavektori $\mathbf{x}(s)$ koordinaadid $x_i(s)$ avaldada antud punktis x_0 võetud kohavektori $\mathbf{x}(s_0)$ ja tuletiste $\mathbf{x}'(s_0)$, $\mathbf{x}''(s_0)$, ... vastavate koordinaatide kaudu järgmiselt:

$$x_i(s) = x_i(s_0) + x'_i(s_0) \Delta s + \frac{1}{2} x''_i(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{3!} x'''_i(s_0) (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} x^{IV}_i(s_i) (\Delta s)^4,$$

kus $s_i \in [s_0, s]$; $i = 1, 2, 3$. Järelikult

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(s_0) + \mathbf{x}'(s_0) \Delta s + \frac{1}{2} \mathbf{x}''(s_0) (\Delta s)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{x}'''(s_0) (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{z} (\Delta s)^4; \quad (25.1)$$

siin

$$\mathbf{z} = (x^{IV}_1(s_1), x^{IV}_2(s_2), x^{IV}_3(s_3))$$

on vektor, mille koordinaadid on $x^{IV}_i(s)$ pidevuse tõttu igal lõigul tõkestatud.

Seame nüüd eesmärgiks uurida joont kanoonilise teljestiku suhtes. Märgime kõigepealt, et teljestiku alguspunktiks on joone punkt x_0 kohavektoriga $\mathbf{x}(s_0)$. Joone suvalise punkti x kohavektor selles

teljestikus on seega vektor $\overrightarrow{x_0x} = \mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(s_0)$. Üleminekuks selle teljestiku baasivektoritele $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ tuleb kasutada valemeid (24.1), mille alusel saab arendisest (25.1) järeldada, et

$$\overrightarrow{x_0x} = \mathbf{t} \Delta s + \frac{1}{2} \kappa \mathbf{n} (\Delta s)^2 + \frac{1}{3!} (-k^2 \mathbf{t} + k' \mathbf{n} + k \kappa \mathbf{b}) (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{z} (\Delta s)^4, \quad (25.2)$$

kus paremal pool on kirjutise lihtsustamiseks jäetud ära argumendi s_0 tähis. Avaldades

$$\vec{x_0 x} = \xi_1 \vec{t} + \xi_2 \vec{n} + \xi_3 \vec{b},$$

$$\vec{z} = z_1 \vec{t} + z_2 \vec{n} + z_3 \vec{b}$$

ja arvestades, et kordajad vastavate baasivektorite $\vec{t}$, $\vec{n}$ ja $\vec{b}$ ees peavad $\vec{x_0 x}$ mõlemas avaldises olema võrdsed, saame järgmised seosed:

$$\xi_1 = \Delta s - \frac{1}{3!} k^2 (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} z_1 (\Delta s)^4, \quad (25.3)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2 + \frac{1}{3!} k' (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} z_2 (\Delta s)^4, \quad (25.4)$$

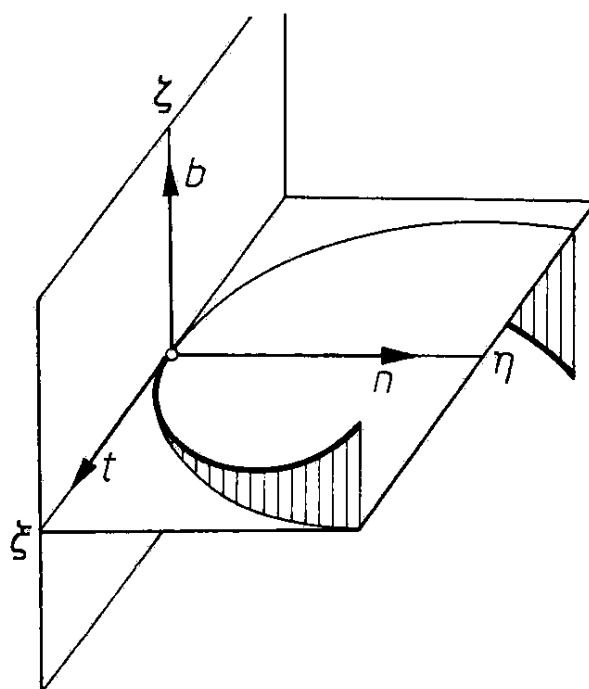
$$\xi_3 = \frac{1}{3!} k\kappa (\Delta s)^3 + \frac{1}{4!} z_3 (\Delta s)^4. \quad (25.5)$$

Vasakul on joone punkti x koordinaadid punktis x_0 võetud kanoonilise teljestiku suhtes, mistõttu saadud seosed on käsitletavad kui joone parameetrilised võrrandid selles teljestikus; parameetrik on Δs , kusjuures võrrandite paremates pooltes olevad funktsioonid on antud Taylori valemi abil, s.t. oma teatavate lähenditega.

Järgnevas käsitluses eeldame, et joone punkt x_0 ei ole sirgestusega tasandumispunkt, s.t. et selles punktis

$$k \neq 0, \quad \kappa \neq 0.$$

Kui nüüd punkt x liigub mööda joont punktini x_0 , s.t. kui $\Delta s \rightarrow 0$, siis määratakse punkti x koordinaatide ξ_1 , ξ_2 ja ξ_3 käitumine pealiikmete, vastavalt Δs , $\frac{1}{2} k (\Delta s)^2$ ja $\frac{1}{3!} k\kappa (\Delta s)^3$ käitumisega, sest järg-



Joonis 23

mised liikmed kui kõrgemat järku hääbuvad suurused ei saa neid oluliselt mõjustada.

Siit järeldub, et kui punkt x , liikudes mööda joont, läbib punkti x_0 , mille tulemusena Δs muudab märki, siis koordinaadid ξ_1 ja ξ_3 muudavad samuti märki, kuid ξ_2 seda ei tee. Geomeetriliselt tähendab see, et *joon läbib oma normaaltasandi ja kooldumistasandi punktis x_0 , kuid sirgestustasandist jääb ta selle punkti x_0 lähemas ümbruses ühele poole* (joon. 23), millel $\xi = \xi_1$, $\eta = \xi_2$ ja $\zeta = \xi_3$.

Parema ettekujutuse saamiseks asendame joone niisuguse teda punkti x_0 ümbruses lähendava joonega, mille võrrandid on

$$\xi_1 = \Delta s, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2, \quad \xi_3 = \frac{1}{3!} k\kappa (\Delta s)^3;$$

siin on võrrandite (25.3) — (25.5) paremates pooltes piiratud ainult pealiikmetega.

Võttes kolmanda võrrandi asemele $\xi_3 = 0$, saame lähendava joone projektsiooni kooldumistasandil:

$$\xi_1 = \Delta s, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2, \quad \xi_3 = 0,$$

mis, nagu näha, kujutab endast parabooli

$$\xi_2 = \frac{1}{2} k \xi_1^2, \quad \xi_3 = 0$$

(joon. 24). Siit saab selgeks *kooldumispooltasandi geomeetriline tähendus: see on pooltasand, millele projitseerub joon oma punkti x_0 ümbruses, kui projitseerida paralleelselt binormaaliga.*

Võttes teise võrrandi asemel $\xi_2 = 0$, saame lähendava joone projektsiooni sirgestustasandil:

$$\xi_1 = \Delta s, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \frac{1}{3!} k\kappa (\Delta s)^3,$$

milles tunneme ära kuupparabooli

$$\xi_3 = \frac{1}{3!} k\kappa \xi_1^3, \quad \xi_2 = 0.$$

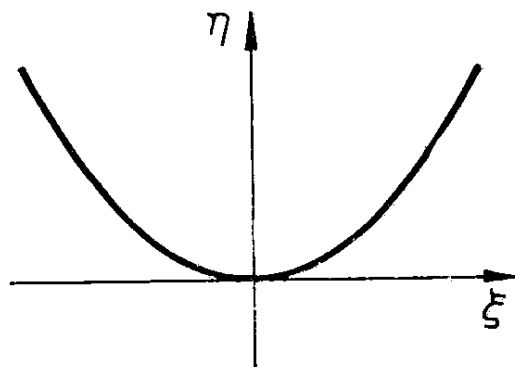
Et $k > 0$, saame siit väände κ märgile järgmise geomeetrilise tähenduse: *kui $\kappa > 0$, siis kõnesolev projektsioon on tõusev kuupparabool, kui aga $\kappa < 0$, siis langev kuupparabool* (joon. 25).

Lähendava joone projektsiooni normaaltasandil määravad võrrandid

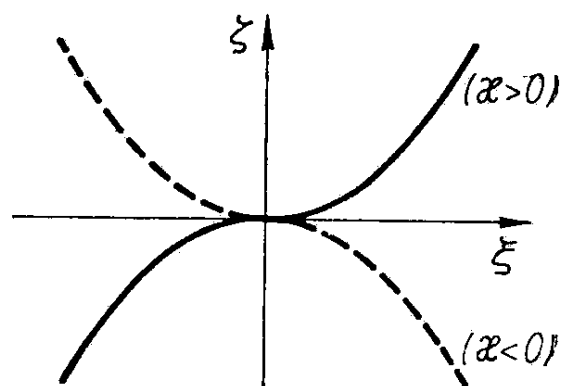
$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{2} k (\Delta s)^2, \quad \xi_3 = \frac{1}{3!} k\kappa (\Delta s)^3,$$

millest

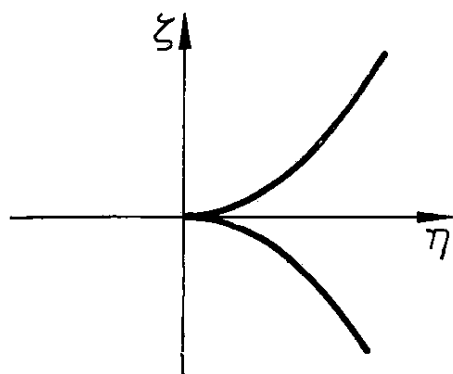
$$\xi_3 = a \xi_2^{3/2}.$$



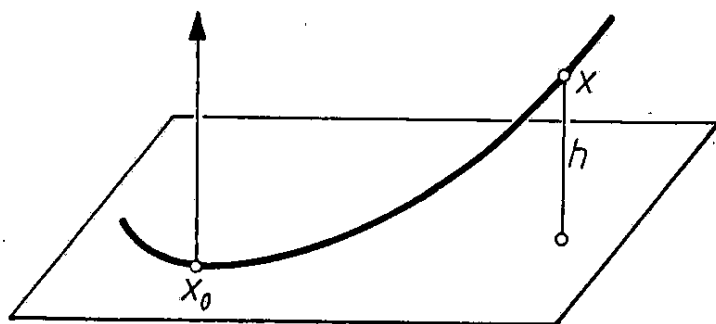
Joonis 24



Joonis 25



Joonis 26



Joonis 27

Sellise võrrandiga joont nimetatakse poolkuupparabooliks. Siin $\xi_2 \geq 0$, $\left. \frac{d\xi_3}{d\xi_2} \right|_{\xi_2=0} = \frac{3}{2} a \xi_2^{1/2} \Big|_{\xi_2=0} = 0$, s.t. joone puutujaks alguspunktis on ξ_2 -telg, mille suhtes joon on sümmeetriline (joon. 26).

Juba eeltoodust selgub, et joon on eri asendis kanoonilise teljestiku iga kolme tasandi suhtes. Veelgi täpsemalt saab seda asendit selgitada puutumisjärgu mõiste abil.

Vaatleme joone punkti x_0 läbivat tasandit ja tähistame joonel liikuva punkti x kauguse sellest tasandist tähega h (joon. 27). Võrdleme kaugust h punktide x_0 ja x vahelise kaare pikkusega Δs . Kui punkt x liigub mööda joont punktini x_0 , siis $\Delta s \rightarrow 0$ ja $h \rightarrow 0$.

Öeldakse, et joonel on vaadeldava tasandiga punktis x_0 p -järku puutumine, kui h on Δs suhtes $(p+1)$ -järku hääbuv suurus, s.t. kui

$$\frac{h}{(\Delta s)^p} \rightarrow 0, \quad \frac{h}{(\Delta s)^{p+1}} \rightarrow a \neq 0.$$

Rakendame seda definitsiooni juhul, kui tasandiks on joone punktis x_0 võetud kanoonilise teljestiku mingi tasand. Sirgestustasandi korral $h = |\xi_2|$ ning et valemi (25.4) põhjal

$$\frac{\xi_2}{\Delta s} \rightarrow 0, \quad \frac{\xi_2}{(\Delta s)^2} \rightarrow \frac{1}{2} k \neq 0,$$

siis *joonel on oma sirgestustasandiga esimest järku puutumine*. Kooldumistasandi korral $h=|\xi_3|$, kusjuures

$$\frac{\xi_3}{\Delta s} \rightarrow 0, \quad \frac{\xi_3}{(\Delta s)^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\xi_3}{(\Delta s)^3} \rightarrow \frac{1}{3!} k_{xx} \neq 0;$$

seega *kooldumistasandiga on joonel teist järku puutumine*. Normaaltasandiga ei ole joonel mingit puutumist (definiitsiooni põhjal on siin «0-ndat järku puutumine», kuid see muidugi tegelik puutumine pole).

Selgitame täiendavalt, millal üldse on joonel mingi tasandiga esimest või teist järku puutumine. Kui tasandi normaalühikvektor tähistada $\vec{m}$, siis $h = \vec{m} x_0 x$ ning seega (25.2) järgi

$$h = (mt) \Delta s + \frac{1}{2} k(mn) (\Delta s)^2 + \dots$$

kus ... tähendab Δs suhtes kõrgema astme liikmeid. Siit

$$\frac{h}{\Delta s} \rightarrow mt;$$

järelikult joonel on tasandiga vähemalt esimest järku puutumine parajasti siis, kui $mt=0$ ehk $\vec{m} \perp \vec{t}$, see aga tähendab, et tasand läheb läbi joone puutuja. Seejuures

$$\frac{h}{\Delta s} \rightarrow 0, \quad \frac{h}{(\Delta s)^2} \rightarrow \frac{1}{2} k(mn),$$

seega joonel on tasandiga vähemalt teist järku puutumine parajasti siis, kui $mn=0$ ehk $\vec{m} \perp \vec{n}$, mis aga tähendab, et tasand ühtib kooldumistasandiga. Nii-
siis, *kooldumistasand on ainus tasand, millega joonel on vähemalt teist järku* (kui $k_{xx} \neq 0$, siis täpselt teist järku) *puutumine*. Näitlikult öeldes on kooldumistasand see tasand, millele joon antud punkti x_0 ümbruses kõige tihedamalt liibub — ta on x_0 väikeses ümbruses «peaaegu» sellel tasandil, jäädes puutujast arvates kooldumispooltasandisse.

26. Joone loomulikud võrrandid. Joon ruumis E_3 on eespool defineeritud punktihulgana

$$\mathcal{J} = \{x : \overrightarrow{ox} = x(t), t \in T \subset \mathbf{R}\},$$

kus $x(t)$ omab k järku pidevad tuletised ja $x'(t) \neq 0$ piirkonnas T . Sellisel joone esitamisel on mitmete heade omaduste kõrval ka olulisi puudusi. Praktikas tuleb $x(t)$ anda enamasti koordinaatide kaudu, selleks on vaja aga peale alguspunkti o fikseerida ka vektorite baas ehk teatav teljestik. Seda saab mitmeti teha, mistõttu koordinaatide $x_i(t)$ abil antud kahe joone korral on raske otsustada, kas meil on tegemist ühe ja sellesama või kahe erineva joonega ning kas erinevus on ainult asendis või ka kujus. Lisaks tuleb märkida, et ka parameetrit t võib antud joone $\mathcal{J}$ puhul valida mitmeti, mis teeb otsustamise veelgi raskemaks.

Nii näiteks kaks joont, mille puhul $\overrightarrow{ox} = x$ avaldub kord kujul

$$x = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at), \quad t \in \mathbb{R},$$

kord aga sellest üsnagi erinevalt

$$x = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} t, a \ln t, \frac{a}{t\sqrt{2}} \right), \quad t \in [0, \infty),$$

on tegelikult üks ja seesama joon, ainult kahes eri asendis ja erinevalt parametriseeritud. Tõepoolest, tähistades $e^t = \tau$, saame:

$$\operatorname{ch} t = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) = \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{1}{\tau} \right), \quad \operatorname{sh} t = \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{1}{\tau} \right)$$

ning tehes nüüd esimese joone puhul koordinaaditeisenduse

$$x_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + x_2),$$

$$x_2^* = x_3,$$

$$x_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - x_2),$$

leiame tema jaoks, et

$$x^* = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} \tau, a \ln \tau, \frac{a}{\tau\sqrt{2}} \right), \quad \tau \in [0, \infty).$$

Seega pööratud teljestikus ja teisendatud parameetri puhul on esimesel joonel täpselt samad parameetrilised võrrandid mis teisel. Esialgsete võrrandite järgi aga on seda raske ette näha.

Pakub huvi meetod, mis lubab alati selgitada, kas kaht joont on võimalik sobiva liikumisega ühtimisse viia või mitte. Teatava idee annab valem (25.2), mille parema poole esimese rea liikmetes vektorite t , n ja b kordajad sõltuvad üksnes loomulikust parameetrist $s = s_0 + \Delta s$, joone kõveruse ja selle tuletise ning väände väärtustest.

Kui $\overrightarrow{x_0 x}$ avaldamisel Tayloriga valemi ja Bartelsi—Frenet' valemite abil minna edasi ja leida ka

$$\begin{aligned} x^{IV} &= (-k^2 t + k' n + k \kappa b)' = \\ &= -2kk't - k^2(kn) + k''n + k'(-kt + \kappa b) + \\ &+ (k'\kappa + k\kappa')b + k\kappa(-\kappa n) \end{aligned}$$

ning analoogiliselt järgmised tuletised, siis selgub, et nende avaldamiseks kanoonilise teljestiku baasil pole samuti vaja teada midagi muud peale k , κ ja nende tuletiste. See lubab arvata, et funktsioonid $k(s)$ ja $\kappa(s)$ määravad täielikult joone kuju. Et asi tõepoolest nii on, seda näitab järgmine teoreem.

Kui kahe joone punktide vahel on võimalik korraldada selline üksühene vastavus, et 1) joonte kõverused ja väänded vastavates punktides ühtivad ja 2) suvalise kahe punkti vahelise kaare pikkus ühel joonel võrdub vastavate punktide vahelise kaare pikkusega

teisel joonel, siis võivad need jooned erineda ainult oma asendi poolest ruumis.

Tõestus. Oletame, et teoreemi eeldused on täidetud. Teise eelduse põhjal võime kasutusele võtta loomulikud parameetrid selliselt, et parameetrite väärtused joonte vastavates punktides on võrdsed. Valime väärtusele s_0 vastavad punktid ja määrame nendes joonte kanoonilised teljestikud. Art-i 10 ühest tulemusest järeldub, et leidub selline ruumi isomeetria, täpsemalt liikumine, mis viib need teljestikud ühtimisse. Olgu jooned pärast sellist liikumist esitatavad kujul

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(s), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2(s).$$

Et joonega geomeetriliselt seotud suurused k , κ ja s ei muutu liikumisel, siis esimese eelduse kohaselt

$$k_1(s) = k_2(s), \quad \kappa_1(s) = \kappa_2(s). \quad (26.1)$$

Peale selle, tänu tehtud liikumisele,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(s_0) = \mathbf{x}_2(s_0), \quad \mathbf{t}_1(s_0) = \mathbf{t}_2(s_0), \quad \mathbf{n}_1(s_0) = \mathbf{n}_2(s_0), \\ \mathbf{b}_1(s_0) = \mathbf{b}_2(s_0). \end{aligned} \quad (26.2)$$

Moodustame nüüd funktsiooni

$$\delta(s) = \mathbf{t}_1(s) \mathbf{t}_2(s) + \mathbf{n}_1(s) \mathbf{n}_2(s) + \mathbf{b}_1(s) \mathbf{b}_2(s) \quad (26.3)$$

ja näitame kõigepealt, et see funktsioon on seoste (26.1) korral konstantne. Selleks arvutame tema tuletise, kasutades Bartelsi—Frenet' valemeid ja jättes lihtsuse mõttes kirjutamata argumendi s :

$$\begin{aligned} \delta' = (k_1 \mathbf{n}_1) \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_1 (k_2 \mathbf{n}_2) + (-k_1 \mathbf{t}_1 + \kappa_1 \mathbf{b}_1) \mathbf{n}_2 + \\ + \mathbf{n}_1 (-k_2 \mathbf{t}_2 + \kappa_2 \mathbf{b}_2) + (-\kappa_1 \mathbf{n}_1) \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1 (-\kappa_2 \mathbf{n}_2). \end{aligned}$$

Seoste (26.1) abil on kerge veenduda, et paremal pool kõik liikmed vastastikku koonduvad ja seetõttu tõepoolest

$$\delta(s) = c = \text{const.}$$

Konstandi c määramiseks märgime, et $\delta(s_0)$ osutub (26.2) ja (26.3) järgi kolme ühikvektori skalaarruudu summaks, tähendab, $c=3$.

Tähistame vektorite $\mathbf{t}_1(s)$ ja $\mathbf{t}_2(s)$, $\mathbf{n}_1(s)$ ja $\mathbf{n}_2(s)$, $\mathbf{b}_1(s)$ ja $\mathbf{b}_2(s)$ vahelised nurgad vastavalt $\alpha(s)$, $\beta(s)$ ja $\gamma(s)$. Siis seose (26.3) parem pool osutub skalaarkorrutise definitsiooni kohaselt nende nurkade koosinuste summaks ning kokkuvõttes

$$\cos \alpha(s) + \cos \beta(s) + \cos \gamma(s) = 3.$$

Saadud samasus on aga võrratuse $\cos x \leq 1$ põhjal võimalik ainult siis, kui

$$\cos \alpha(s) = \cos \beta(s) = \cos \gamma(s) = 1,$$

s. t.

$$\alpha(s) = \beta(s) = \gamma(s) = 0.$$

Siit järeldub, et

$$\mathbf{t}_1(s) \equiv \mathbf{t}_2(s), \quad \mathbf{n}_1(s) \equiv \mathbf{n}_2(s), \quad \mathbf{b}_1(s) \equiv \mathbf{b}_2(s).$$

Esimene samasus tähendab, et

$$\mathbf{x}'_1(s) \equiv \mathbf{x}'_2(s),$$

mistõttu $\mathbf{x}_1(s) = \mathbf{x}_2(s) + \mathbf{c}_1$. Et aga $\mathbf{x}_1(s_0) = \mathbf{x}_2(s_0)$, siis $\mathbf{c}_1 = 0$ ja

$$\mathbf{x}_1(s) = \mathbf{x}_2(s),$$

s.t. jooned on pärast liikumist läinud ühtimisse. Teoreem on tõestatud.

Teoreemist järeldub, et funktsioonid

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s) \quad (26.4)$$

määravad täielikult joone kuju, jättes lahtiseks ainult tema asendi ruumis. See asjaolu annab meile õiguse nimetada seoseid (26.4) selle joone eralisteks võrranditeks. Nendes sisalduvad suurused k , κ ja s on joonega puhtgeomeetriliselt seotud ega sõltu mingitest meelevaldsetest teguritest.

Võrrandeid (26.4) nimetatakse *joone loomulikeks võrranditeks*. Teoreemi järeldus ütleb, et *ühiste loomulike võrranditega jooned võivad erineda ainult asendi poolest ruumis ning on seega kongruentsed*.

Tähtis on ka vastupidine väide: *ühtivatel või üksnes asendi poolest erinevatel joontel on samad loomulikud võrrandid*. See järeldub vahetult asjaolust, et loomulikud võrrandid sisaldavad ainult joonega puhtgeomeetriliselt seotud suurusi: kõverust (art. 23), väänet (art. 24) ja loomulikku parameetrit (art. 20).

Eespool (art-s 24) selgus, et kruvijoone $\mathbf{x} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ kõverus ja vääne on konstandid:

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Nüüd on kerge näidata, et iga konstantse kõveruse ja väändega joon osutub kruvijooneks. Tõepoolest, oletame, et joone loomulikud võrrandid on

$$k = k_0, \quad \kappa = \kappa_0.$$

Kerge on veenduda, et kruvijoonele, mille puhul

$$a = \frac{k_0}{k_0^2 + \kappa_0^2}, \quad b = \frac{\kappa_0}{k_0^2 + \kappa_0^2},$$

on täpselt samad loomulikud võrrandid. Sellest näemegi, et uuritav joon võib erineda kruvijoonest ainult oma asendi poolest ruumis ning on seega samuti kruvijoone.

27. Üleminek loomulikelt võrranditelt parameetrilistele. Joone $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ loomulike võrrandite leidmine ei valmista mingeid põhimõttelisi raskusi. Meil on eespool antud valemid loomuliku parameetri ning kõveruse ja väände arvutamiseks parameetri t funktsioonidena. Loomulike võrranditeni jõudmiseks tuleb seostest $s = s(t)$, $k = k(t)$, $\kappa = \kappa(t)$ parameetri t elimineerimise teel jõuda seosteni $k = k(s)$, $\kappa = \kappa(s)$. Raskused võivad siin olla vaid tehnilist laadi.

Selgitame järgnevalt, kuidas joone loomulike võrrandite (26.4) järgi leida tema parameetrilisi võrrandeid. Seejuures saame ühtlasi vastuse küsimusele, kas võrrandid (26.4) osutuvad igasuguste paremate poolte korral teatava joone loomulikeks võrranditeks.

Nende küsimuste lahendamiseks tuleb pöörduda Bartelsi—Frenet^{*} valemite poole:

$$\begin{aligned}t' &= k(s)n, \\ n' &= -k(s)t + \kappa(s)b, \\ b' &= -\kappa(s)n.\end{aligned}\tag{27.1}$$

Neid valemuid võib vaadelda lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemina vektorite $t(s)$, $n(s)$ ja $b(s)$ määramiseks antud funktsioonide $k(s)$ ja $\kappa(s)$ korral. Siinjuures võib selle süsteemi integreerimise taandada harilike skalaarsete võrrandite süsteemi integreerimisele, kui kõigi võrrandite pooli korrutada skalaarselt mingi konstantse ühikvektoriga e . Sel korral saame skalaarkorrutiste $t(s)e = \tau(s)$, $n(s)e = v(s)$, $b(s)e = \beta(s)$ jaoks süsteemi

$$\begin{aligned}\frac{d\tau}{ds} &= k(s)v, \\ \frac{dv}{ds} &= -k(s)\tau + \kappa(s)\beta, \\ \frac{d\beta}{ds} &= -\kappa(s)v.\end{aligned}\tag{27.2}$$

Diferentsiaalvõrrandite teooriast on teada, et igal seda laadi süsteemil — lineaarsel homogeensel diferentsiaalvõrrandite süsteemil — on vahemikus (a, b) pidevate kordajate korral etteantud algtingimustel $\tau(s_0) = \tau_0$, $v(s_0) = v_0$, $\beta(s_0) = \beta_0$, kus $s_0 \in (a, b)$, üks ja ainult üks lahendite süsteem $\{\tau(s), v(s), \beta(s)\}$, mis on määratud kogu vahemikus (a, b) (vt. [8], lk. 207). Kui me ühikvektoriks e võtame ühe mingi koordinaadistiku kolmest baasivektorist e_1, e_2, e_3 , siis skalaarkorrutised $\tau(s), v(s), \beta(s)$ osutuvad teatavasti vektorite $t(s), n(s), b(s)$ vastavateks koordinaatideks. Sel viisil võime leida nende vektorite kõik koordinaadid ja seega ka need vektorid ise.

Siinjuures tuleb silmas pidada järgmist: algtingimused on vaja valida selliselt, et vektorid $t(s_0) = t_0$, $n(s_0) = n_0$, $b(s_0) = b_0$ oleksid vastastikku ristuvad ühikvektorid. Kerge on veenduda (jätame selle lugeja teha), et sel korral vektorid $t(s), n(s), b(s)$, mis rahuldavad süsteemi (27.1) võrrandeid, on s iga väärtuse korral samuti vastastikku ristuvad, sest suurused $t^2(s), n^2(s), b^2(s), t(s)n(s)$ jne. osutuvad süsteemi (27.1) võrrandite põhjal konstantideks. Joone $x = x(s)$ leidmiseks tuleb analoogilisel viisil käsitleda võrrandit

$$\frac{dx}{ds} = t(s),$$

millest etteantud algtingimuse $x(s_0) = x_0$ korral saame ühe ja ainult ühe vektorfunktsiooni $x = x(s)$. Vastava joone loomulikeks võrranditeks osutuvad parajasti etteantud võrrandid $k = k(s)$, $\kappa = \kappa(s)$, nagu kerge näidata (ka selle jätame lugeja hooleks).

Põhilist osa esitatud mõttekäigus mängib süsteem (27.2). Tema lahenduvuseks, aga koos sellega ka joone olemasoluks, on küllalt eeldada ainult funktsioonide $k(s)$ ja $\kappa(s)$ pidevust. Ainuke lisatingimus on funktsiooni $k(s)$ mittenegatiivsuse nõue, mis tuleneb sellest, et joone kõverus on definitsiooni kohaselt igas punktis mittenegatiivne. Muus osas võivad funktsioonid olla valitud vabalt ja teineteisest täiesti sõltumatult.

Märgime, et süsteemi (27.2) lahendi ainsusest etteantud algtingimustel järeldeb ka eelmise artikli tulemus.

Kokkuvõttes võime öelda järgmist.

Olgu pidevad funktsioonid $k(s) \geq 0$ ja $\kappa(s)$ missugused tahes, ikka leidub joon loomulike võrranditega

$$k = k(s), \quad \kappa = \kappa(s),$$

kusjuures iga kaks sellist joont võivad erineda ainult asendi poolest ruumis.

Joone parameetriliste võrrandite leidmine loomulike võrrandite järgi on eriti lihtne tasandilise joone korral, mil $\kappa \equiv 0$. Kui joone tasand valida x_1x_2 -tasandiks ja nurk x_1 -telje ja joone puutuja sihivекtori t vahel parameetri väärtusele s vastavas punktis tähistada $\psi = \psi(s)$, siis

$$t = e_1 \cos \psi + e_2 \sin \psi.$$

Arvutades tuletised loomuliku parameetri s järgi, leiame

$$kn = (-e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi) \cdot \psi'.$$

Et ühikvektorid n ja $-e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi$ on mõlemad risti vektoriga t , siis $n \parallel -e_1 \sin \psi + e_2 \cos \psi$ ning kordajad k ja ψ' võivad seega erineda ülimalt märgi poolest. Tasandilise joone korral loobutakse tavaliselt kõveruse positiivsuse nõudest ja loetakse, et

$$k = \psi' = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}.$$

Kui nüüd joon on antud loomulike võrranditega

$$k = k(s), \quad \kappa = 0,$$

siis kõigepealt leiame, et

$$\psi(s) = \int_{s_0}^s k(s) ds,$$

ning seejärel määrame joone jaoks $x = x(s) = (x_1(s), x_2(s), 0)$ võrrandist

$$x = e_1 \cos \psi(s) + e_2 \sin \psi(s);$$

mis on samaväärne võrranditega

$$x'_1 = \cos \psi(s), \quad x'_2 = \sin \psi(s).$$

Näitena määrame joone loomulike võrrandite

$$k = \frac{a}{a^2 + s^2}, \quad \kappa = 0$$

järgi. Et tegemist on tasandilise joonega, siis leiame kõigepealt

$$\psi(s) = \int_0^s \frac{a \, ds}{a^2 + s^2} = \arctan \frac{s}{a},$$

ning seejärel seostest

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= \cos \psi(s) = \cos \left[\arctan \frac{s}{a} \right] = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s^2}}, \\ \frac{dx_2}{ds} &= \sin \psi(s) = \sin \left[\arctan \frac{s}{a} \right] = \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \end{aligned}$$

saame

$$x_1 = \int_0^s \frac{a \, ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = a \operatorname{arsh} \frac{s}{a}, \quad x_2 = \int_0^s \frac{s \, ds}{\sqrt{a^2 + s^2}} = \sqrt{a^2 + s^2} - a.$$

Siit

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x_1}{a} \quad \text{ning} \quad x_2 = a \operatorname{ch} \frac{x_1}{a} - a.$$

Saadud joont nimetatakse *aheljooneks*. Nimetus on tulnud sellest, et kahes punktis ülesriputatud venimatu painduv homogeenne ahel võtab raskusjõu mõjul just niisuguse kuju (vt. [4], lk. 95–97).

Harjutusülesanded

37. *Archimedese spiraaliks koonusel* nimetatakse joont ruumis E_3 , mille kirjeldab punkt x järgmises liikumises: tasandi aob ühtlasel pöörlemisel sirge oa ümber ning punkti x samaaegsel ühtlasel liikumisel mööda sirget ob . Koostada selle joone parameetrilised võrrandid ja näidata, et joone kooldumistasand koonuse tipus on koonusele puutujatasandiks.

38. Teha kindlaks, et kruvijoone peanormaal lõikab kruvijoone telge.

39. Kontrollida, et Bartelsi–Frenet' valemid saab nn. *Darboux'*¹ vektori $\omega = \kappa t + kb$ abil esitada kujul

$$t' = \omega \times t, \quad n' = \omega \times n, \quad b' = \omega \times b.$$

40. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama joone liikuva kanoonilise teljestiku suhtes oma asendit muutva punkti koordinaadid $x_1(s)$, $x_2(s)$, $x_3(s)$ selleks, et see punkt oleks ruumis E_3 paigal?

41. Arvutada harjutusülesandes 37 antud joone kõverus koonuse tipus.

42. Määrata autotee optimaalne kaldenurk α vertikaalsihi suhtes, kui tee keskjoon on püstteljega kruvijoone kaar ning keskmiseks sõidukiiruseks on ette nähtud v .

43. Rahuldagu joone punktide koordinaadid võrrandeid $x_1^2 = 3x_2$, $2x_1x_2 = 9x_3$.

Näidata, et selle joone kõveruse ja väände suhe on konstantne.

44. Näidata, et logaritmiline spiraal koonusel on järgmise omadusega: tema kõveruse pöördväärtus (nn. kõverusraadius) on loomuliku parameetri lineaarne funktsioon.

¹ Jean Gaston Darboux [*darbuu*] (1842–1917), prantsuse matemaatik, Pariisi Teaduste Akadeemia liige.

45. Leida joonte $x = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$ ja $x = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} t, a \ln t, \frac{a}{t\sqrt{2}} \right)$ loomulikud võrrandid ja veenduda sel teel, et need jooned erinevad ainult asendi poolest ruumis.

46. Kurvi minek raudteel projekteeritakse mööda sellist tasandilist joont, mille kõverus kasvab võrdeliselt läbitud kaare pikkusega, s.t. mille loomulikud võrrandid on $k=as$, $\kappa=0$ (sel korral ei teki järsku külgtõuget). Leida selle joone parameetrilised võrrandid.

§ 7. JOON n -MÕÕTMELISES RUUMIS ($n > 3$)

Joone mõiste on art-s 14 defineeritud sedavõrd üldiselt, et ta on rakendatav ka n -mõõtmelise eukleidilise ruumi või pseudoeukleidilise ruumi korral ($n > 3$).

Kaare pikkuse ja loomuliku parameetri käsitus on esitatud samuti üldkujul eukleidilises ruumis E_n antud joone jaoks (vt. § 5). Osutub, et ka § 6 materjali saab vaadelda üldisemalt seisukohalt. Käsitlemegi nüüd liikuva kanoonilise teljestiku, Bartelsi—Frenet' valemite, kõveruse ja väände üldistusi ruumis E_n antud joone puhul. Erilist huvi oma rakenduste poolest erirelatiivsusteoorias pakub joon Minkowski ruumis 1E_4 . Kaare pikkuse analoog on siin seotud liikuva punkti nn. omaajaga. Omalaadse tõlgenduse saab anda selle joone kõverusele.

28. Joon eukleidilises ruumis E_n . Olgu ruumis E_n antud joon

$$\vec{\gamma} = \{x, \overrightarrow{ox} = x(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}.$$

Võtame joone punkti kohavektori $x(t)$ tuletised

$$x'(t), x''(t), \dots, x^{(n-1)}(t), \quad (28.1)$$

lisades neile pideva n -järku tuletise $x^{(n)}(t)$. Joone definitsiooni tingimuse 2° põhjal $x'(t) \neq 0$ (art. 14), kuid järgnevas nõuame veelgi rohkem, nimelt et vektorid (28.1) on t iga väärtuse korral lineaarselt sõltumatud (sel korral kõneldakse *üldist tüüpi joonest*). Juhul $n=3$ tähendab see nõue sirgestuspunktide vaatluse alt väljajätmist.

Joonel võib üle minna loomulikule parameetrile s (art. 20), mille puhul tuletised (28.1) asenduvad tuletistega

$$x'(s), x''(s), \dots, x^{[n-1]}(s) \quad (28.2)$$

loomuliku parameetri s järgi, kusjuures, nagu teada,

$$|x'| = 1, \quad x'' \perp x'.$$

Tuletised (28.2) ja (28.1) on seotud järgmiste valemitega:

$$x' = x' \cdot t',$$

$$x'' = x' \cdot t'' + x'' \cdot t'^2,$$

$$x''' = x' \cdot t''' + 3x'' \cdot t' t'' + x''' \cdot t'^3,$$

$$x^{[n-1]} = x' \cdot t^{[n-1]} + x'' p_{n-1,2} + \dots + x^{(n-2)} p_{n-1,n-2} + x^{(n-1)} t'^{n-1},$$

kus $p_{n-1,i}; i=2, \dots, n-2$ on teatav konstantsete kordajatega polünoom tuletiste

$$t^{[n-1]}, t^{[n-2]}, \dots, t'', t'$$

väärtustest. Esimesed kolm valemit ühtivad art-s 24 kasutatud valemitega, üldvalemi tõestust on võimalik kontrollida matemaatilise induktsiooni meetodiga; et polünoomide $p_{h,i}$ tegelik kuju meid edaspidi ei huvita, siis jätame selle kontrolli siin tegemata.

Vektorite (28.1) lineaarsest sõltumatuses ja sellest, et maatriksil, mis määrab ülemineku vektoreile (28.2), on ühel pool peadiagonaali üksnes nullid ning seetõttu tema determinant kui peadiagonaali elementide korrutis $t' \cdot t'^2 \cdot \dots \cdot t'^{(n-1)} = t'^{n(n-1)/2} = |\mathbf{x}'|^{-n(n-1)/2}$ on nullist erinev, järeldub (vt. [1], lk. 348), et ka vektorid (28.2) on lineaarselt sõltumatud.

Järelikult vektorid (28.2) moodustavad baasi. Rakendame sellele baasile Grami—Schmidt'i ortogonaliseerimisprotsessi (art. 2), võttes

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}',$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}'' - \tau_{2,1} \mathbf{u}_1,$$

$$\mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{x}^{[n-1]} - \tau_{n-1,1} \mathbf{u}_1 - \tau_{n-1,2} \mathbf{u}_2 - \dots - \tau_{n-1,n-2} \mathbf{u}_{n-2}$$

ja leides $\tau_{i,j}$, nii et $\mathbf{u}_i$ oleks ortogonaalne kõigi eelmiste vektoritega $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}$, s. t.

$$\tau_{i,j} = \frac{\mathbf{x}^{[i]} \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^2}; \quad i=2, \dots, n-1; j=1, \dots, i$$

(vrd. (2.12)). Saadud vektorid $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ on jälle lineaarselt sõltumatud ja seetõttu pole ükski neist võrdne nulliga. Järelikult võib kõik nad normeerida, jagades igaühe oma pikkusega, ning sel teel saada paarikaupa ortogonaalsed ühikvektorid

$$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{n-1}. \quad (28.3)$$

Seejuures

$$\mathbf{t}_i = \sigma_{i,i} \mathbf{x}^{[i]} + \sigma_{i,i-1} \mathbf{x}^{[i-1]} + \dots + \sigma_{i,1} \mathbf{x}', \quad (28.4)$$

kus $\sigma_{i,i} = |\mathbf{u}_i|^{-1} > 0$ ja $\sigma_{i,j}$ on teatavad s funktsioonid. Jääb veel lisada vektoreile (28.3) nende kõigiga ortogonaalne ühikvektor $\mathbf{t}_n$ selliselt, et vektorite

$$\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{n-1}, \mathbf{t}_n \quad (28.5)$$

koordinaatidest moodustatud ortogonaalmaatriksi determinant oleks 1 (sellega on $\mathbf{t}_n$ üheselt määratud).

Saadud ortonormeeritud baasi nimetatakse vaadeldava joone kanooniliseks baasiks loomuliku parameetri väärtusele s vastavas punktis x . Punkti x vektori $\mathbf{t}' = \mathbf{x}'$ sihis läbiv sirge on juba art-s 16 saanud nimeks *puutuja*; seda punkti vektorite $\mathbf{t}_1$ ja $\mathbf{t}_2$ rihis (ehk $\mathbf{x}'$ ja $\mathbf{x}''$ rihis) läbivat 2-tasandit nimetatakse 1-st järku kooldumistasandiks jne.; üldiselt joone punkti x vektorite $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_m$ m -rihis (ehk $\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots, \mathbf{x}^{[m]}$ m -rihis) läbivat m -tasandit nimetatakse $(m-1)$ -st järku kooldumistasandiks; $m=2, \dots, n-1$. Punkti x

vektori t_m sihis läbivat sirget nimetatakse joone $(m-1)$ -st järku normaaliks; $m=2, \dots, n$. Juhul $n=3$ on 1-st järku normaaliks peanormaal, 2-st järku normaaliks binormaal.

Kanoonilise baasi vektorid (28.3) on loomuliku parameetri funktsioonid. Nende tuletised on avaldatavad baasi vektorite endi kaudu:

$$t'_i = a_{i,1}t_1 + \dots + a_{i,n}t_n; \quad i=1, \dots, n,$$

kusjuures kordajad peavad rahuldama teatavaid kitsendusi. Kõigepealt järeldub valemist (28.4), et t'_i , kus $i=1, \dots, n-1$, avaldub $x^{[i+1]}, \dots, x'$ kaudu, need viimased aga omakorda $t_{i+1}, \dots, t_1$ kaudu, seega

$$a_{i,i+2} = \dots = a_{i,n} = 0, \quad (28.5)$$

kui $i < n-1$. Teiselt poolt $t_i t_j = \delta_{ij}$, mistõttu

$$t'_i t_j + t_i t'_j = 0$$

ehk

$$a_{i,j} + a_{j,i} = 0. \quad (28.6)$$

Erijuhul $i=j$ saame siit $2a_{i,i} = 0$ ehk $a_{i,i} = 0$, võrduste (28.5) ja (28.6) põhjal aga

$$a_{i+2,i} = \dots = a_{n-1,i} = 0,$$

kui $i < n-1$. Nullist erinevad on seega vaid kordajad

$$a_{i,i+1} = -a_{i+1,i}.$$

Tähistades

$$a_{1,2} = k_1, \quad a_{2,3} = k_2, \quad \dots, \quad a_{n-1,n} = k_{n-1},$$

saame eelnenud arutluse kokkuvõtteks valemid

$$t'_1 = k_1 t_2, \quad (28.7)$$

$$t'_2 = -k_1 t_1 + k_2 t_3, \quad (28.8)$$

$$t'_{n-1} = -k_{n-2} t_{n-2} + k_{n-1} t_n, \quad (28.9)$$

$$t'_n = -k_{n-1} t_{n-1}, \quad (28.10)$$

mida nimetatakse vaadeldava joone $\gamma \subset E_n$ Bartelsi—Frenet' valemiks. Kordajaid

$$k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, \quad (28.11)$$

mis osutuvad tegelikult s funktsioonideks, nimetatakse selle joone kõverusteks, seejuures kordajat k_i i -ndat järku kõveruseks.

Valemi (28.4) põhjal

$$t'_i = \sigma_{i,i} x^{[i+1]} + \varphi_{i,i} x^{[i]} + \varphi_{i,i-1} x^{[i-1]} + \dots + \varphi_{i,1} x'.$$

Tehes siia asendused seosest

$$x^{[i+1]} = \frac{1}{\sigma_{i+1,i+1}} t_{i+1} + \psi_{i+1,i} t_i + \dots + \psi_{i+1,1} t_1,$$

mis järelduvad järk-järgult valemist (28.4), saame Bartelsi—Frenet' valemid. Sellest nähtub, et

$$k_i = \frac{\sigma_{i,i}}{\sigma_{i+1,i+1}} = \frac{|u_{i+1}|}{|u_i|} > 0; \quad i=1, \dots, n-2,$$

s. t. esimesed $n-2$ kõverust $k_1, \dots, k_{n-2}$ on üldist tüüpi joone korral alati positiivsed. Viimane kõverus k_{n-1} (ruumi E_3 puhul on selleks vääne $k_2=\kappa$) võib olla nii positiivne, null kui ka negatiivne.

Analoogiliselt art-i 27 tulemustele saab lineaarse homogeenise diferentsiaalvõrrandite süsteemi lahendi olemasolu ja ühesuse teoreemist ([8], lk. 207) järeldada järgmise lause.

Olgu mingis vahemikus (a, b) antud $n-1$ diferentseeruvat funktsiooni

$$k_1(s), k_2(s), \dots, k_{n-1}(s),$$

mis on positiivsed, välja arvatud võib-olla viimane. Sel juhul leidub iga ortonormeeritud algveperi $\{o, e_1, \dots, e_n\}$ korral parajasti

üks joon $\vec{\gamma} = \{x : ox = x(s), s \in (a, b)\}$, mille kõverusteks (28.11) on antud funktsioonid, nii et

$$x(0) = 0, \quad t_1(0) = e_1, \dots, t_n(0) = e_n.$$

Lause tõestamisel tuleb realiseerida seesama idee, mida on kasutatud eelmises art-s 27. Tõestuse üksikasjad jätame lugeja hooleks.

29. Punkti kinemaatika, maailmajoon ja omaaeg. Järgnevalt läheme üle pseudoeukleidilises ruumis 1E_n antud joone $\vec{\gamma} = \{x : x = x(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$ käsitlemisele. Kanname sellele juhule üle kaare pikkuse mõiste, defineerides kaare $\vec{\gamma}_{[a,b]}$ pikkuse valemiga

$$s_{[a,b]} = \int_a^b |\dot{x}'(t)| dt. \quad (29.1)$$

See valem ühtib vormilt valemiga (19.1) ruumis E_n antud joone kaare pikkuse arvutamiseks, kuid ruumi 1E_n korral võib $|\dot{x}'(t)|$ olla ka imaginaarne või null. Erilist huvi pakuvad jooned, mille puhul $|\dot{x}'(t)|$ on igas punktis imaginaarne.

Minkowski ruumi 1E_4 korral jõuame niisuguste joonteni, kui käsitleme punkti liikumist ruumis E_3 aegruumi seisukohalt. Vastaku igale ajahetkele t liikuva punkti teatav asend X koordinaatidega (x_1, x_2, x_3) . Sel juhul osutub iga koordinaat x_i aja t funktsiooniks

$$x_i = f_i(t); \quad i=1, 2, 3. \quad (29.2)$$

Seda asjaolu võib väljendada ka punkti X kohavektori $\vec{oX} = x$ abil:

$$x = f(t).$$

Edaspidi vaatleme üksnes punkti sellist liikumist, mille puhul liikuva punkti asendite hulk

$$\vec{\gamma} = \{X \in E_3 : \vec{oX} = x = f(t), t \in T \subset \mathbb{R}\}$$

osutub jooneks art-s 14 antud definitsiooni mõttes, s.t. on olemas tuletis $\mathbf{x}'$ (ja võib-olla ka kõrgemat järku tuletised $\mathbf{x}'' = (\mathbf{x}')'$ jne.) ning see on iga $t \in T$ korral nullist erinev¹.

Selgitame kõigepealt punkti kinemaatika mõningaid mõisteid ruumi E_3 seisukohalt (vrd. [4], lk. 106–114). Joont γ nimetatakse vaadeldava liikuva punkti *trajektoori*ks. Kui minna sellele üle loomulikule parameetrile, siis (20.4) ja (20.3) põhjal

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cdot s'.$$

Et siin $|\mathbf{x}'| = 1$, siis $|\mathbf{x}'| = |s'| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right|$ on punkti liikumise kiirus v . Seetõttu vektorit $\mathbf{x}'$ nimetatakse *kiirusvektori*ks ja tähistatakse $\mathbf{v} = \mathbf{x}'$; tema siht on trajektoori puutuja siht ning näitab seega liikumise sihti antud hetkel, tema suund näitab liikumise suunda ja pikkus on võrdne liikumise kiirusega v (vt. ka § 23 lõppu).

Aegruumis $E_3 \times \mathbb{R}$, kus punkti $X \in E_3$ kolmele koordinaadile x_1, x_2 ja x_3 lisandub neljas koordinaat $x_4 = ct$, osutuvad punkti liikumise võrrandeist (29.2) tulenevad seosed

$$x_i = f_i\left(\frac{x_4}{c}\right); \quad i = 1, 2, 3 \quad (29.3)$$

ühe joone γ ilmutamata võrrandeiks. Eirelatiivsusteoorias, kus aegruumi käsitletakse Minkowski ruumina 1E_4 (nn. Minkowski maailmana) selles toimiva isomeetriliste teisenduste Poincaré rühmaga, nimetatakse seda joont punkti *maailmajoone*ks.

Minkowski ruumi 1E_4 iga lahutus $E_3 \times \mathbb{R}$ «ruumiks» ja «ajaks» on määratav teatava ristreeperiga $\{0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \mathbf{i}_4\}$, mille alusel saab sisse tuua punkti $x \in {}^1E_4$ koordinaadid x_1, x_2, x_3, x_4 kui kordajad avaldises

$$\vec{ox} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3 + x_4 \mathbf{i}_4;$$

ruumiks E_3 on hüpertasand võrrandiga $x_4 = 0$, ajaks muutuja $t = \frac{1}{c} x_4$. Füüsikas räägitakse sel puhul elementaarsündmuste taustsüsteemist ehk täpsemalt inertsiaalsüsteemist, mis kujutab endast mingit ruumis E_3 määratud ristkoordinaadistikku koos kellaga aja mõõtmiseks ([7], lk. 48). Maailmajoont γ saab käsitleda kui 1E_4 alamhulka, mis koosneb järgmistest elementaarsündmustest (X, t) : liikuva punkti asetsemine ajahetkel t ruumipunktis X .

Üleminek ühelt ristreeperilt teisele ruumis 1E_4 tehakse teatava isomeetrilise teisendusega ehk Poincaré rühma elemendiga. Eirelatiivsusteoorias vastab sellele üleminek ühest inertsiaalsüsteemist teise: sama elementaarsündmuse vaatlemine teises taustsüsteemis koordinaatide x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 abil, kus $x'_4 = ct'$. Seejuures

¹ Art-s 15 käsitletud Peano joonte olemasolu näitab, et võib leida ka neid tingimusi mitterahuldavaid punkti liikumisi; tuntakse näiteks vedelikus või gaasis heljuvate üliväikeste aineosakeste kaootilist, nn. Browni liikumist.

$$\overrightarrow{o'x} = x'_1 i'_1 + x'_2 i'_2 + x'_3 i'_3 + x'_4 i'_4,$$

kus i'_v avalduvad i_μ kaudu valemitega (12.2) ning $\overrightarrow{ox}$ ja $\overrightarrow{o'x}$ vahel on seos $\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{oo'} + \overrightarrow{o'x}$, milles $\overrightarrow{oo'} = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3 + A_4 i_4$. Asendus-
tega saame nüüd

$$\overrightarrow{ox} = \sum_{\mu=1}^4 A_\mu i_\mu + \sum_{v=1}^4 x'_v \left(\sum_{\mu=1}^4 A_{v\mu} i_\mu \right) = \sum_{\mu=1}^4 \left(A_\mu + \sum_{v=1}^4 x'_v A_{v\mu} \right) i_\mu$$

ja võrdlus varasema valemiga annab

$$x_\mu = A_\mu + \sum_{v=1}^4 x'_v A_{v\mu}; \quad \mu = 1, \dots, 4.$$

Vaatleme teise taustsüsteemi suhtes paigalseisvat punkti P' ; selle maailmajooneks on sirge võrranditega $x'_i = p'_i = \text{const}$, $x'_4 = ct'$; $i = 1, 2, 3$. Esimeses taustsüsteemis saame

$$x_i = A_i + \sum_{j=1}^3 p'_j A_{ji} + ct' A_{4i},$$

$$ct = A_4 + \sum_{j=1}^3 p'_j A_{j4} + ct' A_{44}.$$

Siit on näha, et $t' = A_{44}^{-1} t + t_0$ ja

$$x_i = a_i + t k_i,$$

kus $k_i = c A_{44}^{-1} A_{4i}$ ei sõltu p'_i valikust. Lisades viimastele võrranditele

$$x_4 = ct,$$

saame sama maailmajoone kui teatava sirge parameetrilised võrrandid esimese ristreeperi suhtes. Teiselt poolt aga selgub, et

$$v_i = \frac{dx_i}{dt} = k_i = \text{const};$$

seega teise taustsüsteemi suhtes paigalolevad punktid liiguvad esimese taustsüsteemi suhtes niiviisi, et neil on üks ja seesama konstantne kiirusvektor. Sel puhul öeldakse, et teine taustsüsteem liigub esimese suhtes translatoorselt (pöörlemiseta), ühtlaselt ja sirgjooneliselt ehk lühemalt — inertsiaalselt ([7], lk. 48). (See annabki õiguse nimetada vaadeldavaid taustsüsteeme *inertsiaalsüsteemideks*: igaüks liigub iga teise suhtes inertsiaalselt.)

Huvitava tõlgenduse saab anda imaginaarsele kaugusele $d(x, y)$ Minkowski ruumis 1E_4 . Olgu punktidel x ja y teatava ristreeperi suhtes koordinaadid $x_i, x_4 = ct$ ja $y_i, y_4 = c\tau$; $i = 1, 2, 3$. Nõuame, et leiduks selline teine inertsiaalsüsteem, milles mingi paigalolev punkt P' (näiteks süsteemi alguspunkt O') oleks esimese süsteemi

seisukohalt ajahetkel t punktis X ja ajahetkel τ punktis Y . Teise süsteemi suhtes kujutavad x ja y paigalseisvas punktis toimuvaid sündmusi (P', t') ja (P', τ') . Inertsiaalsüsteemid on vastavuses Minkowski ruumi 1E_4 ristreeperitega, kusjuures kaugus $d(x, y)$ ei sõltu nende valikust. Kui nüüd arvutada kord

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 - (x_4 - y_4)^2} = \\ &= \sqrt{d^2(X, Y) - c^2(t - \tau)^2} = c|t - \tau| \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}, \end{aligned}$$

kus $v = \frac{d(X, Y)}{|t - \tau|}$ on P' liikumise kiirus esimese süsteemi suhtes, ja kord

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (p'_i - p'_i)^2 - (x'_4 - y'_4)^2} = ic|t' - \tau'|,$$

siis selgub, et see kaugus on puhtimaginaarne, kusjuures reaalarvuliseks kordajaks on c kordne suurus

$$|t' - \tau'| = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} |t - \tau|. \quad (29.4)$$

Järelikult $|v| \leq c$, s.t. teise inertsiaalsüsteemi liikumise kiirus esimese suhtes ei saa ületada konstanti c ; füüsikas tähendab see valguse kiirust. Suurust (29.4) nimetatakse punkti P' omaajaks. See on aeg, mida mõõdab selle punktiga kaasaliikuva inertsiaalsüsteemi kell. Teda iseloomustab (kordajaga ic) selle inertsiaalsüsteemi abil paaridele (P', t') ja (P', τ') vastavusse seatavate elementaarsündmuste x ja y kui ruumi 1E_4 punktide vaheline kaugus $d(x, y)$. Märkime, et kui $t' \neq \tau'$, siis (29.4) põhjal ka $t \neq \tau$ ja $v < c$.

Pöördume nüüd tagasi punkti X liikumise juurde ruumis E_3 , mis olgu teatava inertsiaalsüsteemi suhtes määratud võrranditega (29.2). Minkowski ruumis 1E_4 esitab seda maailmajoon $\mathcal{J}$ parameetriliste võrranditega

$$x_i = f_i(t), \quad x_4 = ct,$$

mida võib punkti $x \in \mathcal{J} \subset {}^1E_4$ kohavektori x abil esitada kujul

$$x = (z, ct),$$

kus $z = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ on punkti X kohavektor ruumis E_3 . Joone $\mathcal{J}$ puutuja siht määratakse vektoriga

$$x' = (z', c) \quad (29.5)$$

ning et siit

$$x'^2 = z'^2 - c^2 = |z'|^2 - c^2 = v^2 - c^2 < 0,$$

siis ruumis E_3 liikuva punkti maailmajoon osutub selliseks jooneks

γ Minkowski ruumis 1E_4 , mille puutuja sihivektor $\mathbf{x}'$ on imaginaarse pikkusega (ehk ajasarnane):

$$|\mathbf{x}'| = \sqrt{v^2 - c^2} = ic \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Seetõttu liikuva punkti X maailmajoont Minkowski ruumis 1E_4 nimetatakse ka *ajasarnaseks jooneks*.

Valemi (29.1) järgi

$$s_{[a,b]} = \int_a^b |\mathbf{x}'(t)| dt = ic \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

osutub puhtimaginaarseks. Reaalarvulist kordajat

$$\tau_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

nimetatakse ruumis E_3 liikuva punkti X *omaaajaks*. Erijuhul, kui $\mathbf{z}' = \mathbf{v} = \text{const}$, s.t. kui punkt liigub ruumis E_3 ühtlaselt ja sirgjooneliselt, osutub $\tau_{[a,b]}$ võrdseks eespool käsitletud omaajaga (29.4).

Kehas toimuvad protsessid kulgevad alati selle keha omaaja järgi, sõltumata keha liikumisolekust. Sellel faktil põhinevad (seni veel teoreetilised) arutlused, mille järgi ülikaugreisilt naasnud kosmonaudid leiavad, et aeg Maal on kulgenud märksa kiiremini kui kosmoselaevas ([7], lk. 96). Arutlused tuginevad asjaolule, et kui

$v \neq 0$, siis $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 1$, mistõttu $\tau_{[a,b]} < \int_a^b dt = b - a$, s.t. omaaeg

on väiksem kui n.-ö. kõrvaltvaataja inertsiaalsüsteemis kulgev aeg.

Erilist huvi pakuvad valguse kiirusega levivate signaalide maailmajooned Minkowski ruumis 1E_4 . Neid nimetatakse valgusjoonteks. Sel korral $v = c$ ja järelikult alati $\tau_{[a,b]} = 0$. Valgusjoone puutuja sihivektor $\mathbf{x}'$ on igas punktis isotroopne (s.t. pikkusega null), seega puutuja on isotroopse koonuse moodustaja, mistõttu valgusjooni nimetatakse ka *isotroopseteks joonteks*. Valgussignaali omaaeg on samaselt null, temaga seotud süsteemis on aeg tardunud.

Loomulikult on Minkowski ruumis 1E_4 olemas ka jooned, mille puutuja sihivektor on reaalse pikkusega. Neid, nn. *ruumisarnaseid jooni* saab käsitleda samuti nagu jooni eukleiidilises ruumis E_4 : määrata kaare pikkus, loomulik parameeter jms. Füüsikalistes rakendustes pole neil sellist tähtsust nagu ajasarnastel ja isotroopsetel joontel, sest reaalselt eksisteerivate materiaosakeste maailmajoonteks nad olla ei saa. Küll on nad olulised mitte-eukleiidilise geomeetria käsitlemisel aegruumi 1E_4 abil (edaspidi art-s 56).

30. Joone kõverus Minkowski ruumis. Uurime lähemalt ajasar-

nast joont $\gamma = \{x : \overset{\rightarrow}{ox} = \mathbf{x}(t), t \in T \subset \mathbf{R}\}$ Minkowski ruumis 1E_4 . Sellise joone puutuja sihivektor $\mathbf{x}'$ on imaginaarse pikkusega. Kui parameetriks joonel γ võtta reaalarvuline suurus

$$\sigma = -i \int_a^t |x'| dt = c \int_a^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (30.1)$$

(ruumis E_3 liikuva punkti omaaja $\tau_{[a,b]}$ ja c korrutis) ja $\vec{x} = ox$ tule-
tised selle järgi tähistada $x', x'', \dots$ siis selle tõttu, et $\sigma'(t) =$
 $= -i|x'|$ ja $x' = x' \cdot t'(\sigma) = x' \cdot \frac{1}{-i|x'|} = i \frac{x'}{|x'|}$, saame

$$x'^2 = -1.$$

Diferentseerides leiame, et

$$2x'x'' = 0,$$

seega $t_1 = x'$ ja $t_2 = |x''|^{-1}x''$ on ortogonaalsed; seejuures

$$t_1^2 = -1, \quad t_2^2 = 1.$$

Edasi määrame

$$u_3 = x''' - \tau_{3,1}t_1 - \tau_{3,2}t_2$$

selliselt, et $u_3t_1 = 0$, $u_3t_2 = 0$, s. t. võtame

$$\tau_{3,1} = -x'''t_1, \quad \tau_{3,2} = x'''t_2.$$

Eeldades, et x', x'', x''' on lineaarselt sõltumatud (sel juhul kõnel-
dakse üldist tüüpi joonest), saame $u_3 \neq 0$, kusjuures $u_3^2 > 0$, sest
imaginaarse pikkusega vektoriga t_1 ortogonaalsed vektorid on kõik
reaalse pikkusega (art. 8). Seetõttu

$$t_3 = |u_3|^{-1}u_3$$

on vektoritega t_1 ja t_2 ortogonaalne ühikvektor. Lisame siia veel
ühikvektori t_4 , mis on ortogonaalne vektoritega t_1, t_2 ja t_3 , valides
ta suuna nii, et saadud nelja vektori koordinaatidest moodustatud
determinant oleks positiivne.

Tulemuseks on baas $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, mida nimetatakse ajasarnase
joone $\gamma \subset {}^1E_4$ kanooniliseks baasiks parameetri väärtusele σ vasta-
vas punktis. Samuti nagu art-s 28 defineeritakse joone puutuja
ning 1-st ja 2-st järku kooldumistasandi ja 1-st, 2-st ja 3-ndat järku
normaali mõisted.

Avaldiste

$$t'_k = a_{k1}t_1 + a_{k2}t_2 + a_{k3}t_3 + a_{k4}t_4; \quad k = 1, \dots, 4$$

kordajaile saame mõnevõrra teistsugused kitsendused kui art-s 28,
sest nüüd on $t_1^2 = 1$ asemel $t_1^2 = -1$. Endiselt kehtivad seosed (28.5),
mis praegu annavad

$$a_{13} = a_{14} = a_{24} = 0. \quad (30.2)$$

Seoste (28.6) asemele tulevad

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0, \\ a_{1k} - a_{k1} = 0, \quad a_{kl} + a_{lh} = 0 \quad (k, l > 1),$$

millest võrduste (30.2) alusel järeldub, et

$$a_{31} = a_{41} = a_{42} = 0.$$

Tähistades ka siin

$$a_{12} = k_1, \quad a_{23} = k_2, \quad a_{34} = k_3,$$

saame kokkuvõttes valemid

$$t'_1 = k_1 t_2, \quad (30.3)$$

$$t'_2 = k_1 t_1 + k_2 t_3, \quad (30.4)$$

$$t'_3 = -k_2 t_2 + k_3 t_4, \quad (30.5)$$

$$t'_4 = -k_3 t_3, \quad (30.6)$$

mis kujutavad endast *Bartelsi—Frenet' vameid* ajasarnase (ehk imaginaarse kaarepikkusega) joone $\gamma \subset {}^1E_4$ jaoks.

Kui joon $\gamma \subset {}^1E_4$ kujutab endast ruumis E_3 võrranditega

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t)$$

määratud punkti liikumise maailmajoont, siis (29.5) kohaselt

$$x' = (z', c),$$

kus $z = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. Punkti trajektoor ruumis E_3 on samuti teatav joon γ , mille puhul võib kasutada eespool saadud tulemusi. Nii on näiteks

$$z' = z' \cdot s' = tv,$$

kus t on trajektoori γ puutujasihiline ühikvektor ja $v = s'$ on liikumise kiirus. Seetõttu ruumis 1E_4

$$x'^2 = z'^2 - c^2 = v^2 - c^2$$

ning

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} (z', c).$$

Edasi leiame, et

$$t'_1 = t'_1 \cdot t' = t'_1 \cdot \frac{1}{\sigma'} = t'_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

kusjuures

$$t'_1 = \frac{vv'}{(\sqrt{c^2 - v^2})^3} (z', c) + \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} (z'', 0)$$

ning valemite (23.5) ja (23.6) põhjal

$$t'_1 = \frac{vw}{(\sqrt{c^2 - v^2})^3} (tv, c) + \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} (tw + nk v^2, 0),$$

kus $w = v' = s''$ on liikumise tangentsiaalkiirendus ruumis E_3 . Järelikult

$$t'_1 = \left(t \left[\frac{w}{c^2 - v^2} + \frac{v^2 w}{(c^2 - v^2)^2} \right] + n \frac{k v^2}{c^2 - v^2}, \frac{c v w}{(c^2 - v^2)^2} \right),$$

kus nurksülgudes

$$\frac{w(c^2 - v^2) + v^2 w}{(c^2 - v^2)^2} = \frac{c^2 w}{(c^2 - v^2)^2}.$$

Esimese kõveruse k_1 jaoks saame nüüd järgmise avaldise:

$$\begin{aligned} k_1^2 = t_1^2 &= \left[\frac{c^2 w}{(c^2 - v^2)^2} \right]^2 + \left[\frac{kv^2}{c^2 - v^2} \right]^2 - \left[\frac{cvw}{(c^2 - v^2)^2} \right]^2 = \\ &= \frac{k^2 v^4 (c^2 - v^2) + c^2 w^2}{(c^2 - v^2)^3}. \end{aligned} \quad (30.7)$$

Niisiis, maailmajoone esimene kõverus avaldub liikumiskiiruse v , tangentsiaalkiirenduse w ja trajektoori kõveruse k kaudu. Et $c^2 - v^2 > 0$, siis $k_1 \equiv 0$ leiab aset üksnes sel juhul, kui $k \equiv 0$ ja $w \equiv 0$, s.t. kui ruumis E_3 on tegemist ühtlase liikumisega mööda sirgjoont. Kui trajektoor on küll sirgjooneline ($k \equiv 0$), kuid liikumine pole ühtlane, on

$$k_1 = \frac{c|w|}{\sqrt{(c^2 - v^2)^3}} = \frac{|w|}{c^2 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}.$$

Saadud suurusel on relativistlikus kinemaatikas lihtne tõlgendus: ta on sirgjooneliselt, kuid mitteühtlaselt liikuva punkti *omakiirendus* — kiirendus punktiga kaasaliikuva inertsiaalsüsteemi suhtes (vt. [7], lk. 92).

Ühtlase liikumise korral tuleb valemis (30.7) võtta $w = 0$ ja seega

$$k_1 = \frac{kv^2}{c^2 - v^2},$$

kus lugejas tunneme ära kiirendusvektori w normaalkomponendi (ehk normaalkiirenduse; vrd. art. 23). Üldiselt nimetatakse punkti liikumist, mille korral $k_1 = \text{const}$, ühtlaselt muutuvaks (vrd. [7] lk. 91).

Harjutusülesanded

47. Punkt x liigub harjutusülesandes 37 kirjeldatud viisil. Arvutada selle liikuva punkti omaaeg $\tau_{[0, \tau_0]}$ koonuse tipu läbimise hetkest ($\tau = 0$) kuni hetkeni τ_0 .

48. Arvutada sama liikumise maailmajoone esimene kõverus k_1 punktis, mis vastab koonuse tipu läbimisele (s.t. $\tau = 0$).

III. PIND KOLMEMÕÕTMELISES EUKLEIDILISES RUUMIS

§ 8. PIND JA SELLE PUUTUJATASAND

Klassikalise diferentsiaalgeomeetria teine põhiline uurimisobjekt joone kõrval on pind. Pinna mõiste intuitiivseks aluseks on kujutus mingit keha või ruumiosa piiravast pinnast. Lihtsaimad pinnad on tasapind ehk tasand, kerapind ehk sfäär, pöördsilinder ja -koonus (pindadena). Mõnevõrra keerulisema ehitusega on üldisemad teist järku pinnad: ellipsoidid, hüperboloidid, paraboloidid jt.

Alljärgnevalt defineeritav pinna mõiste diferentsiaalgeomeetrias on juba küllalt üldine ja sellest piisab täiesti valdava enamiku rakenduste jaoks, ent see pole siiski kõige üldisem. Kui me joone mõistet käsitledes tutvustasime eespool põgusalt ka selliseid üldistusi nagu Peano ja Jordani jooned, siis pindu vaadeldes jääme eranditult diferentsiaalgeomeetria raamidesse, ehkki ka pindade puhul on olemas analoogilised üldistused.

31. Pinna mõiste ja võrrandid. Tasand ruumis E_3 määratakse võrrandiga $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, kuid see on ühtlasi ka koha-vektoriga

$$x = a + t_1k_1 + t_2k_2$$

määratud punktide hulk, kus $k_1 \nparallel k_2$ ning t_1 ja t_2 on reaalarvude hulgas $\mathbf{R}$ sõltumatult muutuvad parameetrid (vt. art. 1 ja 2). Sfäär ruumis E_3 määratakse analoogiliselt kas võrrandiga

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 = r^2$$

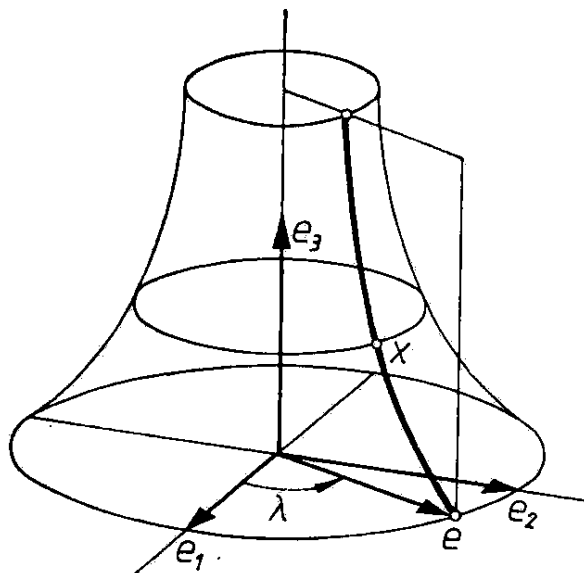
(vt. art. 7) või parameetriliselt võrrandiga

$$x = (r \cos \theta_1 \cos \theta_2, r \cos \theta_1 \sin \theta_2, r \sin \theta_1), (\theta_1, \theta_2) \in$$

$$\in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] + [0, 2\pi] \quad (31.1)$$

(vrd. [6], lk. 286).

Matemaatilise analüüsi kursuses käsitletakse *pöördpinna* kui punktihulka ruumis E_3 , mis tekib mingil tasandil oleva joone pöörlemisel sirge ümber, mis on samal tasandil ja millest joon on ühel pool, ning leitakse sellise pöördpinna pindala ([2], lk. 416—418). Koostame nüüd pöördpinna võrrandi, mis üldistab sfääri võrrandit (31.1). Selleks valime ristreeperi $\{o, e_1, e_2, e_3\}$ nii, et o asuks kõnesoleval sirgel — pöördeteljel — ja e_3 oleks selle sirge sihivektor (joon. 28). Pöörleva tasandi saab määrata punktiga o ja ristuvate



Joonis 28

ühikvektoritega e_3 ja e . Kui pöördnurk e_1 sihi suhtes tähistada λ , siis

$$e = e_1 \cos \lambda + e_2 \sin \lambda.$$

Pöörlev joon olgu sellel tasandil ristreeperi $\{o, e, e_3\}$ suhtes määratud parameetriliste võrranditega $x = \varphi(t)$, $x_3 = \psi(t)$, $t \in T$. Tema suvaline punkt x , mis on ühtlasi tekkiva pöördpinna suvaline punkt, on siis kohavektoriga

$$x = \varphi(t)e + \psi(t)e_3 = \varphi(t)(e_1 \cos \lambda + e_2 \sin \lambda) + \psi(t)e_3$$

ning pöördpind määratakse järelilikult võrrandiga

$$x = (\varphi(t) \cos \lambda, \varphi(t) \sin \lambda, \psi(t)), \quad t \in T, \quad \lambda \in [0, 2\pi]. \quad (31.2)$$

Pöörleva joone asendeid nimetatakse pöördpinna *meridiaanideks*, selle joone fikseeritud punktide poolt kirjeldatud ringjooni *paralleelideks*. Sfäär on erijuht, mil pöörlev joon on poolringjoon võrranditega $x = r \cos t$, $x_3 = r \sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Matemaatilises analüüsis kahe muutuva funktsiooni käsitlemisel nimetatakse pinnaks x_1x_2 -tasandi piirkonnas D antud *funktsiooni* $x_3 = f(x_1, x_2)$ *graafikut* kui punktide $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ hulka, kus $(x_1, x_2) \in D$ ning eeldatakse funktsiooni f diferentseeruvust ([3], lk. 171 ja 172). Kohavektori abil saab sellise pinna esitada niisiis võrrandiga

$$x = (x_1, x_2, f(x_1, x_2)), \quad (x_1, x_2) \in D.$$

Need näited on erijuhud lihtpinna üldisest mõistest, nii nagu seda käsitletakse diferentsiaalgeomeetrias.

Lihtpinnaks eukleidilises ruumis E_3 nimetame hulka

$$\mathcal{T} = \{x \in E_3 : x = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)), (u_1, u_2) \in D\}, \quad (31.3)$$

Veendume järgnevalt, et lihtpinna mõiste ülalantud definitsioon haarab ka kõik need näited, millega alustasime käesolevat artiklit. Tasand on ilmselt lihtpind: ta on ruumi E_3 alamhulk

$$\{x \in E_3 : x = a + u_1 k_1 + u_2 k_2, \quad k_1 \nparallel k_2, (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

kusjuures $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$ ja $x_1 \times x_2 = k_1 \times k_2 \neq 0$. Lihtpinnaks osutub ka diferentseeruva funktsiooni graafik kui alamhulk

$$\{x \in E_3 : x = (u_1, u_2, f(u_1, u_2)), (u_1, u_2) \in D\},$$

sest siin

$$x_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right), \quad x_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right) \quad (31.5)$$

ja

$$x_1 \times x_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_2}, 1\right) \neq 0. \quad (31.6)$$

Pöördpinna, sealhulgas sfääri puhul (vt. (31.2))

$$x = (\varphi(u_1) \cos u_2, \varphi(u_1) \sin u_2, \psi(u_1)), \quad (u_1, u_2) \in T \times [0, 2\pi), \quad (31.7)$$

$$x_1 = (\varphi'(u_1) \cos u_2, \varphi'(u_1) \sin u_2, \psi'(u_1)), \quad (31.8)$$

$$x_2 = (-\varphi(u_1) \sin u_2, \varphi(u_1) \cos u_2, 0), \quad (31.9)$$

$$x_1 \times x_2 = (-\varphi(u_1) \psi'(u_1) \cos u_2, -\varphi(u_1) \psi'(u_1) \sin u_2, \varphi(u_1) \varphi'(u_1)). \quad (31.10)$$

Siin

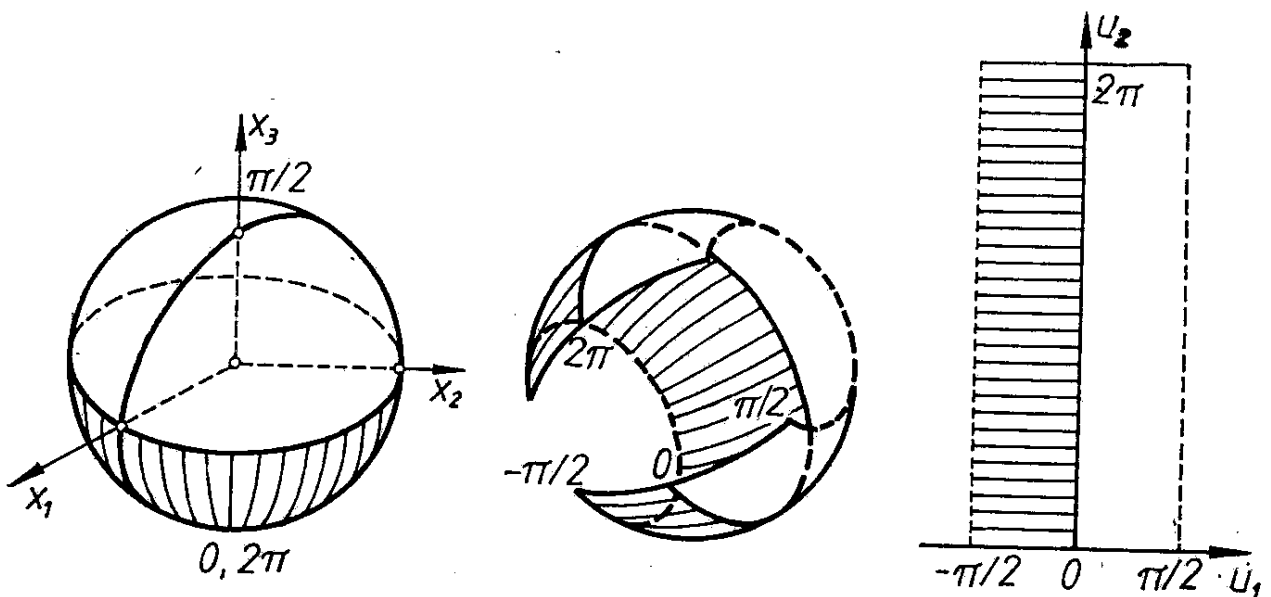
$$(x_1 \times x_2)^2 = \varphi(u_1)^2 [\varphi'(u_1)^2 + \psi'(u_1)^2] \quad (31.11)$$

ning et pöörleva joone puhul $\varphi'(u_1)$ ja $\psi'(u_1)$ ei tohi olla korraka nullid (vt. art. 14), siis $x_1 \times x_2 = 0$ on võimalik üksnes juhul, kui $\varphi(u_1) = 0$, s. t. punktides, mis on pöörleva joone ja pöördetelje ühispunktid, neis $x_2 = 0$. Lihtpinna saamiseks tuleb need punktid pöördpinnast välja jätta.

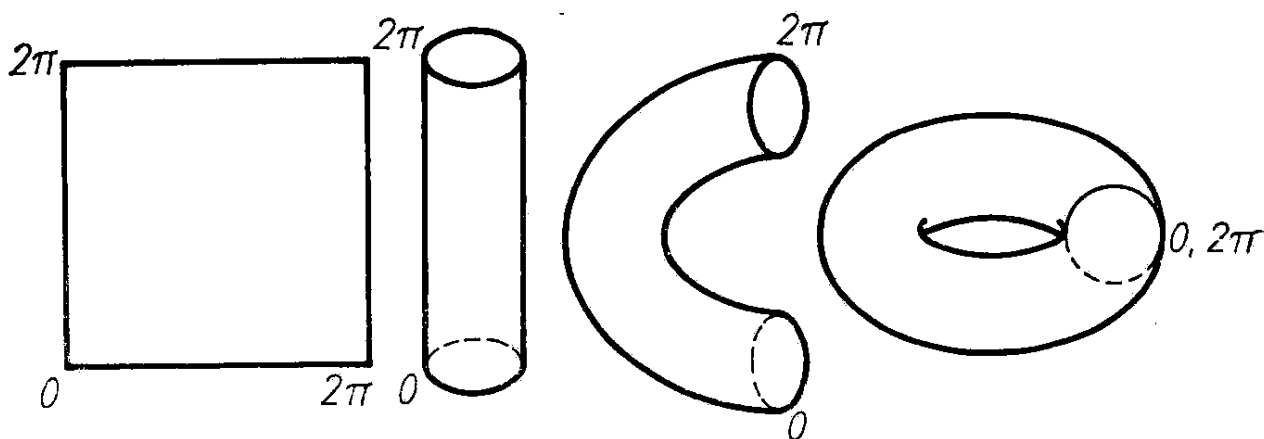
Sellised punktid esinevad ka sfääri korral, need on nn. poolused, kus $u_1 = \pm \pi/2$ ja $\varphi(u_1) = r \cos u_1 = 0$. Seega sfäär ilma poolusteta on lihtpind. See

lihtpind saadakse, näitlikult kõneldes, ristküliku $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi)$ defor-

meerimisel selliselt (joon. 29), et püstkülgjed, mis D koosseisu tegelikult ei kuulu, tõmbuvad kokku poolusteks, ristküliku D kesklõik aga läheb ekvaatoriks. Seejuures rõhtkülggede punktid $(u_1, 0)$ ja $(u_1, 2\pi)$ annavad sfääril sama punkti, s. t. need rõhtkülgjed tuleb sfääril «kokku kleepida».



Joonis 29



Joonis 30

Pöördpinna teise konkreetse näitena vaatleme *toori* (ehk *rõngaspinda*), mis tekib ringjoone pöörlemisel temaga samal tasandil oleva ja teda mittelõikava sirge ümber. Sel korral

$$\varphi(u_1) = a + b \cos u_1, \quad \psi(u_1) = b \sin u_1, \quad u_1 \in T = [0, 2\pi). \quad (31.12)$$

Et siin pöörleval joonel pöördeteljega ühispunkte pole; siis toor on lihtpind. Teda võib saada ruudu $D = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ deformeerimisel selliselt, nagu näidatud joonisel 30: ruudu keeramisel ja kokkukleepimisel silindriks ning silindri kõverdamisel ja kokkukleepimisel tooriks. Märkime, et ruudu vastaskülgede kokkukleepimisel saadavad toori punktid on kinnise lihtjoone kordse punkti analoogid (vrd. art. 14).

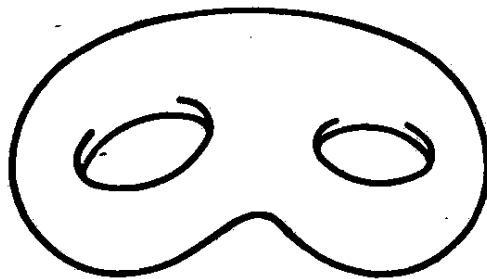
Lihtpinna mõiste on küllalt üldine ja rahuldab enamikku rakendusvajadusi, samal ajal pole ta täiesti universaalne. See selgub kas või sfääri näitest: sfääril saame lihtpinna alles pärast pooluste eemaldamist.

Üldiselt, kui punktihulgast (31.3), mille puhul on rahuldatud tingimus 1°, saab lihtpinna pärast piirkonna D selliste punktide väljajätmist, mis on allesjäänud piirkonna osa rajapunktideks ([2], lk. 297) ja kus tingimus 2° on rikutud, siis neile vastavaid punkte ruumis E_3 nimetatakse selle lihtpinna *iseärasteks punktideks*.

Sfääril pooluste väljajätmisel saadud lihtpinna iseärasteks punktideks on needsamad poolused. Sfääril on nad tavalised punktid, sest sfääri iga punkti võib soovi korral võtta pooluseks.

Võib esineda olukordi, kus punktihulga (31.3) puhul $x(u_1, u_2)$ on küll pidev, kuid lihtpinna saab temast pärast piirkonna D selliste punktide väljajätmist, milles on rikutud tingimus 1° ning mis on samuti allesjäänud piirkonna osa rajapunktid. Nii on see näiteks hulktahuka (kui pinna) puhul, millest tuleb välja jätta tipud ja servad. Lihtpinna seda tüüpi üldistusi me käesolevas kursuses ei käsitle.

Lõpuks tuleb märkida, et esineb ka niisuguseid punktihulki, mis pole tervikuna lihtpinnad, kuid mille igal punktil on teatav lihtpinnaks osutuv ümbrus. Neid on samuti loomulik lugeda *pindade* hulka. Näitena võib tuua kringli pinna (joon. 31). Sellisele pinnale ei ole võimalik tõmmata ilma rebenditeta tasandi piirkonda D , nii et see kataks kogu pinna. Järelikult pole tegemist lihtpinnaga. Sileda kringli pinna iga punkti ümber saab aga võtta teatava kera, mis lõikab



Joonis 31

seda pinda mööda lihtpinda. Selliste lihtpindade abil ehk n.-ö. lokaalselt saab küll kringli pinda uurida käesolevas kursuses arendatavate meetoditega, kuid seda tervikuna haaravad, nn. globaalsed probleemid jäävad seejuures enamasti vaatlusest välja. Mõningaid seda laadi küsimusi käsitleme art-s 51.

32. Puutujatasand. Piirdudes pinna mõiste selgitamisel eeltooduga, märgime kohe, et käesolevas peatükis mõistetakse *pinna* all kas lihtpinda või lihtpinnaks osutuvat osa üldisemast pinnast. See tõttu loobume sõnastuste lihtsustamiseks eesliitest «liht-».

Vaatleme ruumis E_3 pinda

$$\mathcal{T} = \{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$$

ning joont

$$\mathcal{J} = \{x : x = x(t), t \in T\}.$$

Öeldakse, et joon on pinnal, kui $\mathcal{J} \subset \mathcal{T}$. Sel juhul leidub iga väärtuse $t \in T$ korral $(u_1, u_2) \in D$, nii et $x(t) = x(u_1, u_2)$. Tekkiv vastavus $t \rightarrow (u_1, u_2)$ tähendab seda, et eksisteerib kaks niisugust funktsiooni $u_1 = u_1(t)$ ja $u_2 = u_2(t)$, mille puhul

$$x(t) \equiv x(u_1(t), u_2(t)). \quad (32.1)$$

Siin on mõlemal pool diferentseeruvad vektorfunktsioonid, mistõttu ka funktsioonid $u_1(t)$ ja $u_2(t)$ on diferentseeruvad, kusjuures liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja kohaselt ([3], lk. 181)

$$x'(t) = x_1 \cdot u_1'(t) + x_2 \cdot u_2'(t). \quad (32.2)$$

Meenutame, et siin $x = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2))$ puhul $x_\alpha = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial u_\alpha}, \frac{\partial x_3}{\partial u_\alpha} \right)$. Et joone $\mathcal{J}$ korral $x'(t) \neq 0$, siis ei saa $u_1'(t)$ ja $u_2'(t)$ olla korraga nullid ning võrrandid

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t) \quad (32.3)$$

määravad seega teatava joone tasandi piirkonnas $D \subset \mathbb{R}^2$, nimelt selle joone, mis piirkonna D deformeerimisel pinnaks $\mathcal{T}$ läheb just etteantud jooneks $\mathcal{J}$ sellel pinnal.

Fikseerime nüüd pinna teatava punkti $p \in \mathcal{T}$ kohavektoriga $x(p_1, p_2)$ ning vaatleme pinnal seda punkti läbivaid jooni $\mathcal{J}$, valides neil parameetri t selliselt, et

$$p_1 = u_1(t_0), \quad p_2 = u_2(t_0).$$

Rakendades valemit (32.2) punktis p , saame

$$\mathbf{x}'(t_0) = \mathbf{x}_1(p_1, p_2) u'_1(t_0) + \mathbf{x}_2(p_1, p_2) u'_2(t_0). \quad (32.4)$$

Vasakul on joonele $\mathcal{F}$ selle punktis p tõmmatud puutuja sihivektor. Kui vaadelda tasandit, mis läbib punkti p ja millele vektorid $\mathbf{x}_1(p_1, p_2)$ ja $\mathbf{x}_2(p_1, p_2)$ on rihivektoreiks (tingimuse 2° kohaselt on need vektorid lineaarselt sõltumatud), siis selgub, et $\mathbf{x}'(t_0)$ on selle tasandi rihis ning järelikult joone $\mathcal{F}$ puutuja punktis p asub sellel tasandil.

Tasandit, millel asuvad kõigi punkti $p \in \mathcal{F}$ läbivate ja pinnal $\mathcal{F}$ olevate joonte puutujad punktis p , nimetatakse pinna $\mathcal{F}$ *puutujatasandiks* selles punktis p ; viimast nimetatakse sel juhul *puutepunktiks* (joon. 32). Sirget, mis läbib puutepunkti ja on risti puutujatasandiga, nimetatakse pinna *normaaliks* selles punktis. Eelnevast selgub, et normaali sihivektoriks on vektor $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \neq 0$, mis tuleb muidugi arvutada puutepunktis.

Kui puutujatasandi suvalise punkti y kohavektor tähistada $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, siis saab puutujatasandi esitada võrrandiga (vt. art. 2)

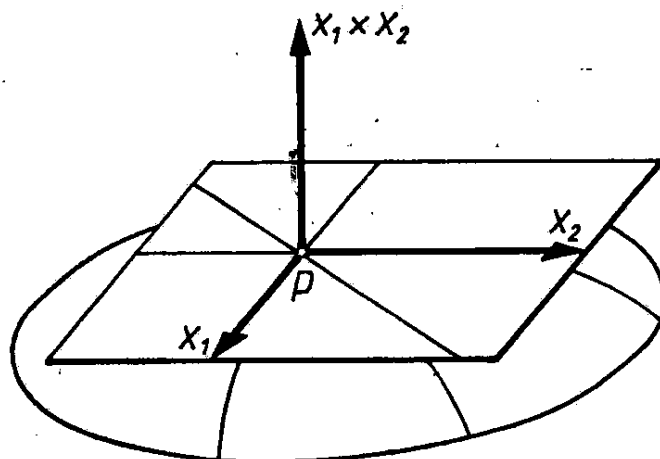
$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(p_1, p_2) + t_1 \mathbf{x}_1(p_1, p_2) + t_2 \mathbf{x}_2(p_1, p_2).$$

Normaalvektori $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ abil saab selle tasandi anda võrrandiga

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = 0, \quad (32.5)$$

kus on jäetud kirjutamata argumentide väärtused p_1, p_2 . Viimane võrrand aga on samaväärne võrrandiga

$$\begin{vmatrix} y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0.$$



Joonis 32

Näiteks kui on tegemist lihtpinnaga, mis on funktsiooni $x_3 = f(x_1, x_2)$ graafikuks, siis (31.6) järgi

$$x_1 \times x_2 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, -\frac{\partial f}{\partial x_2}, 1 \right) \quad (32.6)$$

ja (32.5) annab puutujatasandi võrrandiks

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2)(y_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2)(y_2 - p_2) - (y_3 - f(p_1, p_2)) = 0. \quad (32.7)$$

Tulemus on sama mis õpikus [3], lk. 179, kus on antud puutujatasandi teistsugune, eeltoodust erinev definitsioon ja käsitlus.

Teise näitena vaatleme sfääri puutujatasandit. Kui joon γ on sfääril keskpunktiga o ja raadiusega r , siis $|x(t)| = r$ ehk $x^2 = r^2$. Siit saame pärast diferentseerimist, et $2xx' = 0$, s. t. $x' \perp x$, millest järeldub, et sfääril oleva suvalise joone puutuja ning seega ka sfääri puutujatasand on risti puutepunkti mineva raadiusega.

Puutujatasandi rihivektoreile x_1 ja x_2 saab anda ka geomeetrilise tõlgenduse, mis osutub kasulikuks edaspidigi. Vaatleme jooni pinnal, mille puhul võrrandid (32.3) on järgmised:

$$u_1 = t, \quad u_2 = p_2 \quad \text{ja} \quad u_1 = p_1, \quad u_2 = t, \quad t \in T.$$

Neid jooni nimetatakse *parameetrijoonteks*, vastavalt u_1 - ja u_2 -jooneks. Nende korral

$$u'_1 = 1, \quad u'_2 = 0 \quad \text{ja} \quad u'_1 = 0, \quad u'_2 = 1,$$

mistõttu valemi (32.4) kohaselt

$$x'(t_0) = x_1(p_1, p_2) \quad \text{ja} \quad x'(t_0) = x_2(p_1, p_2).$$

Seega x_1 ja x_2 väärtused mingis punktis $p \in \mathcal{F}$ on seda punkti läbivate vastavalt u_1 - ja u_2 -joone puutujate sihivektorid. Tingimusele 2° ehk 2' saab nüüd anda veel ühe ekvivalentse kuju: u_1 -joon ja u_2 -joon ei tohi üheski punktis puutuda; kõik sellised jooned peavad moodustama, nagu öeldakse, *korrapärase võrgu*.

Pinna puutujatasandi mõiste võimaldab defineerida kahe pinna puutumise mõiste. Kaks ühise punktiga pinda *puutuvad* teineteist selles punktis (puutepunktis), kui nende pindade puutujatasandid langevad selles punktis ühte.

33. Skalaarvälja tasemepinnad. *Skalaarväljaks* ruumi E_3 piirkonnas U nimetatakse kujutust $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, mis piirkonna U igale punktile $x \in U$ koordinaatidega x_1, x_2, x_3 seab vastavusse teatava reaalarvu $F(x_1, x_2, x_3)$ (skalaari). Rakendusteadustes vaadeldakse näiteks temperatuurivälja, aine tiheduse välja jms.

Skalaarvälja tasemepinnaks nimetatakse piirkonna U alamhulka

$$\{x : F(x_1, x_2, x_3) = C\},$$

kus $C = \text{const}$. Antud skalaarväljal on seega lõpmata palju tasemepindu — igale konstandi C väärtusele vastab üks selline. Seejuures võib tasemepind osutada tühjaks hulgaks (näiteks kui $F(x_1, x_2, x_3) =$

$=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ ja $C<0$), üheks punktiks (näiteks sama F ja $C=0$ korral) või mingiks jooneks (näiteks kui $F(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2$ ja $C=0$, mil on tegemist sirgega — x_3 -teljega, sest $x_1^2+x_2^2=0 \Rightarrow x_1=x_2=0$).

Nimetus «tasemepind» on siiski õigustatud, sest üldjuhul kujutab skalaarväli tasemepind või vähemalt tema mingi osa endast teatavat lihtpinda. Täpsed tingimused, millal see nii on, antakse nn. ilmutamata funktsioonide teoorias ja need seisnevad järgnevas ([3], lk. 205).

Olgu antud skalaarväli $F: U \rightarrow \mathbf{R}$ ja punkt $a \in U$; tähistame $F(a)=C$. Omagu funktsioon $F(x_1, x_2, x_3)$ mingi risttahuka sees, millele a on keskpunkt, pidevaid osatuletisi $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3}$, mis ärgu olgu punktis a korruga nullid. Siis leidub risttahukas keskpunktiga a , mis sisaldub eelmises risttahukas ja mille sees tasemepind $\{x: F(x_1, x_2, x_3)=C\}$ kujutab endast lihtpinda.

Näiteks kui $\frac{\partial F}{\partial x_3}(a) \neq 0$, siis leidub ühe risttahuka ulatuses määratud funktsioon $x_3=f(x_1, x_2)$, mille graafik on vaadeldava tasemepinna osa, kusjuures samasuse $F(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \equiv C$ diferentseerimisel saadavate seoste põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial x_1} / \frac{\partial F}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{\partial F}{\partial x_2} / \frac{\partial F}{\partial x_3}.$$

Selle lihtpinna normaali sihivektoriks on vektor (32.6) ning kui sinna teha asendused ja pärast korrutada vektorit suurusega $\frac{\partial F}{\partial x_3} \neq 0$, saame tulemuseks normaali uue sihivektori avaldise

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right), \quad (33.1)$$

kus $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ on vektoriline diferentseerimisoperaator, mida nimetatakse *Hamiltoni operaatoriks* ehk sümboli kuju järgi W. R. Hamiltoni eeskujul nablaks¹ ([3], lk. 382).

Puutujatasandi võrrandile (32.5) saame nüüd kuju

$$\nabla F(y-a)=0 \quad (33.2)$$

ja siit võrrandile (32.7) kuju

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)(y_1-a_1) + \frac{\partial F}{\partial x_2}(a)(y_2-a_2) + \frac{\partial F}{\partial x_3}(a)(y_3-a_3) = 0, \quad (33.3)$$

¹ Kr. k. ∇ — harf; William Rowan Hamilton (1805–1865), iiri matemaatik ja füüsik.

kus a on tasemepinna punkt, a selle kohavektor ja a_1, a_2, a_3 selle koordinaadid.

Eeltoodust selgub, et kui tasemepinna $\{x : F(x_1, x_2, x_3) = C\}$ igas punktis $\nabla F \neq 0$, siis on see tasemepind iga oma punkti teatavas ümbruses lihtpind ning osutub seega lihtpindade ühendiks; öeldakse ka, et ta on kaetud lihtpindadega. Selle pinna uurimise saab seega taandada nende lihtpindade ja vajaduse korral, nn. globaalülesannete puhul, nende ühendi ehk tasemepinna (kui ter-viku) uurimisele.

Kui tasemepinnal leidub punkte, kus tehtud eeldus on rikutud, s. t. kus $\nabla F = 0$, siis neid nimetatakse *tasemepinna iseäraseks punktideks*. Eelöeldu kehtib sel korral tasemepinna selle osa kohta, mis jääb järele pärast iseärase punktide eemaldamist.

Vaatleme näitena täielikult telgsümmeetrilist skalaarvälja ja selle taseme-pindu. Skalaarvälja $F : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse siledaks täielikult telgsümmeetriliseks väljaks, kui

$$F(x_1, x_2, x_3) = \Phi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_3), \quad (33.4)$$

kus $\Phi(\xi, x_3)$ on kahe muutuja pidev ja pidevate osatuletistega $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ funktsioon. Välja nimetus on tulnud sellest, et niisugune väli ei muutu, kui teha ruumis E_3 suvaline pööre x_3 -telje ümber, sest punkti kaugus sellest teljest $\xi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ja koordinaat x_3 jäävad muutumatuks.

Funktsioon (33.4) on kõikjal ruumis E_3 pidev; diferentseeruv on ta punktides, kus $\xi = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \neq 0$ — mis pole x_3 -teljel (selle telje punktides ta võib, kuid ei tarvitse olla diferentseeruv). Seejuures

$$\nabla F = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{x_1}{\xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \cdot \frac{x_2}{\xi}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right),$$

mistõttu $\xi \neq 0$ korral $\nabla F = 0$ parajasti siis, kui $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$ ja $\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ on korraga nullid.

Kui mitte üheski väljaspool x_3 -telge asetsevas punktis nii ei ole, siis osutuvad vaadeldava skalaarvälja kõik tasemepinnad, millest x_3 -telje punktid on välja jäetud, lihtpindade ühendeiks. Lihtne on kindlaks teha, et tasemepinnad on siin pöördpinnad, art-s 31 aga selgus, et pöördpinnast pöördetelje punktide eemaldamisel jääb järele tegelikult üksainus lihtpind võrrandiga (31.2).

Sfäärid saame siin tasemepindadena juhul, kui $\Phi(\xi, x_3) = \xi^2 + x_3^2$; sel korral $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ning tasemepind

$$\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = C\}$$

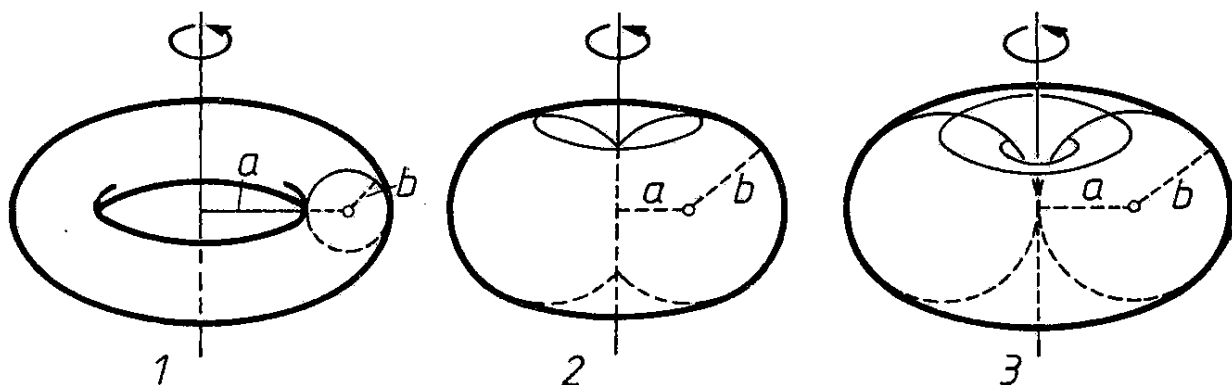
on $C = r^2 > 0$ puhul tõesti sfäär. Siin

$$\nabla F = (2x_1, 2x_2, 2x_3) \neq 0$$

sfääri igas punktis, mistõttu sfäär on lihtpindade ühend. Nendeks lihtpindadeks võib võtta näiteks kas poolusteta sfäärid pooluste erinevate asendite korral (vt. art. 31) või poolsfäärid funktsioonide $x_3 = \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ graafikutena.

Toorid saame tasemepindadena juhul, kui

$$\Phi(\xi, x_3) = (\xi - a)^2 + x_3^2.$$



Joonis 33

Sel korral

$$F(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2$$

ja tasemepind määratakse võrrandiga

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 = C. \quad (33.5)$$

Kui siin $C = b^2$ ja $0 < b^2 < a^2$, siis tasemepinna ühisosa x_3 -teljega, mis määratakse võrrandist

$$a^2 + x_3^2 = b^2,$$

on tühi hulk (joon. 33.1), seega $\nabla F \neq 0$ kogu tasemepinnal ning tasemepinnaks on toor (võib vahetult veenduda, et vektori (31.7) koordinaadid seoste (31.12) puhul rahuldavad võrrandit (33.5), kus $C = b^2$). Kui $b > a$, siis on tasemepinnaks pöördpind, mis tekib ringjoone kaare pöörlemisel kaare otspunkte läbiva sirge ümber (joon. 33.2). Piirjuhul $b = a$ on kaareks kogu ringjoon ja pöördeteljeks selle puutuja (joon. 33.3).

Kui toori võrrand esitada kujul

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 = b^2 - x_3^2$$

ehk

$$2a \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = b^2 - a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

siis pärast ruutu tõstmist saame

$$4a^2(x_1^2 + x_2^2) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2)^2. \quad (33.6)$$

Et paremal sulgudes on positiivne suurus, siis on see võrrand samaväärne eelmisega ja esitab samuti toori. Seda toori võib aga vaadelda uue skalaarvälja

$$F^*(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x_1^2 + x_2^2)$$

tasemepinnana

$$\{x : F^*(x_1, x_2, x_3) = 0\}.$$

Sellist olukorda üldistades defineeritakse *algebraalne pind* kui ruumi $\mathbb{R}^3$ (või veelgi üldisemalt ruumi $\mathbb{C}^3$, kus $\mathbb{C}$ on kompleksarvude korpus) alamhulk

$$\{x : F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$$

eeldusel, et $F(x_1, x_2, x_3)$ on teatav kolme muutuja polünoom (vt. [1], lk. 254). Nii siis, sfäär ja toor on algebraised pinnad, kusjuures nende järk on (vt. [6], lk. 385) vastavalt 2 ja 4.

34. Pinnaparve mähispind. Olgu tegemist tasemepinnaga $\{x : F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Võrrandit

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0$$

nimetatakse selle tasemepinna *ilmutamata võrrandiks*. Märgime, et sama skalaarvälja suvalise teise tasemepinna *ilmutamata võrrand* on $F^*(x_1, x_2, x_3) = 0$, kus $F^*(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, x_2, x_3) - C$.

Olgu nüüd antud piirkonnad $U \subset E_3$ ja $T \subset \mathbb{R}$ ning kujutus $F : U \times T \rightarrow \mathbb{R}$ selliselt, et funktsioon $F(x_1, x_2, x_3, \tau)$ on piirkonnas $U \times T$ pidevalt diferentseeruv ja võrrand

$$F(x_1, x_2, x_3, \tau) = 0 \quad (34.1)$$

määrab iga fikseeritud $\tau \in T$ korral mittetühja tasemepinna, mille kõikides punktides

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \neq 0. \quad (34.2)$$

Sel korral öeldakse, et on antud parameetrist τ siledalt sõltuv tasemepindade parv ehk, lühemalt, *pinnaparv*; sellesse kuuluvaid tasemepindu nimetame edaspidi parve pindadeks.

Lihtpinda $\mathcal{F} = \{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$ nimetatakse *pinnaparve mähispinnaks*, kui ta igas oma punktis puutub üht parve pindadest, omamata seejuures ühegagi neist ühist piirkonda (vrd. art. 17).

Sel korral vastab igale reaalarvupaarile $(u_1, u_2) \in D$, mis määrab mähispinna punkti x , üks parve pind — nimelt see, mis puutub mähispinda punktis x , see parve pind aga fikseeritakse τ väärtusega. Tekib vastavus $(u_1, u_2) \mapsto \tau$, mis määrab piirkonnas D antud funktsiooni $\tau = \tau(u_1, u_2)$ selliselt, et

$$F(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2), \tau(u_1, u_2)) \equiv 0 \quad (34.3)$$

kogu piirkonnas D (vrd. (17.1)).

Järgneva analüüsi puhul eeldame, et funktsioon $\tau(u_1, u_2)$ on samuti nagu funktsioonid $x_i(u_1, u_2)$; $i=1, 2, 3$ pidevalt diferentseeruv piirkonnas D . Samasuse (34.3) poolte diferentseerimisel muutuja u_α järgi, kus $\alpha=1, 2$, saame:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial u_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u_\alpha} \equiv 0$$

ehk

$$\nabla F \cdot x_\alpha + \frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u_\alpha} \equiv 0. \quad (34.4)$$

Arvestame nüüd, et parve pind (normaali sihivektoriga ∇F) ja mähispind (puutujatasandi rihivektoritega x_α) puutuvad teineteist oma ühises punktis. Sellest järeldub, et $\nabla F \perp x_\alpha$, mistõttu

$$\nabla F \cdot x_\alpha \equiv 0. \quad (34.5)$$

Niisiis, mähispinna punktides

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u_{\alpha}} \equiv 0.$$

Teised tegurid ei saa olla korraga nullid piirkonna D mingis osapiirkonnas, sest siis oleks seal $\tau = \tau_0 = \text{const}$ ja selle osapiirkonna punktidele vastavad punktid mähispinnal oleksid samaaegselt teataval fikseeritud parve pinnal ning mõlemal neil oleks ühine piirkond, mis pole aga mähispinna definitsiooni kohaselt lubatud. Järelikult

$$F_{\tau}(x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2), \tau(u_1, u_2)) \equiv 0.$$

Tulemus koos samasusega (34.3) näitab, et kui võrrandiga (34.1) antud pinnaparvel on olemas mähispind võrranditega $x_i = x_i(u_1, u_2)$, siis funktsioonid $x_i(u_1, u_2)$ koos teatava funktsiooniga $\tau(u_1, u_2)$ rahuldavad samaselt järgmisest kahest võrrandist koostatud süsteemi:

$$F(x_1, x_2, x_3, \tau) = 0, \quad (34.6)$$

$$F_{\tau}(x_1, x_2, x_3, \tau) = 0.$$

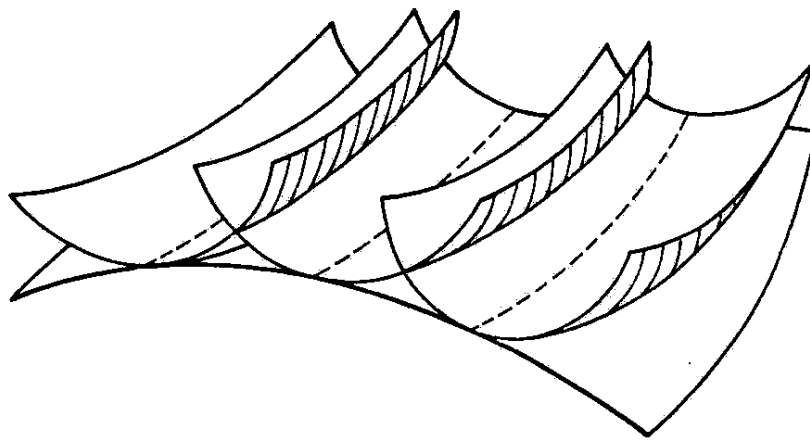
Sellisest süsteemist, vastupidi, saab määrata teatava lihtpinna või lihtpindade ühendiks osutuva tasemepinna. Võib näiteks avaldada x_3 ja τ kui x_1 ja x_2 funktsioonid (täpselt selgitab seda [3], lk. 207), kuid võib ka elimineerida τ süsteemi (34.6) võrrandest, kui see on lihtsam (vrd. [1], lk. 281).

Oletamegi, et on õnnestanud leida lihtpind võrranditega $x_i = x_i(u_1, u_2)$, mille puhul süsteem (34.6) on rahuldatud (kui sellesse asendada ka sobiv funktsioon $\tau(u_1, u_2)$). Näitame, et tänu eeldusele $\nabla F \neq 0$ osutub see lihtpind pinnaparve mähispinnaks.

Tõepoolest, süsteemi (34.6) esimene võrrand annab pärast asendust samasuse (34.3), selle diferentseerimisel saame samasuse (34.4), millest süsteemi (34.6) teise võrrandi tõttu tekib samasus (34.5), mis tänu eeldusele (34.2) ütlebki, et vaadeldava pinna puutujatasand rihivektoritega x_1 ja x_2 ühtib parve pinna puutujatasandiga (selle normaali sihivektoriks on $\nabla F \neq 0$). Seega toimub vaadeldava lihtpinna ja parve pinna puutumine nende ühises punktis ja tegemist on tõesti mähispinnaga.

Vaatleme süsteemi (34.6) võrrandeid parameetri τ mingil fikseeritud väärtusel. Mõlemad määravad üldjuhul teatava tasemepinna, süsteemina määravad nad aga nende tasemepindade ühisosa, mis üldjuhul on teatav joon. Sel teel saadud jooni nimetatakse pinnaparve *karakteristikuteks*. Iga karakteristik osutub parve parameetri väärtustele τ ja $\tau + \Delta\tau$ vastava kahe pinna lõikejoone piirseisuks, kui $\Delta\tau \rightarrow 0$ (joon. 34). Tõepoolest, mainitud lõikejoon määratakse võrrandisüsteemiga

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \tau) &= 0, \\ F(x_1, x_2, x_3, \tau + \Delta\tau) &= 0, \end{aligned}$$



Joonis 34

mis on aga samaväärne süsteemiga

$$F(x_1, x_2, x_3, \tau) = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta\tau} [F(x_1, x_2, x_3, \tau + \Delta\tau) - F(x_1, x_2, x_3, \tau)] = 0;$$

piirprotsessis $\Delta\tau \rightarrow 0$ tekib viimasest karakteristikut määrav süsteem (34.6).

Kokkuvõttes selgub, et kui pinnaparvel on olemas mähispind, siis see mähispind koosneb pinnaparve karakteristikutest. Viimaste punktid on mähispinna ja parve pinna ühispunktid, milles toimub nende pindade puutumine. Niisiis, parve pind puutub mähispinda parajasti mööda üht karakteristikut.

35. Torsid ja kanalpinnad. Eelmise artikli tulemuste rakendamise esimese näitena uurime tasandiparve mähispinda. Kui mingil tasandiparvel leidub mähispind, siis seetõttu, et karakteristikud on siin kahe tasandi lõikejoone piirseisud ja seega sirged, peab see mähispind koosnema sirgetest. Üldiselt nimetatakse sirgetest koosnevat pinda *joonpinnaks*, teda koostavaid sirgeid — *moodustajateks*. Näideteks on siin juba analüütilisest geomeetriast tuntud silindrilised ja koonilised pinnad, samuti ühekatteline hüperboloid ja hüperboolne paraboloid (vt. [6], art. 81 ja 84). Üldiste joonpindade ehitust uuritakse lähemalt õpikus [5], art 42 (osaliselt ka allpool art-s 41).

Tasandiparve mähispinnaks osutuval joonpinnal on see iseärasus, et parve tasand puutub mähispinda piki sirgjoonelist karakteristikut, seega selle joonpinna puutujatasand jääb muutumatuks puutepunkti liikumisel mööda vabalt võetud moodustajat. On selge, et iga viimatimärgitud omadusega joonpind on teatava tasandiparve mähispind, sest sellisel joonpinnal on iga sirgjoonelise moodustaja jaoks parajasti üks puutujatasand, mis puutub pinda piki seda moodustajat, seega puutujatasandid, nagu moodustajadki sõltuvad ühestainsast parameetrist ning vaadeldav joonpind on nende parve mähispind.

Seda tüüpi joonpinda — tasandiparve mähispinda — nimetatakse *tasanduvaks pinnaks* ehk *torsi*ks. Torsi ehituse täpsemaks selgitamiseks märgime kõigepealt, et tasandiparve korral on süsteemil (34.6) kuju

$$\begin{aligned} n(\tau)x + p(\tau) &= 0, \\ n'(\tau)x + p'(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (35.1)$$

ja ta määrab parameetri τ iga fikseeritud väärtuse korral torsi sirgjoonelise moodustaja. Lisame siia veel ühe võrrandi, mis tekib, kui süsteemi teise võrrandi vasakut poolt veel kord diferentseerida τ järgi:

$$n''(\tau)x + p''(\tau) = 0. \quad (35.2)$$

Kohavektori x koordinaatide x_1, x_2, x_3 leidmiseks on tekkinud kolmest lineaarvõrrandist koosnev süsteem. Üldjuhul, kui süsteem on üheselt lahenduv, saab temast leida need koordinaadid parameetri τ funktsioonidena: $x_i = x_i(\tau)$ ehk $x = x(\tau)$. Tekib teatav joon, mille kirjeldab punkt x kohavektoriga $x(\tau)$, kusjuures see punkt on ilmselt süsteemi (35.1) võrranditega määratud sirgel ehk parve karakteristikul. Kohavektori $x(\tau)$ asendamisel võrrandisse (35.1) ja (35.2) saame samasused ja kui nüüd diferentseerida kahe esimese samasuse pooli τ järgi:

$$\begin{aligned} n'(\tau)x(\tau) + n(\tau)x'(\tau) + p'(\tau) &\equiv 0, \\ n''(\tau)x(\tau) + n'(\tau)x'(\tau) + p''(\tau) &\equiv 0 \end{aligned}$$

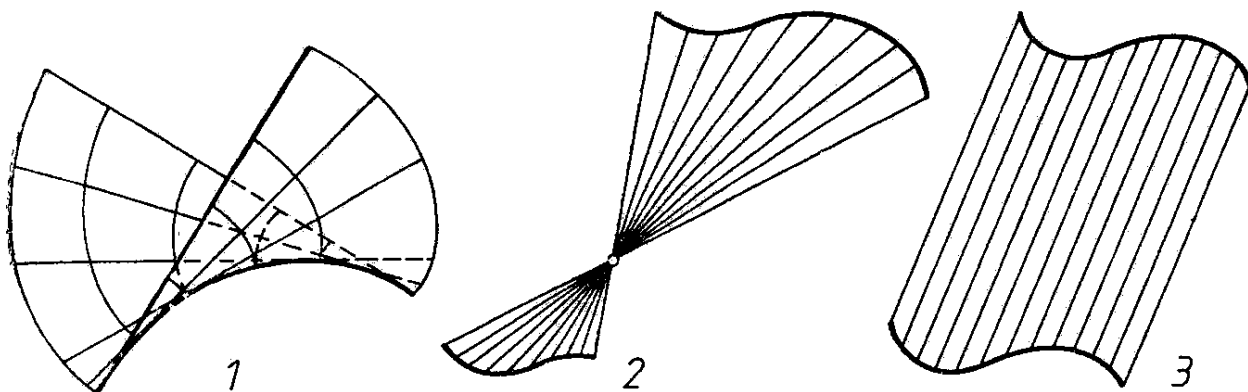
ning arvestada ka teist ja kolmandat samasust, tekivad uued samasused

$$n(\tau)x'(\tau) \equiv 0, \quad n'(\tau)x'(\tau) \equiv 0,$$

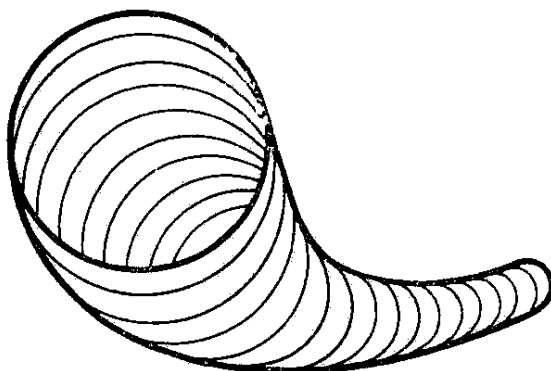
millest nähtub, et vaadeldava joone puutuja sihivektor kuulub võrranditega (35.1) antud sirge ehk parve karakteristikule sihti. Et joone punkt kuulub samuti sellele karakteristikule, siis selgub, et *üldjuhul on torsi sirgjoonelised moodustajad teatava joone puutujad* ehk, teisiti, tors koosneb ühe joone puutujatest. Seda joont nimetatakse torsi *tagasipöörde servaks* (vt. [5], lk. 117), torssi ennast aga tema *puutujatepinnaks* (joon. 35, 1).

Eriolukord tekib siis, kui süsteem (35.1) ja (35.2) on küll endistviisi üheselt lahenduv, ent lahend jääb τ muutumisel konstantseks. Sel korral on võrranditega (35.1) määratud karakteristikud üht fikseeritud punkti läbivad sirged ning mähispind on järelikult *kooniline pind* (joon. 35.2). Kui aga kõnesoleva süsteemi (35.1) ja (35.2) determinant on võrdne nulliga, siis $nn'n'' = 0$ ning karakteristiku sihiühikvektori k jaoks saame ühelt poolt $k = \lambda(n \times n')$, seega $k' = \lambda'(n \times n') + \lambda(n \times n'') = n \times (\lambda'n' + \lambda n'')$; siit $k'n = 0$ ja $k'n' = \lambda'(nn'n') + \lambda(nn''n') = 0$, mistõttu $k' = \mu(n \times n') = \mu\lambda^{-1}k$. Teiselt poolt saame samasuse $k^2 = 1$ põhjal $2kk' = 0$, mistõttu $\mu = 0$ ja $k' = 0$. Niisiis, sel korral $k = \text{const}$ ja mähispind on *silindriline pind* (joon. 35, 3).

Sellela on ammendatud kõik võimalused. Kokkuvõttes, *tors on kas puutujatepind, kooniline pind või silindriline pind*. Jätame



Joonis 35



Joonis 36

lugejale endale harjutusena kindlaks teha, et iga puutujatepinna ning iga koonilise või silindrilise pinna puutujatasand sõltub ainult ühest parameetrist, olles ühine vabalt võetud sirgjoonelise moodustaja kõikide punktide jaoks; sellest jäeldub, et torsideks on kõik mainitud pinnad ja ainult need.

Mähispinna teise näitena vaatleme *kanalpinda*. Nii nimetatakse sfäärade parve mähispinda ruumis E_3 . Suvaliseks karakteristikuks on siin kahe sfääri lõikejoone piirasend, seega ringjoon. *Kanalpind koosneb järelikut ringjoontest*; piki neid toimub kanalpinna ja parve sfäärade puutumine (joon. 36). Erijuhul, kui parve sfäärade keskpunktid moodustavad sirge, on tegemist pöördpinnaga. Teisel erijuhul, kui parve sfäärid on konstantse raadiusega, kõneldakse *torupinnast*.

Nii näiteks on toor selline torupind, mille puhul parve sfäärade keskpunktid moodustavad ringjoone, kusjuures selle raadius a on suurem kui sfäärade raadius b . Sellise sfääriparve võrrand on

$$(x_1 - a \cos \tau)^2 + (x_2 - a \sin \tau)^2 + x_3^2 = b^2.$$

Süsteemi (34.6) saamiseks tuleb diferentseerida τ järgi. Tekib seos

$$2(x_1 - a \cos \tau)(a \sin \tau) + 2(x_2 - a \sin \tau)(-a \cos \tau) = 0$$

ehk

$$x_1 \sin \tau - x_2 \cos \tau = 0.$$

Siit

$$\cos \tau = \frac{\pm x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \sin \tau = \frac{\pm x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Tulemuste asendamisel parve võrrandisse saame pärast vajalikke teisendusi mähispinna võrrandi, mis ühtib parajasti toori võrrandiga (33.6).

49. Tuletada teist järku pindade — ellipsoidi, hüperboloidide, elliptilise paraboloidi parameetrilised vektorvõrrandid. (Leida enne vastavate pöördpindade vektorvõrrandid ja üldistada neid vajalikul viisil.)

50. Pinda, mille kirjeldab sirge ühtlasel pöörlemisel teda risti lõikava telje ümber ning samaaegsel ühtlasel nihkumisel selle telje sihis, nimetatakse *püst-helikoidiks* (joon. 37). Tuletada selle pinna parameetriline vektorvõrrand, valides parameetriteks punkti abstsissi pöörleval sirgel ja pöördenurga. Mis on siin parameetrijoonteks?

51. Esitada ühekatteline hüperboloid ja hüperboolne paraboloid selliste parameetriliste vektorvõrranditega, mille puhul parameetrijoonte võrk ühtib pinna sirgjooneliste moodustajate võrguga.

52. Öeldakse, et punktihulk liigub ruumis E_3 *translatoorselt*, kui igale ajahetkele t , kus $t \in T \subseteq \mathbb{R}$, vastavad hulga punktide kindlad asendid selliselt, et iga punkt kirjeldab joone ja iga kahe punkti asendite x_t ja y_t korral vektor

$\overrightarrow{x_t y_t}$ jääb t muutumisel konstantseks. Pinda, mille kirjeldab mingi joon, liikudes translatoorselt, nimetatakse *translatsioonpinnaks*. Näidata, et translatsioonpindadeks on parajasti pinnad vektorvõrrandiga

$$x = p(u_1) + q(u_2).$$

Järeldada siit, et translatoorselt liikuva joone ja selle punkti trajektoori osad on vahetatavad. Leida $p(u_1)$ ja $q(u_2)$ elliptilise (või hüperboolse) paraboloidi korral, vaadeldes seda peaparabooli translatsioonpinnana.

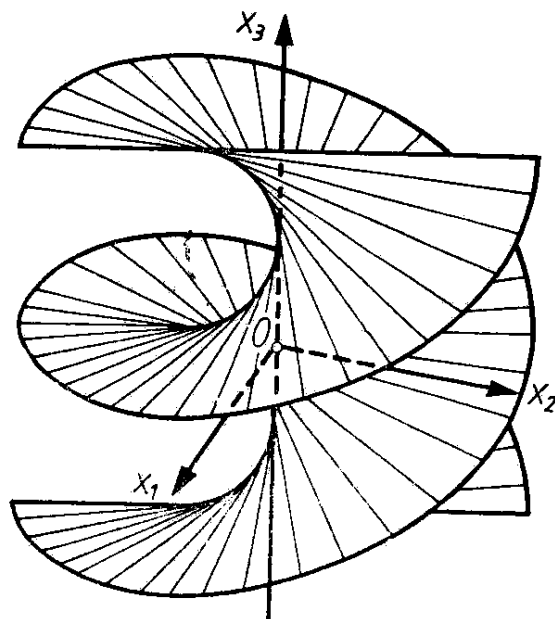
53. Näidata, et pöördpinna kõik normaaliid läbivad pöördtelje punkte ning et ühe paralleeli punktides võetud normaaliid moodustavad pöördkoonuse, mille tipp on pöördteljel.

54. Veenduda, et tasemepinna $x_1 x_2 x_3 = C$ puutujatasand piirab koos kolme koordinaattasandiga tetraeedri, mille ruumala on konstantne, s. t. ei sõltu puutepunkti valikust pinnal.

55. Ringjoone paralleelsetele kõõludele kui diameetritele ehitatakse sfäärid. Leida tekkinud sfääride parve mähispind.

56. Ruumis E_3 antud joone normaaltasandite parve mähispinda nimetatakse joone *polaarpinnaks*, selle sirgjoonelisti moodustajaid (parve karakteristikuid) — joone *kõverustelgedeks*. Näidata, et kõverustelg on risti kooldumistasandiga ja lõikub sellega kooldumispooltasandil peanormaali punktis — joone nn. *kõveruskeskpunktis*, mille kaugus joone punktist on joone kõveruse pöördväärtus selles punktis.

57. Näidata, et joone sirgestustasandite parve karakteristikuteks on joone punkte x neis võetud Darboux' vektorite ω sihis läbivad sirged (vt. harjutusülesanne 39).



Joonis 37

§ 9. PINNA KÕVERUSED

Nagu selgus art-s 25, iseloomustavad joone ehitust tema punkti lähemas ümbruses kaks arvsuurst — joone kõverus ja vääne selles punktis. Pindade, nagu näiteks tasandi, silindri, sfääri või toori puhul on samuti vaja leida sellised arvud, mis määraksid pinna ehituse tema punkti lähemas ümbruses. Juba pealiskaudnegi analüüs näitab eri pindade erinevusi. Tasandil läheb läbi iga punkti igas sihis nulliga võrduva kõverusega joon (sirgjoon), samal ajal kui pöördsilindri mingit punkti läbib üksainus selline. Sfäär kõverdub oma mingis punktis võetud puutujatasandist alati ühele ja samale poole, samal ajal kui tooril on pöördeteljele lähima punkti ümbruses sadulataoline ehitus. Alljärgnevalt arendame välja matemaatilise aparadi seda laadi nähtuste täpseks kvantitatiivseks uurimiseks ning teatavate arvsuurstega iseloomustamiseks.

36. Pinna kaks ruutvormi. Nagu selgus art-s 19, saab ruumis E_3 antud joone kaare pikkust arvutada määratud integraalina avaldisest ds , kus $ds^2 = dx^2 = [x'(t)dt]^2$ ja $x = x(t)$ on joone võrrand. Olgu nüüd tegemist pinnal asuva joonega, mille korral (32.1) kohaselt

$$x(t) = x(u_1(t), u_2(t)).$$

Seose (32.2) põhjal

$$dx = x_1 du_1 + x_2 du_2,$$

kus $du_\alpha = u'_\alpha(t)dt$, mistõttu

$$ds^2 = (x_1 du_1 + x_2 du_2)^2 = x_1^2 du_1^2 + 2x_1 x_2 du_1 du_2 + x_2^2 du_2^2.$$

Kui tähistada

$$x_\alpha x_\beta = g_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (36.1)$$

ja arvestada, et skalaarkorrutise kommutatiivsuse tõttu $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, s. t. $g_{12} = g_{21}$, saame järgmise avaldise:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta. \quad (36.2)$$

Diferentsiaalide du_1 ja du_2 suhtes on siin tegemist ruutvormiga. Erinevus algebras käsitletavatest ruutvormidest (vt. [1], § 43) seisneb selles; et kordajad $g_{\alpha\beta}$ pole siin konstantsed reaalarvud, vaid reaalarvuliste väärtustega funktsioonid $g_{\alpha\beta}(u_1, u_2)$. Vahetegemiseks kõneldakse seda laadi avaldiste puhul diferentsiaalruutvormidest. Ülalsaadud avaldist (36.2) nimetatakse pinna *esimeseks ruutvormiks* ehk meetriliseks põhivormiks.

Pinnal asuva joone kaare pikkuse arvutamiseks tuleb sellesse avaldisse teha asendused joone võrrandeist (32.3):

$$ds^2 = \left(\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta}(u_1(t), u_2(t)) u'_\alpha(t) u'_\beta(t) \right) dt^2,$$

võtta tulemusest ruutjuur ja arvutada sellest määratud integraal vajalikes rajades. Et paremal sulgudes on parameetri t funktsioon, seejuures positiivne, siis leidub selline positiivne funktsioon $f(t)$ — ruutjuur temast, et $ds = f(t) dt$ ja kaare pikkus

$$s = \int_a^b f(t) dt.$$

Esimene ruutvorm võimaldab arvutada ka pinnal asuvate joonte vahelisi nurki. Lõikugu kaks joont, millel on võrrandid $u_\alpha = v_\alpha(t)$ ja $u_\alpha = w_\alpha(\tau)$, punktis parameetriväärtustega

$$a_\alpha = v_\alpha(t_0) = w_\alpha(\tau_0).$$

Joontevaheliseks nurgaks φ nimetatakse nurka nende joonte puutujate sihivektorite

$$dx = \sum_{\alpha=1}^2 x_\alpha dv_\alpha, \quad \delta x = \sum_{\beta=1}^2 x_\beta dw_\beta$$

vahel lõikepunktis ning ta arvutatakse valemist

$$\cos \varphi = \frac{dx \delta x}{\sqrt{dx^2} \sqrt{\delta x^2}} = \frac{\left(\sum_{\alpha=1}^2 x_\alpha dv_\alpha \right) \left(\sum_{\beta=1}^2 x_\beta dw_\beta \right)}{\sqrt{ds^2} \sqrt{\delta s^2}}.$$

Lugejas on skalaarkorrutise distributiivsuse ja valemite (36.1) tõttu avaldis $\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} dv_\alpha dw_\beta$, nimetaja kummaski teguris aga on ruutjuur avaldisest (36.2), millesse on asendatud kord ühe, kord teise joone võrrandite paremad pooled. Seejuures tuleb kõik avaldised leida lõikepunktis, s.t. asendada $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ ning $t = t_0$ ja $\tau = \tau_0$. Niisiis,

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} dv_\alpha dw_\beta}{\sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} dv_\alpha dv_\beta} \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} dw_\alpha dw_\beta}}. \quad (36.3)$$

Ka pinnal asuva piirkonna pindala arvutamine toimub esimese ruutvormi abil. Olgu antud lihtpind $\{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$ ja piirkond $\Delta \subset D$. Viimasele vastab teatav piirkond $U = \{x : x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in \Delta\}$ antud lihtpinnal. Matemaatilise analüüsi kursuses näidatakse, et piirkonna U pindala on ([3], lk. 299; vt. ka [5], lk. 128)

$$S = \iint_{\Delta} |x_1 \times x_2| du_1 du_2.$$

Lagrange'i samasuse (2.5) järgi

$$(x_1 \times x_2)^2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - (x_1 x_2)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 \quad (36.4)$$

kujutab endast esimese ruutvormi determinanti $\det |g_{\alpha\beta}|$; seega

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} du_1 du_2. \quad (36.5)$$

Kokkuvõttes võime öelda, et *pinna esimene ruutvorm võimaldab arvutada kaarte pikkusi, nurki ja pindalasid pinnal ehk lühemalt — määrab pinna sisemeetrika*. Ühtlasi selgub seosest (36.4), et $\det |g_{\alpha\beta}| > 0$, kusjuures ka $g_{11} = x_1^2 > 0$, $g_{21} = x_2^2 > 0$. Need võrratused ühtivad kõrgemas algebras antavate vastavate tingimustega ([1], lk. 453), s.t. nad on kooskõlas asjaoluga, et esimene ruutvorm, mille väärtus on ds^2 , on positiivselt määratud.

Pinna käsitlemisel tuleb tegemist teha veel teisegi diferentsiaalruutvormiga, mis tekib pinnal asetseva joone kõveruse uurimisel. Joone kõverdumist antud punktis iseloomustab kõverusvektor $\mathbf{x}'' = k\mathbf{n}$ (art. 23), mille pikkus on arvuliselt võrdne joone kõverusega selles punktis ning mille siht ja suund koos puutuja sihiga määravad joone kooldumispooltasandi, kus joon ligikaudu selle punkti ümbruses asub.

Võtame vaatlusse pinna normaali sihiühikvektori (ehk pinna normaalühikvektori)

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}}. \quad (36.6)$$

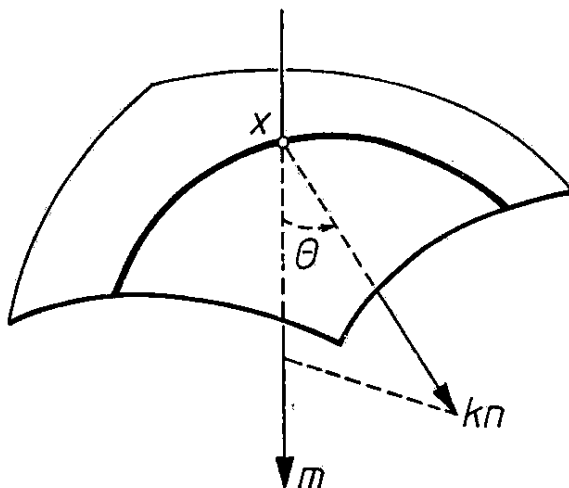
Pinnal asetseva joone *normaalkõveruseks* k_0 antud punktis nimetatakse joone kõverusvektori $\mathbf{x}'' = k\mathbf{n}$ projektsiooni ([6], lk. 125) pinna normaalühikvektori $\mathbf{m}$ sihil selles punktis.

Kui nurk pinna normaali (täpsemalt ühikvektori $\mathbf{m}$) ja joone peanormaali positiivse suuna (ehk ühikvektori $\mathbf{n}$) vahel tähistada θ , siis (joon. 38)

$$k_0 = (k\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = k \cos \theta. \quad (36.7)$$

Normaalkõveruse avaldamiseks eeldame algul, et joone punkti kohavektori avaldises (32.1) on parameeter joone loomulik parameeter s :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s)).$$



Joonis 38

Joone kõverusvektor on siis

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \frac{d}{ds} \mathbf{x}' = \frac{d}{ds} \left(\sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{x}_{\alpha} u'_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{d}{ds} \mathbf{x}_{\alpha} u'_{\alpha} + \mathbf{x}_{\alpha} u''_{\alpha} \right) = \\ &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \mathbf{x}_{\alpha\beta} u'_{\beta} u'_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{x}_{\alpha} u''_{\alpha} \end{aligned}$$

ning järelikult

$$k_0 = m \mathbf{x}'' = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (m \mathbf{x}_{\alpha\beta}) u'_{\alpha} u'_{\beta},$$

sest $m \mathbf{x}_{\alpha} = 0$. Tähistame

$$m \mathbf{x}_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}. \quad (36.8)$$

Edasi arvestame, et

$$u'_{\alpha} = \frac{du_{\alpha}}{ds} = \frac{du_{\alpha}}{\sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta}}}$$

ning kokkuvõttes saame normaalkõveruse jaoks järgmise avaldise:

$$k_0 = \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta}}{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_{\alpha} du_{\beta}}. \quad (36.9)$$

Lugejasse ongi tekkinud uus diferentsiaalruutvorm, mida nimeatakse pinna *teiseks ruutvormiks*. Kui selle kordajate valemisse (36.8) asendada pinna normaalühikvektori $\mathbf{m}$ avaldis (36.6), on tulemuseks valem

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_{\alpha\beta}}{\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}}, \quad (36.10)$$

mis sobib hästi praktilisteks arvutusteks. Et segatuletis ei sõltu diferentseerimise järjekorrast, siis $\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{\beta\alpha}$ ja seetõttu

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}. \quad (36.11)$$

Valemi (36.9) saab järelikult kirjutada kujul

$$k_0 = \frac{b_{11} du_1^2 + 2b_{12} du_1 du_2 + b_{22} du_2^2}{g_{11} du_1^2 + 2g_{12} du_1 du_2 + g_{22} du_2^2}. \quad (36.12)$$

Diferentsiaalruutvormide erilise osa pindade käsitlemisel näitas 1820-ndail aastail C. Fr. Gauss¹. Tema eeskujul kasutatakse kirjanduses mõnikord veel tänapäevalgi esimese ja teise ruutvormi kordajate jaoks järgmisi tähistusi:

$$\begin{aligned} g_{11} &= E, & g_{12} &= F, & g_{22} &= G, \\ b_{11} &= L, & b_{12} &= M, & b_{22} &= N. \end{aligned}$$

¹ Carl Friedrich Gauss (1777—1855), kuulus saksa matemaatik.

Seoses teise ruutvormiga märgime veel, et samasuse $m x_\alpha = 0$ diferentseerimisel saadavast seosest

$$m_\beta x_\alpha + m x_{\alpha\beta} = 0$$

järeldub (36.8) ja (36.11) põhjal, et

$$b_{\alpha\beta} = -x_\alpha m_\beta = -x_\beta m_\alpha. \quad (36.13)$$

Erinevalt pinna esimesest ruutvormist ds^2 , mis on positiivselt määratud, ei ole teise ruutvormi

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta = -dx dm$$

jaoks mingeid kitsendusi.

Näiteks tasandi puhul, kui

$$x = a + u_1 e_1 + u_2 e_2,$$

kus e_1 ja e_2 olgu ristuvad ühikvektorid sellel tasandil, saame:

$$dx = du_1 e_1 + du_2 e_2$$

ja esimene ruutvorm on seega

$$ds^2 = dx^2 = du_1^2 + du_2^2.$$

Et aga $m = e_1 \times e_2 = e_3 = \text{const}$, siis $dm = 0$ ja teine ruutvorm on samaselt null.

Teise näitena arvutame pöördpinna esimese ja teise ruutvormi. Siin kasutame valemeid (31.8), (31.9) ja (31.11), millest

$$g_{11} = x_1^2 = \varphi'^2 + \psi'^2, \quad g_{12} = x_1 x_2 = 0, \quad g_{22} = x_2^2 = \varphi^2 \quad (36.14)$$

ja seetõttu

$$ds^2 = [\varphi'^2(u_1) + \psi'^2(u_1)] du_1^2 + \varphi^2(u_1) du_2^2, \quad (36.15)$$

ning

$$\det |g_{\alpha\beta}| = \varphi^2(\varphi'^2 + \psi'^2).$$

Edasi leiame:

$$\begin{aligned} x_{11} &= (\varphi''(u_1) \cos u_2, \varphi''(u_1) \sin u_2, \psi''(u_1)), \\ x_{12} &= (-\varphi'(u_1) \sin u_2, \varphi'(u_1) \cos u_2, 0), \\ x_{22} &= (-\varphi(u_1) \cos u_2, -\varphi(u_1) \sin u_2, 0), \\ (x_1 \times x_2) x_{11} &= \varphi(\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'), \quad (x_1 \times x_2) x_{12} = 0, \quad (x_1 \times x_2) x_{22} = \varphi^2 \psi', \end{aligned}$$

seetõttu

$$b_{11} = \frac{\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{\varphi \psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \quad (36.16)$$

ja teiseks ruutvormiks saame

$$-dx dm = \frac{(\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi') du_1^2 + \varphi \psi' du_2^2}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Sfääri korral, mil $\varphi(u_1) = r \cos u_1$, $\psi(u_1) = r \sin u_1$,

$$ds^2 = r^2 (du_1^2 + \cos^2 u_1 du_2^2) \quad (36.17)$$

ja

$$-dx dm = r (du_1^2 + \cos^2 u_1 du_2^2);$$

siin valem (36.12) annab, et $k_0 = \frac{1}{r} = \text{const}$.

37. Dupini indikatriss ja Euleri valem. Pinna kaks ruutvormi täidavad pinna uurimisel erinevaid osi. Esimene ruutvorm võimaldab arvutada mitmesuguseid meetrilisi suurusi pinnal: kaarte pikkusi, joonte vahelisi nurki, pindalasid. Temast lähtudes saab välja arendada teatava erilise, sellel pinnal kehtiva geomeetria (vt. § 11).

Pinna teisel ruutvormil sellist iseseisvat tähendust ei ole, kuid koos esimese ruutvormiga määrab ta pinna kõverdumise ruumis. Lähteks on valem (36.12) pinnal asetseva joone normaalkõveruse k_0 jaoks. Kogu järgnev tuginebki sellele valemile (ja on eeskujuks üldse niisuguse suuruse uurimisel, mis avaldub kahe ruutvormi jagatisena, juhul kui nimetajas on positiivselt määratud ruutvorm).

Fikseerime pinna punkti. Sel korral on valemis (36.12) ruutvormide kordajateks konstantsed reaalarvud — funktsioonide $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ väärtused selles fikseeritud punktis. Võtame läbi selle punkti pinna puutujatasandil asetseva sirge sihivektoriga

$$l = l_1 x_1 + l_2 x_2. \quad (37.1)$$

Vaatleme joont pinnal, millele see sirge on puutujaks antud punktis. Sel korral puutuja sihivektor

$$dx = x_1 du_1 + x_2 du_2 \quad (37.2)$$

peab olema kollineaarne vektoriga l ning nende vektorite koordinaadid baasil $\{x_1, x_2\}$ on võrdelised:

$$du_\alpha = \omega l_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (37.3)$$

Tehes siit asendused k_0 valemisse (36.12), näeme, et lugejast ja nimetajast taandub ühine tegur ω^2 välja ja tulemuseks on valem

$$k_0(l) = \frac{b_{11}l_1^2 + 2b_{12}l_1l_2 + b_{22}l_2^2}{g_{11}l_1^2 + 2g_{12}l_1l_2 + g_{22}l_2^2}. \quad (37.4)$$

Selgub, et normaalkõverus pinna antud punktis sõltub üksnes sihist l puutujatasandil selles punktis (sest sihivektori l võib asendada iga teisega λl samas sihis, ilma et parem pool muutuks); seda näitab vasakul sümbol $k_0(l)$. Teisiti öeldes, *kaks pinnal asetsevat joont, millel on ühises punktis ühine puutuja, on selles punktis sama normaalkõverusega*. Et joone kõverus k sõltub valemi (36.7) kohaselt üksnes normaalkõverusest k_0 ja nurgast θ pinna normaali ning joone peanormaali (ehk kooldumistasandi) vahel, siis eelmisest tulemusest järeldub, et *kaks pinnal asetsevat joont, millel on ühises punktis ühine kooldumistasand, on selles punktis sama kõverusega*.

Lihtsaim antud punkti antud sihis läbiv joon pinnal on pinna sellesihiline *normaallõige* — pinna ning tema normaali läbiva tasandi ühisjoon. Sel korral $\theta = 0$ või $\theta = \pi$, mistõttu $k_0 = \pm k$ ehk $|k_0| = k$. Seega normaalkõveruse $k_0(l)$ absoluutväärtus on võrdne pinna l -sihilise normaallõike kõverusega. Seejuures $k_0(l)$ märk sõltub sellest, kummale normaali poolsirgele normaallõike kõverusvek-

tor langeb, kas m -suunalisele ($k_0(l) \geq 0$) või vastassuunalisele ($k_0(l) \leq 0$).

Seame nüüd ülesandeks uurida normaalkõveruse $k_0(l)$ muutumist pinna antud punktis, kui siht l pöörleb pinna puutujatasandil. Siin on otstarbekas rakendada järgmist võtet, mida esimesena kasutas 1813. a. Ch. Dupin¹.

Eeldades, et $k_0(l) \neq 0$, asetame pinna punkti a läbivale l -sihili- sele sirgele punktist a kahele poole lõigud pikkusega

$$r(l) = \frac{1}{\sqrt{|k_0(l)|}}. \quad (37.5)$$

Lõigu teise otspunkti tähistame z (joon. 39). Selle punkti kohavektor alguspunkti a suhtes on avaldatav baasi $\{x_1, x_2\}$ vektorite kaudu:

$$\vec{az} = z_1 x_1 + z_2 x_2.$$

Uhelt poolt punkti z konstruktsiooni ja valemi (37.4) kohaselt

$$\vec{az}^2 = r(l)^2 = \frac{1}{|k_0(l)|} = \frac{g_{11}l_1^2 + 2g_{12}l_1l_2 + g_{22}l_2^2}{|b_{11}l_1^2 + 2b_{12}l_1l_2 + b_{22}l_2^2|}, \quad (37.6)$$

teiselt poolt (36.1) järgi

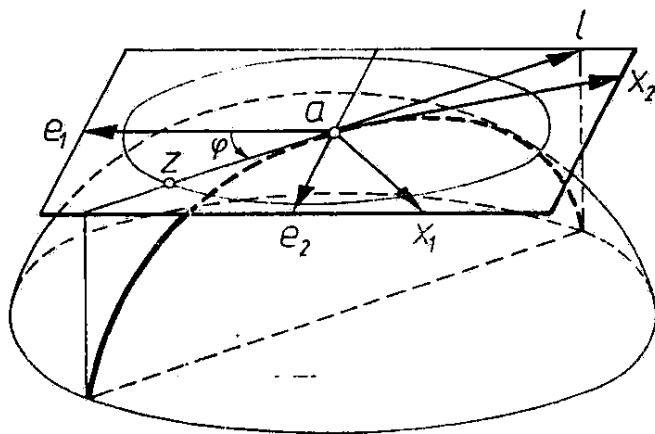
$$\vec{az}^2 = (z_1 x_1 + z_2 x_2)^2 = g_{11}z_1^2 + 2g_{12}z_1z_2 + g_{22}z_2^2.$$

Samal ajal l ja $\vec{az}$ kollineaarsuse tõttu $l_\alpha = \lambda z_\alpha$, mistõttu seoses (37.6) võib l_α asemele kirjutada z_α (sest pärast asendamist λ^2 koon- dub välja). Seda arvestades saame

$$\frac{g_{11}z_1^2 + 2g_{12}z_1z_2 + g_{22}z_2^2}{|b_{11}z_1^2 + 2b_{12}z_1z_2 + b_{22}z_2^2|} = g_{11}z_1^2 + 2g_{12}z_1z_2 + g_{22}z_2^2$$

ning järelikult punkti z koordinaadid rahuldavad võrrandit

$$|b_{11}z_1^2 + 2b_{12}z_1z_2 + b_{22}z_2^2| = 1. \quad (37.7)$$



Joonis 39

¹ Pierre Charles François Dupin [düpää'n] (1784—1873), prantsuse mate- maatik.

Et valemis (37.4) on nimetaja alati positiivne, siis vasakul absoluutväärtuse märkide vahel olev suurus on alati sama märgiga mis $k_0(l)$. Järelikult võib võrrandi (37.7) esitada ka kujul

$$b_{11}z_1^2 + 2b_{12}z_1z_2 + b_{22}z_2^2 = \begin{cases} 1, & \text{kui } k_0(l) > 0, \\ -1, & \text{kui } k_0(l) < 0. \end{cases} \quad (37.8)$$

Sihi l pöörlemisel kirjeldab punkt z seega puutujatasandil teist järku joone (kui $k_0(l)$ säilitab märgi) või selliste joonte paari (kui $k_0(l)$ muudab märki). Igal juhul on tegemist punkti a suhtes sümmeetrilise punktihulgaga, sest koos arvudega z_1, z_2 rahuldavad võrrandit ka arvud $-z_1, -z_2$.

Võrrandiga (37.7) ehk (37.8) määratud punktihulka pinna puutujatasandil nimetatakse *Dupini indikatrissiks* puutepunktis a .

Analüütilises geomeetrias selgitatakse välja kõik teist järku jooned, mis on sümmeetrilised mingi punkti suhtes (vt. [6], lk. 463): tegemist on kas ellipsi, hüperbooli või sirgepaariga. Seejuures Dupini indikatrissi konstruksioonist on selge, et punktis a lõikuvate sirgete paar siin arvesse ei tule.

Ellipsi ja paralleelsirgete paari üldvõrrandi ruutliikme osa säilitab teatavasti märgi, mistõttu võrrandi (37.8) puhul tekivad reaalsed jooned parema poole kindla märgi korral. Hüperbooli puhul kõnesolev osa aga muudab märki; nii et võrrandis (38.8) tuleb arvestada mõlemat võimalust; võrrand (37.8) määrab tegelikult kaashüperboolide paari.

Dupini indikatrissi puhul on seega tegemist ühega joonisel 40 näidatud kolmest võimalusest. Kõikidel neil juhtudel on vaadeldavatel teist järku joontel olemas kaks ristuvat peasihti, mis on ühtlasi indikatrissi sümmeetriatelgede sihtideks.

Kui puutujatasandil valida uued baasivektorid e_1 ja e_2 , mis lähevad indikatrissi peasihtides, ja $\vec{az}$ koordinaadid sellel baasil tähistada z_1^*, z_2^* , siis indikatrissi võrrand (37.8) omandab teatavasti kanoonilise kuju

$$k_1z_1^{*2} + k_2z_2^{*2} = \begin{cases} 1, & \text{kui } k_0(l) > 0, \\ -1, & \text{kui } k_0(l) < 0. \end{cases} \quad (37.9)$$

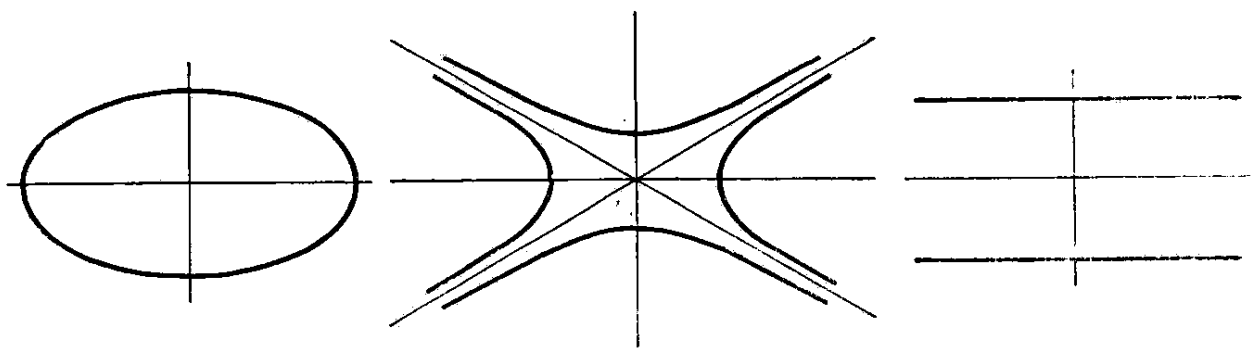
Ellipsi korral on k_1 ja k_2 samamärgilised, hüperbooli korral erimärgilised nullist erinevad suurused; paralleelsirgete paari korral on üks neist võrdne nulliga.

Siit võib saada huvitava valemi, kui minna üle polaarkoordinaatidele ϱ ja φ , kus ϱ on punkti z kaugus alguspunktist a ja φ on sihi l ja z_1^* -telje (ehk vektori e_1) vaheline nurk (joon. 39). Et (37.5) kohaselt

$$\varrho = r(l) = \frac{1}{\sqrt{|k_0(l)|}},$$

siis

$$z_1^* = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \cos \varphi, \quad z_2^* = \frac{1}{\sqrt{|k_0|}} \sin \varphi,$$



Joonis 40

kus asja lihtsustamiseks on k_0 juures jäetud ära sihi sümbol l . Pärast asendusi võrrandisse (37.9) saame

$$k_1 \frac{\cos^2 \varphi}{|k_0|} + k_2 \frac{\sin^2 \varphi}{|k_0|} = \begin{cases} 1; & \text{kui } |k_0| = k_0, \\ -1, & \text{kui } |k_0| = -k_0, \end{cases}$$

ja kui korrutada suurusega $|k_0|$, tekib valem

$$k_0 = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (37.10)$$

mida tuntakse *Euleri valemi* nime all¹.

Sellest valemist on lihtne järeldada, et k_1 ja k_2 kujutavad endast normaalkõveruse k_0 ekstremaalväärtusi. Selleks anname valemile (37.10) samasuse $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ abil kuju

$$k_0 = k_1 + (k_2 - k_1) \sin^2 \varphi$$

ning märgime, et antud punktis a ainsa siin muutuva suuruse $\sin^2 \varphi$ ekstremaalväärtusteks on 0 ja 1. Seega k_0 ekstremaalväärtused on k_1 ja k_2 .

38. Peasihid ja peakõverused. Dupini indikatrissi peasihte nimetatakse *pinna peasihtideks* antud punktis. Normaalkõveruse ekstremaalväärtusi k_1 ja k_2 , mida k_0 omandab peasihtides, nimetatakse *peakõverusteks* pinna vaadeldavas punktis. Edaspidi me eeldame tavaliselt, et baasivektorid e_1 ja e_2 ning sellele vastavalt k_1 ja k_2 on nummerdatud nii, et

$$k_1 \geq k_2. \quad (38.1)$$

Ei ole muidugi välistatud ka võimalus, et pinna punktis $k_1 = k_2$. Sel korral Euleri valemist (37.10)

$$k_0 = k_1 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = k_1,$$

¹ Euleri 1760. a. ilmunud töös oli see valem kujul

$$r = \frac{2fg}{f+g+(f-g)\cos 2\alpha}$$

kus seos meie tähistustega on järgmine: $r = \frac{1}{k_0}$, $f = \frac{1}{k_1}$, $g = \frac{1}{k_2}$, $\alpha = \varphi$. Kuju (37.10) andis valemile Ch. Dupin.

s. t. normaalkõverus ei sõltu üldse sihist. Võrrandist (37.9) nähtub, et Dupini indikatriss on siis ringjoon. Sel juhul nimetatakse pinna punkti *ümaruspunktiks*. Kui meenutada, et normaalkõverus on tõlgendatav pinna normaallõike kõverusena, saab kohe selgeks, et näiteks sfääri iga punkt on ümaruspunkt, sest normaallõigeteks on sfääri puhul kongruentsed suurringjooned. Ümaruspunktis pole peasihid määratud; soovi korral võib sellises punktis iga sihti puutujatasandil lugeda peasihiks.

Punktis, mis pole ümaruspunkt, on pinnal täpselt kaks ristuvat peasihti. Nende tegelikuks määramiseks pinna võrrandi (31.4) järgi lähtume normaalkõveruse $k_0(l)$ valemist (37.4), milles kordajad $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ on arvutatavad valemitest (36.1) ja (36.10). Et peasihtides $k_0(l)$ omandab ekstremaalväärtused, siis neis sihtides

$$\frac{\partial}{\partial l_1} k_0(l) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial l_2} k_0(l) = 0. \quad (38.2)$$

Saadud tingimuste arvestamiseks on kasulik valem (37.4) viia kujju

$$b_{11}l_1^2 + 2b_{12}l_1l_2 + b_{22}l_2^2 = k_0(l) (g_{11}l_1^2 + 2g_{12}l_1l_2 + g_{22}l_2^2).$$

Võttes nüüd mõlemal pool osatuletised, kord l_1 , kord l_2 järgi, ning arvestades tingimusi (38.2); saame seosed

$$\begin{aligned} 2b_{11}l_1 + 2b_{12}l_2 &= k_0(l) (2g_{11}l_1 + 2g_{12}l_2), \\ 2b_{12}l_1 + 2b_{22}l_2 &= k_0(l) (2g_{12}l_1 + 2g_{22}l_2). \end{aligned} \quad (38.3)$$

Vabaneme siin kordajast 2 ning elimineerime $k_0(l)$, korrutades selleks teise seose pooli esimese seose parema poole suluavaldisega, seejärel esimese seose pooli teise parema poole suluavaldise vastandväärtusega ning liites seejärel tulemused. Saame:

$$(b_{12}l_1 + b_{22}l_2)(g_{11}l_1 + g_{12}l_2) - (b_{11}l_1 + b_{12}l_2)(g_{12}l_1 + g_{22}l_2) = 0.$$

Siit

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})l_1^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})l_1l_2 + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})l_2^2 = 0 \quad (38.4)$$

ehk

$$\begin{vmatrix} l_2^2 & -l_1l_2 & l_1^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (38.5)$$

Sihti määrava suhte $\lambda = l_1 : l_2$ (kui $l_2 \neq 0$) või $\lambda' = l_2 : l_1$ (kui $l_1 \neq 0$) jaoks oleme saanud ruutvõrrandi, mis ümaruspunkti korral osutub samasuseks.

Viimane võimalus leiab aset siis, kui võrrandi (38.5) vasakul pool oleva determinandi kaks viimast rida on võrreldised:

$$b_{\alpha\beta} = k_0 g_{\alpha\beta}.$$

Ümaruspunkti tunnuseks on seega pinna esimese ja teise ruutvormi kordajate võrreldisus selles punktis:

$$\frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}}.$$

Veelgi kitsam erijuht on selline, mil pinna vaadeldavas punktis $b_{\alpha\beta}=0$. Sel korral valemi (37.4) põhjal $k_0(l) \equiv 0$, mistõttu see punkt on pinna kõikide normaallõigete sirgestuspunkt. Sellist pinna punkti nimetatakse pinna *tasandumpunktiks*. Dupini indikatrissi defineerimisel, kus alustasime niisugusest sihist l , et $k_0(l) \neq 0$, jäi tasandumpunkt vaatlusest välja. Sellises punktis pole Dupini indikatriss üldse määratud. Näiteks kõik tasandi punktid on tasandumpunktid; pisut huvitavam näide on antud art-s 39.

Eeldame, et pinna punkt ei ole ümarus- ega tasandumpunkt. Sel korral on ruutvõrrandil (38.4), kui kirjutada ta välja λ või λ' jaoks, kaks lahendit. Need määravadki kaks peasihti.

Peakõveruste k_1 ja k_2 leidmiseks tuleb süsteemist (38.3) elimineerida l_1 ja l_2 . Selleks on kasulik süsteem korraldada kujju

$$\begin{aligned}(b_{11} - k_0 g_{11}) l_1 + (b_{12} - k_0 g_{12}) l_2 &= 0, \\ (b_{12} - k_0 g_{12}) l_1 + (b_{22} - k_0 g_{22}) l_2 &= 0,\end{aligned}$$

kus k_0 tähendab praegu üht kahest peakõverusest. Saadud homogeensel süsteemil l_1 ja l_2 jaoks on mittetriviaalne lahend — peasihtilise vektori $l \neq 0$ koordinaadipaar, seetõttu süsteemi determinant on võrdne nulliga ([1], lk. 74). Siit saame k_1 ja k_2 arvutamiseks võrrandi

$$\begin{vmatrix} b_{11} - k_0 g_{11} & b_{12} - k_0 g_{12} \\ b_{12} - k_0 g_{12} & b_{22} - k_0 g_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad (38.6)$$

mis on samaväärne ruutvõrrandiga

$$\begin{aligned}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)k_0^2 - (g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12})k_0 + \\ + (b_{11}b_{22} - b_{12}^2) = 0.\end{aligned} \quad (38.7)$$

Selle lahendid ongi peakõverused.

Leiame näiteks pöördpinna peasihid. Art-i 36 lõpus selgus, et pöördpinna puhul $g_{12}=b_{12}=0$. Võrrandil (38.4) on sel korral kuju

$$(g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})l_1l_2 = 0,$$

kusjuures suluavaldise võrdumisel nulliga oleks esimese ja teise ruutvormi kordajad võrdelised, s.t. tegemist oleks ümaruspunktiga. Kui see võimalus välja jätta, on ülejäänud punktides peasihid määratud sellega, et ühe korral $l_2=0$, teise korral $l_1=0$ — need on aga meridiaani ja paralleeli sihid.

Võrrandist (38.6) peakõveruste määramiseks järeldub, et

$$(b_{11} - k_0 g_{11})(b_{22} - k_0 g_{22}) = 0,$$

mistõttu lahendid on

$$k_1 = \frac{b_{11}}{g_{11}}, \quad k_2 = \frac{b_{22}}{g_{22}} \quad (38.8)$$

(tingimuse (38.1) rahuldamiseks on võib-olla vaja indeksid ümber nummerdada).

39. Täis- ja keskmine kõverus. Peakõverused k_1 ja k_2 kui ruutvõrrandi (38.7) lahendid avalduvad tuntud lahendusvalemi järgi üldjuhul üsna keeruliselt ruutvormide kordajate $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ kaudu, sest olulisi algebralisi lihtsustusi siin ei toimu. Seetõttu etendavad

pinnateoorias märksa olulisemat osa peakõveruste korrutis ja aritmeetiline keskmine

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2), \quad (39.1)$$

mis Viète'i (Vieta) valemite põhjal ([1], lk. 269) avalduvad võrrandi (38.7) kordajate kaudu teatavasti järgmiselt:

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det |b_{\alpha\beta}|}{\det |g_{\alpha\beta}|}, \quad (39.2)$$

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (39.3)$$

Suurust K nimetatakse pinna *täiskõveruseks* (ka *Gaussi kõveruseks*¹), suurust H aga pinna *keskmiseks kõveruseks* vaadeldavas punktis. Võrrand (38.7) on nende suuruste abil kirjutatav järgmiselt:

$$k_0^2 - 2Hk_0 + K = 0. \quad (39.4)$$

Täis- ja keskmise kõveruse abil on lihtne pinna punkte liigitada.

Art-s 37 selgus, et kui k_1 ja k_2 on nullist erinevad ja kas sama- või erimärgilised, siis Dupini indikatriss on vastavalt kas ellips või hüperbool. Pinna punkti nimetatakse sel korral kas *elliptiliseks* või *hüperboolseks punktiks*.

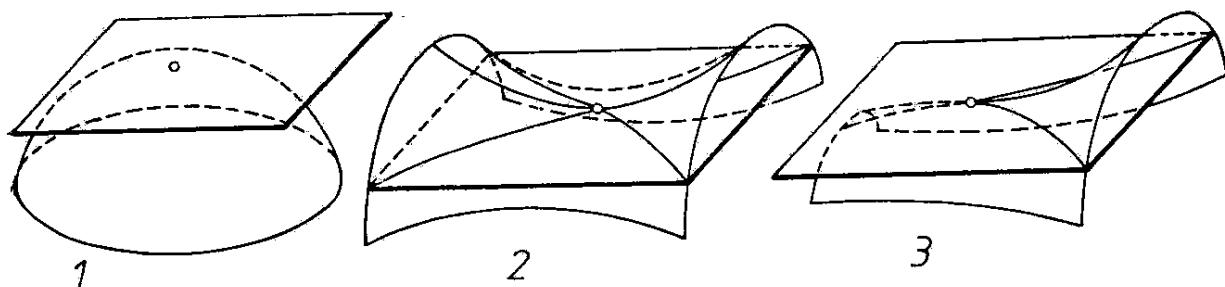
Valemi (39.1) põhjal on elliptilise punkti tunnuseks $K > 0$. Euleri valemist (37.10) järeldeb, et siis on k_0 kogu aeg sama märgiga, seega pinna normaallõige selles punktis on alati puutujatasandist ühele poole suunduva kõverusvektoriga, mistõttu normaallõige kooldub elliptilise punkti ümbruses puutujatasandist alati ühele poole. Pind on seega selle punkti ümbruses munajas (joon. 41, 1). Niisugused on näiteks ellipsoidi kõik punktid. Kui pinnal on ümaruspunkte, mis pole tasandumpunktid, siis need on alati elliptilised, sest neis $K = k_1^2 > 0$.

Hüperboolse punkti tunnuseks on $K < 0$ ning k_0 võib olla nii ühe kui teise märgiga, seejuures ka null. Pinna normaallõige on selle punkti ümbruses kooldunud kord ühele, kord teisele poole puutujatasandit. Niisiis, pind on hüperboolse punkti ümbruses saduljas (joon. 41, 2). Niisugused on näiteks hüperboolse paraboloidi või ühekattelise hüperboloidi kõik punktid.

Pinna hüperboolses punktis saab välja eraldada sihid, mille puhul $k_0(l) = 0$ ja millele lähenedes $r(l) = \frac{1}{\sqrt{|k_0(l)|}} \rightarrow \infty$. Need on

seega Dupini indikatrissi (kui kaashüperboolide paari) asümptootide sihid ning neid nimetatakse *pinna asümptootilisteks sihtideks* vaadeldavas hüperboolses punktis (joon. 40). Tingimusest $k_0(l) =$

¹ C. Fr. Gauss tõestas 1827. aastal, et K on avaldatav ka üksnes esimese ruutvormi kordajate ja nende osatuletiste kaudu (vt. art. 48).



Joonis 41

$=0$ ja valemist (37.4) järeldub, et l on asümptootilise sihiga parajasti siis, kui

$$b_{11}l_1^2 + 2b_{12}l_1l_2 + b_{22}l_2^2 = 0. \quad (39.5)$$

Euleri valemist (37.10) järeldub, et asümptootilise sihi korral $k_1 \cos^2 \varphi_0 + k_2 \sin^2 \varphi_0 = 0$ ehk

$$\tan \varphi_0 = \pm \sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}. \quad (39.6)$$

Hüperboolse punkti eritüübiga on tegemist juhul, kui $K \neq 0$ ja $H = 0$. Sel korral $k_2 = -k_1$, s.t. $K = -k_1^2 < 0$ ning viimasest valemist $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{4}$, seega asümptootilised sihid on risti. Asümptootiliste sihtide ristumisest järeldub omakorda, et $H = 0$.

On jäänud uurida punkte, kus $K = 0$, s.t. $k_1 k_2 = 0$. Kui siin üks peakõverustest, näiteks k_2 , on nullist erinev ja koos sellega ka $H \neq 0$, siis Dupini indikatriss on paralleelsirgete paar. Pinna punkti nimetatakse sel korral *paraboolseks* punktiks. Euleri valemist (37.10) on näha, et normaalkõverus k_0 säilitab vaadeldavas punktis märgi ning pind jääb selle punkti ümbruses puutujatasandist peaaegu kogu ulatuses ühele ja samale poole. Erandlik olukord võib siin olla seotud selle ainsa sihiga, kus $k_0 = 0$ — selleks on praegu, mil $k_1 = 0$, üks peasihtidest, nimelt see, mis on paralleelne Dupini indikatrissi moodustavate paralleelsirgetega. Pinna selles sihis tehtud kaldlöigetel, mille puhul $\cos \theta = 0$, on valemi (36.7) põhjal vaadeldavas punktis $k = 0$, selline punkt on aga üldjuhul käänupunkt ([2], lk. 265, 287), mistõttu niisugused kaldlöiked võivad minna ka teisele poole puutujatasandit (joon. 41,3)

Vaatleme näiteks pöördpinda juhul, mil meridiaan on antud $x_1 x_3$ -tasandil võrrandiga

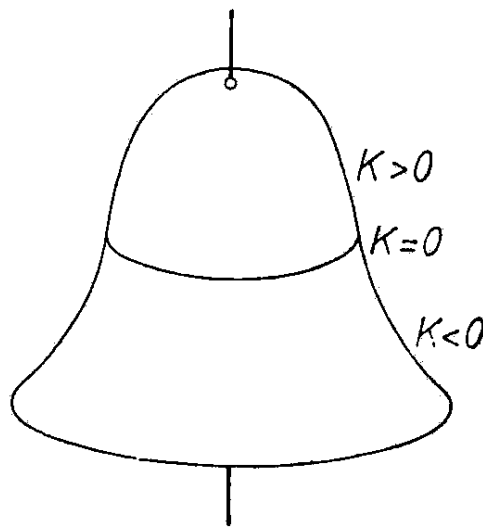
$$x_1 = f(x_3),$$

s.t. funktsiooni f graafikuna. Sel korral võrrandis (31.2)

$$\psi(t) = t, \quad \varphi(t) = f(t),$$

mistõttu (36.14) ja (36.16) põhjal

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + f'^2, & g_{12} &= 0, & g_{22} &= f^2, \\ b_{11} &= -\frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2}}, & b_{12} &= 0, & b_{22} &= \frac{f}{\sqrt{1 + f'^2}}. \end{aligned}$$



Joonis 42

Järelikult valemi (39.2) järgi

$$K = - \frac{f''}{f(1+f'^2)^2} \quad (39.7)$$

(vt. ka (38.8)).

Pöördpinna täiskõveruse K märk ja koos sellega ka pinna punkti liik sõltub seega f'' märgist. Kui $K > 0$, siis $f'' < 0$ ja meridiaan on selle punkti ümbruses kumer, s. t. punkt on elliptiline. Kui $K < 0$, siis $f'' > 0$ ja meridiaan on nõgus — punkt on hüperboolne (joon. 42). Meridiaanide sirgestuspunktid, kus $f'' = 0$ (üldjuhul käänupunktid), on pinna paraboolsed punktid.

Erijuhul võivad pinna kõik punktid olla paraboolsed. Kui pöördpinna meridiaanid on näiteks sirged ja pöördpind on seega pöördsilinder või -koonus, siis $f'' = 0$ ja $K = 0$.

Tasandumispunktiga on tegemist siis, kui $k_1 = k_2 = 0$ ehk $K = 0$, $H = 0$; pinnal võib olla selle punkti ümbruses väga mitmesuguse ehitus. Näiteks kui silindrilise pinna sirgjoonelisi moodustajaid risti lõikaval joonel (nn. juhtjoonel) on olemas sirgestuspunkt, siis seda läbiva moodustaja kõik punktid on tasandumispunktid. Kuid tasandumispunkt võib esineda ka isoleeritult.

Vaatleme näiteks funktsiooni

$$x_3 = x_2^3 - 3x_1^2 x_2 \quad (39.8)$$

ruumilisel graafikul punkti, kus $x_1 = x_2 = 0$.

Üldiselt funktsiooni $x_3 = f(x_1, x_2)$ graafiku korral (31.5) ja (36.14) põhjal

$$g_{11} = 1 + f_{x_1}^2, \quad g_{12} = f_{x_1} \cdot f_{x_2}, \quad g_{22} = 1 + f_{x_2}^2, \quad (39.9)$$

$$\det |g_{\alpha\beta}| = 1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2;$$

edasi

$$x_{11} = (0, 0, f_{x_1 x_1}), \quad x_{12} = (0, 0, f_{x_1 x_2}), \quad x_{22} = (0, 0, f_{x_2 x_2})$$

ning seega

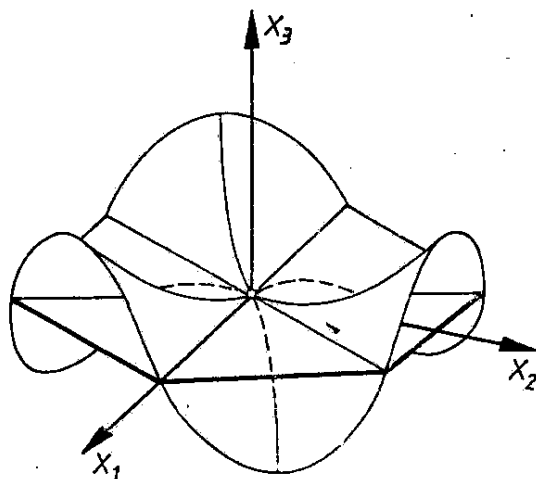
$$b_{\alpha\beta} = \frac{f_{x_\alpha x_\beta}}{\sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}}. \quad (39.10)$$

Funktsiooni (39.8) puhul

$$f_{x_1} = -6x_1 x_2, \quad f_{x_2} = 3(x_2^2 - x_1^2),$$

$$f_{x_1 x_1} = -6x_2, \quad f_{x_1 x_2} = -6x_1, \quad f_{x_2 x_2} = 6x_2$$

ning punktis $x_1 = x_2 = 0$ seega $f_{x_\alpha x_\beta} = 0$, järelikult $b_{\alpha\beta} = 0$ — tegemist on tõesti graafiku tasandumispunktiga.



Joonis 43

Graafiku kuju selgitamiseks esitame võrrandi (39.8) kujul

$$x_3 = x_2(x_2 - \sqrt{3}x_1)(x_2 + \sqrt{3}x_1).$$

Graafik lõikab x_1x_2 -tasandit, millel on võrrand $x_3=0$ ning mis on antud juhul puutujatasandiks tasandumispunkti, mööda kolme sirget, mis moodustavad omavahel võrdsed nurgad suurusega $\pi/3$. Lihtne analüüs näitab, et graafik on joonisel 43 näidatud kujuga. Niisugust lihtpinda nimetatakse «ahvisadulaks» (sest sellel on ette nähtud koht nii ahvi jalgade kui ka saba jaoks).

40. Kõverusjooned. Normaalkõverust ja Dupini indikatrissi ning nendega seotud sihte ja suurusi uurisime eelmistes artiklites pinna fikseeritud punktis, kusjuures uurimine haaras tegelikult selle punkti lähemat ümbrust pinnal. Selgunud seaduspärasusi, mis kehtivad tegelikult suvalise väikese ümbruse korral, võib kasutada ka pinna suurte piirkondade käsitlemisel.

Olgu antud lihtpind $\{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$ ja piirkond $\Delta \subset D$. Viimasele lihtpinnal vastava piirkonna U puhul (vt. art. 36) eeldame, et ta ei sisalda ümarus- ega tasandumispunkte. (Näiteks sfääri ja tasandi piirkonnad jäävad kohe vaatlusest välja.) Sellise piirkonna U igas punktis on pinnal kaks ristuvat peasihti, millest üks vastab suuremale peakõverusele k_1 , teine väiksemale peakõverusele k_2 . Esimesed moodustavad piirkonnas U ühe, teised teise sihivälja (vrd. [8], lk. 18 ja 19), mis koos määratakse võrrandiga (38.4) ehk (38.5), kus $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ on nüüd funktsioonid osapiirkonnas Δ .

Antud sihivälja puhul kõneldakse selle sihivälja integraaljoontest kui sellistest joontest piirkonnas U , mille puutuja siht igas punktis ühtib sihivälja sihiga selles punktis. Kui viimase määrab vektor

$$l = l_1(u_1, u_2)x_1 + l_2(u_1, u_2)x_2,$$

siis integraaljoone puutuja sihivektori

$$dx = x_1 du_1 + x_2 du_2$$

kollineaarsus vektoriga l on samaväärne nende vektorite koordinaatide võrdelisusega:

$$du_\alpha = \omega l_\alpha; \quad \alpha = 1, 2.$$

Võrrandist (38.4) saame pärast läbikorrutamist teguriga ω^2 ja asendusi $\omega l_1 = du_1$, $\omega l_2 = du_2$ järgmise teise astme diferentsiaalvõrrandi:

$$(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}) du_1^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}) du_1 du_2 + (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}) du_2^2 = 0. \quad (40.1)$$

Seejuures on ette teada, et vasak pool on lahutatav kahe lineaarteguri korrutiseks:

$$[M_1(u_1, u_2) du_1 + N_1(u_1, u_2) du_2] [M_2(u_1, u_2) du_1 + N_2(u_1, u_2) du_2] = 0,$$

sest piirkonna U igas punktis on pinnal olemas kaks peasihti. Nii saame ühe sihivälja integraaljoonte määramiseks sümmeetrilisel kujul antud diferentsiaalvõrrandi ([8], lk. 25)

$$M_1(u_1, u_2) du_1 + N_1(u_1, u_2) du_2 = 0, \quad (40.2)$$

teise sihivälja puhul analoogiliselt teise samalaadse võrrandi. Võrrandi (40.2) saab eeldusel $N_1(u_1, u_2) \neq 0$ teisendada kujju

$$\frac{du_2}{du_1} = f(u_1, u_2) \quad (40.3)$$

(või eeldusel $M_1(u_1, u_2) \neq 0$ kujju $\frac{du_1}{du_2} = g(u_1, u_2)$), mistõttu diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja ainsuse teoreemist ([8], lk. 11, teoreem C) järeldub, et piirkonna U iga punkti läbib parajasti üks esimeste peasihtide välja integraaljoon. Analoogiliselt läbib seda punkti ka parajasti üks teise peasihtide välja integraaljoon.

Peasihtide välja integraaljooni nimetatakse *pinna kõverusjoonteks*. Diferentsiaalvõrrandi (40.3) integraaljooned moodustavad jooneparve ([8], lk. 19); järelikult on *pinnal piirkonnas U kaks kõverusjoonte parve*. Peasihtide ristumise tõttu pinna igas punktis lõikavad ka eri parvede kõverusjooned piirkonna U kõikides punktides teineteist risti ehk ortogonaalselt. Öeldakse, et *kõverusjooned moodustavad piirkonnas U ortogonaalse joonevõrgu — kõverusjoonte võrgu*.

Kõverusjoone huvitav ja ühtlasi iseloomulik omadus järeldub süsteemist (38.3). Kui see kirjutada näiteks kõverusjoonte esimese parve jaoks:

$$\sum_{\beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_{\beta} = k_1 \sum_{\beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_{\beta}$$

ja arvestada võrdusi $b_{\alpha\beta} = -x_{\alpha} m_{\beta}$, $g_{\alpha\beta} = x_{\alpha} x_{\beta}$, saame

$$-\sum_{\beta=1}^2 x_{\alpha} m_{\beta} du_{\beta} = k_1 \sum_{\beta=1}^2 x_{\alpha} x_{\beta} du_{\beta}$$

ehk

$$x_{\alpha} (dm + k_1 dx) = 0.$$

Lisades siia samasuse

$$m (dm + k_1 dx) = 0,$$

leiame, et piki esimese parve kõverusjoont arvutatud $dm + k_1 dx$ on risti kolme lineaarselt sõltumatu vektoriga x_1, x_2 ja m ning on seega nullvektor:

$$dm = -k_1 dx. \quad (40.4)$$

Sama võib korrata ka teise kõverusjoonte parve korral, seega piki selle parve kõverusjoont

$$dm = -k_2 dx. \quad (40.5)$$

Valemeid (40.4) ja (40.5) nimetatakse *Rodrigues'i valemiteks*¹. Nendest järeldub kõverusjoone järgmine omadus: *piki kõverusjoont võetud pinna normaalid moodustavad tasanduva pinna (ehk torsi)*. Tõestuseks uurime normaalidest sel viisil moodustatud joonpinna puutujatasandi käitumist puutepunkti liikumisel mööda üht normaali. Kõnesolev joonpind määratakse võrrandiga

$$x = x(t) + \tau m(t),$$

kus $x(t)$ on kõverusjoone punkti kohavektor, järelikult

$$dx = dx(t) + d\tau m(t) + \tau dm(t)$$

ning Rodrigues'i valemite põhjal

$$dx = (1 - k_a \tau) dx(t) + d\tau m(t),$$

kus $\alpha = 1$ või $\alpha = 2$. Siit ongi näha, et vaadeldava joonpinna puutujatasandi riht on τ väärtusest sõltumatult määratud ortogonaalsete vektoritega $dx(t) = x'(t)dt$ ja $m(t)$, s.t. puutujatasand läbib alati kõverusjoone antud punktis võetud puutujat ja pinna normaali selles punktis.

Vastupidiselt arutledes on võimalik samade valemite kaudu kindlaks teha ka vastupidine väide: *joon, piki mida pinna normaalid moodustavad tasanduva pinna, on pinna kõverusjoon*. Põhjenduse üksikasjad jätame lugeja hooleks.

Näiteks pöördpinna peasihid on art-i 38 näite põhjal meridiaani ja paralleeli sihid. Seetõttu kõverusjoonte võrk moodustub meridiaanidest ja paralleelidest. Pinna normaalid piki meridiaani asuvad kõik meridiaani ja pinna pöördetelge läbival tasandil ning moodustavad tasanduva pinna — selle tasandi teatava osa. Pinna normaalid piki paralleeli moodustavad koonilise pinna tipuga teljel, see pind on samuti tasanduv pind.

41. Asümptootjooned. Kõverusjoonte võrk on olemas igal pinnal sellises piirkonnas U , mis ei sisalda ümarus- ega tasandumispunkte. (Meenutame, et viimastes on peasihid määramata; seetõttu näiteks sfääril ja tasandil jäävad kõverusjooned määramatuks — iga joont võib soovi korral vaadelda kõverusjoonena.)

Sellises piirkonnas U , mis koosneb hüperboolsetest punktidest, s.t. kus $K < 0$, saab lisaks näidata veel ühe huvipakkuva joonevõrgu, mis on seotud asümptootiliste sihtidega. Asümptootiliste sihtide välja integraaljooni nimetatakse *pinna asümptootjoonteks*.

¹ Olinde Rodrigues [rodriig] (1794—1851), prantsuse matemaatik.

Et vaadeldava piirkonna U igas punktis on olemas kaks peasihtide suhtes sümmeetrilist asümptootilist sihti — need, kus $k_0=0$ —, siis on pinnal piirkonnas U olemas asümptootjoonte võrk. Põhjendus on samasugune nagu kõverusjoonte korral ning tugineb asümptootilise sihi tingimusest (39.5) tuleneva teise astme diferentsiaalvõrrandi

$$b_{11}du_1^2 + 2b_{12}du_1du_2 + b_{22}du_2^2 = 0 \quad (41.1)$$

uurimisele.

Normaalkõveruse k_0 avaldise (36.7) põhjal piki asümptootjoont $k \cos \theta = 0$. Seega joon pinnal on asümptootjoon parajasti siis, kui tema punktidest igaüks on kas 1) joone sirgestuspunkt (kui $k=0$) või 2) selline, et joone kooldumistasand selles punktis ühtib pinna puutujatasandiga samas punktis (kui $\cos \theta = 0$ ehk $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Nurk φ_0 , mille asümptootjoon moodustab ühega kõverusjoontest, määratakse valemist (39.6). Sellest järeldub, et asümptootjoonte võrk on ortogonaalne parajasti siis, kui $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{4}$, s.t. kui $\tan \varphi_0 = \pm 1$. Sel korral $-k_1:k_2 = 1$ ehk $H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = 0$.

Pinda, mille keskmine kõverus H on samaselt null, nimetatakse *minimaalpinnaks*. Niisiis, asümptootjoonte võrk hüperboolsetest punktidest koosneval pinnal on ortogonaalne võrk siis ja ainult siis, kui pind on minimaalpind.

Minimaalpind on saanud oma nimetuse järgmisel põhjusel ([5], lk. 172): kui nõuda, et pinnal mingi kinnise joonega piiratud piirkonna U pindala oleks väiksem igast sama joont läbiva lähedase pinna selle joone sisse jääva piirkonna pindalast, siis sellest järeldub, et pind peab U ulatuses olema omadusega $H=0$, s.t. minimaalpind. Sellest tuleneb võimalus realiseerida minimaalpinda mingile kontuurile tõmmatud õhukese seebikelmene. Tõepoolest, kui kelme on sedavõrd õhuke, et raskusjõudu pole vaja arvestada, siis pindpinevuse tõttu võtab kelme just sellise asendi, et kontuuri sisse jääv pindala on minimaalne; järelikult see asend vastab teatavale minimaalpinnale.

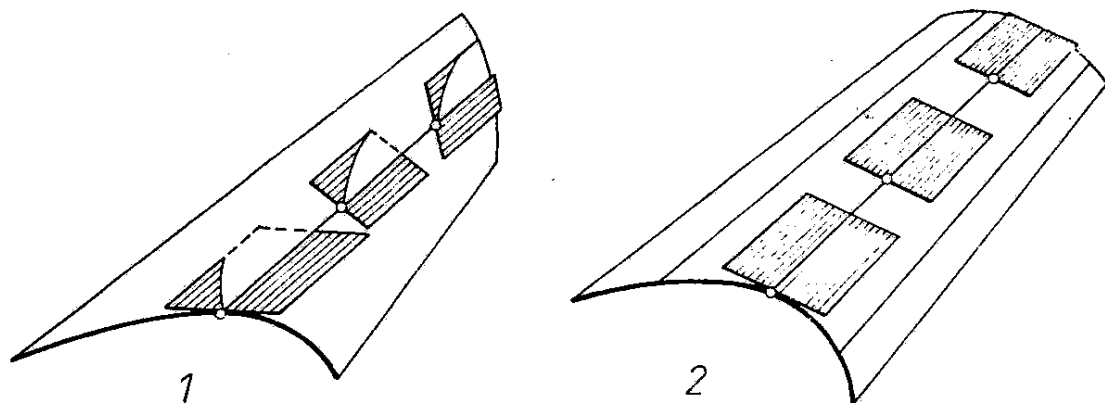
Seoses asümptootjoontega märgime veel, et iga pinnal asetsev sirge on kindlasti selle pinna asümptootjoon, sest sirge puhul $k=0$ ja muidugi $k_0=k \cos \theta = 0$. Seetõttu näiteks ühekattelise hüperboloidi või hüperboolse paraboloidi asümptootjoonte võrk ühtib sirgjooneliste moodustajate võrguga ([6], lk. 372, 374).

Huvitav on lähemalt uurida üldse sirgetest koosnevaid pindu, mida me art-s 35 nimetasime joonpindadeks (joon. 44). Et iga üksik sirge on esitatav võrrandiga

$$x = a + tk,$$

siis joonpind on järelikult esitatav võrrandiga

$$x = a(u_2) + u_1 k(u_2).$$



Joonis 44

Siin tuleb muidugi eeldada, et $a(u_2)$ ja $k(u_2)$ on pidevalt diferentseeruvad teatavas piirkonnas T . Sel korral

$$x_1 = k, \quad x_2 = a' + u_1 k';$$

edasi tuleb välja jätta iseärased punktid, kus $x_1 \parallel x_2$, kui neid leidub.

Järgnevalt arvutame

$$x_{11} = 0, \quad x_{12} = k', \quad x_{22} = a'' + u_1 k''.$$

Valemite (36.10) kohaselt

$$b_{11} = 0, \quad b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} (k, a' + u_1 k', k') = \frac{1}{\sqrt{g}} (ka'k'),$$

kus $g = \det |g_{\alpha\beta}|$; järelikult

$$K = -\frac{1}{g^2} (ka'k')^2. \quad (41.2)$$

Erijuhul, kui joonpind on tasanduv (joon. 44,2), jääb tema normaalvektor

$$x_1 \times x_2 = (k \times a') + u_1 (k \times k')$$

samasihiliseks puutepunkti liikumisel mööda sirgjoonelist moodustajat, s.t. parametri u_1 muutumisel vabalt fikseeritud u_2 korral. See on aga võimalik siis ja ainult siis, kui $k \times a' \parallel k \times k'$, ehk teisiti: kui $ka'k' = 0$. Seega joonpinnal on samaselt nulliga võrduv täiskõverus parajasti siis, kui ta on tasanduv pind (ehk tors).

Joonpinna teise erijuhuna vaatleme püstkonoidi. Nii nimetatakse joonpinda, mille sirgjoonelised moodustajad lõikavad teatavat fikseeritud sirget (telge) täisnurga all. Võttes selle sirge x_3 -teljeks, saame, et $a(u_2) = u_2 e_3$ ja $k(u_2) = k_1(u_2) e_1 + k_2(u_2) e_2$. Sel korral

$$ka'k' = (k_1 e_1 + k_2 e_2, e_3, k'_1 e_1 + k'_2 e_2) = -k_1 k'_2 + k_2 k'_1$$

ja

$$K = -\frac{1}{g^2} (k_1 k'_2 - k_2 k'_1)^2.$$

Vektori k võib siin alati valida ühikvektorina; siis $k_1^2 + k_2^2 = 1$ ja seega leidub $\varphi(u_2)$ nii, et

$$k_1(u_2) = \cos \varphi(u_2), \quad k_2(u_2) = \sin \varphi(u_2).$$

Arvutades tuletised $k'_1 = -\sin \varphi \cdot \varphi'$, $k'_2 = \cos \varphi \cdot \varphi'$ ja asendades K avaldisse, saame

$$K = -\frac{1}{g^2} \varphi'^2(u_2), \quad (41.3)$$

seega püstkonoid on tasanduv üksnes siis, kui $k = \text{const}$, s.t. kui ta sirgjoonelised moodustajad on paralleelsed, s.t. kui ta on tasand.

Eeldusel $|k|=1$ saame püstkonoidi jaoks

$$g_{11}=k^2=1, \quad g_{12}=k(e_3+u_1k')=0, \quad g_{22}=1+u_1^2k'^2.$$

Järelikult (39.3) põhjal

$$H=\frac{b_{22}}{2g},$$

kus (36.10) järgi

$$b_{22}=\frac{1}{\sqrt{g}}(k, e_3+u_1k', u_1k'')=\frac{u_1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ u_1k'_1 & u_1k'_2 & 1 \\ k''_1 & k''_2 & 0 \end{vmatrix}=-\frac{u_1}{\sqrt{g}}(k_1k''_2-k_2k''_1).$$

Et $k''_1=-\cos\varphi\cdot\varphi'^2-\sin\varphi\cdot\varphi''$, $k''_2=-\sin\varphi\cdot\varphi'^2+\cos\varphi\cdot\varphi''$, siis

$$H=-\frac{u_1\varphi''(u_2)}{2g\sqrt{g}}. \quad (41.4)$$

Selgub, et püstkonoidi telje punktides, kus $u_1=0$, kehtib võrdus $H=0$. Ainsad püstkonoidid, mille puhul $H\equiv 0$, on sellised, kus $\varphi''(u_2)=0$, s. t. $\varphi'(u_2)=\alpha=\text{const}$ ja $\varphi(u_2)=\alpha u_2+\beta$. Tähistame $u_2^*=\alpha u_2+\beta$. Kui $\alpha=0$, siis $\varphi'(u_2)=0$,

$K=0$ ja tegemist on tasandiga. Kui $\alpha\neq 0$, siis tähistame $\alpha^{-1}=a$ ja saame $u_2=a(u_2^*-\beta)$. Võttes uueks alguspunktiks punkti $o^*(0,0,a\beta)$, leiame, et

$$x=(u_1\cos u_2^*, u_1\sin u_2^*, au_2^*). \quad (41.5)$$

Saadud püstkonoid, mille sirgjoonelise moodustaja lõikepunkt teljega nihkub võrdeliselt selle sirge pöördenurgaga u_2^* — võrdeteguriks on a —, on püsthelikoid (vt. harjutusülesanne 50).

Seega ainsad minimaalpinnad püstkonoidide seas on tasandid ja püsthelikoidid.

Et püsthelikoidi üks asümptootjoonte parv koosneb sirgjoonelistest moodustajatest ja püsthelikoidi kui minimaalpinna asümptootjoonte võrk on ortogonaalne, siis teine asümptootjoonte parv koosneb nende moodustajate ortogonaalsetest trajektoridest — krüvijoontest.

Olles nüüd käsitlenud asümptootjoonte võrke hüperboolsetest punktidest koosnevatel pindadel, seame küsimuse asümptootjoonte olemasolust ja omadustest teistsugustel eeldustel. Elliptilistest punktidest koosnevas piirkonnas asümptootjooni pole, sest seal on k_1 ja k_2 kõikjal samamärgilised ning (39.6) kohaselt asümptootilisi sihte pole. Jääb uurida paraboolsetest punktidest koosnevat piirkonda, kus $K\equiv 0$. Selles piirkonnas on üks peakõverustest samaselt null; olgu näiteks $k_1\equiv 0$. Sel korral on vastava kõverusjoonte parve jooned ühtlasi asümptootjooned ning et valemi (39.6) järgi $\varphi_0=0$, siis teisi asümptootjooni polegi. Rodrigues'i valemi (40.4) põhjal piki neid jooni

$$dm=0,$$

s. t. $m=\text{const}$. Sel puhul

$$d(mx)=m\,dx=0,$$

seega joone punkti kohavektor rahuldab teatava tasandi võrrandit

$$mx=p,$$

kus p on selle joonega seotud konstant.

See tasand on risti pinna normaalühikvektoriga $\mathbf{m}$, mis piki seda joont ei muutu ning osutub seetõttu pinna puutujatasandiks uuritava joone igas punktis. Tähendab, puutujatasandid puutuvad pinda mööda terveid niisuguseid «asümptootilisi kõverusjooni». Viimaseid on aga üheparameetriline parv; järelikult moodustavad ka pinna puutujatasandid üheparameetrilise parve ning pind osutub seega vaadeldava piirkonna ulatuses tasandite üheparameetrilise parve mähispinnaks — torsiks või selle osaks (art. 35). Asümptootjoon, mida mööda toimub parve tasandi ja torsi puutumine, on tasandi-parve karakteristik (art. 34), milleks on teatavasti sirge — torsi sirgjooneline moodustaja.

Arvestada veel äsja saadud tulemust, et torsi punktides $K \equiv 0$, võime kokkuvõttes sõnastada järgmise lause:

paraboolsetest punktidest koosneva piirkonna ulatuses on pind tors või selle osa, kusjuures torsi sirgjoonelist moodustajate parv on üheks kõverusjoonte parveks ning samaaegselt ka ainus asümptootjoonte parv.

Kui pinna teatav piirkond U koosneb tasandumispunktidest, siis on tegemist tasandi osaga. Tõepoolest, et tasandumispunktis $b_{\alpha\beta} = 0$, siis U ulatuses

$$b_{\alpha\beta} = -x_{\alpha}m_{\beta} = 0$$

ning et ka $\mathbf{m}m_{\beta} = 0$, siis $\mathbf{m}_{\beta} = 0$, mistõttu $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = \text{const}$. Samasusest $\mathbf{m} d\mathbf{x} = 0$ järeldub nüüd $d(\mathbf{m}_0\mathbf{x}) = 0$ ehk $\mathbf{m}_0\mathbf{x} = \mathbf{p} = \text{const}$ — pinna punkti kohavektor $\mathbf{x}$ rahuldab U ulatuses teatava tasandi võrrandit.

Märgime lõpuks veel, et funktsiooni $K(u_1, u_2)$ pidevuse tõttu on igal elliptilisel punktil teatav elliptilistest punktidest koosnev ümborus ja igal hüperboolsel punktil teatav hüperboolsetest punktidest koosnev ümbrus. Kuid paraboolsel punktil ei tarvitse olla paraboolsetest punktidest koosnevat ümbrust. Kui torsid ja nende osad (ning samuti tasandumispunktidest koosnevad tasandilised piirkonnad) vaatlusest välja jätta, siis tingimuse $K(u_1, u_2) = 0$ poolt pinnal välja eraldatud paraboolsetest punktidest koosnev punktihulk on üldiselt joon (kuid võib olla ka tühi või sisaldada isoleeritud punkte). Sellele joonele lähenemisel hüperboolsete punktide piirkonna poolelt nurk $2\varphi_0$ asümptootjoonte vahel läheneb (39.6) põhjal nullile ning joonele $K(u_1, u_2) = 0$ jõudmisel lähevad asümptootjooned puutumisse.

Harjutusülesanded

58. Tuletada püsthelikoidi esimene ja teine ruutvorm.

59. Püsthelikoidil on antud kolm joont võrranditega $u_1 = au_2$, $u_1 = -au_2$ ja $u_2 = 1$, mis lõikuvad kolmes erinevas punktis. Leida need punktid, nende vaheliste kaartte pikkused joontel, joontevahelised nurgad neis punktides ja kõnesolevate kaartega piiratud piirkonna («kolmnurga») pindala pinnal.

60. Rakendada pöördpinna esimese ruutvormi üldavaldist (36.15) toori korral ja arvutada toori kogupindala.

61. Arvutada harjutusülesandes 59 antud joonte normaalkõverused püsthelikoidil nende joonte lõikepunktides.

62. Kontrollida, et pöördpinna normaalkõverus paralleeli sihis on pöördvõrdeline pinna punkti ning selles punktis võetud normaali ja pöördetelje lõikepunkti vahelise kaugusega.

63. Tõestada Euleri valemi abil, et pinna punktis kahes ristuvas sihis võetud normaalkõveruste summa on selles punktis konstantne.

64. Määrata püsthelikoidi peasihid ja peakõverused.

65. Määrata ellipsoidi ümaruspunktid ja veenduda, et neid on neli (kui pole tegemist pöördellipsoidiga).

66. Veenduda vahetult, et püsthelikoid on minimaalpind (s. t. tema keskmine kõverus on samaselt null).

67. Veenduda, et torsi (puutujatepinna, koonilise või silindrilise pinna, art. 35) täiskõverus on samaselt null.

68. Avaldada analoogiliselt valemile (39.7) pöördpinna keskmine kõverus ja näidata, et pöördpind on minimaalpind parajasti siis, kui $f(x_3) = a \operatorname{ch} \frac{x_3}{a}$. (Vastavat pöördpinda nimetatakse *katenoidiks*, vt. art. 47.)

69. Näidata, et kui pinnal asub sirge, siis pinna täiskõverus on selle sirge punktides mittepositiivne.

70. Leida pinna

$$\mathbf{x} = [3u_1(1+u_2^2) - u_1^3] \mathbf{e}_1 + [3u_2(1+u_1^2) - u_2^3] \mathbf{e}_2 + 3[u_1^2 - u_2^2] \mathbf{e}_3$$

(*Enneperi*¹ pinna) kõverus- ja asümptootjooned ning näidata, et pind on minimaalpind. Veenduda, et kõverusjooned on siin tasandilised jooned.

71. Olgu pinna normaalidel pinna punktidest arvates ühele ja samale poole mõõdetud konstantse pikkusega lõigud. Näidata, et lõikude teistest otspunktidest moodustunud pinnal (antud pinnaga «paralleelsel» pinnal) on samad normaalid ning et antud pinna kõverusjoontele vastavad sellel pinnal samuti kõverusjooned.

72. Leida asümptootjooned pinnal, mis on funktsiooni $z = a \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$ ruumiliseks graafikuks.

§ 10. PINNA LIIKUV KANOONILINE TELJESTIK

Joone uurimist hõlbustas eelmises peatükis tunduvalt kanoonilise teljestiku sidumine joone iga punktiga. Pinna puhul on meil analoogiline võimalus: teljestiku võib pinna punktiga siduda nii, et selle kaks esimest baasiühikvektorit lähevad peasihtides ja kolmas mööda pinna normaali. Punkti liikumisel mööda pinda liigub ka see teljestik, kusjuures on võimalik tuletada tema liikumist antud hetkel kirjeldavad valemid, mis on analoogilised Bartelsi—Frenet' valemitega jooneteoorias. Neid valemeid on kasulik käsitleda mõnevõrra vabama teljestiku puhul. Seejuures tekivad teatavad uued suurused ja iselaadi arvutus nende uurimiseks, kus uuteks teheteks on lineaarsete diferentsiaalvormide väliskorrutamine ja -diferentseerimine.

42. **Kanooniline teljestik ja Darboux'—Cartani valemid.** Pinna iga punktiga, mis pole ümarus- ega tasandumispunkt, saab siduda üheselt määratud teljestiku, mille alguspunktiks on pinna punkt ja esimesed kaks telge suunduvad pinna peasihte mööda, kolmas aga mööda pinna normaali. Niisugust teljestikku nimetatakse pinna

¹ Alfred Enneper (1830—1885), saksa matemaatik.

kanooniliseks teljestikuks vaadeldavas punktis. Kui selle teljestiku baasühikvektorid tähistada e_1 , e_2 ja e_3 , on $e_3 = e_1 \times e_2 = m$. Seejuures nii pinna punkti x kohavektor x kui ka need baasivektorid e_1 , e_2 ja e_3 sõltuvad $u_1 u_2$ -tasandi teatavas piirkonnas D muutuvast parameetripaarist (u_1, u_2) :

$$x = x(u_1, u_2), \quad e_i = e_i(u_1, u_2); \quad i = 1, 2, 3. \quad (42.1)$$

Joone puhul, kui kanoonilise teljestiku baasivektorid t , n ja b on üheainsa parameetri — joone loomuliku parameetri s funktsioonid, antakse Bartelsi—Frenet' valemeis tuletiste t' , n' , b' avaldised t , n ja b lineaarkombinatsioonidena. Pinna puhul tuleks analoogiliselt avaldada baasivektorite e_i osatuletised u_1 ja u_2 järgi nende baasivektorite endi kaudu. Selliselt toimiski G. Darboux oma kolmeköitelises pinnateooriaalases monograafias 1887. a. Kuid É Cartan¹ näitas 1910. a., et palju otstarbekam on osatuletiste asemel kasutada täisdiferentsiaale:

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial e_i}{\partial u_2} du_2,$$

mis seovad korraga kaht osatuletist ega rõhuta otseselt parameetrite u_1 ja u_2 valikut, mis on pinnal küllaltki meelevaldne. Valemite arv väheneb sellega kaks korda.

On selge, et pinna punkti x kohavektori x ja kanoonilise teljestiku baasivektorite e_i diferentsiaalid dx ja de_i ; $i = 1, 2, 3$ kui teatavad vektorid on avaldatavad baasivektorite e_1 , e_2 ja e_3 lineaarkombinatsioonidena:

$$dx = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i, \quad (42.2)$$

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j. \quad (42.3)$$

Ülesandeks on leida kordajate ω_i ja ω_{ij} avaldised ja jõuda sel teel teatavate, nn. Darboux'—Cartani valemiteni.

Seejuures on kasulik teha arvutused kohe pisut üldisemal kujul, et poleks vaja neid mõne aja pärast korrata. Lubame nimelt, et ristuvad ühikvektorid e_1 ja e_2 pinna puutujatasandil võib vabalt valida, s.t. nad ei tarvitse olla peasihilised. Seejuures eeldame, et funktsioonid $e_i(u_1, u_2)$ seostes (42.1) (kus endiselt $e_3 = e_1 \times e_2 = m$) on diferentseeruvad funktsioonid. Peasihiliste e_1 ja e_2 korral on see eeldus automaatselt täidetud, nagu kerge veenduda valemite (38.5), (36.1) ja (36.10) abil. Endiselt kehtivad ka seosed (42.2) ja (43.3).

Rida kitsendusi nende seoste kordajatele tuleb sellest, et e_1 , e_2 ja e_3 on paarikaupa ristuvad ühikvektorid:

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (42.4)$$

¹ Elie Joseph Cartan [kartaan] (1869—1951), prantsuse matemaatik, Prantsuse TA liige.

Siit saadakse diferentseerimisega samasused

$$de_i \cdot e_j = e_i \cdot de_j = 0,$$

millest

$$\left(\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} e_k \right) e_j + e_i \left(\sum_{k=1}^3 \omega_{jk} e_k \right) = 0$$

ehk

$$\sum_{k=1}^3 \omega_{ik} (e_k e_j) + \sum_{k=1}^3 \omega_{jk} (e_i e_k) = 0,$$

kus $e_k e_j = \delta_{kj}$, $e_i e_k = \delta_{ik}$. Summeerimisel k järgi jääb esimeses summas δ_{kj} tähenduse kohaselt nullist erinevaks ainult liige ω_{ij} , teises summas analoogiliselt ω_{ji} . Niisiis,

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

ehk üksikasjalikumalt:

$$\omega_{11} = 0, \quad \omega_{22} = 0, \quad \omega_{33} = 0, \quad (42.5)$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12}, \quad \omega_{31} = -\omega_{13}, \quad \omega_{32} = -\omega_{23}. \quad (42.6)$$

Nagu näeme, on valemite (42.3) kordajate maatriks, samuti nagu Bartelsi—Frenet' valemite korral, kaldsümmeetriline:

$$\begin{vmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Praegu ei ole veel selge, mida valemite (42.2) ja (42.3) kordajad ω_i , ω_{ij} endast õieti kujutavad. Alustame esimestest. Arvestame, et pinna puutujatasandil on meil tegemist kahe baasiga $\{x_1, x_2\}$ ja $\{e_1, e_2\}$, seetõttu on olemas valemid üleminekuks ühelt teiselt:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}e_1 + A_{12}e_2, & e_1 &= B_{11}x_1 + B_{12}x_2, \\ x_2 &= A_{21}e_1 + A_{22}e_2, & e_2 &= B_{21}x_1 + B_{22}x_2, \end{aligned} \quad (42.7)$$

kus maatriksid $\|A_{\alpha\beta}\|$ ja $\|B_{\alpha\beta}\|$ on teineteise pöördmaatriksid ja mõlemad järelikult regulaarmaatriksid.

Seejuures, vastavalt täisdiferentsiaali avaldisele,

$$\begin{aligned} dx &= x_1 du_1 + x_2 du_2 = (A_{11}e_1 + A_{12}e_2) du_1 + (A_{21}e_1 + A_{22}e_2) du_2 = \\ &= (A_{11} du_1 + A_{21} du_2) e_1 + (A_{12} du_1 + A_{22} du_2) e_2. \end{aligned}$$

Võrdlus valemiga (42.2):

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3 \quad (42.8)$$

näitab kohe, et

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 0, \\ \omega_\alpha &= A_{1\alpha} du_1 + A_{2\alpha} du_2; \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (42.9)$$

Valemitest (42.1) ja (42.7) järeldub, et iga kordaja $A_{\beta\alpha}$ on parameetrite u_1 ja u_2 diferentseeruv funktsioon. Kordaja ω_α jaoks saadud avaldis on seega analoogiline diferentsiaalruutvormiga, kuid sellest lihtsam: algebraliselt on ta lineaarvorm ([1], lk. 257) dife-

rentsiaalide du_1 ja du_2 suhtes, kusjuures tema kordajateks on u_1 ja u_2 funktsioonid. Seda laadi avaldise nimetatakse *lineaarseteks diferentsiaalvormideks* (Nendega on tegemist ka matemaatilises analüüsis, näiteks teist liiki joonintegraali ja Greeni valemi puhul; vt. [3], lk. 335, 339.)

Sama laadi avaldised on ka valemite (42.3) kordajad ω_{ij} . Tõepoolest, kui (42.3) pooli korrutada skalaarselt vektoriga e_k , saame

$$de_i \cdot e_k = \left(\sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j \right) \cdot e_k.$$

Vasakul

$$de_i \cdot e_k = \left(\frac{\partial e_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial e_i}{\partial u_2} du_2 \right) \cdot e_k = A_{ik1} du_1 + A_{ik2} du_2,$$

kus iga

$$A_{ik\alpha} = \frac{\partial e_i}{\partial u_\alpha} \cdot e_k$$

on (42.1) põhjal u_1 ja u_2 diferentseeruv funktsioon, paremal aga

$$\left(\sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j \right) \cdot e_k = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} (e_j \cdot e_k) = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} \delta_{jk} = \omega_{ik}.$$

Niisiis, tõesti

$$\omega_{ik} = A_{ik1} du_1 + A_{ik2} du_2. \quad (42.10)$$

Seega kõik kordajad valemis (42.2) ja (42.3) kujutavad endast lineaarseid diferentsiaalvorme. Seejuures vormid ω_1 ja ω_2 on lineaarselt sõltumatud, sest nende valemis (42.8) on kordajate maatriks $\|A_{\beta\alpha}\|$ regulaarne. Järelikult saab neist valemist avaldada du_1 ja du_2 vormide ω_1 ja ω_2 lineaarkombinatsioonidena:

$$du_1 = B_{11}\omega_1 + B_{21}\omega_2,$$

$$du_2 = B_{12}\omega_1 + B_{22}\omega_2$$

— tarvitseb vaid (42.7) asendada valemisse (42.8), kus $\omega_3 = 0$, ja võrrelda dx varasema avaldisega. Kui teha siit asendused seosesse (42.10), saame:

$$\omega_{ik} = \sum_{\alpha=1}^2 A_{ik\alpha} (B_{1\alpha}\omega_1 + B_{2\alpha}\omega_2) = \Gamma_{ik1}\omega_1 + \Gamma_{ik2}\omega_2, \quad (42.11)$$

kus

$$\Gamma_{ik\beta} = \sum_{\alpha=1}^2 A_{ik\alpha} B_{\beta\alpha}.$$

Niisiis, valemite (42.3) kordajad on avaldatavad valemite (42.2) kordajate lineaarkombinatsioonidena.

Kui minna tagasi peasihiliste e_1 ja e_2 juurde, siis osutub, et kordajate ω_{13} ja ω_{23} avaldised on sel juhul üpris lihtsad. Nimelt (42.3) ja (42.6) põhjal

$$dm = de_3 = -\omega_{13}e_1 - \omega_{23}e_2.$$

Meenutame Rodrigues'i valemist (40.4) ja (40.5), mis annavad dm avaldise nihkumisel piki üht kõverusjoont (ehk peasihis). Pea-

sihtideks on praegu vektorite e_1 ja e_2 sihid. Kui punkt x nihkub esimeses peasihis, siis $dx \parallel e_1$, mistõttu valemis (42.2)

$$dx = \omega_1 e_1, \quad \omega_2 = 0.$$

Sel juhul (42.11) järgi

$$dm = -\Gamma_{131}\omega_1 e_1 - \Gamma_{231}\omega_1 e_2,$$

teiselt poolt aga Rodrigues'i valemist (40.4)

$$dm = -k_1 dx = -k_1 \omega_1 e_1.$$

Võrdlus näitab, et

$$\Gamma_{131} = k_1, \quad \Gamma_{231} = 0.$$

Analoogiliselt, punkti x nihkel teises peasihis on $dx = \omega_2 e_2$, $\omega_1 = 0$ ja

$$\Gamma_{132} = 0, \quad \Gamma_{232} = k_2.$$

Järelikult

$$\omega_{13} = k_1 \omega_1, \quad \omega_{23} = k_2 \omega_2, \quad (42.12)$$

kus k_1 ja k_2 on peakõverused.

Läheme tagasi üldjuhu juurde ja tähistame lihtsustamiseks

$$\Gamma_{121} = \Gamma_1, \quad \Gamma_{122} = \Gamma_2;$$

tulemuseks saame *Darboux'—Cartani valemid* kujul

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \quad (42.13)$$

$$de_1 = \omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3, \quad (42.14)$$

$$de_2 = -\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3, \quad (42.15)$$

$$de_3 = -\omega_{13} e_1 - \omega_{23} e_2, \quad (42.16)$$

kus

$$\omega_{12} = \Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2; \quad (42.17)$$

seejuures peasihiliste e_1 ja e_2 , s.t. liikuva kanoonilise teljestiku puhul kehtivad lisaks veel valemid (42.12).

43. Joone geodeetiline kõverus pinnal. Valemeis (42.13—17) on praegu teadmata kordajate Γ_1 ja Γ_2 geomeetriline tähendus. Selle selgitamiseks tuleb veel kord võtta pinnal asetseva joone kõverusvektor $x'' = t$ ja erinevalt art-st 36 projitseerida ta mitte pinna normaalile ehk m sihile, vaid pinna puutujatasandile. Kui nurk joone puutuja sihiühikvektori t ja liikuva teljestiku baasiühikvektori e_1 vahel tähistada φ (joon. 45), siis

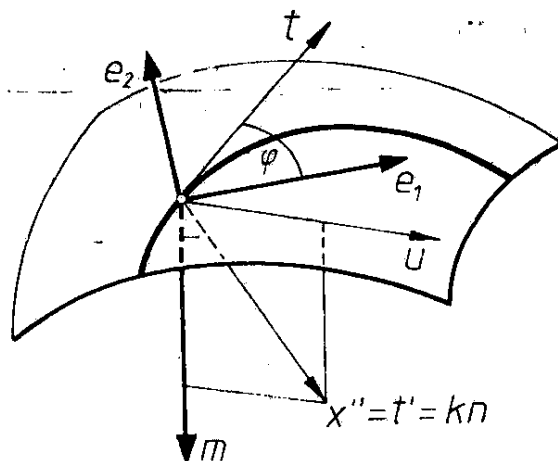
$$t = e_1 \cos \varphi + e_2 \sin \varphi. \quad (43.1)$$

Seetõttu

$$dt = de_1 \cos \varphi - e_1 \sin \varphi \cdot d\varphi + de_2 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi \cdot d\varphi$$

ja valemite (42.14) ja (42.15) põhjal

$$\begin{aligned} dt &= (\omega_{12} e_2 + \omega_{13} e_3) \cos \varphi - e_1 \sin \varphi \cdot d\varphi + \\ &\quad + (-\omega_{12} e_1 + \omega_{23} e_3) \sin \varphi + e_2 \cos \varphi \cdot d\varphi = \\ &= (d\varphi + \omega_{12}) (-e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi) + (\omega_{13} \cos \varphi + \omega_{23} \sin \varphi) e_3. \end{aligned} \quad (43.2)$$



Joonis 45

Joone kõverusvektori $x'' = \frac{dt}{ds}$ saame siit pärast läbijagamist loomuliku parameetri diferentsiaaliga ds . Tekib seos

$$x'' = \frac{d\varphi + \omega_{12}}{ds} u + \left(\frac{\omega_{13}}{ds} \cos \varphi + \frac{\omega_{23}}{ds} \sin \varphi \right) e_3, \quad (43.3)$$

kus

$$u = -e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi$$

on pinna puutujatasandis olev ühikvektor, mis on risti vektoriga t , täpsemalt, vektor $u = m \times t$. Kõverusvektor $x'' = t' = kn$ on avaldatud puutujatasandil oleva komponendi ja normaalkomponendi summana. Normaalkomponendi kordajaks on art-s esitatu põhjal normaalkõverus

$$k_0 = \frac{\omega_{13}}{ds} \cos \varphi + \frac{\omega_{23}}{ds} \sin \varphi. \quad (43.4)$$

Puutujatasandil oleva komponendi kordajat, mis on tõlgendatav pinnal oleva joone kõverusvektori projektsioonina pinna puutujatasandil (täpsemalt, vektori u sihil), nimetatakse joone geodeetiliseks kõveruseks pinnal ja tähistatakse k_g . Niisiis

$$k_g = \frac{d\varphi + \omega_{12}}{ds}, \quad (43.5)$$

kusjuures

$$x'' = kn = k_g u + k_0 m. \quad (43.6)$$

Siit

$$k^2 = k_g^2 + k_0^2 \quad (43.7)$$

ja et (36.7) põhjal $k_0 = k \cos \theta$, siis

$$k_g = k \sin \theta. \quad (43.8)$$

Valemist (43.5), kui arvestada võrdust (42.17), saame:

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + \Gamma_1 \frac{\omega_1}{ds} + \Gamma_2 \frac{\omega_2}{ds}.$$

Samal ajal (42.2) põhjal

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{e}_1 \frac{\omega_1}{ds} + \mathbf{e}_2 \frac{\omega_2}{ds}$$

ning võrdlus seosega (43.1) annab, et

$$\frac{\omega_1}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{\omega_2}{ds} = \sin \varphi. \quad (43.9)$$

Kokkuvõttes

$$k_g = \varphi' + \Gamma_1 \cos \varphi + \Gamma_2 \sin \varphi; \quad (43.10)$$

kus φ' tähendab φ tuletist joone loomuliku parameetri s järgi.

Saadud valemit geodeetilise kõveruse k_g jaoks nimetatakse *Gaussi—Liouville'i valemiks*, sest esmakordselt jõudis selleni C. Fr. Gauss, kes jäädvustas valemi oma teaduslikus päevikus, kuid jättis avaldamata; iseseisvalt tuletas valemi uuesti J. Liouville¹ ja avaldas 1850. a. Märkime veel, et esimesed uurimused suuruse k_g kohta avaldas 1830. a. hilisem Tartu ülikooli matemaatikaprofessor F. Minding²; nimetuse «geodeetiline kõverus» andis sellele 1848. a. O. Bonnet³.

Rakendame nüüd valemid (43.3) ja (43.9) liikuva kanoonilise teljestiku puhul, mil $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ on peasihilised. Sel korral kehtivad valemid (42.12) ning kui valemis (43.4) arvestada nii neid kui ka seoseid (43.8), saame veel kord Euleri valemi (37.10). Gaussi—Liouville'i valemist (43.9) selgub kordajate Γ_1 ja Γ_2 geomeetriline tähendus. Võtame nimelt vaadeldavaks jooneks pinna ühe kõverusjoone. Sel juhul kord $\varphi \equiv 0$, kord $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$; niisiis, kord $k_g = \Gamma_1$, kord $k_g = \Gamma_2$. Seega kanoonilise teljestiku puhul kordajad Γ_1 ja Γ_2 on kõverusjoonte geodeetilised kõverused pinnal.

Geodeetilise kõveruse k_g praktiliseks arvutamiseks ei ole Gaussi—Liouville'i valem eriti sobiv. Sobivama valemi saamiseks märkime, et seose (43.6) põhjal

$$k_g = u\mathbf{x}'' = (\mathbf{m} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{x}'' = m\mathbf{x}'\mathbf{x}''.$$

Samal ajal

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}, \\ \mathbf{x}'' &= \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{t}^2 + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{t}'' \end{aligned}$$

ning seega

$$k_g = (m\mathbf{x}'\mathbf{x}'') \cdot (\mathbf{t}')^3 = \frac{m\mathbf{x}'\mathbf{x}''}{|\mathbf{x}'|^3}.$$

Siin on otstarbekas minna üle diferentsiaalidele $d\mathbf{x} = \mathbf{x}' dt$ ja $d^2\mathbf{x} = \mathbf{x}''(dt)^2$:

$$k_g = \frac{m d\mathbf{x} d^2\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|^3}. \quad (43.11)$$

¹ Joseph Liouville [liuvi'll] (1809—1882), prantsuse matemaatik, Prantsuse TA liige.

² Ernst Ferdinand Adolf Gottlieb Minding (1806—1885), saksa päritolu matemaatik, Peterburi TA auliige.

³ Pierre Ossian Bonnet [bonne] (1819—1892), prantsuse matemaatik.

Näiteks sfääri korral (31.1) põhjal

$$\mathbf{x} = (r \sin u_1 \cos u_2, r \sin u_1 \sin u_2, r \cos u_1)$$

ning kui sfääril vaadelda joont, kus

$$u_1 = t, \quad u_2 = t,$$

siis selle joone puhul

$$x_1 = r \sin t \cos t, \quad x_2 = r \sin^2 t, \quad x_3 = r \cos t,$$

mistõttu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - r x_2 = 0.$$

Esimene võrrandeist määrab sfääri, teine, olles samaväärne võrrandiga

$$x_1^2 + \left(x_2 - \frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

selle sfääri ühele raadiusele (x_2 -teljel asuvale) kui diameetrile ehitatud pöördsilindri. Joon on kahe sellise pinna lõikejoon ning kujutab endast seega Viviani joont (vt. harjutusülesanne 23).

Leiame selle joone geodeetilise kõveruse sfääril. Siin

$$\mathbf{x} = (r \sin t \cos t, r \sin^2 t, r \cos t),$$

$$\mathbf{x}' = (r \cos 2t, r \sin 2t, -r \sin t),$$

$$\mathbf{x}'' = (-2r \sin 2t, 2r \cos 2t, -r \cos t).$$

Sfääri puhul

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = (\sin u_1 \cos u_2, \sin u_1 \sin u_2, \cos u_1),$$

mistõttu piki Viviani joont

$$\mathbf{m} = (\sin t \cos t, \sin^2 t, \cos t).$$

Järelikult

$$m \mathbf{x}' \mathbf{x}'' = \begin{vmatrix} \sin t \cos t & \sin^2 t & \cos t \\ r \cos 2t & r \sin 2t & -r \sin t \\ -2r \sin 2t & 2r \cos 2t & -r \cos t \end{vmatrix} = r^2 \cos t (2 + \sin^2 t)$$

ning seega

$$k_g = \frac{\cos t (2 + \sin^2 t)}{r \sqrt{(1 + \sin^2 t)^3}}.$$

Näiteks poolustes, kus $t=0$ ja $t=\pi$, on vastavalt $k_g=2r^{-1}$ ja $k_g=-2r^{-1}$, kuid punktides $t=\frac{\pi}{2}$ ja $t=\frac{3\pi}{2}$, kus Viviani joon lõikab iseennast, on $k_g=0$. (Võrdluseks märgime, et iga joone normaalkõveruseks sfääril on vastava normaallõike kui suuringjoone kõverus $k_0=r^{-1}$.)

44. Väliskorrutis ja välisdiferentsiaal. Olles nüüd leidnud geometrilised tõlgendused Darboux'—Cartani valemeis (42.13—16) olevatele kordajatele, rõhutame veel kord analoogiat Bartelsi—Frenet' valemitega, mis tuleb eriti selgesti esile, kui viimased kirjutada kujul

$$d\mathbf{x} = \omega_1 \mathbf{e}_1,$$

$$d\mathbf{e}_1 = \omega_{12} \mathbf{e}_2,$$

$$d\mathbf{e}_2 = -\omega_{12} \mathbf{e}_1 + \omega_{13} \mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{e}_3 = -\omega_{13} \mathbf{e}_2,$$

kus $e_1=t$, $e_2=n$, $e_3=b$ ja kordajad $\omega_1=ds$, $\omega_2=k(s)ds$, $\omega_3=\kappa(s)ds$ on samuti lineaarsed diferentsiaalvormid, aga ainult ühe argumendiga s .

Kuid selle analoogia kõrval on tegemist ka olulise erinevusega. Nimelt on ühe argumendiga vorm $\omega=f(s)ds$ alati teatava funktsiooni $F(s)=\int f(s)ds$ diferentsiaal, samal ajal kui kahe argumendiga lineaarne diferentsiaalvorm $\omega=A_1(u_1, u_2)du_1+A_2(u_1, u_2)du_2$ on mingi funktsiooni $F(u_1, u_2)$ täisdiferentsiaal teatavasti siis ja ainult siis, kui

$$\frac{\partial A_1}{\partial u_2} = \frac{\partial A_2}{\partial u_1} \quad (44.1)$$

(vt. [3], lk. 350). Seetõttu peavad Darboux'—Cartani valemite paremad pooled, tänu sellele et vasakutes pooltes on täisdiferentsiaalid, rahuldama sellekohaseid lisatingimusi, samal ajal kui Bartelsi—Frenet' valemid on kooskõlalised ilma mingite kitsendusteta.

Vajalikud lisatingimused andis juba G. Darboux, kuid eriliselt lihtsa kuju leidis neile É. Cartan, kes võttis kasutusele erilise arvutuse, mida tuntakse praegu *Cartani välisdiferentsiaalarvutuse* nime all. Ta jättis diferentsiaalidega arvutamisel alles kõik teised tehted peale korrutamise, mille ta asendas niinimetatud väliskorrutamise. Diferentsiaalide du_α ja du_β väliskorrutis tähistatakse $du_\alpha \wedge du_\beta$; seejuures väliskorrutamise tehe loetakse mitte kommutatiivseks, vaid antikommutatiivseks,

$$du_\alpha \wedge du_\beta = -du_\beta \wedge du_\alpha. \quad (44.2)$$

Korrutamistehte muud omadused (assotsiatiivsus, distributiivsus, teguri ette toomine) jäetakse muutumatuks. Siin on teatav analoogia vektorkorrutamise tehtega, ainult et kahe vektori vektorkorrutis on jälle teatav vektor, samal ajal kui kahe diferentsiaali väliskorrutis on uus objekt. Diferentsiaalide arv ei ole üldiselt piiratud. Algebra seisukohast tekib niinimetatud *Grassmanni algebra* ([1], lk. 504), mida 1844. a. esmakordselt käsitles H. Grassmann¹ (vt. art-d 78 ja 79).

Kui diferentsiaale on kaks, nagu Darboux'—Cartani valemite puhul, siis (44.2) põhjal

$$du_1 \wedge du_1 = 0, \quad du_2 \wedge du_2 = 0, \quad du_2 \wedge du_1 = -du_1 \wedge du_2, \quad (44.3)$$

sest alati $du_\alpha \wedge du_\alpha = -du_\alpha \wedge du_\alpha$, mistõttu $du_\alpha \wedge du_\alpha = 0$. Järelikult kolme või enama diferentsiaali väliskorrutis on sel juhul alati null, sest ikka on tegurite seas mingid kaks diferentsiaali võrdsed.

Vaatleme nüüd kaht lineaarset diferentsiaalvormi

$$\omega = A_1 du_1 + A_2 du_2, \quad \omega^* = A_1^* du_1 + A_2^* du_2.$$

¹ Hermann Günther Grassmann (1809—1877), saksa matemaatik.

Siin

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega^* &= (A_1 du_1 + A_2 du_2) \wedge (A_1^* du_1 + A_2^* du_2) = \\ &= A_1 A_2^* du_1 \wedge du_2 + A_2 A_1^* du_2 \wedge du_1 = \\ &= (A_1 A_2^* - A_2 A_1^*) du_1 \wedge du_2.\end{aligned}$$

Kordajaks on ω ja ω^* kordajate determinant. Seetõttu ω ja ω^* on lineaarselt sõltuvad parajasti siis, kui $\omega \wedge \omega^* = 0$. Ühtlasi on kohe selge, et

$$\omega \wedge \omega = \omega^* \wedge \omega^* = 0, \quad \omega^* \wedge \omega = -\omega \wedge \omega^*. \quad (44.4)$$

Koos väliskorrutamise tehtega võttis É. Cartan kasutusele ka välisdiferentseerimise operatsiooni. Kui vormi ω tavaline täisdiferentsiaal arvutatakse järgmiselt:

$$d\omega = dA_1 du_1 + dA_2 du_2,$$

siis selle vormi ω välisdiferentsiaal $d_{\wedge} \omega$ defineeritakse valemiga

$$d_{\wedge} \omega = dA_1 \wedge du_1 + dA_2 \wedge du_2.$$

Arvestades, et

$$dA_{\alpha} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial u_2} du_2; \quad \alpha = 1, 2,$$

saame

$$\begin{aligned}d_{\wedge} \omega &= \left(\frac{\partial A_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial A_1}{\partial u_2} du_2 \right) \wedge du_1 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial A_2}{\partial u_2} du_2 \right) \wedge du_2 = \\ &= \left(\frac{\partial A_2}{\partial u_1} - \frac{\partial A_1}{\partial u_2} \right) du_1 \wedge du_2.\end{aligned}$$

Tulemuse võrdlemisel tunnusega (44.1) jõuame tähtsa järelduseni: lineaarne diferentsiaalvorm ω on täisdiferentsiaal parajasti siis, kui $d_{\wedge} \omega = 0$.

Vahetu arvutusega on lihtne kontrollida, et

$$d_{\wedge} (\omega + \omega^*) = d_{\wedge} \omega + d_{\wedge} \omega^*, \quad (44.5)$$

$$d_{\wedge} (a\omega) = da \wedge \omega + a d_{\wedge} \omega. \quad (44.6)$$

Cartani välisdiferentsiaalarvutuse abil saab väga lihtsalt väljendada matemaatilise analüüsi mitmeid olulisi tulemusi. Näiteks muutujate vahetus kahekordses integraalis toimub teatavasti ([3], lk. 264 ja 282) järgmise valemi järgi:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv,$$

kui eeldada, et jakobiaan

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

on positiivne. Seega $dx dy$ ei käitu siin tavalise korrutisena, kuhu võiks vahetult teha asenduse. Osutub, et tegemist on tegelikult väliskorrutisega, sest tõepoolest

$$\begin{aligned} dx \wedge dy &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = \\ &= \frac{D(x, y)}{D(u, v)} du \wedge dv. \end{aligned}$$

Diferentsiaalide väliskorrutist ei kirjutata kahekordse integraali märgi alla lihtsalt selle tõttu, et selle märgi kasutuselevõtmise ajal polnud väliskorrutamist veel olemas (vt. allviidet lk. 338).

Analoogiliselt võib kontrollida, et ka kolmekordse integraali puhul toimub muutujate vahetus ([3], lk. 314) tavalise asendusega, kui $dV = dx dy dz$ asemele kirjutada $dx \wedge dy \wedge dz$, ning et sama leiab aset ka m -kordse integraali puhul ([3], lk. 322).

Väga lihtne on kirja panna Greeni valemit ([3], lk. 339):

$$\iint_D (Y_x - X_y) dx dy = \int_{\Gamma} X dx + Y dy;$$

tarvitseb vaid tähistada $\omega = X dx + Y dy$ ja arvutada

$$d_{\wedge} \omega = dX \wedge dx + dY \wedge dy = (Y_x - X_y) dx \wedge dy,$$

ning valem omandab kuju

$$\iint_D d_{\wedge} \omega = \int_{\Gamma} \omega. \quad (44.7)$$

Sama kuju omandab ka Stokesi valem ([3], lk. 371):

$$\begin{aligned} \int_L X dx + Y dy + Z dz &= \\ &= \iiint_{\Omega} (Z_y - Y_z) dy dz + (X_z - Z_x) dz dx + (Y_x - X_y) dx dy, \end{aligned}$$

kui selles tähistada $\omega = X dx + Y dy + Z dz$ ja arvutada

$$d_{\wedge} \omega = dX \wedge dx + dY \wedge dy + dZ \wedge dz,$$

mis tuleb just $\iint_D$ alune avaldis.

Lõpuks märgime, et ka Ostrogradski valem ([3], lk. 336):

$$\iiint_{\Omega} (X_x + Y_y + Z_z) dx dy dz = \iint_{\Omega} X dy dz + Y dz dx + Z dx dy$$

on esitatav analoogiliselt, kui tähistada

$$\Theta = X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$$

ja arvutada

$$\begin{aligned} d_{\wedge} \Theta &= dX \wedge dy \wedge dz + dY \wedge dz \wedge dx + dZ \wedge dx \wedge dy = \\ &= (X_x dx + X_y dy + X_z dz) \wedge dy \wedge dz + \\ &+ (Y_x dx + Y_y dy + Y_z dz) \wedge dz \wedge dx + \\ &+ (Z_x dx + Z_y dy + Z_z dz) \wedge dx \wedge dy = \\ &= X_x dx \wedge dy \wedge dz + Y_y dy \wedge dz \wedge dx + Z_z dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= (X_x + Y_y + Z_z) dx \wedge dy \wedge dz; \end{aligned}$$

siin on arvestatud, et kahe võrdse diferentsiaali esinemisel tegureina on väliskorrutis null ning et kahe kõrvuti oleva diferentsiaali kohtade vahetamisel muutub märk. Seega Ostrogradski valemi saab esitada kujul

$$\iiint_{\Omega} d_{\wedge} \Theta = \iint_{\Omega} \Theta. \quad (44.8)$$

Greeni, Stokesi ja Ostrogradski valemid on erijuhud üldisest Stokesi valemist, mida käsitleme art-s 80.

45. **Gaussi—Bonnet' ja Petersoni võrrandid.** Rakendame välisdiferentseerimise operatsiooni Darboux'—Cartani valemite puhul. Asjaolu, et nendes valemites on tegemist vektorfunktsioonidega, ei tohi meid segada, sest kõnesolevad valemid kui lineaarsed seosed vektorite ja nende diferentsiaalide vahel tähendavad lihtsalt vektorite koordinaatide ja nende diferentsiaalide vahelise kolme samasuguse seose kokkuvõtlikku üleskirjutust.

Darboux'—Cartani valemid (42.13—16) on praegu kasulik kirjutada kujul

$$\begin{aligned}dx &= e_1\omega_1 + e_2\omega_2, \\de_1 &= e_2\omega_{12} + e_3\omega_{13}, \\de_2 &= e_1\omega_{21} + e_3\omega_{23}, \\de_3 &= e_1\omega_{31} + e_2\omega_{32},\end{aligned}$$

kus tuleb arvestada, et

$$-\omega_{21} = \omega_{12} = \Gamma_1\omega_1 + \Gamma_2\omega_2; \quad \omega_{3\alpha} = -\omega_{\alpha 3}; \quad \alpha = 1, 2. \quad (45.1)$$

Nende valemite vasakud pooled on täisdiferentsiaalid, mille välisdiferentseerimine annab teatavasti nulli. Seetõttu näiteks esimesest valemist saame (44.5) ja (44.6) põhjal, et

$$0 = de_1 \wedge \omega_1 + e_1 d_{\wedge} \omega_1 + de_2 \wedge \omega_2 + e_2 d_{\wedge} \omega_2.$$

Kui siia asendada de_1 ja de_2 avaldised kahest järgmisest valemist, saame

$$\begin{aligned}0 &= (e_2\omega_{12} + e_3\omega_{13}) \wedge \omega_1 + e_1 d_{\wedge} \omega_1 + \\&+ (e_1\omega_{21} + e_3\omega_{23}) \wedge \omega_2 + e_2 d_{\wedge} \omega_2 = \\&= e_1(d_{\wedge} \omega_1 + \omega_{21} \wedge \omega_2) + e_2(d_{\wedge} \omega_2 + \omega_{12} \wedge \omega_1) + \\&+ e_3(\omega_{13} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_2).\end{aligned}$$

Baasivektorite e_1 , e_2 ja e_3 lineaarse sõltumatuse tõttu peavad nende kordajad olema nullid:

$$d_{\wedge} \omega_1 = \omega_2 \wedge \omega_{21}, \quad (45.2)$$

$$d_{\wedge} \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \quad (45.3)$$

$$\omega_{13} \wedge \omega_1 + \omega_{23} \wedge \omega_2 = 0; \quad (45.4)$$

siin on arvestatud, et väliskorrutis on antikommutatiivne.

Analoogiliselt toimime järgmise kahe valemiga:

$$0 = de_2 \wedge \omega_{12} + e_2 d_{\wedge} \omega_{12} + de_3 \wedge \omega_{13} + e_3 d_{\wedge} \omega_{13},$$

$$0 = de_1 \wedge \omega_{21} + e_1 d_{\wedge} \omega_{21} + de_3 \wedge \omega_{23} + e_3 d_{\wedge} \omega_{23}.$$

Pärast asendamist:

$$0 = (e_1\omega_{21} + e_3\omega_{23}) \wedge \omega_{12} + e_2 d_{\wedge} \omega_{12} + (e_1\omega_{31} + e_2\omega_{32}) \wedge \omega_{13} + e_3 d_{\wedge} \omega_{13},$$

$$0 = (e_2\omega_{12} + e_3\omega_{13}) \wedge \omega_{21} + e_1 d_{\wedge} \omega_{21} + (e_1\omega_{31} + e_2\omega_{32}) \wedge \omega_{23} + e_3 d_{\wedge} \omega_{23}.$$

Siin esimeses seoses e_1 kordaja $\omega_{21} \wedge \omega_{12}$ ja teises seoses e_2 kordaja $\omega_{12} \wedge \omega_{21}$ on võrduste (45.1) ja (44.4) põhjal nullid. Vastavalt e_2 ja e_1 kordajate võrdumisest nulliga tulenevad tingimused

$$d_{\wedge} \omega_{12} + \omega_{32} \wedge \omega_{13} = 0, \quad d_{\wedge} \omega_{21} + \omega_{31} \wedge \omega_{23} = 0,$$

mis (45.1) põhjal on samaväärsed ja annavad

$$d_{\wedge} \omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}. \quad (45.5)$$

Lõpuks e_3 kordajatest saame tingimused

$$d_{\wedge} \omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad (45.6)$$

$$d_{\wedge} \omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \quad (45.7)$$

Rohkem tingimusi Darboux'—Cartani valemite kordajatele kui lineaarsetele diferentsiaalvormidele ei tule, sest viimase valemi poolte välisdiferentseerimisel tekib juba samasus. Selle kontrollimise jätame lugeja hooleks.

Asume nüüd valemist (45.2)—(45.7) järeldusi tegema. Mõnevõrra erandlik on valem (45.4); kanoonilise teljestiku puhul, mil kehtivad seosed (42.12), on ta samaselt rahuldatud:

$$(k_1 \omega_1) \wedge \omega_1 + (k_2 \omega_2) \wedge \omega_2 = 0.$$

Üldise teljestiku korral saame temast (42.10) põhjal

$$(\Gamma_{131} \omega_1 + \Gamma_{132} \omega_2) \wedge \omega_1 + (\Gamma_{231} \omega_1 + \Gamma_{232} \omega_2) \wedge \omega_2 = 0$$

ja siit tuleneb lihtne seos:

$$(\Gamma_{231} - \Gamma_{132}) \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

s. t. $\Gamma_{231} = \Gamma_{132}$.

Ülejäänud valemist saab teha märksa sisukamaid järeldusi. Esimesest kahest valemist (45.2) ja (45.3) järeldub, kui neisse teha asendus $\omega_{12} = -\omega_{21}$ avaldisest (45.1), et

$$d_{\wedge} \omega_1 = \omega_2 \wedge (-\Gamma_1 \omega_1 - \Gamma_2 \omega_2) = \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (45.8)$$

$$d_{\wedge} \omega_2 = \omega_1 \wedge (\Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2) = \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (45.9)$$

Järgmise valemi (45.5) vasakule poolele saame sama asendusega kuju

$$\begin{aligned} d_{\wedge} \omega_{12} &= d_{\wedge} (\Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2) = \\ &= d\Gamma_1 \wedge \omega_1 + \Gamma_1 d_{\wedge} \omega_1 + d\Gamma_2 \wedge \omega_2 + \Gamma_2 d_{\wedge} \omega_2. \end{aligned}$$

Siin

$$\begin{aligned} d\Gamma_{\alpha} &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_2} du_2 = \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_{\beta}} (B_{1\beta} \omega_1 + B_{2\beta} \omega_2) = \\ &= \partial_1 \Gamma_{\alpha} \omega_1 + \partial_2 \Gamma_{\alpha} \omega_2, \end{aligned}$$

kus oleme tähistanud

$$\partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_{\beta}} B_{\gamma\beta}.$$

Pärast $d\Gamma_{\alpha}$ ja $d_{\wedge} \omega_{\alpha}$ saadud avaldiste asendusi leiame, et

$$\begin{aligned} d_{\wedge} \omega_{12} &= (\partial_1 \Gamma_1 \omega_1 + \partial_2 \Gamma_1 \omega_2) \wedge \omega_1 + \Gamma_1 \cdot \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2 + \\ &+ (\partial_1 \Gamma_2 \omega_1 + \partial_2 \Gamma_2 \omega_2) \wedge \omega_2 + \Gamma_2 \cdot \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2 = \\ &= (\partial_1 \Gamma_2 - \partial_2 \Gamma_1 + \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) \omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Valemi (45.5) paremas pooles sisaldub, nagu selgub, pinna täiskõverus K (art. 39):

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = K \omega_1 \wedge \omega_2. \quad (45.10)$$

Vahetult tuleb see välja kanoonilises teljestikus, kus

$$\omega_{13} \wedge \omega_{23} = (k_1 \omega_1) \wedge (k_2 \omega_2) = k_1 k_2 \omega_1 \wedge \omega_2 = K \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Osutub aga, et siin väliskorrutised ei muutu üldse teljestiku pööramisel puutujatasandil. Sellise pööramisega on meil tegemist valemite (43.1) ja (43.3) puhul, mis näitavad, kuidas uue teljestiku baasivektorid $\mathbf{t} = \mathbf{e}_1^*$ ja $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2^*$ avalduvad esialgse baasivektorite $\mathbf{e}_1$ ja $\mathbf{e}_2$ kaudu. Valemist (43.2) selgub seejuures, et

$$d\mathbf{e}_1^* = (d\varphi + \omega_{12}) \mathbf{e}_2^* + (\omega_{13} \cos \varphi + \omega_{23} \sin \varphi) \mathbf{e}_3;$$

seega

$$\omega_{13}^* = \omega_{13} \cos \varphi + \omega_{23} \sin \varphi.$$

Analoogiliselt saab, arvutades $d\mathbf{e}_2^*$ leida, et

$$\omega_{23}^* = -\omega_{13} \sin \varphi + \omega_{23} \cos \varphi.$$

Niisiis,

$$\begin{aligned} \omega_{13}^* \wedge \omega_{23}^* &= (\omega_{13} \cos \varphi + \omega_{23} \sin \varphi) \wedge (-\omega_{13} \sin \varphi + \omega_{23} \cos \varphi) = \\ &= \omega_{13} \wedge \omega_{23} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \omega_{13} \wedge \omega_{23}. \end{aligned}$$

Täpselt samuti on võimalik tuletada võrdus

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_1^* \wedge \omega_2^*, \quad (45.11)$$

sest

$$\begin{aligned} dx &= \omega_1^* \mathbf{e}_1^* + \omega_2^* \mathbf{e}_2^* = \\ &= \omega_1^* (\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi) + \omega_2^* (-\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi) \end{aligned}$$

ning võrdlus valemiga (42.13) annab

$$\omega_1 = \omega_1^* \cos \varphi - \omega_2^* \sin \varphi,$$

$$\omega_2 = \omega_1^* \sin \varphi + \omega_2^* \cos \varphi.$$

Seega võrdus (45.10), mille kehtivus on kontrollitud kanoonilise teljestiku puhul, annab pärast asendusi

$$\omega_{13}^* \wedge \omega_{23}^* = K \omega_1^* \wedge \omega_2^*,$$

s. t. võrdus on liikuva teljestiku korral üldkehtiv.

Niiviisi on nüüd leitud valemi (45.5) mõlema poole avaldised kui väliskorrutise $\omega_1 \wedge \omega_2$ kordsed. Et see väliskorrutis on vormide ω_1 ja ω_2 lineaarse sõltumatuse tõttu nullist erinev, siis peavad kordajad olema võrdsed:

$$\partial_2 \Gamma_1 - \partial_1 \Gamma_2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2 = K. \quad (45.12)$$

Tulemus on pinnateooria tähtis põhivõrrand, mida nimetatakse *Gaussi—Bonnet' võrrandiks*. Esmakordselt avaldas seda laadi võrrandi C. Fr. Gauss 1827. a. ja järeldas siit pinnateooria ühe täht-

saima teoreemi, mida käsitleme art-s 48. Lihtsa kuju (45.12) andis sellele võrrandile O. P. Bonnet 1848. aastal.

Lõpuks on jäänud teha järeldusi viimasest kahest valemist (45.6) ja (45.7). Geomeetriliselt sisukad järeldused tulenevad kanoonilise teljestiku puhul. Asendustega seostest (42.12) ja (42.17) saame nende valemite abil, et

$$\begin{aligned} dk_1 \wedge \omega_1 + k_1 d_{\wedge} \omega_1 &= (\Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2) \wedge k_2 \omega_2, \\ dk_2 \wedge \omega_2 + k_2 d_{\wedge} \omega_2 &= -(\Gamma_1 \omega_1 + \Gamma_2 \omega_2) \wedge k_1 \omega_1, \end{aligned}$$

kus vasakul on kord

$$(\partial_1 k_1 \omega_1 + \partial_2 k_1 \omega_2) \wedge \omega_1 + k_1 \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2 = (-\partial_2 k_1 + k_1 \Gamma_1) \omega_1 \wedge \omega_2,$$

kord

$$(\partial_1 k_2 \omega_1 + \partial_2 k_2 \omega_2) \wedge \omega_2 + k_2 \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2 = (\partial_1 k_2 + k_2 \Gamma_2) \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Võrdlus paremate pooltega, mis on vastavalt $k_2 \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2$ ja $k_1 \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2$, annab järgmised võrrandid:

$$\partial_2 k_1 = \Gamma_1 (k_1 - k_2), \quad (45.13)$$

$$\partial_1 k_2 = \Gamma_2 (k_1 - k_2), \quad (45.14)$$

mida nimetatakse *Petersoni võrranditeks*. Esmakordselt jõudis nendeni Tartu ülikooli kasvandik, Riia käsitöölise poeg Karl Peterson Tartus 1853. a. kirjutatud, kuid 1952. aastani avaldamata jäänud kandidaaditöös «Über die Biegung der Flächen» (Pindade painutamisest)¹.

Gaussi—Bonnet' võrrandit (45.12) ja Petersoni võrrandeid (45.13) ning (45.14) nimetatakse *pinnateooria põhivõrrandideks*. Nendest saab teha mitmesuguseid järeldusi.

Tõestame näiteks, et *ümaruspind* — *pind, mille kõik punktid on ümaruspunktid* — *on sfäär või selle osa*.

Ümaruspunkti mõiste (art. 38) kohaselt on ümaruspinna korral

$$k_1 \equiv k_2,$$

ning kui peakõveruste ühine väärtus tähistada k , siis Petersoni võrranditest

$$\partial_1 k \equiv \partial_2 k \equiv 0.$$

Tähendab, $dk \equiv 0$ ja seega $k = \text{const}$. Asetame nüüd pinna igast punktist x pinna normaalile vektori e_3 suunas lõigu konstantse pikkusega k^{-1} ning arvutame selle lõigu teise otspunkti kohavektori

$$\bar{y} = x + \frac{1}{k} e_3$$

diferentsiaali, kasutades valemeid (42.13) ja (42.16):

$$dy = dx + \frac{1}{k} de_3 = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \frac{1}{k} (-k\omega_1 e_1 - k\omega_2 e_2) = 0.$$

¹ Vt. Историко-математические исследования, вып. V. Москва, 1952, lk. 87—164; samuti U. Lumiste. Tartu ülikool ja XIX sajandi geomeetria. — Teaduse ajaloo lehekülgi Eestist II. Tln., 1976, lk. 36—68 (eriti lk. 50—53); vt. ka allviide käesolevas raamatus lk. 171.

Seega

$$y=c=\text{const}$$

ning mainitud lõigud lõpevad kõik ühes ja samas fikseeritud punktis c kohavektoriga c . Järelikult x on sfääril keskpunktiga c ja raadiusega $r=\frac{1}{k}$.

Niisiis, ümaruspind on tõesti sfäär või selle osa, kusjuures tema täiskõverus

$$K=k^2=\frac{1}{r^2}=\text{const}>0. \quad (45.15)$$

46. Pindade isomeetria ja põhiteoreem. Olgu antud kaks lihtpinda

$$\mathcal{T} = \{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\},$$

$$\mathcal{T}^* = \{x^* : x^* = x^*(u_1^*, u_2^*), (u_1^*, u_2^*) \in D^*\}$$

selliselt, et leidub ühe pinna $\mathcal{T}$ niisugune kujutus teisele $\mathcal{T}^*$, mis osutub bijektsiooniks (üksüheseks pealekujutuseks):

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*.$$

Sel korral tekkivast vastavusest

$$x(u_1, u_2) \mapsto x^*(u_1^*, u_2^*)$$

järeldub, et

$$u_\alpha^* = u_\alpha^*(u_1, u_2); \quad \alpha = 1, 2. \quad (46.1)$$

Vaadeldavat bijektsiooni nimetatakse siledaks sileduse järguga k , kui funktsioonidel $u_\alpha^*(u_1, u_2)$ on piirkonnas D olemas k järku pidevad osatuletised. Kui k on suvaline naturaalarv, siis öeldakse, et bijektsioon on sileduse järguga ∞ .

Sileda bijektsiooni $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ korral iga esimesel pinnal olev joon kujutub mingiks jooneks teisel pinnal. Siledat bijektsiooni $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ nimetatakse pindade $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ *isomeetriaks*, kui iga esimesel pinnal oleva joone iga kaare pikkus on võrdne selle kaare kujutise pikkusega teisel pinnal.

Näitame, et *sile bijektsioon $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ on isomeetria siis ja ainult siis, kui teise pinna $\mathcal{T}^*$ esimene ruutvorm $ds^{*2} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \sigma_{\alpha\beta}^* du_\alpha^* du_\beta^*$ läheb pärast teisendust (46.1) ühtimisse esimese pinna $\mathcal{T}$ esimese ruutvormiga $ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta$.*

Tingimuse piisavust on lihtne kontrollida. Kui pärast teisendust (46.1) $ds^{*2} = ds^2$; siis suvalise joone ja tema kujutise puhul

$$\int_a^b ds^* = \int_a^b ds$$

parameetri $t \in T$ iga kahe väärtuse a ja b korral; seega vastavatel kaartel on võrdsed pikkused.

Tingimuse tarvilikkus tõestatakse vastupidise arutlusega. Kui pinnal $\mathcal{F}$ on antud joon, nii et $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, kus $t \in T$, siis tema kujutis teisel pinnal $\mathcal{F}^*$ on määratud võrranditega $u_\alpha^* = u_\alpha^*(t)$, kus

$$u_\alpha^*(t) = u_\alpha^*(u_1(t), u_2(t)); \quad \alpha = 1, 2.$$

Kui kõigi nende joonte vastavate kaartide pikkused on võrdsed, siis art-i 36 tulemuste põhjal

$$\int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} u'_\alpha u'_\beta} dt \equiv \int_{t_0}^t \sqrt{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta}^* u_\alpha^{*'} u_\beta^{*'}} dt.$$

Diferentseerides selle samasuse pooli integraalide muutuva ülemise raja t järgi, saame tulemuseks integreeritavate funktsioonide võrduse ([2], lk. 371) ja sellest pärast ruutu tõstmist ning dt ruuduga korrutamist järeldub, et

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta \equiv \sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta}^* du_\alpha^* du_\beta^*. \quad (46.2)$$

Et suvalise joone korral ka du_α ja du_α^* on suvalised, siis saadud võrdus tähendabki pindade $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^*$ esimeste ruutvormide ühtimist pärast teisendust (46.1). Väide on tõestatud.

Teisendust (46.1) võib vaadelda ka parameetrite teisendusena pinnal $\mathcal{F}^*$. Pärast seda teisendust on vastavad punktid pindadel $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{F}^*$ määratud samade parameetriväärtustega u_1 ja u_2 . Et

$$du_\alpha^* = \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial u_\gamma} du_\gamma,$$

siis pinna $\mathcal{F}^*$ esimene ruutvorm omandab pärast teisendust kuju

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 g_{\alpha\beta}^* \left(\sum_{\gamma=1}^2 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial u_\gamma} du_\gamma \right) \left(\sum_{\delta=1}^2 \frac{\partial u_\beta^*}{\partial u_\delta} du_\delta \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}^* du_\alpha du_\beta,$$

kus

$$\bar{g}_{\alpha\beta}^* = \sum_{\gamma, \delta=1}^2 g_{\gamma\delta}^* \frac{\partial u_\gamma}{\partial u_\alpha} \frac{\partial u_\delta}{\partial u_\beta}$$

ning samasusest (46.2) tuleb, et

$$g_{\alpha\beta} \equiv \bar{g}_{\alpha\beta}^*. \quad (46.3)$$

Siit omakorda järeldub art-i 36 tulemuste põhjal, et *pindade isomeetria korral on võrdsed mitte üksnes kaartide ja nende kujutiste pikkused, vaid võrdsed on ka suvalise kahe lõikuva joone ja nende kujutiste vahelised nurgad ning suvalise piirkonna ja selle kujutise pindalad*. Avalduvad ju nurga koosinus ja piirkonna pindala üksnes esimese ruutvormi kordajate kaudu (ning muidugi ka nurka moodustavaid jooni või piirkonda määravate funktsioonide kaudu,

viimased on aga kujutiste jaoks praegu samad). Kokkuvõttes võib öelda, et *isomeetrilistel pindadel on sama sisemeetrika*.

Oluline on küsimus, millal pindade isomeetria $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ osutub pindade kongruentsuseks, ehk teisiti öeldes, millal leidub ruumi E_3 selline isomeetriline teisendus (liikumine koos võib-olla peegeldusega), mis viib pinna $\mathcal{T}$ ühtimisse pinnaga $\mathcal{T}^*$ selliselt, et iga punkt läheb oma kujutiseks. Jooneteoorias on vastav tingimus antud art-s 26 tõestatud teoreemiga — selleks on joonte kõveruste ja väänete ühtimine kõikides vastavates punktides. Pindade jaoks annab vajalikud tingimused *pinnateooria põhiteoreem*.

Teoreem. *Pinnad $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ on kongruentsed (teisiti öeldes, erinevad ainult asendi poolest ruumis E_3) parajasti siis, kui leidub isomeetria $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ selliselt, et*

- 1) *pinna $\mathcal{T}$ kõverusjoonte kujutisteks on pinna $\mathcal{T}^*$ kõverusjooned,*
- 2) *pinna $\mathcal{T}$ peakõverused k_1 ja k_2 suvalises punktis on võrdsed pinna $\mathcal{T}^*$ peakõverustega selle punkti kujutises.*

Tõestus. Tingimuste tarvilikkus on ilmne. Olgu pinnad $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ viidavad ühtimisse isomeetrilise teisendusega ruumis E_3 . See tekitab pindade isomeetria $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$. Pärast ühtimisse viimist on neil pindadel muidugi samad kõverusjooned ja peakõverused. Et aga viimased on defineeritud geomeetriliste konstruktsioonide abil, siis kanduvad nad selle isomeetrilise teisenduse pöördteisenduse korral iseendiks, mistõttu tingimused 1) ja 2) on tõesti rahuldatud.

Näitame, et teoreemi tingimused on ka piisavad pindade $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ kongruentsuseks. Selleks fikseerime pinnal $\mathcal{T}$ punkti x_0 ja vaatleme pinna $\mathcal{T}$ kanoonilist teljestikku selles punktis x_0 ning pinna $\mathcal{T}^*$ kanoonilist teljestikku selle punkti kujutises x_0^* . Leidub ruumi E_3 selline isomeetriline teisendus, mis viib esimese teljestiku teiseks. Eeldame, et see teisendus on juba tehtud, ja tähistame pindu pärast seda endiselt $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$.

Pinna $\mathcal{T}$ esimene ruutvorm avaldub (42.13) järgi kujul

$$ds^2 = dx^2 = (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2)^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$$

ning isomeetria $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ tõttu $ds^2 \equiv ds^{*2}$ ehk

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 \equiv \omega_1^{*2} + \omega_2^{*2}. \quad (46.4)$$

Teiselt poolt avalduvad ω_α^* pärast teisendust (46.1) du_1 ja du_2 lineaarkombinatsioonidena ning seoste (42.9) järgi ka ω_1 ja ω_2 lineaarkombinatsioonidena:

$$\omega_1^* = C_{11}\omega_1 + C_{12}\omega_2,$$

$$\omega_2^* = C_{21}\omega_1 + C_{22}\omega_2.$$

Arvestame nüüd teoreemi esimest tingimust. Kõverusjoonte üks parv pinnal $\mathcal{T}$ määratakse liikuva kanoonilise teljestiku puhul diferentsiaalvõrrandiga $\omega_2 = 0$, teine parv diferentsiaalvõrrandiga $\omega_1 = 0$. Et nende joonte kujutised oleksid kõverusjoonteks pinnal $\mathcal{T}^*$, nagu nõuab esimene tingimus, peab viimasest kahest seosest tulenema, et

$\omega_2=0 \Rightarrow \omega_2^*=0$, $\omega_1=0 \Rightarrow \omega_1^*=0$. Selleks on aga tarvilik ja piisav, et $C_{12}=C_{21}=0$, s. t. et

$$\omega_1^*=C_{11}\omega_1, \quad \omega_2^*=C_{22}\omega_2.$$

Viies tulemused isomeetria nõudest tulenevasse samasusse (46.4), saame

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = C_{11}^2 \omega_1^2 + C_{22}^2 \omega_2^2,$$

millest $C_{11}=\pm 1$, $C_{22}=\pm 1$. Seega

$$\omega_1^*=\pm\omega_1, \quad \omega_2^*=\pm\omega_2.$$

Kui sobivalt kooskõlastada e_1 ja e_2 ning e_1^* ja e_2^* suunad pindadel, võib alati saavutada, et tegemist on ülemiste märkidega. Niisiis, isomeetriast $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ ja esimesest tingimusest järeldub, et pindadel sobivalt kooskõlastatud kanooniliste teljestike puhul

$$\omega_1^*=\omega_1, \quad \omega_2^*=\omega_2. \quad (46.5)$$

Et (45.8) ja (45.9) põhjal pinnal $\mathcal{T}$

$$d_{\wedge} \omega_1 = \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d_{\wedge} \omega_2 = \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2$$

ja analoogilised valemid kordajatega Γ_1^* ja Γ_2^* kehtivad ka pinnal $\mathcal{T}^*$, siis võrdusest (46.5) järeldub, et

$$\Gamma_1^* \omega_1 \wedge \omega_2 = \Gamma_1 \omega_1 \wedge \omega_2, \quad \Gamma_2^* \omega_1 \wedge \omega_2 = \Gamma_2 \omega_1 \wedge \omega_2,$$

s. t.

$$\Gamma_1^*=\Gamma_1, \quad \Gamma_2^*=\Gamma_2, \quad (46.6)$$

mistõttu

$$\omega_{12}^* = \omega_{12}. \quad (46.7)$$

Teine tingimus tähendab, et $k_1^*=k_1$, $k_2^*=k_2$ ja seepärast (42.12) järgi

$$\omega_{13}^* = \omega_{13}, \quad \omega_{23}^* = \omega_{23}.$$

Kokkuvõttes on kindlaks tehtud, et pindade $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ puhul Darboux'—Cartani valemis kordajatena esinevad vastavad 1-vormid on nii ühel kui teisel pinnal ühesugused.

Tähistame nüüd

$$\sigma = e_1 e_1^* + e_2 e_2^* + e_3 e_3^*$$

ja näitame, et see skalaarne funktsioon σ on tegelikult konstant. Tõepoolest, Darboux'—Cartani valemite järgi

$$\begin{aligned} d\sigma &= (e_2 \omega_{12} + e_3 \omega_{13}) e_1^* + e_1 (e_2^* \omega_{12} + e_3^* \omega_{13}) + \\ &+ (-e_1 \omega_{12} + e_3 \omega_{23}) e_2^* + e_2 (-e_1^* \omega_{12} + e_3^* \omega_{23}) + \\ &+ (-e_1 \omega_{13} - e_2 \omega_{23}) e_3^* + e_3 (-e_1^* \omega_{13} - e_2^* \omega_{23}) = 0, \end{aligned}$$

sest kõik liikmed koonduvad vastastikku, ning seega

$$\sigma = \text{const.}$$

Konstandi σ määramiseks leiame σ väärtuse punktis x_0 , kus pärast isomeetrilist teisendust

$$e_1^* = e_1, \quad e_2^* = e_2, \quad e_3^* = e_3,$$

mistõttu

$$\sigma = \sigma|_{x_0} = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 3.$$

Kui võtta vektor e_i pinna $\mathcal{T}$ suvalises punktis x ja vektor e_i^* pinna $\mathcal{T}^*$ talle vastavas punktis ning tähistada nendevaheline nurk α_i , siis $e_i e_i^* = \cos \alpha_i$ ning

$$\sigma = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 = 3.$$

Et siin $\cos \alpha_i \leq 1$, siis on ainuke võimalus:

$$\cos \alpha_i = 1, \quad \alpha_i = 0$$

ning järelikult

$$e_i^* \equiv e_i,$$

mistõttu

$$dx^* \equiv dx.$$

Siit

$$x^* = x + c,$$

et aga punktis x_0 meil $x^* = x$, siis $c = 0$ ning

$$x^* = x,$$

mida oligi tarvis näidata. Teoreem on tõestatud.

Selle pinnateooria põhiteoreemi sõnastas esimesena K. Peterson¹ oma 1853. a. Tartus kirjutatud kandidaaditöös (vt. allviide lk. 166), kus on visandatud ka teoreemi lühitõestus. Hiljem sai põhiteoreem tuntuks mõnevõrra teises redaktsioonis. Teoreemi eeldused võib nimelt asendada nõudega, et pinna $\mathcal{T}$ kahe ruutvormi kordajate $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ väärtused oleksid igas punktis x võrdsed samasuguste kordajatega $\bar{g}_{\alpha\beta}^*$ ja $\bar{b}_{\alpha\beta}^*$ väärtustega selle punkti kujutises pinnal $\mathcal{T}^*$. Seejuures samasus (46.3) on, nagu eespoolt teada, samaväärne isomeetria $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}^*$ olemasolu nõudega. Kui nüüd meenutada, et võrrandid (38.4) ning (38.7) vastavalt peasihtide (ja seega ka kõverusjoonte) ning peakõveruste määramiseks sisaldavad tundmatute kõrval üksnes ülalmärgitud kordajaid, siis saabki selgeks, et põhiteoreem on sõnastatav ka järgmiselt: *pinnad $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}^*$ on kongruentsed parajasti siis, kui leidub ühe selline sile bijektsioon teisele, mille korral parameetreid kaasa teisendades ühe pinna kahe ruutvormi kordajad igas punktis lähevad võrdseks teise pinna vastavate kordajatega selle punkti kujutises.* Selles redaktsioonis andis teoreemi O. P. Bonnet 1867. a. sõltumatult Petersonist. Lühidalt väljendatakse tulemust nii: *pinna kuju on oma kahe ruutvormiga üheselt määratud, lahtiseks jääb ainult tema asend ruumis E_3 .*

Seejuures on arusaadav, et $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ ei ole vabalt valitavad

¹ Karl Peterson (1828—1881), läti rahvusest matemaatik, õppis 1847—1852 Tartu ülikoolis, hiljem töötas Moskvast.

u_1 ja u_2 funktsioonid. Kindlasti peavad $g_{\alpha\beta}$ rahuldama nõudeid $g_{11} > 0$, $g_{22} > 0$ ja $\det |g_{\alpha\beta}| > 0$, mis tulenevad sellest, et esimene ruutvorm kui ds^2 avaldis on positiivselt määratud. Kuid lisaks sellele peavad olema rahuldatud teatavad kolm võrrandit, mis väljendavad $g_{\alpha\beta}$ ja $b_{\alpha\beta}$ abil neid nõudeid, mida seavad Gaussi—Bonnet' ja Petersoni võrrandid (vt. art. 72).

Väärib märkimist, et pinnateooria põhiteoreemi mõlemad tingimused 1) ja 2) on olulised. Järgmises artiklis selgub nimelt, et on olemas mittekongruentseid pindu, mille puhul leidub kas tingimust 1) või tingimust 2) rahuldav isomeetria.

Harjutusülesanded

73. Arvutada Darboux'—Cartani valemite kordajad ω_1 , ω_2 ja ω_{12} Enneperi pinna korral (vt. harjutusülesanne 70) ning veenduda, et nad rahuldavad valemid (45.2) ja (45.3).

74. Arvutada Enneperi pinna peakõverused k_1 ja k_2 , nende abil vormid $\omega_{13} = k_1\omega_1$, $\omega_{23} = k_2\omega_2$ ning veenduda, et on rahuldatud valemid (45.5) ja (46.6).

75. Joont, mis lõikab pöördpinna meridiaane konstantse nurga all, nimetatakse *loksodroomiks* (λοξόζ -kald-, δρόμος — jooks). Määrata Gaussi—Liouville'i valemi abil loksodroomi geodeetiline kõverus sfääril.

76. Näidata, et joone geodeetiline kõverus k_g pinnal joone punktis x on tõlgendatav järgmiselt: tuleb võtta joone ristprojektsioon pinna puutujatasandile punktis x , selle kõveruseks on k_g .

77. Kontrollida, et
$$\sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta} \omega_\alpha \omega_\beta = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta, \text{ s.t. } \Gamma_{\alpha\beta} \text{ on teise}$$
 ruutvormi kordajad liikuvast teljestikus; kanoonilises teljestikus on teisel ruutvormil seega kanooniline kuju $k_1\omega_1^2 + k_2\omega_2^2$, samuti nagu esimesel ruutvormil $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

78. Arvutada Enneperi pinna kõverusjoonte geodeetilised kõverused Γ_1 ja Γ_2 valemist (45.7) ja (45.8), kasutades harjutusülesande 73 vastust, ning leida Gaussi—Bonnet' valemi abil selle pinna täiskõverus K .

§ 11. PINNA PAINUTAMINE JA SISEGEOMEETRIA

Senises käsitluses on eeldatud, et pind on ruumis jäik. Kuid võimalik on ka teine vaatekoht, kus pinda käsitatakse kui painduvast venimatust materjalist õhukest kelmet. Näiteks tasapinnalise paberilehe saab painutada silindriks või koonuseks. Samuti on võimalik mõnda õhukest kõverpinnalist terasplekkdetaili teataval määral painutada, ilma teda seejuures venitamata või kortsutamata.

Pinna painutamisele saab pindade isomeetria mõiste abil anda igati täpse sisu. Seejuures on võimalik eristada pindade omadusi selle järgi, kas nad painutamisel säilivad või muutuvad. Käesolevas paragrahvis pöörame erilist tähelepanu neile, mis säilivad, kujundades nende abil arusaamise teatavast antud pinnal kehtivast geometriast; millele painutamine mingit mõju ei avalda.

47. Painutamise mõiste ja näited. Kaht pinda, mille puhul leidub ühe pinna isomeetria teisele, nimetatakse *isomeetrilisteks*. Sellised on näiteks kongruentsed pinnad; tingimused, mille korral kaks iso-

meetrilist pinda on kongruentsed, annab pinnateooria põhiteoreem (art. 46). Järgnevatest näidetest selgub, et kui selle teoreemi tingimustest 1) ja 2) kas või üks pole rahuldatud, siis ei tarvitse isomeetrilised pinnad olla kongruentsed.

Kahe mittekongruentse pinna puhul kõneldakse, et üks pind on painutatav teisele, kui leidub niisugune ühest parameetrist siledalt sõltuvate omavahel isomeetriliste pindade parv (art. 34), mis sisaldab kaht antud pinda; teisiti öeldes, üks pind peab olema siledalt kujundatav teiseks, kusjuures ühegi kaare pikkus ei tohi seejuures muutuda. Kahe pinna ühendamist kõnesoleva pinnaparvega nimetatakse ühe pinna *painutamiseks* teisele. On selge, et kaks vaadeldavat pinda peavad siin olema isomeetrilised.

Näide 1. Saab näidata pinnaparve, millega püsthelikoidi teatav osa painutatakse pöördpinnale.

Fikseerime ruumis E_3 teljestiku alguspunktiga o ja paarikaupa ristuvate ühikvektoritega i_1 , i_2 ja i_3 . Vaatleme vektorit

$$e(\varphi) = i_1 \cos \varphi + i_2 \sin \varphi;$$

siin

$$e'(\varphi) = -i_1 \sin \varphi + i_2 \cos \varphi = e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Seejuures

$$e(\varphi)e(\psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi = \cos(\varphi - \psi),$$

mistõttu näiteks

$$e^2(\varphi) = 1, \quad e'^2(\varphi) = e^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Moodustame sileda pinnaparve

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{ x : x = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{u_1}{a}} e(u_2 - \tau) + e^{-\frac{u_1}{a}} e(u_2 + \tau) \right] + \right. \\ \left. + (u_1 \cos \tau + a u_2 \sin \tau) i_3; (u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \right\},$$

kus $\tau \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Näitame, et selle parve kõik pinnad on omavahel isomeetrilised. Tõepoolest, et

$$x_1 = \frac{1}{2} \left[e^{\frac{u_1}{a}} e(u_2 - \tau) - e^{-\frac{u_1}{a}} e(u_2 + \tau) \right] + i_3 \cos \tau,$$

$$x_2 = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{u_1}{a}} e\left(u_2 + \frac{\pi}{2} - \tau\right) + e^{-\frac{u_1}{a}} e\left(u_2 + \frac{\pi}{2} + \tau\right) \right] + i_3 a \sin \tau,$$

siis

$$g_{11} = x_1^2 = \frac{1}{4} \left[e^{\frac{2u_1}{a}} - 2 \cos 2\tau + e^{-\frac{2u_1}{a}} \right] + \cos^2 \tau =$$

$$= \frac{1}{4} \left(e^{\frac{2u_1}{a}} + 2 + e^{-\frac{2u_1}{a}} \right) = \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{a},$$

$$g_{12} = x_1 x_2 = \frac{a}{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + 2\tau \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\tau \right) \right] + a \cos \tau \sin \tau = 0,$$

$$\begin{aligned} g_{22} = x_2^2 &= \frac{a^2}{4} \left[e^{\frac{2u_1}{a}} + 2 \cos^2 \tau + e^{-\frac{2u_1}{a}} \right] + a^2 \sin^2 \tau = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(e^{\frac{2u_1}{a}} + 2 + e^{-\frac{2u_1}{a}} \right) = a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{a} \end{aligned}$$

ning pinna $\mathcal{F}_\tau$ esimene ruutvorm

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{a} (du_1^2 + a^2 du_2^2)$$

ei sõltu parve parameetri τ väärtusest. Kui võtta τ suvalisele kahele väärtusele vastavad pinnad parvest ja ühe igale punktile seada vastavusse samade u_1 ja u_2 väärtustega punkt teisel pinnal, siis saadav kujutus on isomeetria. Järelikult parve iga kahe pinna korral üks neist on painutatav teisele.

Väärtusele $\tau=0$ vastav pind osutub pöördpinnaks. Tõepoolest,

$$x = a \operatorname{ch} \frac{u_1}{a} e(u_2) + u_1 i_3 = \left(a \operatorname{ch} \frac{u_1}{a} \cos u_2, a \operatorname{ch} \frac{u_1}{a} \sin u_2, u_1 \right),$$

seega on tegemist pöördpinnaga (art. 31), kus

$$\varphi(u_1) = a \operatorname{ch} \frac{u_1}{a}, \quad \psi(u_1) = u_1.$$

Meridiaan $x_1 x_3$ -tasandil on funktsiooni

$$x_1 = a \operatorname{ch} \frac{x_3}{a}$$

graafik, mis art-s 27 sai nimeks aheljoon. Saadud pöördpinda (joon. 46) nimetatakse seetõttu *katenuidiks* (lad. k. *catena* — ahel; vt. ka harjutusülesannet 68).

Veendume, et väärtusele $\tau = \frac{\pi}{2}$ vastab püsthelikoid. Sel korral

$$e\left(u_2 + \frac{\pi}{2}\right) = -e\left(u_2 - \frac{\pi}{2}\right) = -i_1 \sin u_2 + i_2 \cos u_2,$$

seega

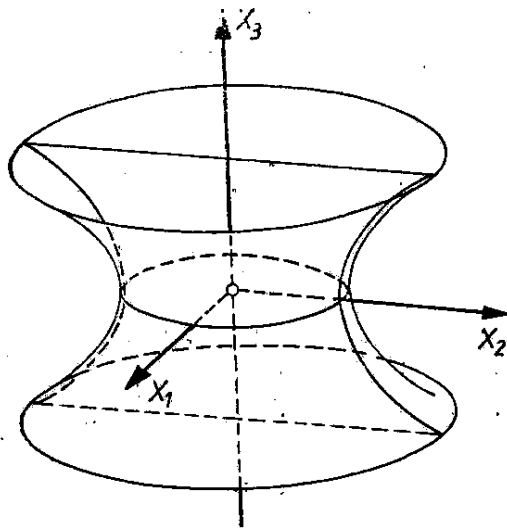
$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} \left(e^{\frac{u_1}{a}} - e^{-\frac{u_1}{a}} \right) (i_1 \sin u_2 - i_2 \cos u_2) + a u_2 i_3 = \\ &= \left(a \operatorname{sh} \frac{u_1}{a} \sin u_2, -a \operatorname{sh} \frac{u_1}{a} \cos u_2, a u_2 \right) \end{aligned}$$

ja siit teisendusega

$$u_1^* = a \operatorname{sh} \frac{u_1}{a}, \quad u_2^* = u_2 - \frac{\pi}{2}, \quad x_3^* = x_3 - a \frac{\pi}{2}$$

saame

$$x = (u_1^* \cos u_2^*, u_1^* \sin u_2^*, a u_2^*).$$



Joonis 46

Me tunneme ära püsthelikoidi võrrandi (41.5). Et praegu $u_2 \in [0, 2\pi)$, siis pole tegemist terve püsthelikoidiga, vaid osaga, mille kirjeldab sirge ühe täispöörde jooksul.

Niisiis, *püsthelikoidi täispöördeline osa on painutatav katenoidile*; kusjuures need pinnad ilmselt ei ole kongruentsed, sest esimene ei ole pöördpind, teine aga on. Terve lõpmatu püsthelikoidi võib painutamiseks mähkida katenoidile, kattes viimast lõpmatu palju kordi.

Lihtne arvutus näitaks (vt. harjutusülesanne 68), et katenoid, samuti nagu püsthelikoid, on minimaalpind, s. t. $H=0$ ehk $k_1 + k_2 = 0$, kusjuures (39.7) põhjal $K = -\frac{1}{\left(a \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{a}\right)^2}$. Püsthelikoidi

korral aga (41.3) põhjal samuti

$$K = -\frac{a^2}{(a^2 + u_1^{*2})^2} = -\frac{1}{\left(a \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{a}\right)^2}.$$

Seejuures alati $K = k_1 k_2$, seega mõlemal pinnal $k_1 = -k_2 = \sqrt{-K}$, mistõttu tegemist on peakõverusi säilitava isomeetriaga. Kõverusjooned muidugi ei saa enam kujutada kõverusjoonteks; nagu lihtne kontrollida, kujutuvad nad teise pinna asümptootjoonteks.

Uhtlasi selgub siit, et pinnateooria põhiteoreemi teisest tingimusest üksi ei piisa isomeetriliste pindade kongruentsuseks, täidetud peab olema ka esimene tingimus. Kuid ainuüksi esimese tingimuse täidetus ei ole samuti küllaldane, et isomeetria oleks kongruentsus. See selgub järgmisest lihtsast näitest.

Näide 2. Pöördsilindri kõverusjoonte võrk koosneb (vt. art-i 40 näide) paralleelidest ja meridiaanidest (sirgjoonelistest moodustajatest). Antud pöördsilindrist võib piki mingit kaht moodustajat välja lõigata riba ja painutada see teisele, antust erineva läbimõõduga pöördsilindrile nii, et moodustajad lähevad jälle moodustajateks. Pöördsilindri peakõverused, millest üks on null ja teine paral-

leeli raadiuse pöördväärtus, seejuures muutuvad (täpsemalt; teine neist muutub), samal ajal kui kõverusjooned lähevad kõverusjoonteks. Seejuures kahe erineva läbimõõduga pöördsilindri ribad on ilmselt mittekongruentsed.

Pöördsilinder on torsi erijuht. Järgmises näites vaatleme torsi üldiselt.

Näide 3. Tõestame, et iga lihtpind, mis on tors (ehk tasanduv pind), on painutatav tasandile. Tors on teatavasti kas silindriline pind, kooniline pind või puutujatepind (art. 35). Kahel esimesel juhul loeme väite ilmseks, kuigi teda saab muidugi ka vajalike arvutustega põhjendada. Puutujatepinna puhul

$$x = x(s) + tx'(s) = x(u_1) + u_2 x'(u_1);$$

seejuures joone $x = x(s)$ saab määrata ka loomulike võrranditega $k = k(s)$ ja $\kappa = \kappa(s)$. Siin

$$x_1 = x'(u_1) + u_2 x''(u_1) = t(u_1) + u_2 k(u_1) n(u_1),$$

$$x_2 = x'(u_1) = t(u_1),$$

seega

$$g_{11} = x_1^2 = 1 + [u_2 k(u_1)]^2, \quad g_{12} = 1, \quad g_{22} = 1;$$

nagu näha, $g_{\alpha\beta}$ avaldised ei sisalda väärtet κ . Vaatleme nüüd joonte üheparameetrilist parve, milles joon määratakse loomulike võrranditega

$$k = k(s), \quad \kappa = \tau \kappa(s).$$

Parve kõigi joonte puutujatepindadel on $g_{\alpha\beta}$ avaldised samad, s.t. pinnad on isomeetrikised. Seejuures väärtusele $\tau = 1$ vastab antud puutujatepind, väärtusele $\tau = 0$ aga teatava tasandilise joone puutujatepind, mis on tasand või selle mingi osa.

Pinna painutamise detailsem käsitus jääb käesoleva kursuse raamidest välja. Sellekohase teooria loomist alustas oma töödega 1830. aastail hilisem Tartu ülikooli professor F. Minding¹, kes andis 1838. a. ka esimese mittetriviaalse näite helikoidi painutamisest katenoidile (näide 1). Esitame siinkohal mõningaid selle teooria tähtsamaid tulemusi.

Igal pinnal leidub iga punkti ümber niisugune piirkond, mis laseb end painutada. Erandlikeks võivad siin olla ainult tasandumispunktid teatavatel lisatüüpimustel.

Tulemus ei ole laiendatav tervikpindadele. Sfääri igal punktil on ümbrus (näiteks segment), mis laseb end painutada, kuid sfäär tervikuna ei ole enam painutatav, nagu väitis juba Minding ja tõestas H. Liebmann² 1899. a. Hiljem on see tulemus laiendatud suvalise kinnise kumera pinna juhule (kõige üldisemalt A. V. Pogorelovi³ poolt 1951. a.): sellise pinna iga isomeetria mingile teisele pinnale osutub kongruentsuseks. Sama omadusega on ka rida täielikke lõpmatuid kumeraid pindu (näiteks elliptilised paraboloidid), samuti mõned kinnised mitte-kumerad pinnad (näiteks iga toor).

¹ Vt. allviide¹ lk-l 158; Р. И. Гаяченкова, Ю. Г. Лумисте, Е. П. Ожигова, И. Б. Погребыский. Фердинанд Миндинг. Ленинград, 1970, гл. 6 и 7.

² Karl Otto Heinrich Liebmann (1874—1939), saksa matemaatik.

³ Aleksei Vassiljevitsj Pogorelov (s. 1919), nõukogude matemaatik, NSVL TA akadeemik.

Selgitame veel painutamise ja isomeetrilisuse vahekorra. On selge, et teineteisele painutatavad pinnad on isomeetrilised. Isomeetriliste pindade kohta on näidatud, et kumbki neist on iga punkti teatavas ümbruses painutatav kas teisele või teise peegelpildile (siin võiks võrrelda näiteks kahe käe kindaid).

48. Sisigeomeetria ning Mindingu ja Gaussi teoreemid. Painutamise mõiste võimaldab eristada pinna kahesuguseid omadusi: ühed säilivad, teised aga muutuvad pinna painutamisel. Säilivad näiteks pinna sisemeetrika suurustega (pikkuste, nurkade ja pindaladega) seotud omadused.

Pinnateooria osa, mis uurib pinna painutamisel säilivaid omadusi, nimetatakse pinna *sisigeomeetriaks*. Teisiti öeldes, antud pinna sisigeomeetria on pinna geomeetria see osa, mis on ühine kõigile selle pinnaga isomeetrilistele pindadele.

Igal pinnal on oma sisigeomeetria. Näiteks tasandi sisigeomeetriaks on eukleidiline planimeetria — ruumi E_n geomeetria (vt. § 1) juhul, kui $n=2$. Sfääri sisigeomeetriat nimetatakse sfääriliseks geomeetriaks; selle uurimist alustati samuti juba Vana-Kreekas. Võib arendada ka antud pöördpinna (näiteks pöördsilindri, katenoidi, toori jt.) sisigeomeetriat. Seejuures näiteks pöördsilindril või katenoidil on iga punkti lähemas ümbruses sama sisigeomeetria mis vastavalt tasandil või helikoidil.

Et art. 46 tulemuse kohaselt kaks pinda on isomeetrilised parajasti siis, kui neil saab parameetrid u_1 ja u_2 kooskõlastada selliselt, et esimese ruutvormi kordajad $g_{\alpha\beta}$ on pindadel ühised, siis *sisigeomeetriat võib iseloomustada ka kui pinnateooria seda osa, mida saab arendada üksnes esimest ruutvormi kasutades, teise ruutvormi abi vajamata*.

Sisigeomeetria idee tekkis C. Fr. Gaussil seoses tema geodeesiaalase teoreetilise uurimistööga. Teoreetilise geodeesia aineks on Maa pinna sisigeomeetria, seetõttu nimetatakse sisigeomeetrilisi suurusi ja mõisteid sageli ka *geodeetilisteks*. Sisigeomeetria ideed väljendas eriti piltlikult H. Helmholtz¹, öeldes, et sisigeomeetria on see geomeetria, mille looks pinnal elunev kujuteldav arukas kahe-mõõtmeline olend («lest»), kes ümbritsevat ruumi ja seega ka pinna painutamist üldse ei tajuks. Sisigeomeetria ulatusliku üldistuse kõrgemamõõtmelisele juhule andis 1854. a. B. Riemann²; sellega tutvume §-s 17.

Järgnevalt näitame, et sisigeomeetriasse kuuluvad sisemeetrika suuruste kõrval ka joone geodeetiline kõverus k_g pinnal ja pinna täiskõverus K , kuigi nende senistest definitsioonidest see otseselt ei nähtu. Võimaluse selles veenduda annavad Gaussi—Liouville'i valem (43.10) ja Gaussi—Bonnet' võrrand (45.12).

Alustame esimesest:

$$k_g = \varphi' + \Gamma_1 \cos \varphi + \Gamma_2 \sin \varphi,$$

ja käsitleme seda pinna liikuva kanoonilise teljestiku abil, mil

¹ Hermann Ludvig Ferdinand Helmholtz (1821—1894), saksa füsioloog ja füüsik.

² Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826—1866), saksa matemaatik.

paremal pool φ on nurk pinnal antud joone ja esimese kõverusjoone vahel ning $\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$ selle nurga tuletis joone loomuliku parameetri s järgi. Olgu tegemist kõnesoleva pinna painutamisega mingile teisele pinnale. Kõverusjoonte võrk kujutub siis teisele pinnale mingiks ortogonaalseks joonevõrguks — ortogonaalseks seetõttu, et painutamisel nurgad kui sisemeetrika suurused säilivad, kõverusjooned aga lõikuvad risti. Nurkade säilimisest järeldub samuti, et antud joone kujutise ja esimese kõverusjoone kujutise vaheline nurk on samuti φ . Et painutamisel jääb muutumatuks ka kaarepikkuse poolt määratud loomulik parameeter s , siis võib öelda, et teisel pinnal on Gaussi—Liouville'i valemi paremas pooles täpselt sama suured kindlasti φ' , $\cos \varphi$ ja $\sin \varphi$.

Keskseks küsimuseks osutub suuruste Γ_1 ja Γ_2 käitumine pinna painutamisel. Siin saab kasutada samu mõttekäike, mis pinna põhiteoreemi tõestamisel art-s 46. Erinevus on selles, et antud pinna kõverusjoonte võrgu kujutiseks ei tarvitse enam olla teise pinna kõverusjoonte võrk, nagu oli nõutud põhiteoreemi ühes eelduses. See aga ei muuda oluliselt asja: liikuva kanoonilise teljestiku asemel tuleb teisel pinnal kasutada lihtsalt sellist liikuvat teljestikku, mille baasiühikvektoreiks e_1^* ja e_2^* on antud pinna kõverusjoonte võrgu kujutisse kuuluvate joonte puutujaühikvektorid. Muus osas põhiteoreemi tõestuse mõttekäigud valemist (46.4) kuni valemieni (46.7) korduvad (ainult pinna $\mathcal{T}^*$ kõverusjoonte ja kanoonilise teljestiku asemel tuleb kõnelda vastavalt pinna $\mathcal{T}$ kõverusjoonte kujutistest ja nendega seotud liikuvast teljestikust). Meile on praegu tähtis järeldus (46.6), mis näitabki, et suurused Γ_1 ja Γ_2 on painutamisel invariantid. Koos nendega on invariantne ka joone geodeetiline kõverus k_g ning me jõuame järgmise *Mindingu teoreemi*ni.

Joone geodeetiline kõverus k_g pinnal on pinna painutamisel invariantne ja kuulub seetõttu pinna sisegeomeetriasse.

Teisiti öeldes, kahe pinna isomeetria korral ühel pinnal oleva joone geodeetiline kõverus k_g mingis punktis on võrdne selle joone kujutise geodeetilise kõverusega selle punkti kujutises teisel pinnal.

Teoreemi sõnastas (terminit «geodeetiline kõverus» veel kasutamata; vt. art. 43) ja tõestas esimesena F. Minding 1830. a.

Teeme nüüd analoogilise järelduse Gaussi—Bonnet' võrrandist (45.12):

$$K = \partial_2 \Gamma_1 - \partial_1 \Gamma_2 - \Gamma_1^2 - \Gamma_2^2. \quad (48.1)$$

Siin on vaja veel selgitada suuruste $\partial_2 \Gamma_1$ ja $\partial_1 \Gamma_2$ käitumist painutamisel. Need suurused on kordajateks avaldises

$$d\Gamma_\alpha = \partial_1 \Gamma_\alpha \omega_1 + \partial_2 \Gamma_\alpha \omega_2, \quad (48.2)$$

kus piki pinnal asetsevat suvalist joont valemite (43.9) põhjal $\omega_1 = ds \cos \varphi$, $\omega_2 = ds \sin \varphi$. Et Γ_α , s ja φ on pinna painutamisel invariantid, siis on seda järelikult ka suurused $\partial_1 \Gamma_\alpha$, $\partial_2 \Gamma_\alpha$ — esi-

mese saame valemist (48.2), kui võtame $\varphi \equiv 0$, teise, kui võtame $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$. Seega kehtib järgmine *Gaussi teoreem*.

Pinna täiskõverus K on pinna painutamisel invariantne ja kuulub seetõttu sisegeomeetrias.

Teoreem järeldub vahetult ka (45.5) ja (45.10) alusel tekkivast seosest

$$d_{\wedge} \omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2, \quad (48.3)$$

kui selles arvestada pindade isomeetria puhul kehtivaid võrdusi (46.5) ja (46.7).

Teoreemi sõnastas ja tõestas esimesena C. Fr. Gauss 1827. a., nimetades seda *Theorema Egregium* (lad. k. oivaline teoreem). Pinna täiskõverust K , eriti kui teda käsitletakse sisegeomeetria seisukohalt (vt. art. 51), nimetatakse ka *Gaussi kõveruseks*. Avaldist (39.1): $K = k_1 k_2$ arvestades võib öelda, et kui pinna painutamisel üks peakõverus suureneb teatav arv korda (s.t. korrutub mingi suurusega λ), siis teine peakõverus, eeldusel, et $K \neq 0$, väheneb sama arv korda (s.t. korrutub suurusega λ^{-1}). Samuti saab kohe selgeks, et painutamisel läheb elliptiline punkt alati elliptiliseks, hüperboolne hüperboolseks ja paraboolne paraboolseks. Seetõttu on näiteks lootusetu püüda sfääri või pöördellipsoidi mingit osa painutada tasandile. See asjaolu teeb võimatuks moonutustevaba geograafilise kaardi loomise.

Tasandile painutatavaid pindu on võimalik täielikult kirjeldada: iga selline pind on tors ja seega kas silindriline pind, kooniline pind või puutujatepind (art. 35). Tõepoolest, et tasandil $K \equiv 0$, siis ka temale painutataval pinnal $K \equiv 0$, sellise omadusega pind on aga tors (art. 41). Siit on tulnudki torsi puhul sageli kasutatav nimi «tasanduv pind».

Gaussi teoreemist järeldub ka, et pinna täiskõverus peab olema avaldatav üksnes esimese ruutvormi kordajate kaudu (art. 48). Vastav üldine avaldis on küllalt keerukas, me esitame ta mõnevõrra hiljem. Esialgu tuletame K avaldise kahel erijuhul.

Oletame algul, et parameetrijoonte võrk pinnal on ortogonaalne, s.t. igas punktis $x_1 \perp x_2$ ehk $g_{12} \equiv 0$. Sel korral saab liikuva teljestiku valida niimoodi, et

$$e_1 = \frac{x_1}{|x_1|} = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}, \quad e_2 = \frac{x_2}{|x_2|} = \frac{x_2}{\sqrt{g_{22}}};$$

siis aga

$$dx = x_1 du_1 + x_2 du_2 = \sqrt{g_{11}} e_1 du_1 + \sqrt{g_{22}} e_2 du_2,$$

mistõttu

$$\omega_1 = \sqrt{g_{11}} du_1, \quad \omega_2 = \sqrt{g_{22}} du_2. \quad (48.4)$$

Siit

$$\begin{aligned} d_{\wedge} \omega_1 &= d \sqrt{g_{11}} \wedge du_1 = \left(\frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} du_2 \right) \wedge du_1 = \\ &= - \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} du_1 \wedge du_2 \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$d_{\wedge} \omega_2 = \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} du_1 \wedge du_2.$$

Valemitest (45.8) ja (45.9) järeldub, et

$$- \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} = \Gamma_1 \sqrt{g_{11} g_{22}}, \quad \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} = \Gamma_2 \sqrt{g_{11} g_{22}}. \quad (48.5)$$

Edasi saame

$$d\Gamma_{\alpha} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Gamma_{\alpha}}{\partial u_2} du_2$$

võrdlemisel valemiga (48.2); kus arvestame avaldise (48.4), et

$$\begin{aligned} \partial_2 \Gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(- \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \left\{ - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Siin esimene liidetav

$$\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \cdot \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} = \Gamma_1^2$$

mistõttu asendamisel K avaldisse (48.1) koondub ta välja selle avaldise kolmanda liikmega. Analoogiline on lugu ka $\partial_1 \Gamma_2$ puhul ning kokkuvõttes tekib järgmine *Gaussi võrrand*:

$$K = - \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u_2} \right) \right]. \quad (48.6)$$

Lihtsa järelduse erijuhu jaoks, mil lisaks veel $g_{11} \equiv 1$, teeme art-s 52.

Väga lihtsa kuju omandab K avaldis ka siis, kui pinna esimeses ruutvormis $g_{11}=g_{22}=1$. Sel korral x_1 ja x_2 on ühikvektorid ning kui nurk nende vahel (ehk u_1 - ja u_2 -joone vahel) tähistada φ , siis $g_{12}=x_1x_2=\cos \varphi$, nii et esimesel ruutvormil on kuju

$$ds^2=du_1^2+2\cos \varphi du_1 du_2+du_2^2. \quad (48.7)$$

Siin $u_2=\text{const} \Rightarrow ds=\pm du_1$, $u_1=\text{const} \Rightarrow ds=\pm du_2$, s. t. u_1 ja u_2 on parameetrijoonte loomulikud parameetrid.

Juhul $\varphi=\frac{\pi}{2}$ saame siit esimese ruutvormi pinnal, millele on painutatav tasand või selle osa koos temale tõmmatud ristkoordinaatjoonte võrguga. Käsitledes viimast kanga niitide võrguna, võib vaadelda ka painutamise üldistust, kus lubatakse muuta esialgset täisnurka kanga niitide vahel, kuid mitte niite venitada. Selliselt toimitakse kangastega nendest rõivaid vormides: näiteks marli-tükki, mille niitidevaheline nurk on suhteliselt kergesti muudetav, saab tõmmata peaaegu igasugusele kõverpinnale. Niisugust painutamise üldistust käsitles P. L. Tšebõšov oma 1878. a. Pariisis peetud ettekandes «Rõivaste juurdelõikamisest», mistõttu sellist parameetrijoonte võrku, mille puhul esimesel ruutvormil on kuju (48.7), nimetatakse *Tšebõšovi võrguks*.¹

Valime läikva teljestiku baasiühikvektorid e_1 ja e_2 sellise võrgu joonte nurgapoolitajatel, s. t. vektorite x_1-x_2 ja x_1+x_2 suhtel. Et viimaste vektorite skalaarruudud on

$$(x_1-x_2)^2=1-2\cos \varphi+1=4\sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$(x_1+x_2)^2=1+2\cos \varphi+1=4\cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

siis

$$e_1=\frac{x_1-x_2}{2\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad e_2=\frac{x_1+x_2}{2\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Siit järeldub, et

$$\omega_1=\sin \frac{\varphi}{2} (du_1-du_2), \quad \omega_2=\cos \frac{\varphi}{2} (du_1+du_2),$$

$$d_{\wedge} \omega_1=\frac{1}{2}\cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \wedge (du_1-du_2), \quad d_{\wedge} \omega_2=-\frac{1}{2}\sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \wedge (du_1+du_2),$$

mistõttu

$$\omega_1 \wedge \omega_2=\sin \varphi du_1 \wedge du_2,$$

$$\Gamma_1=-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{4\sin \frac{\varphi}{2}}, \quad \Gamma_2=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{4\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Nüüd

$$\omega_{12}=\Gamma_1\omega_1+\Gamma_2\omega_2=\frac{1}{2}(\varphi_2 du_2-\varphi_1 du_1)$$

ja (48.3) annabki lihtsa avaldise:

$$\varphi_{12}=-K \sin \varphi. \quad (48.8)$$

Mis puutub üldisse valemisse täiskõveruse K avaldamiseks pinna esimese

¹ Pafnuti Lvovitš Tšebõšov (1821—1894), vene matemaatik, Peterburi TA akadeemik.

ruutvormi kordajate kaudu, siis siin tutvustame ainult tulemust, mille sai C. F. Gauss 1827. a. pärast pikki arvutusi järgmisel kujul: kui

$$ds^2 = E dp + 2F dp dq + G dq^2,$$

siis

$$\begin{aligned} 4(EG - F^2)^2 K = & E(E_q G_q - 2F_p G_q + G_p^2) + \\ & + F(E_p G_q - E_q G_p - 2E_q F_q + 4F_p F_q - 2F_p G_p) + \\ & + G(E_p G_p - 2E_p F_q + E_q^2) - 2(EG - F^2)(E_{qq} - 2F_{pq} + G_{pp}); \end{aligned} \quad (48.9)$$

siin näiteks $E_q = \frac{\partial E}{\partial q}$, $E_{qq} = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}$ jne. Sellest valemist järeldaski Gauss oma «oivalise teoreemi», mis on sõnastatud eespool. Hiljem on Gaussi valemit õnnestunud korraldada mõnevõrra kompaktsemasse kujju:

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & E_p & E_q \\ F & F_p & F_q \\ G & G_p & G_q \end{vmatrix} - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \left(\frac{E_q - F_p}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_q - \left(\frac{F_q - G_p}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_p \right\}, \end{aligned} \quad (48.10)$$

mis erijuhul, kui $F \equiv 0$, erineb valemist (48.6) ainult tähistuste poolest.

49. Geodeetiline joon. Pinna sisegeomeetrias on eriline tähendus joontel, mille geodeetiline kõverus pinnal on joone igas punktis võrdne nulliga. Neid jooni nimetatakse pinna *geodeetilisteks joonteks* ehk lihtsalt pinna *geodeetilisteks*.

Geodeetiline joon on «sirgeim» (s.t. vähima kõverusega) kõigi teda antud punktis puutuvate joonte seas pinnal, sest kõigil neil on ühine normaalkõverus k_0 ja minimaalne kõverus k on võrduse (43.7) põhjal tõepoolest niisugusel joonel, mille puhul $k_g = 0$. Et see võrdus on (43.8) järgi samaväärne tingimusega

$$k \sin \theta = 0,$$

siis joon pinnal on geodeetiline parajasti siis, kui tema igas punktis kas 1) $k = 0$ või 2) nurk 0 joone kõverusvektori kn ja pinna normaalühikvektori m vahel on 0 või teisiti öeldes, kui joone kooldumistasand läbib pinna normaali. Nii näiteks pinnal asuv sirge (siin $k \equiv 0$) on alati selle pinna geodeetiline joon. Samuti on näiteks pöördpinna iga meridiaan geodeetiline joon, sest meridiaani tasand, olles ühtlasi kooldumistasand, läbib pöördpinna telje ja seetõttu ka pinna normaali, sest pind on tema suhtes sümmeetriline. Sfääri geodeetilisteks joonteks on järelikult sfääri suurringjooned.

Geodeetilise joone ülalantud definitsioonist ja Mindingu teoreemist järeldub vahetult, et geodeetilise joone mõiste kuulub pinna sisegeomeetriasse. Pindade isomeetria puhul on geodeetilise joone kujutiseks jälle geodeetiline joon.

Kui palju on antud pinnal geodeetilisi jooni? Küsimust on kõige lihtsam selgitada kanoonilist teljestikku kasutades. Nõuame, et pinnal $\mathcal{T}$ võrranditega (32.3) määratud joon oleks geodeetiline joon;

eeldame, et parameeter neis võrrandeis on joone loomulik parameeter s .

Tähistame nurga selle joone ja esimese kõverusjoone vahel $\varphi(s)$. Sel korral valemi (43.10) ja tingimuse $k_g = 0$ põhjal

$$\varphi' = -\Gamma_1 \cos \varphi - \Gamma_2 \sin \varphi.$$

Lisades siia võrdusest (42.10) ja (43.9) järelduvad seosed

$$\frac{du_\beta}{ds} = B_{1\beta} \frac{\omega_1}{ds} + B_{2\beta} \frac{\omega_2}{ds} = B_{1\beta} \cos \varphi + B_{2\beta} \sin \varphi,$$

saame kolme tundmatu funktsiooni $\varphi(s)$, $u_1(s)$ ja $u_2(s)$ leidmiseks järgmisest kolmest diferentsiaalvõrrandist koosneva normaalkujulise süsteemi:

$$\varphi'(s) = -\Gamma_1(u_1(s), u_2(s)) \cos \varphi(s) - \Gamma_2(u_1(s), u_2(s)) \sin \varphi(s), \quad (49.1)$$

$$u_1'(s) = B_{11}(u_1(s), u_2(s)) \cos \varphi(s) + B_{21}(u_1(s), u_2(s)) \sin \varphi(s), \quad (49.2)$$

$$u_2'(s) = B_{12}(u_1(s), u_2(s)) \cos \varphi(s) + B_{22}(u_1(s), u_2(s)) \sin \varphi(s). \quad (49.3)$$

Sel puhul kehtiva Cauchy teoreemi ([8], lk. 185) järgi on süsteemil etteantud algtingimuste

$$\varphi(s_0) = \alpha, \quad u_1(s_0) = a_1, \quad u_2(s_0) = a_2 \quad (49.4)$$

korral üks ja ainult üks neid algtingimusi rahuldav lahend $\varphi(s)$, $u_1(s)$, $u_2(s)$.

Geomeetriliselt tähendab see, et läbi pinna etteantud punkti (a_1, a_2) läheb etteantud nurga α all parajasti üks geodeetiline joon. Teisiti öeldes, läbi pinna iga punkti kulgeb igas sihis parajasti üks geodeetiline joon.

Et tasandil ja sfääril saab täpselt sama vabadusega tõmmata vastavalt sirgeid ja suurringjooni, mis on geodeetilised jooned, siis järeldub siit, et tasandi ja sfääri geodeetilisteks joonteks on parajasti vastavalt kõik sirged ja kõik suurringjooned.

Mõnevõrra üldisema näitena vaatleme pöördpinna. Selle esimeses ruutvormis (36.15):

$$ds^2 = [\varphi'^2(u_1) + \psi'^2(u_1)] du_1^2 + \varphi^2(u_1) du_2^2$$

asendame piki meridiaani muutuva parameetri u_1 meridiaani loomuliku parameetriga

$$v_1 = \int_{a_1}^{u_1} \sqrt{\varphi'^2(u_1) + \psi'^2(u_1)} du_1 = v_1(u_1).$$

Avaldades vastupidi $u_1 = u_1(v_1)$ ning tähistades ajutiselt $v_2 = u_2$ ja

$$\varphi(u_1(v_1)) = r(v_1), \quad (49.5)$$

saame pöördpinna esimesele ruutvormile kuju

$$ds^2 = dv_1^2 + r^2(v_1) dv_2^2.$$

Suurus (49.5) tähendab geomeetriliselt pöördpinna punkti pöörlemisraadiust (art. 31), praegu meridiaani loomuliku parameetri v_1 funktsioonina. Läheme nüüd

tähistelt v_1, v_2 tagasi algtähistuste u_1, u_2 juurde, eeldades, et esimesel ruutvormil on eespool saadud kuju

$$ds^2 = du_1^2 + r^2(u_1) du_2^2. \quad (49.6)$$

Pöördpinna kõverusjoonteks on teatavasti (vt. art-i 40 näide) meridiaanid ja paralleelid — praegu vastavalt u_1 - ja u_2 -jooned. Järelikult võime rakendada valemeid (48.5), milles praegu $g_{11}=1$, $g_{22}=r^2$. Seega

$$\Gamma_1=0, \quad \Gamma_2=\frac{r'}{r},$$

kusjuures valemeist (48.4) jäeldub, et $B_{11}=1$, $B_{12}=B_{21}=0$, $B_{22}=\frac{1}{r}$.

Süsteem (49.1), (49.2), (49.3) geodeetilise joone määramiseks tuleb nüüd järgmine:

$$\varphi' = -\frac{r'}{r} \sin \varphi, \quad (49.7)$$

$$u_1' = \cos \varphi,$$

$$u_2' = \frac{1}{r} \sin \varphi.$$

Korrutame omavahel esimese kahe võrrandi pooled, vahetades enne teise omad ja korrutades esimese läbi suurusega r :

$$r \cos \varphi \cdot \varphi' = -r' \cdot u_1' \cdot \sin \varphi. \quad (49.8)$$

Siit tuleneb, et

$$(r \sin \varphi)' = r' \cdot u_1' \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot \varphi' = 0,$$

mistõttu

$$r \sin \varphi = c = \text{const.} \quad (49.9)$$

Tulemuse saab väljendada järgmiselt: *pöördpinna geodeetilise joone punkti kaugus r pöördeteljest on pöördvõrdeline selle geodeetilise joone ja meridiaani vahelise nurga φ siinusega.*

Selle lause tõestas A. Clairaut¹ 1733. a., mistõttu seda nimetatakse *Clairaut' teoreemiks*.

Süsteemi edasine lahendamine on lihtne:

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_2'}{u_1'} = \frac{1}{r} \tan \varphi = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 - (r \sin \varphi)^2}} = \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}},$$

$$u_2 = c \int_{a_1}^{u_1} \frac{du_1}{\sqrt{r^2(u_1) - c^2}} + a_2. \quad (49.10)$$

Nagu näha, on üldlahendis kolm suvalist konstanti: a_1 ja a_2 , mis määravad pinna punkti, ja c , mis määrab sihi selles punktis. Algtingimuse $\varphi(s_0)=0$ korral (49.9) põhjal $c=0$ ja vastav lahend (49.10) on $u_2=a$ — tegemist on meridiaaniga. Iga paralleel aga pole geodeetiline joon, sest paralleeli korral $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\varphi'=0$ ja (49.7) on rahuldatud üksnes siis, kui $r'(u_1)=0$, s. t. kui paralleeli raadius on statsionaarne. Ka geomeetriliselt on selge, et paralleeli tasand läbib pöördpinna normaale, nagu nõutakse geodeetilise joone puhul, siis ja ainult siis, kui meridiaani puutuja selle paralleeli punktis on paralleelne pöördeteljega, s. t. kui paralleeli raadius on statsionaarne.

¹ Alexis Claude Clairaut [kleroo] (1713—1765), prantsuse matemaatik ja astronoom, Prantsuse TA liige.

50. Geodeetilised jooned kui lühimad jooned. Analoogia tasandi sirgete ja pinna geodeetiliste joonte vahel ei piirdu ainult eelmises art-s esitatuga. Geodeetilised jooned osutuvad pinna küllalt väikeses piirkonnas ka lühimateks joonteks pinnal.

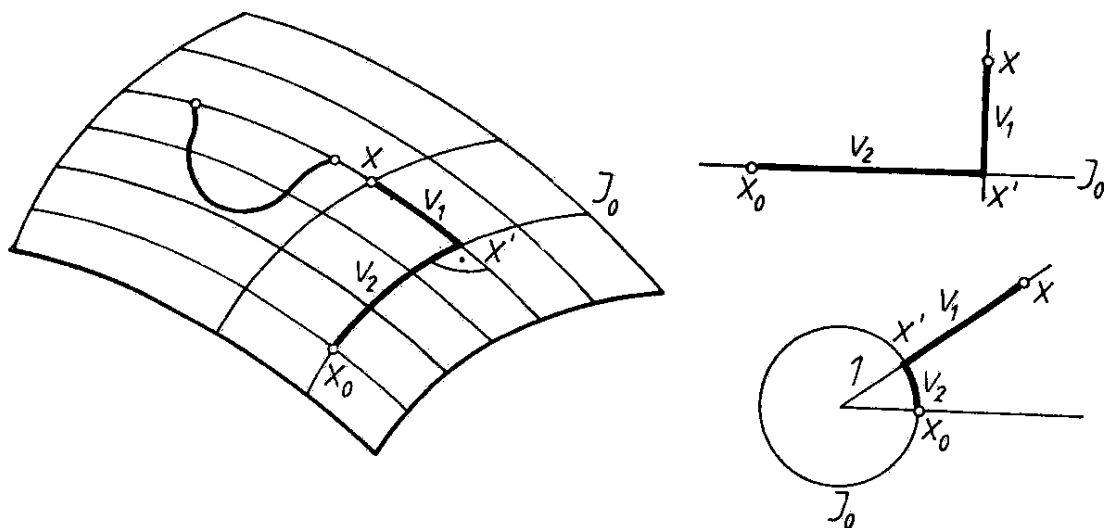
Selle näitamiseks võtame pinnal kasutusele teatavad nn. *geodeetilised koordinaadid*, mis määratakse järgmiselt.

Olgu pinnal fikseeritud punkt x_0 ja seda punkti läbiv joon $\mathcal{J}_0$. Selle joone $\mathcal{J}_0$ igast punktist x' läheb pinnal läbi parajasti üks joont $\mathcal{J}_0$ risti lõikav geodeetiline joon. Viimase iga punkti x asukoha saab nüüd näidata kahe arvuga: punkti x' parameetriga v_2 joonel $\mathcal{J}_0$ ja punkti x loomuliku parameetriga v_1 sellel geodeetilisel joonel (punktist x' arvates; joon. 47). Sel viisil saadud arvud v_1 ja v_2 üldistavad nii rist- kui polaarkoordinaate tasandil: esimesed saadakse, kui $\mathcal{J}_0$ on sirge, teised — kui $\mathcal{J}_0$ on ühikringjoon (siis v_2 on polaarnurk φ radiaanides ja v_1+1 polaarraadius ρ).

Kõnesolevate geodeetiliste joonte puhul on rahuldatud geodeetiliste joonte diferentsiaalvõrrandisüsteem (49.1), (49.2) ja (49.3), kusjuures praegu algtingimuste (49.4) paremad pooled $s_0 = (v_1)_0 = 0$ puhul sõltuvad pidevalt ja diferentseeruvalt parameetrist v_2 . Diferentsiaalvõrrandisüsteemi lahendi vastava omaduse põhjal ([8], lk. 277) sõltub ka lahend — loomuliku parameetri funktsioonide kolmik — punkti x_0 teatavas ümbruses V pidevalt ja diferentseeruvalt samast parameetrist v_2 . Järelikult punkti x esialgsed parameetrid u_1 ja u_2 on uute parameetrite diferentseeruvad funktsioonid $u_\alpha = u_\alpha(v_1, v_2)$, mida võib kasutada parameetrite teisendamiseks pinnal punkti x_0 teatavas ümbruses $U \subset V$.

Eeldame, et parameetrite selline teisendus on juba tehtud ja läheme tähistustelt v_1, v_2 ja V tagasi parameetrite ja piirkonna alg-tähistustele u_1, u_2 ja U .

Et u_1 on praegu geodeetilise (u_1 -joone) loomulik parameeter,



Joonis 47

siis $|x_1|=1$ ning me võime piirkonnas U võtta kasutusele liikuva teljestiku selliselt, et

$$e_1 = x_1. \quad (50.1)$$

Sel korral valemeis (42.7)

$$A_{11}=1, \quad A_{12}=0, \quad A_{21}=x_2 e_1 = x_2 x_1 = g_{12},$$

mistõttu (42.9) põhjal

$$\omega_1 = du_1 + g_{12} du_2, \quad \omega_2 = A_{22} du_2. \quad (50.2)$$

Rakendame nüüd Gaussi—Liouville'i valemit (43.10) u_1 -joone korral, mil meie poolt valitud liikuvast teljestikust $\varphi \equiv 0$. Järelikult Γ_1 on praegu u_1 -joone geodeetiline kõverus, kuid et see joon on ise geodeetiline joon, siis $\Gamma_1 \equiv 0$. Sellega koos valemi (45.8) põhjal $d \wedge \omega_1 \equiv 0$.

Teiselt poolt järeldub (50.2) esimesest seosest, et

$$d \wedge \omega_1 = \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} du_1 \wedge du_2,$$

mistõttu

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} \equiv 0;$$

seega g_{12} on parameetri u_2 iga fikseeritud väärtuse korral konstant. Kui lisada, et joone γ_0 punktides, kus $u_1=0$, on u_1 -jooned risti selle joonega γ_0 , mistõttu $g_{12}(0, u_2) \equiv 0$, saame konstandi väärtuseks 0. Järelikult

$$g_{12} \equiv 0 \quad (50.3)$$

piirkonnas U .

Kokkuvõttes omandab pinna esimene ruutvorm piirkonnas U valemite (50.1) ja (50.3) põhjal kuju

$$ds^2 = du_1^2 + g_{22}(u_1, u_2) du_2^2. \quad (50.4)$$

See on üks lihtsamaid kujusid, millele saab teisendada iga pinna esimese ruutvormi parameetrite sobiva teisendusega.

Vastupidi, kerge on järeldada, et (50.4) puhul iga u_1 -joone geodeetiline kõverus Γ_1 on võrdne nulliga, mistõttu need jooned on geodeetilised jooned. Seepärast nimetataksegi parameetreid, mille korral kehtib (50.4), «geodeetilisteks koordinaatideks». Mis puutub u_2 -joontesse, siis need on geodeetiliste joonte üheparameetrilise parve ortogonaalsed trajektoorid — jooned, mis lõikavad parve geodeetilisi jooni täisnurga all (sest (50.3) põhjal $x_1 \perp x_2$). Siit järeldub huvitav tulemus:

geodeetiliste joonte üheparameetrilise parve iga kaks ortogonaalset trajektoori lõikavad parve geodeetilistel joontel välja võrdse pikkusega kaared.

Tõepoolest, kui (50.4) järgi arvutada kahe ortogonaalse trajektoori $u_1=a$ ja $u_1=b$ vahelise kaare pikkus ükskõik missugusel geodeetilisel joonel $u_2=c$, siis on see konstandi c väärtusest sõltumatult

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b |du_1| = |b - a|.$$

Edasi on lihtne tõestada geodeetilise joone järgmist olulist omadust, millest oli juttu artikli alguses:

geodeetilise joone iga kaar piirkonnas U on lühem mistahes teisest tema otspunkte ühendavast kaarest selles piirkonnas.

Selleks määrame geodeetilised koordinaadid pinnal nii, et antud geodeetiline joon oleks üks u_1 -joontest, näiteks joon $u_2=0$, ning eeldame, et vaadeldav kaar väärtuste $u_1=a$ ja $u_1=b$ vahel asetseb sel juhul piirkonnas U . Selle kaare pikkus on siis $|b-a|$. Iga teise selle kaare otspunkte piirkonnas U ühendava joone saab anda teatava võrrandiga $u_2=f(u_1)$, kus $f(a)=f(b)=0$ (joon. 47). Selle joone kaare pikkus nendesamade otspunktide vahel avaldub kujul

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + g_{22}(u_1, f(u_1)) [f'(u_1)]^2} du_1.$$

Et $g_{22}(u_1, f(u_1)) > 0$, $[f'(u_1)]^2 \geq 0$, siis

$$\sqrt{1 + g_{22}(u_1, f(u_1)) [f'(u_1)]^2} \geq 1,$$

ning integraali monotoonsuse tõttu ([2], lk. 367)

$$s \geq |b-a|,$$

kusjuures võrdus kehtib üksnes siis, kui $f(u_1) \equiv 0$, s.t. kui vaadeldav kaar on etteantud geodeetilisel joonel.

Geodeetilise joone tõestatud omadus rõhutab veelgi analoogiat, mis on pinna geodeetiliste joonte ja tasandi sirgete vahel. Niisugust analoogiat ei saa aga alati laiendada tervikpindadele sel põhjusel, et piirkond U väga sageli ei ühti kogu pinnaga. Näiteks kui sfääri korral võtta jooneks $\mathfrak{J}_0$ ekvaator ja määrata selle järgi geodeetilised koordinaadid, nagu eespool näidatud, siis joont $\mathfrak{J}_0$ risti lõikavateks geodeetilisteks joonteks tulevad meridiaanid, mis lõikuvad põhja- ja lõunapoolustes, kus u_1 - ja u_2 -joonte võrk lakkab olemast korrapärane. Piirkond U ei saa sel juhul neid pooluseid sisaldada ning eespool tõestatu põhjal võime vaid öelda, et meridiaani (ehk suur-ringjoone) kaar, mis on väiksem poolringjoonest, on lühim oma otspunktide vahel pinnal. Samal ajal on selge, et poolringjoonest suurem suur-ringjoone kaar pole sugugi lühim — lühimaks tema otspunktide vahel on hoopis teda täiendav kaar samal suur-ringjoonel.

Samasugune olukord leiab aset näiteks pöördsilindril, kus Clairaut' teoreemi (40.10) põhjal geodeetiline joon lõikab moodustajaid konstantse nurga φ all (sest pöördsilindri korral $r(u_1) = \text{const}$) ja on seetõttu kas moodustaja ise, paralleel või üldjuhul kruvijoone. Kui kruvijoone kaar ei mahu mingile telge läbiva tasandiga eraldatud poolsilindrile, siis pole ta lühim oma otspunktide vahel pöördsilindril. Näiteks kui sellise kaare otspunktid on samal moodustajal, siis lühim on hoopis moodustaja lõik nende otspunktide vahel (joon. 6).

51. Gaussi—Bonnet' valem. Joone geodeetilist kõverust k_g pinnal ja pinna täis- ehk Gaussi kõverust K kui sisegeomeetrilisi suurusid on võimalik ka sisegeomeetriselt defineerida. Võimaluse selleks annab Greeni valemist (44.7) ja seosest (48.3) järelduv integraalvalem, mille tuletamisele nüüd asume.

Olgu antud pind ja sellel piirkond D , mis on piiratud kinnise tükiti sileda joonega L . Selle joone võrrandid

$$u_\alpha = u_\alpha(t); \quad \alpha = 1, 2,$$

kus $u_\alpha(t)$ on tükiti diferentseeruvad pidevad funktsioonid, $t \in [0, a]$ ja $u_\alpha(a) = u_\alpha(0)$ määravad $u_1 u_2$ -tasandil teatava kinnise tükiti sileda joone L' , mille sees oleva piirkonna tähistame D' .

Arvutame joonintegraali lineaarsest diferentsiaalvormist ω_{12} mööda joont L' . Greeni valemi (44.7) ja seoste (48.3) põhjal

$$\int_{L'} \omega_{12} = \iint_{D'} (-K \omega_1 \wedge \omega_2). \quad (51.1)$$

Vasakul pool on avaldise (43.5) järgi

$$\omega_{12} = k_g ds - d\varphi. \quad (51.2)$$

Paremal avaldame (42.9) abil

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (A_{11} du_1 + A_{21} du_2) \wedge (A_{12} du_1 + A_{22} du_2) = \\ &= (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) du_1 \wedge du_2, \end{aligned}$$

kus Lagrange'i samasuse (1.7) põhjal

$$(A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})^2 = (A_{11}^2 + A_{12}^2)(A_{21}^2 + A_{22}^2) - (A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22})^2.$$

Samal ajal

$$\begin{aligned} ds^2 &= \omega_1^2 + \omega_2^2 = (A_{11} du_1 + A_{21} du_2)^2 + (A_{12} du_1 + A_{22} du_2)^2 = \\ &= (A_{11}^2 + A_{12}^2) du_1^2 + 2(A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22}) du_1 du_2 + (A_{21}^2 + A_{22}^2) du_2^2, \end{aligned}$$

mistõttu

$$A_{11}^2 + A_{12}^2 = g_{11}, \quad A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} = g_{12}, \quad A_{21}^2 + A_{22}^2 = g_{22}.$$

Seega

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du_1 \wedge du_2;$$

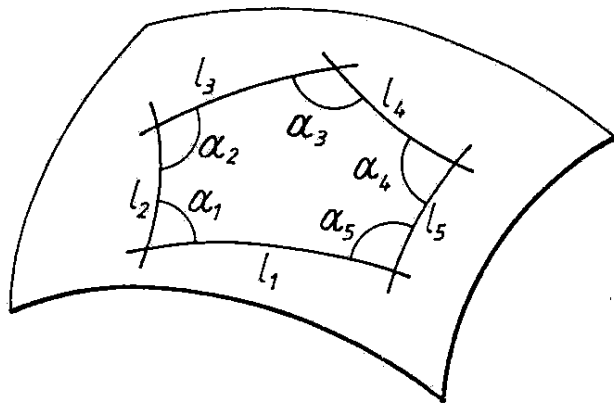
tähendab, $\omega_1 \wedge \omega_2$ on avaldis, millest kahekordne integraal üle D' on (36.5) põhjal piirkonna D pindala S ja mida seetõttu nimetatakse pindalaelemendiks dS :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = dS. \quad (51.3)$$

Asendused seostest (51.2) ja (51.3) integraalvalemisse (51.1) annavad tulemuseks

$$\int_L k_g ds - \int_L d\varphi = - \iint_D K dS, \quad (51.4)$$

kus vasakul on joonintegraalid mööda kinnist joont L ([3], lk. 326) ja paremal pindintegraal üle piirkonna D ([3], lk. 354).



Joonis 48

Saadud valemi tähenduse selgitamiseks tõlgendame lähemalt tema vasakut poolt, eriti selle teist liiget. Vaatleme üldist olukorda, mil kinnine joon L on siledatest kaartest $l_1, l_2, \dots, l_n$ koosnev kõverjooneline hulknurk (joon. 48). Selle hulknurga sisenurgad tähistame $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, lugedes, et α_i on kaarte l_i ja l_{i+1} ($l_{n+1}=l_1$) vaheline nurk nende kaarte ühises otpunktis ehk tipus. Lihtsaim on siin juht $n=1$, $\alpha_1=\pi$, mil L osutub igas punktis siledaks kinniseks jooneks.

Joonintegraalid valemi (51.4) vasakul pool avalduvad aditiivsuse omaduse ([3], lk. 335) põhjal järgmiselt:

$$\sum_{i=1}^n \int_{l_i} k_g ds, \quad \sum_{i=1}^n \int_{l_i} d\varphi.$$

Uurime lähemalt teist avaldist, kus φ on kaare l_i puutuja ja liikuva teljestiku esimese baasivektori vaheline nurk. Iga liidetav teises avaldises kujutab endast seetõttu nurga φ muutu punkti liikumisel kaare l_i alguspunkti lõpp-punkti. Kui lisame nendele liidetavatele kõverjoonelise hulknurga välisnurkade suurused $\pi - \alpha_i$, mille võrra tuleb pöörata puutujat tipus üleminekul kaarelt l_i kaarele l_{i+1} ($l_{n+1}=l_1$), siis saame kokku ilmselt täispöörde 2π :

$$\sum_{i=1}^n \int_{l_i} d\varphi + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi.$$

Siit

$$\sum_{i=1}^n \int_{l_i} d\varphi = (2 - n)\pi + \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

ning võrdusest (51.4) saame seega järgmise valemi:

$$\iint_D K dS = (2 - n)\pi + \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^n \int_{l_i} k_g ds, \quad (51.5)$$

mida tuntakse *Gaussi—Bonnet' valem*i nime all.

Erijuhul, kui piirkond D on piiratud sileda kinnise joonega L , on $n=1$, $\alpha_1=\pi$ ja

$$\iint_D K dS = 2\pi - \int_L k_g ds. \quad (51.6)$$

Teisel tähtsal erijuhul, kui kaarteks $l_1, l_2, \dots, l_n$ on geodeetiliste joonte kaared, kõneldakse *geodeetilisest hulknurgast*. Sel korral kaob valemis (51.5) viimane liige, sest piki geodeetilisi jooni on teatavasti $k_g \equiv 0$. Näiteks geodeetilise kolmnurga Δ puhul saame valemi

$$\iint_{\Delta} K dS = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi. \quad (51.7)$$

Paremal pool esinevat suurust, mis mõõdab geodeetilise kolmnurga Δ sisenurkade summa erinevust tavalise tasandilise kolmnurga sisenurkade summast π , nimetatakse selle kolmnurga *nurgaekstsessiks*.

Täiskõverusele K saab nüüd anda järgmise tõlgenduse: *täiskõverus K pinna punktis x on seda punkti sisaldava geodeetilise kolmnurga Δ nurgaekstsessi $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi$ ja pindala S suhte piirväärtus kolmnurga kokkutõmbumisel punktiks x .*

Tõepoolest, kui kasutada keskvaartusteoreemi kahekordse integraali jaoks (vt. [3], lk. 272, järeldus 3), võime valemi (51.7) vasaku poole kirjutada kujul

$$\iint_{\Delta} K dS = K^* \iint_{\Delta} dS = K^* S,$$

kus K^* on täiskõveruse väärtus kolmnurga Δ mingis punktis. Valemi (51.7) põhjal seega tõesti

$$\lim_{\Delta \rightarrow x} \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi}{S} = \lim_{\Delta \rightarrow x} K^* = K.$$

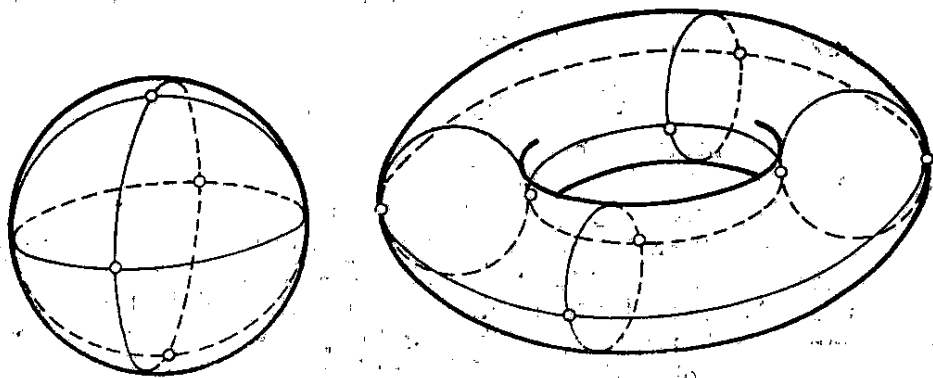
Täiskõverusele K on niisiis antud täielikult sisegeomeetriline definitsioon.

Märgime, et Gaussi—Bonnet' valem võimaldab anda sisegeomeetrilise definitsiooni ka pinnal asetseva joone geodeetilisele kõverusele k_g ([5], lk. 202—203).

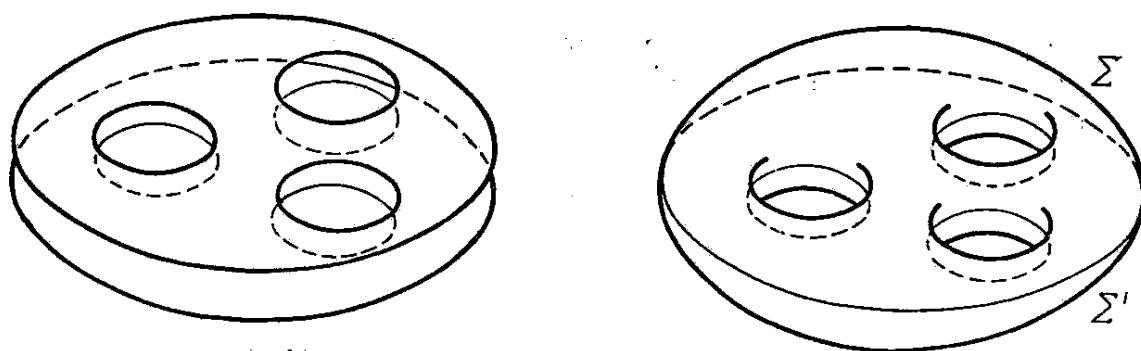
Huvitavaid järeldusi saab Gaussi—Bonnet' valemist teha sileda kinnise tervikpinna kohta. Nii nimetatakse punktihulka $\mathcal{T}$ eukleidilises ruumis E_3 , mille igal punktil on lihtpinnaks osutuv ümbrus, kusjuures kogu punktihulk $\mathcal{T}$ on esitatav lõpliku arvu lihtpindadel asuvate kõverjoonelist hulknurkadega piiratud piirkondade ühendina selliselt, et iga kahe piirkonna ühisosa on kas tühi hulk või hulknurkade ühine kaar või tipp.

Selliste kinniste pindade näited on art-s 33 vaadeldud sfäär ja toor, mille ühed võimalikud esitused kõnesolnud hulknurksete piirkondade ühendina on esitatud joonisel 49. Saab näidata universaalse võtte selliste pindade moodustamiseks. Võtame tasandil kaks kongruentset tõkestatud mitmelisidusat piirkonda, s.t. sellist tõkestatud ühelisidusat piirkonda (art. 15), millest on välja lõigatud p paarikaupa ühispunktita ühelisidusat piirkonda. Seejärel katame ühe neist teisega ja kleebime nad mööda kõiki rajajooni kokku (joon. 50). Kujutleme nüüd, et tekkinud kujund on tehtud painduvast venivast kummikelmest, ja puhume ta mõttes täis, kuni tekib sile kinnine pind. Täpsemalt öeldes eksisteerib sile kinnine pind, mis on bijektiivses ja pidevas vastavuses esialgse kujundiga. Kui $p=0$ või $p=1$, siis tekib vastavalt sfääri- või tooritaoline pind. Juhul $p=2$ saame kringli tüüpi pinna jne.

Rakendame nüüd kõigi kõnesolnud hulknurksete piirkondade puhul, mille ühendiks vaadeldav kinnine pind $\mathcal{T}$ on, Gaussi—Bonnet' valemit (51.5). Et viimane on saadud Greeni valemist (44.7), siis tuleb arvestada selle tuletamisel ([3], lk. 338) tehtud kokkulepet: suund kaartest $l_1, l_2, \dots, l_n$ koosneval kinnisel tükil siledal joonel L peab olema selline, et piirkond D jääks joont L pidi liikudes vasakule. Liites valemite (51.5) pooled kõikide nende hulknurksete piirkon-



Joonis 49



Joonis 50

dade puhul, millest $\mathcal{T}$ koosneb, paneme tähele, et igal kaarel l_i kohtuvad kaks sellist piirkonda, kusjuures l_i läbitakse nende puhul eri suundades. Sellest järel-
dub, et summeerimisel valemite (51.5) paremate poolte viimased liikmed koon-
duvad paarikaupa välja. Samal ajal summade $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ liitmisel tekib igas tipus
täispööre 2π . Kõige selle arvestamiseks tähistame ühendatavate piirkondade arvu
 n_2 , kõigi kaarte arvu n_1 ja kõigi tippude arvu n_0 . Valemite (51.5) paremate poolte
liitmisel saame seega suuruse

$$n_2 \cdot 2\pi - 2n_1 \cdot \pi + n_0 \cdot 2\pi = 2\pi(n_2 - n_1 + n_0).$$

Vasakul teise liikme ees tuleb $2n_1$ seetõttu, et iga kaar l_i läheb arvesse kaks-
korda — kummagi piirkonnaga, mis temal kohtuvad. Valemite (51.5) vasakute
poolte liitmine annab integraali aditiivsuse põhjal suuruse

$$\iint_{\mathcal{T}} K dS,$$

mida nimetatakse kinnise pinna $\mathcal{T}$ *totaalkõveruseks* ja mis ilmselt ei sõltu pinna
 $\mathcal{T}$ jaotamisest lihtpindade ühendiks kõnesolnud viisil.

Kokkuvõttes saame

$$\iint_{\mathcal{T}} K dS = 2\pi(n_2 - n_1 + n_0). \quad (51.8)$$

Järelilikult $n_2 - n_1 + n_0$ ei sõltu samuti pinna $\mathcal{T}$ jaotamisest hulknurksete piir-
kondade $D_1, \dots, D_{n_2}$ kõnesolnud omadustega ühendiks. Samal ajal saab seda
jaotamist teha lõpmata paljudel eri viisidel. Kõikide nende puhul, nagu selgub,
on piirkondade arv n_2 miinus kaarte arv n_1 pluss tippude arv n_0 üks ja seesama
täisarv. Seda täisarvu $n_2 - n_1 + n_0$ nimetatakse kinnise pinna $\mathcal{T}$ *Euleri karakte-*
ristikuks ja tähistatakse $\chi(\mathcal{T})$. Kasutades näiteks joonisel 49 näidatud sfääri
jaotust paneme tähele, et sel juhul $n_2=8$, $n_1=12$, $n_0=6$, mistõttu sfääri Euleri
karakteristik on $8 - 12 + 6 = 2$. Toori jaotuse puhul leiame, et $n_2=8$, $n_1=16$,
 $n_0=8$ ja $n_2 - n_1 + n_0 = 0$.

Kinniste pindade moodustamise eelkirjeldatud universaalset võtet kasutades saame Euleri karakteristikule veel teistsuguse, lihtsama esituse. Kasutame nimelt kummastki mööda siledaid rajajooni kokkukleebitud piirkonnast tekkinud pinnaosa jaotust hulknurkseteks piirkondadeks selliselt, et kokku tekiks kogu pinna $\mathcal{T}$ eespool seatud nõudeid rahuldav jaotus.

Vaatleme esialgu üht neist kahest pinnaosast — ühe mitmelisidusa piirkonna bijektiivset ja pidevat kujutist Σ . Selle piirkonna saab väljalõigatud p piirkonna taastamisega teha ühelisidusaks. Vastavalt sellele saab ka kõnesoleva pinnaosa Σ teha teatavate uute pinnapiirkondade $D_1, \dots, D_p$ lisamisega siledaks ühelisidusaks piirkonnaks D . Näiteks toori ühele poolele, mis tekib toori lõikamisel teljega ristuva sümmeetriatasandiga, võib lisada poolsfääri, millele toori vähima raadiusega paralleel on ekvaatoriks. Tekkinud ühelisidusa piirkonna D puhul saame rakendada Gaussi—Bonnet' valemi kuju (51.6) (vajaduse korral tükeldades seda piirkonda):

$$\iint_D K dS = 2\pi - \int_L k_g ds. \quad (51.9)$$

Et tulla tagasi esialgse mitmelisidusa pinnaosa Σ juurde, tuleb uuesti eemaldada lisatud ühelisidusad pinnapiirkonnad $D_1, \dots, D_p$, millest igaühe puhul kehtib samuti valem (51.6):

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} K dS &= 2\pi - \int_{L_1} k_g ds, \\ &\vdots \\ \iint_{D_p} K dS &= 2\pi - \int_{L_p} k_g ds. \end{aligned}$$

Järelikult viimaste seoste pooled on vaja lahutada seose (51.9) vastavatest pooltest. Vasakul saame pinnaosa Σ totaalkõveruse. Paremal tuleb viimase p seose korral arvestada, et L_i peame läbima nii, et D_i jääks vasakule. Seega Σ puhul tuleks iga L_i läbida vastupidises suunas, kuid selle me lahutamisel just saavutame. Kokkuvõttes tekib niisiis seos

$$\iint_{\Sigma} K dS = 2\pi(1-p) + \int_{\Gamma} k_g ds,$$

kus Γ tähendab $L, L_1, \dots, L_p$ ühendit — pinnaosa Σ kogu raja.

Analoogiliselt saame teise pinnaosa Σ' jaoks

$$\iint_{\Sigma'} K ds = 2\pi(1-p) + \int_{\Gamma'} k_g ds.$$

Kogu kinnise pinna $\mathcal{T}$ arvestamiseks tuleb viimase kahe seose vastavad pooled liita. Et tegelikult Γ ja Γ' on üks ja seesama raja, mis erinevate osade Σ ja Σ' puhul läbitakse eri suundades, siis viimased joonintegraalid annavad liitudes nulli. Seega tekib valem

$$\iint_{\mathcal{T}} K dS = 4\pi(1-p). \quad (51.10)$$

Kui nüüd võrrelda valemeid (51.8) ja (51.10), siis leiame, et kinnise pinna $\mathcal{T}$ Euleri karakteristik avaldub kujul

$$\chi(\mathcal{T}) = n_2 - n_1 + n_0 = 2(1-p),$$

kusjuures selle pinna $\mathcal{T}$ totaalkõveruseks on $2\pi\chi(\mathcal{T})$. Naturaalarvu p nimetatakse kinnise pinna *liigiks* ehk *geenuseks*. Ilma pikemata on selge, et sfääri puhul $p=0$, toori puhul $p=1$, kringelpinna puhul $p=2$ jne., mistõttu saab kohe kätte ka nende Euleri karakteristikud: näiteks kringelpinna puhul $\chi(\mathcal{T})=-2$.

Kinnise pinna $\mathcal{T}$ liik sõltub ilmselt üksnes pinna $\mathcal{T}$ nn. topoloogilisest ehitusest, mille poolest näiteks toor ja sangpommi pind pole eristatavad, samuti nagu näiteks kringelpind ja kahe sangaga pommi pind. Järelikult sõltuvad ka Euleri karakteristik $\chi(\mathcal{T})$ ja pinna $\mathcal{T}$ totaalkõverus üksnes kinnise pinna $\mathcal{T}$ topoloogilisest ehitusest.

52. Konstantse kõverusega pinna sisegeomeetria. Nagu eelnevast selgub, saab pinna sisegeomeetriat arendada paljuski analoogiliselt eukleidilise planimeetriaga (s.t. tasandi sisegeomeetriaga). Võib uurida geodeetiliste hulknurkade, sealhulgas kolmnurkade omadusi, määrata nn. geodeetilised ringjooned kui ühest punktist lähtuvate geodeetiliste joonte üheparameetrilise parve ortogonaalsed trajektoorid jms.

Kui aga minna kujundite kongruentsusega seotud küsimuste juurde, siis üldise pinna korral kõnesolnud analoogia kaob. Kongruentsus tasandil on seotud asjaoluga, et iga kahe punkti puhul võib esimese punkti ümbruse viia liikumise (ehk isomeetria) teel ühtimisse teise punkti teatava ümbrusega, kusjuures veel selliselt, et ükskõik millised kaks nendest punktidest lähtuvat sihti lähevad ühtimisse.

Üldisel pinnal on see aga võimatu, sest pinnal vabalt võetud punkti ümbruse isomeetriline kujutamine (painutamine) teise vabalt võetud punkti ümbrusele on Gaussi teoreemi põhjal mõeldav ainult siis, kui pinna täiskõverused K nendes punktides on võrdsed, tähendab, kui pinna täiskõverus K on konstantne.

Pindu, millel $K = \text{const}$, nimetatakse *konstantse kõverusega pindadeks*. Näitame, et iga sellise pinna sisegeomeetrias on olemas vaba liikuvus selles mõttes, et iga punkti ümbrus on isomeetriliselt kujutatav iga teise punkti teatavale ümbrusele, nii et esimest punkti läbiv geodeetiline kaar läheb teist punkti läbivale etteantud geodeetilisele joonele. Teisiti öeldes, me näitame, et eespool saadud tarvilik tingimus $K = \text{const}$ osutub ka piisavaks ning garanteerib seejuures võimaluse geodeetilist kaart vabalt pöörata igas etteantud punktis.

Selleks võtame konstantse kõverusega pinnal, kus $K = \text{const}$, vabalt kaks punkti x_0 ja x'_0 ja kummaski punktis ühe sihi pinna puutujatasandil. Läbi kummagi punkti läheb valitud sihis parajasti üks geodeetiline joon. Tähistame need jooned γ_0 ja γ'_0 ning võtame need aluseks geodeetiliste koordinaatide määramisel punktide x_0 ja x'_0 teatavates ümbrustes U ja U' . Seejuures lepime kokku lugeda üheks parameetriks vastava joone loomulik parameeter.

Esimene ruutvorm omandab siis kuju (50.4), s.t.

$$g_{11} \equiv 1, \quad g_{12} \equiv 0.$$

Järelikult võime rakendada Gaussi võrrandit (48.6), millest praegu

$$K = - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1^2}.$$

Funktsiooni $\sqrt{g_{22}}$ jaoks tekib lineaarne teist järku konstantsete koordinaatidega diferentsiaalvõrrand

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1^2} + K \sqrt{g_{22}} = 0.$$

Selle üldlahendi leidmiseks tuleb eelnevalt lahendada vastav karakteristik võrrand ([8], lk. 135):

$$\lambda^2 + K = 0.$$

Üldlahendile tuleb seega sõltuvalt konstandi K väärtusest üks järgmisest kolmest kujust ([8], lk. 138, 140):

$$\begin{aligned} K > 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= C_1(u_2) \cos \sqrt{K} u_1 + C_2(u_2) \sin \sqrt{K} u_1, \\ K = 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= C_1(u_2) u_1 + C_2(u_2), \\ K < 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= C_1(u_2) e^{\sqrt{-K} u_1} + C_2(u_2) e^{-\sqrt{-K} u_1}. \end{aligned} \quad (52.1)$$

Erilahendi väljaeraldamiseks on vaja veel algtingimusi. Ühe neist annab nõue, et u_2 on geodeetilise joone γ_0 ehk võrrandiga $u_1 = 0$ määratud u_2 -joone loomulik parameeter. Seega $u_1 = 0 \Rightarrow ds = du_2$, mistõttu

$$\sqrt{g_{22}}(0, u_2) = 1. \quad (52.2)$$

Teise algtingimuse saame sellest, et joon γ_0 on geodeetiline joon; seega (48.5) teises valemis $u_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_2 = 0$ ehk

$$\left. \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u_1} \right|_{u_1=0} = 0. \quad (52.3)$$

Neid algtingimusi rahuldavad, nagu kerge veenduda, parajasti järgmised erilahendid:

$$\begin{aligned} K > 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= \cos \sqrt{K} u_1, \\ K = 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= 1, \\ K < 0: \quad \sqrt{g_{22}} &= \operatorname{ch} \sqrt{-K} u_1, \end{aligned}$$

millele omakorda vastavad esimese ruutvormi (50.4) järgmisedujud:

$$ds^2 = du_1^2 + \cos^2 \sqrt{K} u_1 du_2^2, \quad (52.4)$$

$$ds^2 = du_1^2 + du_2^2, \quad (52.5)$$

$$ds^2 = du_1^2 + \operatorname{ch}^2 \sqrt{-K} u_1 du_2^2. \quad (52.6)$$

Paneme tähele, et igaüks neist sõltub üksnes konstandi K väärtusest, seejuures keskmisel $K=0$. Muu hulgas on ds^2 avaldis täpselt ühesugune konstantse kõverusega pinna punktide x_0 ja x'_0 eespool kõnesolnud ümbrustes U ja U' . Järelikult kumbki ümbrus on isomeetriliselt kujutatav teisele, kusjuures veel niimoodi, et geodeetilised jooned γ_0 ja γ'_0 lähevad ühtimisse. Näitlikult võib kujutada, et üks ümbrus on (pinnast välja lõigatuna) ilma rebendite ja kortsudeta painutatav teisele ümbrusele: seda painutamist võib realiseerida ümbruse libistamisega mööda pinda, sest eelõeldu kehtib pinna iga kahe punkti kohta. Vabadus on seejuures samasugune nagu

tasandil: punkt ja selles antud siht on viidav igaks teiseks punktiks ja selles antud sihiks. Selles mõttes kõnelesimegi eespool, et konstantse kõverusega pinna sisegeomeetrias on olemas *vaba liikuvus*.

Kongruentseteks nimetatakse niisuguseid kujundeid konstantse kõverusega pinnal, mida saab viia ühtimisse ülalkirjeldatud viisil, s.t. kujutades kujundeid sisaldavaid ümbrusi isomeetriliselt teineteisele. Konstantse kõverusega pinnal saab seega kõnelda geodeetiliste kaartte kongruentsusest, geodeetiliste kolmnurkade kongruentsusest jne. On vaid vaja, et nad mahuksid sellistesse piirkondadesse, kus saab kasutusele võtta geodeetilised koordinaadid.

Kokkuvõttes võib öelda, et konstantse kõverusega pinna küllalt väikese piirkonna sisegeomeetrias esinevad kõik tavalise (ehk eukleidilise) planimeetria olulised mõisted. Seejuures juhul, kui $K=0$, ongi tegemist eukleidilise planimeetria, vähemalt teatava piirkonna U ulatuses. Tõepoolest, sel juhul koosneb pind paraboolsetest punktidest, on seega tors (art. 41) ning järelikult vastav lihtpind on painutatav tasandile (art. 47, näide 3), mistõttu tal on vähemalt piirkonna U ulatuses sama sisegeomeetria nagu eukleidilise ruumi E_3 tasandi vastaval piirkonnal.

Kui $K=\text{const} \neq 0$, siis on tegemist teatavate uute planimeetria-tega, mida tuntakse *mitteeukleidiliste planimeetria* nime all. Seejuures juhul $K=\text{const} < 0$ kõneldakse *hüperboolsest* ehk *Lobatševski*¹ *planimeetria*st, juhul $K=\text{const} > 0$ — *elliptilisest* ehk *Riemanni planimeetria*st.

Valemist (51.7) järeldeb nende planimeetria järgmine huvitav erinevus: geodeetilise kolmnurga sisenurkade summa on eukleidilises planimeetrias ($K=0$) võrdne π , kuid hüperboolses planimeetrias ($K < 0$) väiksem ja elliptilises planimeetrias ($K > 0$) suurem kui π . Seejuures viimasel juhul on kolmnurga nurgaekstsess võrdeline kolmnurga pindalaga: võrdeteguriks on (51.7) järgi $K=\text{const} > 0$. Hüperboolses planimeetrias on nurgaekstsess negatiivne; tema vastandaru $\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, mis on samuti võrdeline kolmnurga pindalaga, kusjuures võrdeteguriks on $|K| = -K$, nimetatakse kolmnurga *nurgadefektiks*.

Siinjuures tuleb rõhutada järgmist momenti. Kui $K=\text{const} = 0$, siis pinna küllalt väikeses piirkonnas kehtib eukleidiline planimeetria. Sellise tervikpinna sisegeomeetria võib aga oluliselt erineda geomeetria tasandil E_2 , sest näiteks juba pöördsilindril leidub kinnisi geodeetilisi jooni ehk kinnisi «sirgeid» — nendeks on paralleelid. Samasugune võib olla olukord ka teistel konstantse kõverusega pindadel. Seetõttu jääb praegu lahtiseks, mida mõista hüperboolse tasandi või elliptilise tasandi all, rääkimata hüperboolsest ruumist või elliptilisest ruumist. Nende mõistete käsitlese anname art-tes 55 ja 56.

Seame järgnevalt ülesandeks näidata mõned konkreetset konstantse kõverusega pinnad, millel realiseerub kasvõi teatava piirkonna ulatuses mitteeukleidiline planimeetria.

¹ Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1792—1856), vene matemaatik.

Alustame järgmisest ülesandest. Näitame, et kui pinna esimene ruutvorm geodeetilistes koordinaatides (52.4) on selline, et g_{22} sõltub üksnes koordinaadist u_1 , siis pinna piirkond, kus need koordinaadid on määratud, on isomeetriliselt kujutatav teatavale pöördpinnale niiviisi, et u_1 -jooned (geodeetilised jooned) lähevad meridiaanideks.

Tõestuseks tähistame $\sqrt{g_{22}(u_1)} = \varrho(u_1)$. Määrame nüüd x_1x_3 -tasandil joone võrranditega $x_1 = \varphi(u_1)$, $x_3 = \psi(u_1)$ selliselt, et u_1 on tema loomulik parameeter ja $\varphi(u_1) = a\varrho(u_1)$, kus a on teatav positiivne reaalarv. Esimesest nõudest järeldub, et $\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$, mistõttu $\psi' = \sqrt{1 - [a\varrho']^2}$ ning

$$\psi(u_1) = \int_c^{u_1} \sqrt{1 - [a\varrho'(u_1)]^2} du_1.$$

Alumise raja c muutumisel muutub x_3 konstandi võrra, millega kaasneb saadud joone teatav lüke x_3 -telje sihis, mis antud ülesandes on ebaoluline.

Paneme nüüd kõnesoleva joone pöörlema x_3 -telje ümber. Tekkinud pöördpinna esimene ruutvorm avaldub (49.5) ja (49.6) järgi kujul

$$ds^2 = du_1^2 + a^2 \varrho^2(u_1) du_2^2$$

ehk, kui tähistada $au_2 = u_2^*$, kujul

$$ds^2 = du_1^2 + g_{22}(u_1) du_2^{*2}.$$

See kuju ühtib esialgu antud pinna esimese ruutvormiga geodeetilistes koordinaatides. Seetõttu on tõesti olemas selle pinna piirkonna isomeetriline kujutus eelkirjeldatud viisil saadud pöördpinnale. Et viimase konstrueerimisel on tegemist reaalarvulise parameetriga a , siis saame tegelikult omavahel isomeetriliste pöördpindade üheparameetrilise parve.

Rakendame seda skeemi konstantse kõverusega pinna jaoks saadud esimese ruutvormi (52.4), (52.5) või (52.6) puhul.

Kui $K > 0$, siis väärtuse $a = \frac{1}{\sqrt{K}}$ korral saame $\varphi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{K}} \cos \sqrt{K} u_1$, $\varphi' = -\sin \sqrt{K} u_1$, $\psi' = \sqrt{1 - \sin^2 \sqrt{K} u_1} = \cos \sqrt{K} u_1$, mistõttu $\psi(u_1) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} u_1$ (siin võtame $c = 0$). Selliste φ ja ψ

puhul on pöördpinnaks sfäär raadiusega $\frac{1}{\sqrt{K}}$ (vrd. art. 31). Seega

positiivse konstantse kõverusega pinna sisegeomeetria on teatava piirkonna ulatuses sama mis sfääril, kusjuures eelnev skeem muutuva a korral annab poolusteta sfääri painutamise pöördpindade klassis. Kui $K = 0$, siis $\varphi = a$, $\varphi' = 0$, $\psi' = 1$ ja $\psi(u_1) = u_1$ — pöör-

leva joone algasendiks x_1x_3 -tasandil on sirge, millel on võrrandid $x_1=a$, $x_3=u_1$ ning pöördpind on seega pöördsilinder raadiusega a .

Kui $K < 0$, siis $\varphi(u_1) = a \operatorname{ch} \sqrt{-K} u_1$, $\varphi' = a \sqrt{-K} \operatorname{sh} \sqrt{-K} u_1$, $\psi' = \sqrt{1 + a^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u_1}$. Antud a korral peab u_1 rahuldama võrratust

$$1 + a^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u_1 \geq 0$$

ehk

$$-\frac{1}{a \sqrt{-K}} \leq \operatorname{sh} \sqrt{-K} u_1 \leq \frac{1}{a \sqrt{-K}}.$$

Äärmiste väärtuste puhul $\psi' = 0$, s.t. pöörleva joone puutujavektor (φ', ψ') x_1x_3 -tasandil on vastavates punktides risti pöörlemisteljega (x_3 -teljega), kusjuures φ saavutab neis võrdsed maksimaalsed väärtused; minimaalse väärtuse a omandab φ siis, kui $u_1 = 0$. Kuigi $\psi(u_1)$ avaldub integraalina

$$\psi(u_1) = \int_0^{u_1} \sqrt{1 + a^2 K \operatorname{sh}^2 \sqrt{-K} u_1} du_1,$$

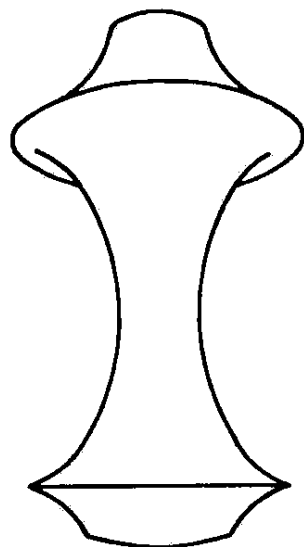
mis pole esitatav elementaarfunktsioonide kaudu, võib eeltoodu põhjal siiski luua kujutluse pöörlevast joonest (joon. 51). Meil on tähtis teada, et selline joon ja järelikult ka konstantse negatiivse kõverusega pöördpind eksisteerib, sealjuures veel a muutumise vabadusega.

Eriti huvipakkuva näite saame siis, kui loobume varasematest algtingimustest (52.2) ja (52.3) ning võtame üldlahendist (52.1) selle erilahendi, mis vastab väärtustele $C_1(u_1) = 1$, $C_2(u_1) = 0$:

$$\sqrt{g_{22}} = e^{\sqrt{-K} u_1}.$$

Sel korral on pinnal esimene ruutvorm

$$ds^2 = du_1^2 + e^{2\sqrt{-K} u_1} du_2^2. \quad (52.7)$$



Joonis 51

Valides vastava pöördpinna jaoks $a = \frac{1}{\sqrt{-K}}$, saame

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{-K}} e^{\sqrt{-K} u_1}, \quad \varphi' = e^{\sqrt{-K} u_1}, \quad \psi' = \sqrt{1 - e^{2\sqrt{-K} u_1}}.$$

Siin on kasulik teha asendus $u_1 = -\frac{1}{\sqrt{-K}} \ln \operatorname{ch} t$, et saada

$$e^{\sqrt{-K} u_1} = \operatorname{ch} t, \quad 1 - e^{2\sqrt{-K} u_1} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th}^2 t, \quad \psi' = \pm \operatorname{th} t.$$

Et samal ajal

$$du_1 = -\frac{1}{\sqrt{-K}} \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} dt = -\frac{1}{\sqrt{-K}} \operatorname{th} t dt,$$

siis

$$\psi = \mp \frac{1}{\sqrt{-K}} \int_0^t \operatorname{th}^2 t dt = \mp a \int_0^t \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right) dt = \mp a(t - \operatorname{th} t).$$

Seega pöörleva joone algasend $x_1 x_3$ -tasandil määratakse võrranditega

$$x_1 = \frac{a}{\operatorname{ch} t}, \quad x_3 = \mp a(t - \operatorname{th} t).$$

Kui $t \rightarrow \pm\infty$; siis $\operatorname{ch} t \rightarrow \infty$ ja $x_1 \rightarrow 0$, mistõttu x_3 -telg (pöörde-
telg) on selle joone asümptoot. Joonel on järgmine huvitav oma-
dus: *tema puutujalõik puutepunktist asümptoodini on konstantse
pikkusega a* (joon. 52). Tõepoolest, et $x'_1 = -a \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} = -a \frac{\operatorname{th} t}{\operatorname{ch} t}$,

$x'_3 = \mp a \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\right) = \mp a \operatorname{th}^2 t$, siis puutuja sihivektoriks võib võtta
 $\left(-\frac{1}{\operatorname{ch} t}, \mp \operatorname{th} t\right)$. Puutuja saab seega anda parameetriliste vör-
randitega

$$y_1 = \frac{a}{\operatorname{ch} t} - \frac{\lambda}{\operatorname{ch} t}, \quad y_3 = \mp a(t - \operatorname{th} t) \mp \lambda \operatorname{th} t,$$

mistõttu tema lõikepunkt x_3 -teljega määratakse väärtusega $\lambda = a$
ja selle punkti koordinaadid on

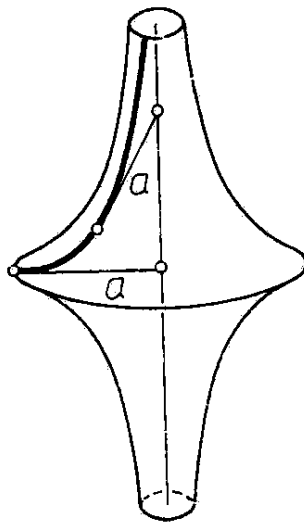
$$y_1 = 0, \quad y_3 = \mp at.$$

Lõikepunkti ja puutepunkti vahelise kauguse ruut

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = a^2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t \right) = a^2 = \text{const.}$$

Joone ülalnimetatud omadus on järelikult tõestatud.

Nagu kerge kindlaks teha, on joon selle omadusega täielikult



Joonis 52

määratud. Teda saab kujutleda kindla pikkusega nööri otsas järel lohiseva punktkeha x jäljena, kui vedav punkt y liigub mööda sirget (praegu x_3 -telge). Seetõttu nimetatakse vaadeldavat joont *trakt-rissiks* (lad. k. *tracto* — vean). Vaadeldavat pinda, mis tekib trakt-rissi pöörlemisel oma asümptoodi ümber, nimetatakse *pseudosfääriks*. Et traktrissi asümptoodist kaugeim punkt on tagasipöördepunkt, siis on pseudosfääril olemas tagasipöördeserv, mistõttu ta koosneb kahest lihtpinnast, millele see serv on ühiseks ääreks (joon. 52).

Mõnikord nimetatakse pseudosfäärideks ka kõiki negatiivse konstantse kõverusega pindu. Märgime, et kõik pöördpinnad, mille $K = \text{const} < 0$, sealhulgas ka eelkirjeldatud näited, määras esimesena F. Minding 1839. a., kes tuletas ühtlasi ka esimeste ruutvormide kujud (52.4)–(52.7). Nagu eespool selgus, on igal sellisel pöördpinnal olemas tagasipöördeservad, mis jagavad pinna ühiste äärtega lihtpindadeks. Neile lihtpindadele ei mahu igas suunas lõpmatusse minevad geodeetilised jooned, mis oleksid sisegeomeetrias (Lobatševski geomeetrias) tervik-sirged.

Tekib isegi küsimus, kas mõlemas suunas lõpmatute sirgetega Lobatševski planimeetria on üldse olemas. Seda probleemi ruumi E_3 pindade sisegeomeetria abil uurides jõudis D. Hilbert 1891. a. tulemuseni, et E_3 siledatel pindadel sellist planimeetriat realiseerida ei saa: igal konstantse negatiivse kõverusega pinnal tuleb kuskil ette teatav äär. Lobatševski geomeetria tervikliku modelleerimise ülesanne leidis lahenduse hoopis teistsuguste vahenditega, mis võimaldasid planimeetrialt üle minna stereomeetriasse ja koguni n -mõõtmelisse ruumi. Neid küsimusi käsitleme järgmises peatükis.

Harjutusülesanded

79. Pinda, mille kirjeldab sirge ühtlasel pöörlemisel teda nurga α all lõikava telje ümber ja samaaegsel ühtlasel nihkumisel telje sihis, nimetatakse *heli-koidiks*; juhul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ kõneldakse püst-, juhul $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ kaldheli-koidist. Näidata, et kaldheli-koid juhul $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (täpsemalt, täispöördele vastav osa temal) on isomeetriline teatava ühekattelise pöördhüperboloidiga, mille meridiaaniks on võrdhaarne hüperbool.

80. Helikoidi üldistuseks on *krüvipind*; selliselt nimetatakse pinda, mille kirjeldab mingi joon ühtlasel pöörlemisel mingi telje ümber ja samaaegsel ühtlasel nihkumisel telje sihis. Näidata, et krüvipinna täispöördele vastav osa on kujutatav isomeetriliselt teatavale pöördpinnale, nii et krüvijooned lähevad paralleelideks.

81. Tõestada, et geodeetiline joon on asümptootjoon parajasti siis, kui ta on sirge, ning kõverusjoon parajasti siis, kui ta on tasandiline joon.

82. Näidata, et kui pinna esimeses ruutvormis $g_{12} = 0$, siis saab geodeetiliste joonte diferentsiaalvõrrandisüsteemi esitada kujul

$$\frac{du_1}{ds} = \frac{\cos \varphi}{a_1}, \quad \frac{du_2}{ds} = \frac{\sin \varphi}{a_2}, \quad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a_1 a_2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial u_2} \cos \varphi - \frac{\partial a_2}{\partial u_1} \sin \varphi \right),$$

kus $a_1 = \sqrt{g_{11}}$, $a_2 = \sqrt{g_{22}}$.

83. Pindu, mille esimese ruutvormi võib parameetrite teisendusega viia kujju

$$ds^2 = [f(u_1) + g(u_2)](du_1^2 + du_2^2)$$

(näiteks pöördpinnad, teist järku pinnad jt.) nimetatakse *Liouville'i pindadeks*. Näidata, et iga sellise pinna geodeetilised jooned määratakse järgmise eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiga:

$$\frac{du_1}{\sqrt{f(u_1) - a}} = \pm \frac{du_2}{\sqrt{g(u_2) + a}},$$

kus a on suvaline konstant.

84. Kontrollida, et pöördpind, mille korral $\varphi(u_1) = \sqrt{u_1}$, $\psi(u_1) = \int_a^{u_1} \sqrt{t - \frac{1}{4t}} dt$, on Liouville'i pind ning näidata, et tema geodeetilised jooned kujutuvad $u_1 u_2$ -tasandil paraboolidena.

85. Tõestada, et iga joon ruumis E_3 on oma sirgestustasandite parve mähispinna geodeetiline joon ja mähispinna laotamisel tasandile kujutub seega sirgena (sellest on muide tulnud sirgestustasandi nimetus).

86. Tõestada, et kui $ds^2 = F(u_1, u_2)(du_1^2 + du_2^2)$, siis valem (48.6) on teisen-datav kujju

$$K = -\frac{1}{2F} \Delta \ln F,$$

kus $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial u_2^2}$ on nn. Laplace'i¹ operaator.

¹ Pierre Simon de Laplace [laplass] (1749—1827), prantsuse matemaatik, Pariisi TA liige.

IV. MITTEEUKLEIDILISED RUUMID

§ 12. SFÄÄRILINE GEOMEETRIA JA ELLIPTILINE RUUM

Kolmest eespool (art. 52) konstantse K väärtuse märgi järgi eristatud mitteeukleidilisest planimeetriast on elliptiline planimeetria, mil $K > 0$, realiseeritav ruumis E_3 sfääril raadiusega $(\sqrt{K})^{-1}$. Sfääri loomulik üldistus on hüpersfäär, mis on eespool defineeritud nii ruumi E_n kui ka ruumi 4E_n puhul (art. 7). Käesolevas paragrahvis uurime hüpersfääril kehtivat geomeetria, käsitledes esialgu detailsemalt ruumi E_4 hüpersfääri geomeetria ja sellele vastavat 3-mõõtmelise elliptilise ruumi mõistet. Uurimise käigus tuletame ühtlasi sfäärilise trigonomeetria valemid.

Kahemõõtmelise sfääri geomeetria ja sfäärilisel trigonomeetria on tähtsaid rakendusi astronoomias (tähtede taevavõlvil paiknemise uurimine) ja geodeesias (Maa pinna mõõdistamine); selle geomeetria tegelesid juba Antiik-Kreeka õpetlased. Kolmemõõtmelise sfäärilise või elliptilise ruumi mõistetele on oluline koht kaasaja kosmoloogias, kus nad on koos eukleidilise ruumiga ja teise mitteeukleidilise ruumiga — Lobatševski ruumiga — lihtsaimate kosmoloogiliste mudelite aluseks.

53. Sfääri sisegeomeetria. Kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi E_3 sfäär raadiusega r ja keskpunktiga o on teatavasti järgmine punktihulk (vrd. (31.1)):

$$S_2(r) = \left\{ x : x = (r \cos u_1 \cos u_2, r \cos u_1 \sin u_2, r \sin u_1), \right. \\ \left. (u_1, u_2) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times [0, 2\pi] \right\}, \quad (53.1)$$

kus $x \rightarrow ox$. Sfäär $S_2(r)$ kujutab endast lihtsaimat kinnist pinda ruumis E_3 .

Eespool leidsime sfääri $S_2(r)$ esimese ruutvormi (36.17):

$$ds^2 = r^2 (du_1^2 + \cos^2 u_1 du_2^2), \quad (53.2)$$

millele asendustega $v_1 = ru_1$, $v_2 = u_2$ saame kuju (52.4), kus $\sqrt{K} = \frac{1}{r}$. Seega sfääri täiskõverus $K = \frac{1}{r^2}$. Ühtlasi on teada, et geodeetilisteks joonteks (s.t. «sirgeimateks» ja küllalt väikeste kaarte

ulatuses lühimateks joonteks) on sfääril $S_2(r)$ suurringjooned (art. 49 ja 50). Need etendavad sfääri sisegeomeetrias seega sirgete osa.

Kahe punkti $x, y \in S_2(r)$ vaheliseks kauguseks $d_S(x, y)$ sfääril $S_2(r)$ nimetatakse lühima neid punkte sfääril ühendava kaare pikkust, milleks on muidugi suurringjoone kaare pikkus. Kui punktid pole sama diameetri otspunktid, siis on suurringjoon nendega üheselt määratud, sest ta on sfääri ning neid punkte ja sfääri keskpunkti läbiva tasandi ühisosa. Suurringjoone kaare pikkuseks on seejuures kaare kesknurga radiaanmõõdu α ja sfääri raadiuse r korrutis (võrdle eespool saadud seosega $v_1 = ru_1$, kus v_1 on art. 49 näite põhjal meridiaani loomuliku parameetri väärtus ja parameeter u_1 tähendab pöördenurka). Kui punktid on samal diameetril, siis neid ühendavaid lühimaid kaari on lõpmata palju, kuid kõigil neil on sama pikkus πr , mis on ühtlasi kahe punkti vahelise kauguse maksimaalne väärtus sfääril $S_2(r)$. Niisiis, $d_S(x, y) = \alpha \cdot r$ ja et $xy = r^2 \cos \alpha$, siis

$$\cos \frac{d_S(x, y)}{r} = \frac{xy}{r^2}. \quad (53.3)$$

Kahe sfääril oleva joone vaheline nurk φ arvutatakse (53.2) ja (36.3) kohaselt järgmisest valemist:

$$\cos \varphi = \frac{dv_1 dw_1 + \cos^2 \frac{a_1}{r} dv_2 dw_2}{\sqrt{dv_1^2 + \cos^2 \frac{a_1}{r} dv_2^2} \sqrt{dw_1^2 + \cos^2 \frac{a_1}{r} dw_2^2}}; \quad (53.4)$$

siin (dv_1, dv_2) ja (dw_1, dw_2) määravad joonte puutujavektorid dx ja δx joone lõikepunktis, kus $v_1 = w_1 = a_1$, $v_2 = w_2 = a_2$. Seejuures on need puutujavektorid teatavasti (art. 7) risti puutepunkti mineva raadiusega, mistõttu nende sihte saab sageli määrata ka vahetult.

Piirkonna D pindala sfääril arvutatakse (36.5) kohaselt valemi

$$S = r^2 \iint_{\Delta} \cos u_1 du_1 du_2 \quad (53.5)$$

järgi, sest praegu $\det |g_{\alpha\beta}| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = r^2 \cos^2 \frac{u_1}{r}$.

Sfääri $S_2(r)$ sisegeomeetrias (ehk *sfäärilises planimeetrias*) saab kujundite kongruentsust määrata ruumi E_3 pöörete abil sfääri keskpunkti ümber. Iga selline pööre tekitab ilmselt sfääri $S_2(r)$ teatava isomeetria iseendale, kusjuures on selge, et iga punkti ja sellest lähtuva sihi sfääril $S_2(r)$ saab sobiva pöördega ruumis E_3 viia igaks teiseks punktiks ja sellest lähtuvaks sihiks samal sfääril. Ruumi E_3 pööretega määratud $S_2(r)$ isomeetriaid iseendale nimetatakse sfäärilises planimeetrias liikumisteks.

Uleminekul ruumi E_n (või koguni ruumi 1E_n), $n > 3$, tekib võimalus üldistada sfäärilist planimeetriat. Järgnevas piirdume 3-sfääriga ehk hüpersfääriga ruumis E_4 (art. 7); nimetades teda lihtsalt sfääriks $S_3(r)$, ja selgitame, mida tuleb mõista sfäärilise

stereomeetria all (jättes ruumi 1E_4 3-sfääride uurimise ja Lobatševski stereomeetria käsitlemise edaspidiseks, vt. § 13).

Tuletame kõigepealt sfääri $S_3(r)$ jaoks samasuguse esituse, nagu on (53.1). Võttes keskpunktiks o , saame (7.2) alusel, kus $c_i=0$, sfääri $S_3(r)$ võrrandi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2.$$

Siin ilmselt $x_4^2 \leq r^2$ ja seega eksisteerib $u_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ selliselt, et

$$x_4 = r \sin u_1.$$

Pärast asendust saame

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \cos^2 u_1;$$

seega oleme samas olukorras, mis art-s 31 sfääri $S_2(r)$ puhul, ainult r kohal on nüüd $r \cos u_1$. Järelikult võib nimetatud asendust arvestades rakendada esitust (53.1), kus u_1 ja u_2 asemel tuleb nüüd kirjutada u_2 ja u_3 (sest tähis u_1 on juba kasutuses). Tulemuseks saame:

$$S_3(r) = \left\{ x : x = (r \cos u_1 \cos u_2 \cos u_3, r \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3, r \cos u_1 \sin u_2, r \sin u_1), (u_1, u_2, u_3) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2 \times [0, 2\pi] \right\}. \quad (53.6)$$

Vaatleme nüüd sfääril $S_3(r)$ asuva joone kaare pikkuse arvutamist. See joon on ühtlasi ruumis E_4 , mistõttu tema kaare pikkus avaldub (19.1) põhjal määratud integraalina avaldisest ds , kus $ds^2 = dx^2$ (vrd. art. 36). Siin ds^2 arvutamise lihtsustamiseks tähistame ajutiselt $r \cos u_1 = R$ ja läheme seoses (53.6) üle koordinaatidele:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos u_2 \cos u_3, \\ x_2 &= R \cos u_2 \sin u_3, \\ x_3 &= R \sin u_2, \\ x_4 &= r \sin u_1. \end{aligned}$$

Esimesest kolmest seosest saame diferentseerimisega

$$\begin{aligned} dx_1 &= dR \cos u_2 \cos u_3 + R d(\cos u_2 \cos u_3), \\ dx_2 &= dR \cos u_2 \sin u_3 + R d(\cos u_2 \sin u_3), \\ dx_3 &= dR \sin u_2 + R \cos u_2 du_2 \end{aligned}$$

ning järelikult

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dR^2 + R^2[du_2^2 + \cos^2 u_2 du_3^2], \quad (53.7)$$

sest ruutu tõstmisel ja liitmisel paremal esimeste liikmete ruudud annavad dR^2 , kahekordsed korrutised koonduvad, nagu kerge kontrollida, ja viimaste liikmete puhul tekib samasugune olukord nagu seose (53.2) puhul, ainult et sealse r asemel on nüüd R . Asendades tulemusse $R = r \cos u_1$ ja lisades $dx_4^2 = r^2 \cos^2 u_1 du_1^2$, leiame $S_3(r)$ jaoks:

$$ds^2 = r^2 \{ du_1^2 + \cos^2 u_1 [du_2^2 + \cos^2 u_2 du_3^2] \}. \quad (53.8)$$

Väärrib märkimist, et (53.7) annab võimaluse arvutada joone kaare pikkust ruumis E_3 juhul, kui joone võrrandid on esitatud sfäärkoordinaatides¹: $R=R(t)$, $u_2=u_2(t)$, $u_3=u_3(t)$. Erijuhul, kui $u_3 \equiv 0$ ja $R=f(\theta)$, kus $\theta=u_2$, saame tuttava eeskirja kaare pikkuse arvutamiseks tasandil polaarkoordinaatides ([2], lk. 282): $ds = \sqrt{f'^2(\theta) + f^2(\theta)} d\theta$.

Tulemus (53.8) on tõlgendatav esimese ruutvormina sfääril $S_3(r)$. Samuti nagu (53.2) sfääri $S_2(r)$ puhul, määrab (53.8) sfääri $S_3(r)$ sisemeetrika. Analoogiliselt valemiga (53.3) võib arvutada sfääril $S_3(r)$ antud joonte vahelise nurga φ , kusjuures selliste joonte puhul, mille $u_3 \equiv 0$ (s.t. mis asuvad nn. suursfääril $S_2(r) \subset S_3(r)$ — suur-ringjoone üldistusel), saab kasutada vahetult valemit (53.3). Kahe punkti $x, y \in S_3(r)$ vahelise kauguse $d_S(x, y)$ jaoks sfääril $S_3(r)$ jääb endiselt kehtima valem (53.3). Mõnevõrra keerukam on lugu valemi (53.5) üldistamisega. Piirkonna $D \subset S_2(r)$ pindala asemel on meil nüüd piirkonna $D \subset S_3(r)$ ruumala.

Ettevalmistuseks käsitleme algul ruumala ruumis E_3 . Piirkonna $D \subset E_3$ ruumala V avaldub ristkoordinaatide x_1, x_2, x_3 puhul teatavasti valemiga ([3], lk. 307)

$$V = \iiint_D dV = \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3; \quad (53.9)$$

mis üleminekul sfäärkoordinaatidele annab valemi

$$V = \iiint_{D'} R^2 \cos u_2 dR du_2 du_3 \quad (53.10)$$

(vt. [3], lk. 317; seal kasutatud tähistustelt oleme üle läinud seoses (53.7) esinevatele tähistustele). Viimased kaks valemit on erijuhud ühest üldisemast seosest, mille anname art-s 73 ja mille kohaselt esimese ruutvormi (36.2): $ds^2 = \sum g_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta$ ning pindala avaldise (36.5): $S = \iint \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} du_1 du_2$ vahekord laieneb ka kõrgemale mõõtmele kui 2 (kusjuures pindala S asemele asub ruumala V). Näiteks (53.7) vasaku poole puhul $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$, $g_{\alpha\beta}=0 (\alpha \neq \beta)$, mistõttu $\det |g_{\alpha\beta}|=1$, nagu ongi valemis (53.9); parema poole korral aga $g_{11}=1$, $g_{22}=R^2$, $g_{33}=R^2 \cos^2 u_2$, $g_{\alpha\beta}=0 (\alpha \neq \beta)$ ning $\det |g_{\alpha\beta}|=R^4 \cos^2 u_2$, nagu ongi valemis (53.10).

Selle üldise eeskirja kohaselt toimub ka ruumala arvutamine sfääri $S_3(r)$ sisegeomeetrias (ehk sfäärilises stereomeetrias). Et (53.8) järgi $g_{11}=r^2$, $g_{22}=r^2 \cos^2 u_1$, $g_{33}=r^2 \cos^2 u_1 \cos^2 u_2$, $g_{\alpha\beta}=0 (\alpha \neq \beta)$, siis $\det |g_{\alpha\beta}|=r^6 \cos^4 u_1 \cos^2 u_2$ ning vastavalt sellele defineeritakse

$$V = r^3 \iiint_{D'} \cos^2 u_1 \cos u_2 du_1 du_2 du_3. \quad (53.11)$$

¹ Punkti $x \in E_3$ sfäärkoordinaatideks nimetatakse reaalarve R, u_2 ja u_3 , kus R on seda punkti x läbiva sfääri raadius (keskpunkti o korral) ning u_2 ja u_3 on punkti x asendit sellel sfääril valemite (53.1) järgi määravad parameetrid (neis valemis praegu $R=r$; vrd. [6], lk. 287 või [3], lk. 316, kus u_2 ja u_3 asemel on tähistused vastavalt θ ja φ või $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ja Θ).

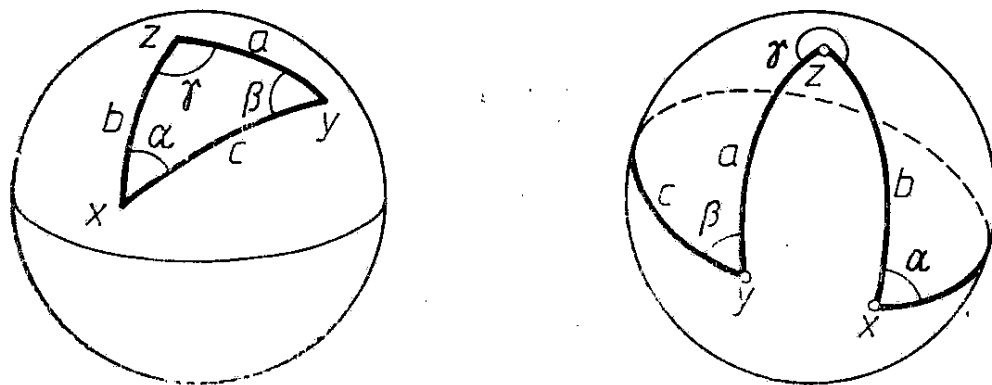
Lõpuks märgime, et sfääri $S_3(r)$ sisegeomeetrias, samuti nagu $S_2(r)$ puhul, on olemas kujundite kongruentsuse mõiste. See tuginneb samuti võimalusele kujutada sfääri $S_3(r)$ isomeetriliselt iseendale ruumi E_4 pöörete abil sfääri keskpunkti o ümber.

Nagu selgus art-s 10, on iga kahe ristreeperi $\{o, i_1, \dots, i_4\}$ ja $\{o, i'_1, \dots, i'_4\}$ korral olemas parajasti üks esimest teiseks kujutav ruumi E_4 isomeetria, mis sama alguspunkti o ja samasuguselt orienteeritud baaside korral on pööre o ümber (art. 11). Olgu antud sfäär $S_3(r)$ keskpunktiga o ja raadiusega r . Punktid x ja x' vastavalt kohavektoritega $\vec{ox} = ri_4$ ja $\vec{ox'} = ri'_4$ on selle sfääri $S_3(r)$ kaks vabalt võetud punkti. Seejuures $\{i_1, i_2, i_3\}$ ja $\{i'_1, i'_2, i'_3\}$, koosnedes vastavalt nende kohavektoritega ortogonaalsetest vektoritest, on art. 7 tulemuse põhjal baasideks sfääri $S_3(r)$ puutujahüpertasandeis vastavalt punktides x ja x' . Nende baaside vektorid määravad seega sfääri $S_3(r)$ sisegeomeetrias paarikaupa ortogonaalsete sihtide kolmikud vaadeldavates punktides. Iga selline kolmik on viidav igaks teiseks ruumi E_4 isomeetriaga.

Ruumi E_4 pööretega määratud $S_3(r)$ isomeetriaat iseendale nimetatakse $S_3(r)$ sisegeomeetrias (ehk sfäärilises stereomeetrias) liikumiseks. Eeltoodust selgub, et sfääri $S_3(r)$ iga kahe punkti x ja x' ning samasuguselt orienteeritud sihikolmiku korral neis punktides leidub parajasti üks liikumine sfäärilises stereomeetrias, mis viib esimese kolmiku teiseks.

Kaht sfääri $S_3(r)$ punktidest koosnevat kujundit nimetatakse kongruentseteks, kui neid saab ühtimisse viia teatava liikumisega sfäärilises stereomeetrias.

54. Sfääriline trigonomeetria. Olgu sfääril $S_3(r)$ antud kolm punkti x, y ja z . Need asetsevad koos sfääri keskpunktiga o alati teataval ruumi E_4 hüpertasandil, mis lõikab sfäärist $S_3(r)$ välja sfääri $S_2(r)$ sama keskpunkti ja raadiusega (nn. suursfääri) ning on määratud üheselt, kui x, y ja z pole selle $S_2(r)$ ühel ja samal suuringjoonel (s.t. kui $\vec{ox}, \vec{oy}$ ja $\vec{oz}$ on lineaarselt sõltumatud). Kujundit, mis koosneb nendest punktidest x, y ja z ning neid paari-



Joonis 53

kaupa ühendavatest suuringjoonte kaartest, nimetatakse *sfääriliseks kolmnurgaks* xyz . Punkte nimetatakse selle kolmnurga tippudeks, kõnesolevaid suuringjoonte kaari — külgedeks, viimaste vahelisi nurki tippudes — sisenurkadeks.

Eelnevast on selge, et iga sfääriline kolmnurk asetseb teataval sfääril $S_2(r) \subset E_3$. Seetõttu saame tema uurimisel kasutada ruumi E_3 geomeetriat. Külgede yz , zx ja xy pikkused tähistatakse tavaliselt a , b ja c , sisenurgad tippude x , y ja z juures vastavalt α , β ja γ (joon. 53). Et suuringjoone kaare pikkus on raadiuse r ja selle kaare kesknurga radiaanmõõdu korrutis, siis külgede kesknurkadeks on $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ ja $\frac{c}{r}$. Teiselt poolt on nad nurkadeks paarikaupa

võetud kohavektorite $\overrightarrow{ox}=\vec{x}$, $\overrightarrow{oy}=\vec{y}$ ja $\overrightarrow{oz}=\vec{z}$ vahel, seega

$$yz=r^2 \cos \frac{a}{r}, \quad zx=r^2 \cos \frac{b}{r}, \quad xy=r^2 \cos \frac{c}{r}.$$

Sisenurga α avaldamiseks märgime, et see on nurk külgede xy ja xz vahel sfääril $S_2(r)$, järelikult nurk nende külgede puutujate sobivalt suunatud sihivektorite vahel tipus x . Näiteks külje xy puhul on selliseks sihivektoriks ¹

$$k=\pm (\kappa y - x) \begin{cases} +, \text{ kui } \tan \frac{c}{r} > 0 \text{ (joon. 54, 1, 2),} \\ -, \text{ kui } \tan \frac{c}{r} < 0 \text{ (joon. 54, 3, 4),} \end{cases}$$

kus $k \perp x$ ehk $\pm (\kappa y - x)x=0$ ja järelikult

$$\kappa = \frac{x^2}{xy} = \cos^{-1} \frac{c}{r}.$$

Analoogiliselt külje xz puhul on selliseks sihivektoriks

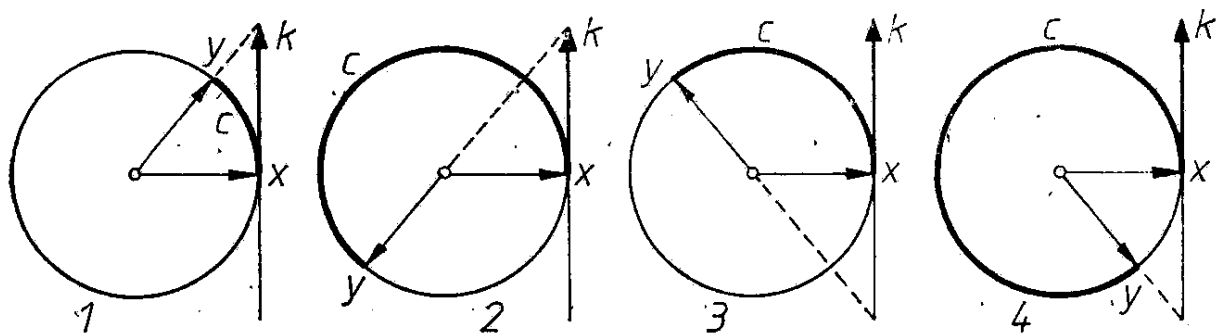
$$l=\pm (\lambda z - x) \begin{cases} +, \text{ kui } \tan \frac{b}{r} > 0, \\ -, \text{ kui } \tan \frac{b}{r} < 0, \end{cases}$$

kus $\lambda = \cos^{-1} \frac{b}{r}$.

Sisenurga α saame nüüd järgmisest seosest:

$$kl = |k| |l| \cos \alpha. \quad (54.1)$$

¹ Käsitlusest jäävad välja «kidunud» kolmnurgad, mille puhul $\tan \frac{c}{r} = 0$ ehk $c = \pi r$, s. t. sellised, mille kaks tippu on sfääril $S_2(r)$ diametraalsed — asetsevad keskpunkti läbival sirgel. Neid ühendav külge on siis pool suuringjoont ning kaks ülejäänud külge täiendavad teineteist mingi teise taolise poolsuuringjoonega.



Joonis 54

Siin

$$kl = \pm (\kappa y - x) (\lambda z - x) \begin{cases} +, & \text{kui } \tan \frac{b}{r} \tan \frac{c}{r} > 0, \\ -, & \text{kui } \tan \frac{b}{r} \tan \frac{c}{r} < 0, \end{cases}$$

kusjuures

$$\begin{aligned} (\kappa y - x) (\lambda z - x) &= \kappa \lambda yz - \kappa xy - \lambda zx + x^2 = \\ &= \left(\cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^{-1} r^2 \cos \frac{a}{r} - r^2 - r^2 + r^2 = \\ &= r^2 \left[\left(\cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^{-1} \cos \frac{a}{r} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Edasi,

$$\begin{aligned} k^2 &= (\kappa y - x)^2 = \kappa^2 y^2 - 2\kappa xy + x^2 = \\ &= r^2 \cos^{-2} \frac{c}{r} - 2r^2 + r^2 = r^2 \cos^{-2} \frac{c}{r} \left[1 - \cos^2 \frac{c}{r} \right] = r^2 \tan^2 \frac{c}{r} \end{aligned}$$

ja siit

$$|k| = r \left| \tan \frac{c}{r} \right| = \pm r \tan \frac{c}{r} \begin{cases} +, & \text{kui } \tan \frac{c}{r} > 0, \\ -, & \text{kui } \tan \frac{c}{r} < 0. \end{cases}$$

Analoogiliselt

$$|l| = \pm r \tan \frac{b}{r} \begin{cases} +, & \text{kui } \tan \frac{b}{r} > 0, \\ -, & \text{kui } \tan \frac{b}{r} < 0. \end{cases}$$

Asendused valemisse (54.1) annavad nüüd:

$$\left(\cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^{-1} \cos \frac{a}{r} - 1 = \tan \frac{b}{r} \tan \frac{c}{r} \cos \alpha;$$

pärast korrutamist suurusega $\cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}$ on tulemuseks sfääriline koosinusteoreem:

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \alpha. \quad (54.2)$$

Siit avaldame

$$\sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} \cos^2 \alpha = \left(\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^2$$

ning asendades $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, saame

$$\sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} \sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} - \left(\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^2. \quad (54.3)$$

Paremal

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} &= \left(1 - \cos^2 \frac{b}{r} \right) \left(1 - \cos^2 \frac{c}{r} \right) = \\ &= 1 - \cos^2 \frac{b}{r} - \cos^2 \frac{c}{r} + \cos^2 \frac{b}{r} \cos^2 \frac{c}{r}; \\ &\left(\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} \right)^2 = \\ &= \cos^2 \frac{a}{r} - 2 \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \cos^2 \frac{b}{r} \cos^2 \frac{c}{r}. \end{aligned}$$

Kui kogu parem pool tähistada Δ , siis järelikult

$$\Delta = 1 - \cos^2 \frac{a}{r} - \cos^2 \frac{b}{r} - \cos^2 \frac{c}{r} + 2 \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}.$$

See avaldis on täielikult sümmeetriline tippude x , y ja z igasuguse ümberpaigutuse suhtes. Järelikult peab ka võrduse (54.3) vasak pool olema sama omadusega, mistõttu

$$\begin{aligned} \Delta &= \sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r} \sin^2 \alpha = \sin^2 \frac{c}{r} \sin^2 \frac{a}{r} \sin^2 \beta = \\ &= \sin^2 \frac{a}{r} \sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \gamma. \end{aligned} \quad (54.4)$$

Pärast jagamist korrutisega $\sin^2 \frac{a}{r} \sin^2 \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}$ on tulemuseks

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \frac{a}{r}} = \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \frac{b}{r}} = \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \frac{c}{r}}$$

ning järelikult kehtib järgmine sfääriline siinusteoreem

$$\frac{\sin \alpha}{\left| \sin \frac{a}{r} \right|} = \frac{\sin \beta}{\left| \sin \frac{b}{r} \right|} = \frac{\sin \gamma}{\left| \sin \frac{c}{r} \right|}. \quad (54.5)$$

Olgu sfäärilise kolmnurga küljed a , b ja c raadiusega r võrreldes väga väikesed (näiteks ehitiste vms. planeerimisel Maa pinnal). Et $\sin x$ ja $\cos x$ on väga väikese x korral asendatavad nende reaksarenduste algliikmetega (vastavalt x ja $1 - \frac{1}{2}x^2$), siis sfäärilisest

siinusteoreemist järeldeb sel puhul kohe eukleidiline siinusteoreem

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

sfääriline koosinusteoreem aga annab

$$1 - \frac{a^2}{2r^2} = \left(1 - \frac{b^2}{2r^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{2r^2}\right) + \frac{b}{r} \frac{c}{r} \cos \alpha$$

ja siit saame ruutliikmete võrdlemisel eukleidilise koosinusteoreemi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Seega piirprotsessis $r \rightarrow \infty$ annab sfääriline trigonomeetria piirjuhuna eukleidilise trigonomeetria.

Huvi pakuvad seosed täisnurkses kolmnurgas. Näiteks kui kirjutada sfääriline koosinusteoreem välja külje c jaoks juhul $\gamma = \pi/2$ ja arvestada, et $\cos \pi/2 = 0$, saame sfäärilise Pythagorase teoreemi

$$\cos \frac{c}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{a}{r}; \quad (54.6)$$

mis piirjuhul annab tavalise Pythagorase teoreemi

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Kui sfäärilise siinusteoreemi puhul võtta $\gamma = \pi/2$ ning arvestada, et $\sin \pi/2 = 1$, saame seose

$$\sin \frac{a}{r} = \sin \frac{c}{r} \sin \alpha \quad (54.7)$$

(eeldusel, et $c < \pi r$), millest piirjuhul tuleb eukleidilise trigonomeetria vastav seos

$$a = c \sin \alpha.$$

Sfäärilise geomeetria olulisemaid iseärasusi on see, et sfäärilises geomeetrias määravad ka sisenurgad sfäärilise kolmnurga. See on järeldata sfäärilise koosinusteoreemi duaalsest kujust, mille me järgnevalt tuletame.

Seosest (54.4) järeldeb, et

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{\left| \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \right|}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{\left| \sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \right|},$$

järelikult

$$\pm \sin \alpha \sin \beta = \frac{\Delta}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}} \begin{cases} +, & \text{kui } \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} > 0, \\ -, & \text{kui } \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} < 0. \end{cases}$$

Sfäärilise koosinusteoreemi (54.2) põhjal

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}} \cdot \frac{\cos \frac{b}{r} - \cos \frac{c}{r} \cos \frac{a}{r}}{\sin \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r}} = \\ &= \frac{\cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} - \cos^2 \frac{a}{r} \cos \frac{c}{r} - \cos^2 \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} \cos^2 \frac{c}{r}}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}}.\end{aligned}$$

Siia võib sama seose (54.2) põhjal asendada

$$\cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} = \cos \frac{c}{r} - \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma.$$

Pärast seda on tulemuseks

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\Delta \cos \frac{c}{r} + \cos^3 \frac{c}{r} - \cos \frac{a}{r} \cos \frac{b}{r} \cos^2 \frac{c}{r} - \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}}$$

ja kui siin veel kord arvestada eelmist võrdust, siis

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\Delta \cos \frac{c}{r} + \cos^2 \frac{c}{r} \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma - \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}}.$$

Nüüd leiame

$$\begin{aligned}&\pm \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{c}{r} - \cos \alpha \cos \beta = \\ &= \frac{\left(1 - \cos^2 \frac{c}{r}\right) \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \cos \gamma}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin^2 \frac{c}{r}} = \cos \gamma.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{c}{r} \begin{cases} +, & \text{kui } \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} > 0, \\ -, & \text{kui } \sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} < 0. \end{cases}$$

(54.8)

Sellele seosele ei ole analoogi eukleidilises trigonomeetrias.

Üliväikese kolmnurga puhul on $\cos \frac{c}{r} \approx 1$ ja muidugi kehtib plussmärk, mistõttu parem pool on ligikaudu $-\cos(\alpha + \beta)$ ja kogu seos tähendab lihtsalt seda, et piirjuhul $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$.

Uut laadi seosest (54.8) võib teha mitmeid olulisi järeldusi. Kõigepealt selgub, et kui piirduda ühele poolsfäärile mahtuvate sfääriliste kolmnurkadega, mille puhul kehtib ülemine märk, siis selle sfäärilise kolmnurga sisenurgad määravad ka kõik tema küljepikkused (sest analoogilised valemid kehtivad ka b ja a jaoks). Järelikult *pole sfäärilises geomeetrias olemas eukleidilise geomeetria kolmnurkade sarnasuse taolist nähtust.*

Edasi võib siit järeldada, et iga sfäärilise kolmnurga sisenurkade summa on suurem kui π — asjaolu, mille tegime kindlaks juba art-s 52. Tõepoolest, et $\sin \alpha \sin \beta > 0$ ja $-1 < \cos \frac{c}{r} < 1$, sest $c \neq 0$, $c \neq \pi r$, siis

$$-\sin \alpha \sin \beta < \pm \sin \alpha \sin \beta \cos \frac{c}{r} < \sin \alpha \sin \beta.$$

Liites siin kõigile kolmele $-\cos \alpha \cos \beta$, saame keskel (54.8) põhjal $\cos \gamma$, mistõttu

$$\cos \gamma < -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \alpha - \beta).$$

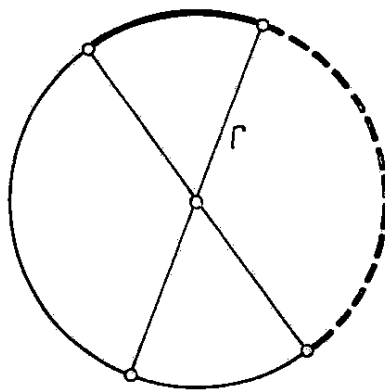
Et koosinusfunktsioon on lõigus $[0, \pi]$ rangelt kahanev, siis $\gamma > \pi - \alpha - \beta$ ehk

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Sfääriline trigonomeetria kujutab endast ulatuslikku teooriat, kuid siinkohal me teda kaugemale ei arenda, vaid piirdume esiletoodud huvitavamate tõsiasiadega. Meenutame vaid, et $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, mida nimetatakse sfäärilise kolmnurga *nurgaekstsessiks*, on art-i 52 tulemuse põhjal võrdeline selle kolmnurga pindalaga S , kusjuures võrdeteguriks on $K = \frac{1}{r^2}$.

55. Elliptiline ruum ja elliptiline geomeetria. Eeltoodust nähtub, et sfääriline geomeetria on paljuskki analoogiline eukleidilise geomeetriaga, kuid on ka olulisi erinevusi. Üks silmatorkavamaid erinevusi, mida aga seni pole veel küllalt rõhutatud, on asjaolu, et sfääri kaht diametraalset punkti ühendab lõpmata palju suuringjooni, mille kaared nende punktide vahel (poolringjooned) on kõik lühimad jooned. Samal ajal eukleidilises geomeetrias on iga kahe punkti vahel üksainus lühim kaar — sirglõik.

Seda erinevust on võimalik kõrvaldada uue, nn. elliptilise geomeetria sissetoomisega järgmiselt. Vaatleme hulka, mille elementideks on mitte sfääri üksikud punktid, vaid diametraalsete punktide paarid. Nimetame järgnevalt sellist paari e -punktiks. Seejuures e -sirgeks nimetame e -punktide hulka, mis koosneb ühele suuringjoonele kuuluvate diametraalsete punktide paaridest. Läbi iga kahe erineva e -punkti läheb üks ja ainult üks e -sirge. Kaugus kahe e -punkti vahel määratakse järgmiselt. Vastavatesse paaridesse kuuluvate punktide vahel on sfäärilises geomeetrias kaks kaugust, mis kokku liites annavad kauguse maksimaalse väärtuse πr sfääril (joon. 55). Kahe e -punkti vaheliseks e -kauguseks ehk *distantiks* nimetame



Joonis 55

vähimat neist kahest kaugusest; teist, mis täiendab seda väärtu-
seni πr , nimetame nende e -punktide vaheliseks *kodistantsiks*. Dis-
tantsi maksimaalne väärtus on niisiis $\frac{\pi}{2}r$, kusjuures sel juhul on
ta võrdne oma kodistantsiga. Distanti ja vastava kodistantsi summa
 πr ei sõltu e -punktide valikust e -sirgel ja kujutab endast e -sirge
kogupikkust.

Õeldust lähtudes saame anda järgmise üldise definitsiooni.

Sfääri $S_{n-1}(r)$ diametraalsete punktide paaride kui e -punktide
hulka, milles on ülalnäidatud viisil defineeritud kahe e -punkti vahe-
line e -kaugus ehk distant, nimetatakse $(n-1)$ -mõõtmeliseks
elliptiliseks ruumiks $S_{n-1}^*(r)$ (juhul $n-1=2$ — elliptiliseks tasan-
diks $S_2^*(r)$), selles hulgas kehtivat geometriat nimetatakse *elliptili-
seks geometriaks*.

Kui samastada punkt $x \in S_{n-1}(r)$ tema kohavektoriga x , mis
lähtub sfääri $S_{n-1}(r)$ keskpunktist, siis võime öelda, et e -punkt on
paar $(x, -x)$.

Elliptilise geometria kõige olulisem erinevus sfäärilisest geo-
meetriast, mis õigustabki tema sissetoomist, on asjaolu, et temas
taastub eukleidilise geometria sirge tuntumaid põhiomadusi: *iga
kaht erinevat e-punkti läbib üks ja ainult üks e-sirge* (joon. 55).

Elliptilises geometrias saab kõnelda e -kolmnurgast (mis võtab
kokku kaks sümmeetrilist sfäärilist kolmnurka), selle küljepikkus-
test ja sisenurkadest. Seejuures küljepikkus ei tarvitse olla tippude
kui e -punktide vaheline distant, vaid võib olla ka kodistants.
Küljepikkusi ja sisenurki seovad sfäärilise trigonomeetria seosed,
milles on veel see lihtsustus, et kahest märgist pluss ja miinus,
kui need esinevad, tuleb alati valida ülemine, sest küljepikkused on
väiksemad kui πr , mistõttu siinused sfääri vastavatest kesknurka-
dest on alati positiivsed.

Elliptilises geometrias on määratav ka liikumise mõiste. Euklei-
dilise ruumi E_n pöörded punkti o ümber säilitavad nii punkti o kui
ka punktide vahelised kaugused. Järelikult iga sfäär $S_{n-1}(r)$ kesk-
punktiga o teiseneb iseendaks. Et säilib ka punktide ühel sirgel
paiknemise omadus, siis diametraalsete punktide paar kujutub tei-
seks samasuguseks paariks. Seega ruumi E_n iga pööre punkti o

ümber tekitab elliptilise ruumi $S_{n-1}^*(r)$ teatava teisenduse, mida nimetataksegi *liikumiseks* selles ruumis.

Näiteks elliptilise tasandi $S_2^*(r)$ liikumine tekib ruumi E_3 pöördel o ümber. Iga kahe e -punkti ja kahe kumbagi läbiva ning suunaga varustatud e -sirge korral leidub parajasti üks liikumine, mis viib esimese e -punkti teiseks ja esimese e -sirge teiseks. Järelikult *liikumine elliptilisel tasandil on tehtav sama vabadusega nagu liikumine eukleidilisel tasandil E_2* . Analoogiliselt on liikumise jaoks elliptilises ruumis $S_{n-1}^*(r)$ sama vabadus mis liikumisel sama mõõtmega eukleidilises ruumis E_{n-1} .

Mitmete sarnasuste kõrval on ka olulisi erinevusi. Eespool juba selgus, et elliptilise geomeetria sirge on kinnine selles mõttes, et ta koosneb kahest teineteist täiendavast osast; ka on tal lõplik pikkus πr . Elliptilise tasandi igal kahel erineval sirgel on olemas parajasti üks ühine punkt, sest iga kaks suurringjoont sfääril lõikuvad parajasti diametraalsetes punktides. Seetõttu *elliptilise tasandi geomeetrias puudub täielikult sirgete paralleelsuse mõiste*.

Küll on võimalik sirgete paralleelsusest teatud uues mõttes kõnelda kolmemõõtmelise elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ geomeetrias. Võimaluse selleks annab ruumi E_4 kahe 2-tasandi isokliinsuse mõiste (art. 5). Sfääri $S_3(r)$ iga suurringjoon asetseb nimelt teataval keskpunkti läbival 2-tasandil, mis seega määrab elliptilise ruumi teatava sirge. Kaht sirget elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ nimetatakse «*paralleelseteks*» (Cliffordi¹ järgi), kui neid määravad 2-tasandid on isokliinsed. Isokliinsuse selgitusest art-s 5 järeldub, et ühe sellise sirge iga punkti ühendab teise sirge teatava punktiga selline sirge, mis on mõlema antud sirgega risti (see vastab juhtrihile), kusjuures antud sirgete punktid neil ühistel ristsirgetel on konstantse distanttsiga (sest 2-tasandite statsionaarsed nurgad on isokliinsuse korral võrdsed). Teisiti öeldes, kahest Cliffordi järgi «paralleelsest» sirgest kummagi punktid on teisest sirgest konstantsel distantstil. Kui panna üks neist sirgetest pöörlema teise ümber elliptilise ruumi liikumistega, siis tekiv pind, nn. *Cliffordi pind*, koosneb tervenisti pöördeteljega paralleelsetest sirgetest.

Harjutusülesanded

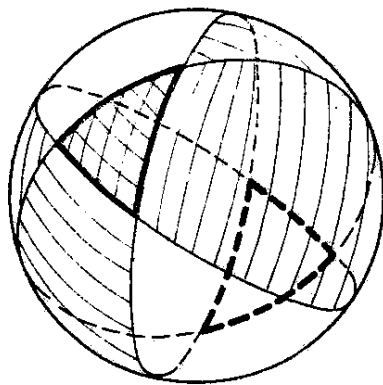
87. Ringjooneks sfääril $S_2(r)$ nimetatakse punktihulka (joont) $\{x : d_S(c, x) = R\}$. Tuletada valem ringjoone pikkuse arvutamiseks sfäärilise raadiuse R kaudu.

88. Ringiks sfääril $S_2(r)$ nimetatakse punktihulka $\{x : d_S(c, x) \leq R\}$. Tuletada valem selle ringi sfäärilise pindala arvutamiseks R kaudu.

89. Keraks sfääris $S_3(r)$ nimetatakse punktihulka $\{x : d_S(c, x) \leq R\}$. Näidata, et selle sfääriline ruumala avaldub valemiga $V = \pi r^3 \left[\frac{2R}{r} - \sin \frac{2R}{r} \right]$, millest

üliväikese $R:r$ korral $V \approx \frac{4}{3} \pi R^3$; kogu sfääri $S_3(r)$ ruumalaks aga saame $2\pi^2 r^3$ (võttes $R = \pi r$).

¹ William Kingdon Clifford (1845—1879), inglise matemaatik.



Joonis 56

90. Tuletada sfäärilise kolmnurga pindala valem $S=r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$, kus α , β ja γ on sisenurgad, vaadeldes seda kolmnurka (koos diametraalse kolmnurgaga) kui külgsuurringjoonte poolt paarikaupa piiratud kolme sfääriosa kolmekordselt kaetud ühisosa (joon. 56).

91. Näidata, et elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ antud kahest erinevast punktist võrdsel kaugusel olevate punktide hulk kujutab endast nende diametraalsete punktide paaride hulka sfääril, mis kuuluvad teatavale sfääri $S_3(r)$ keskpunkti läbivale hüpertasandile; seda punktihulka nimetatakse tasandiks ruumis $S_3^*(r)$.

92. Näidata, et iga sirge jaoks elliptilisel tasandil $S_2^*(r)$ ja iga tasandi jaoks elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ leidub punkt, mis on selle sirge või tasandi kõikidest punktidest võrdsel kaugusel $\frac{1}{2}\pi r$ (viimane on ühtlasi punktide vaheline maksimaalne kaugus tasandil $S_2^*(r)$ või ruumis $S_3^*(r)$); seda punkti nimetatakse sirge või tasandi *pooluseks*. Seega tuleb veenduda, et sirge (tasand) on elliptilises geomeetrias samaaegselt ringjoon (sfäär) raadiusega $\frac{1}{2}\pi r$.

93. Näidata, et elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ iga sirge jaoks leidub selline sirge, mille iga punkt on antud sirge kõikidest punktidest võrdsel kaugusel $\frac{1}{2}\pi r$; seda sirget nimetatakse antud sirge *polaarsirgeks*. Veenduda, et ta on ühtlasi sirge Cliffordi paralleel.

94. Näidata, et elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ antud sirge ja sellel mitteasetseva punkti korral läheb läbi selle punkti kaks selle sirge Cliffordi paralleeli (välja arvatud juht, mil punkt on antud sirge polaarsirgel ja mil see viimane on ainus Cliffordi paralleel).

§ 13. LOBATŠEVSKI RUUMI GEOMEETRIA

Analoogiliselt sfäärilise geomeetriaga võib uurida geomeetriat Minkowski ruumi 1E_4 sfääridel. Viimaseid on kolme tüüpi: reaalse, imaginaarse ja nullraadiusega. Erilist tähelepanu väärib geomeetria imaginaarse raadiusega sfääril, mida uurime käesolevas paragrahvis. Tegemist on ajalooliselt esimese mitteeuclidilise geomeetria; selle töötas välja ja avaldas N. I. Lobatševski aastail

1826—1855, kuid iseseisvalt olid selleni jõudnud ka C. Fr. Gauss ja J. Bolyai¹.

Lobatševski arendas oma geomeetria samalaadse teoreemide süsteemina, nagu oli sellal tuntud eukleidiline geomeetria. Ka alused olid samad, kuid ühe väga olulise erinevusega: eukleidilise paralleelide aksioomi asemel võttis Lobatševski selle eituse, postuleerides, et antud punkti ja seda mitteläbiva sirge korral on nendega samal tasandil rohkem kui üks sirge, mis läbib antud punkti ja ei lõika antud sirget. Pikka aega jäi lahtiseks küsimus, kas uus teooria oma paljude esimesel pilgul veidrate teoreemidega on üldse loogiliselt kooskõlaline². Vastus saadi mudelite abil, millest üks lihtsamaid on see, mille käsitlemisele kohe asume.

56. Geomeetria Minkowski ruumi pseudosfääril. Vaatleme ruumis 1E_4 imaginaarse raadiusega hüpersfääri, mis määratakse vörrandiga $x^2 = -q^2$ ehk

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -q^2. \quad (56.1)$$

See koosneb kahest kattest (art. 7 ja 13), mis on sümmeetrilised alguspunkti o suhtes (sest kui punkt kohavektoriga x on ühel neist, siis punkt kohavektoriga $-x$ on teisel). Valime nendest katetest selle, mille punktide puhul $x_4 \geq q$, ja nimetame seda edaspidi *pseudosfääriks* ruumis 1E_4 . Sellist pseudosfääri võib käsitleda uue omaette ruumina ja sel puhul nimetatakse teda *hüperboolseks ruumiks* ehk *Lobatševski ruumiks* ja tähistatakse $L_3(q)$.

Ruumi 1E_4 isomeetriliste teisenduste Poincaré rühmas saab välja eraldada hüperboolse rühma (art. 13), mille teisendused kujutavad vaadeldava katte iseendaks ning osutuvad seetõttu hüperboolse ruumi $L_3(q)$ teisendusteks. Seejuures iga kahe punkti $x \in L_3(q)$ ja $x' \in L_3(q)$ korral leidub vähemalt üks selline teisendus, mis viib esimese punkti teiseks.

Selle tõsiasja põhjendamisel artiklis 13 olid kasutusel kaks ristreeperit $\{o, i'_\mu\}$ ja $\{o, i''_\mu\}$, mille korral $\overrightarrow{ox} = qi'_4$ ja $\overrightarrow{ox'} = qi''_4$; selgus, et kummagi reeperi baasivektorid i'_k või i''_k ; $k=1, 2, 3$ jäävad sel puhul vabalt valitavaks. Seega pärast punktide x ja x' ühteviimist jääb veel vabaks hüperboolse rühma selline teisendus, mis jätab punkti x' paigale ja viib ühe baasi teiseks. Mõlema baasi vektorid asuvad vaadeldava katte puutujahüpertasandil punktis x' , mis kujutab endast teatavasti ruumi E_3 (art. 8), ja moodustavad seal koos punktiga x' kaks ristreeperit. Järelikult ruumi $L_3(q)$ vabaks

¹ Janós Bolyai [boijai] (1802—1860), ungari matemaatik, kes 1832. a. avaldas oma ainsa töö mitteeukleidilisest geomeetria. Gauss ei avaldanud üldse oma sellealaseid fragmentaarseid uurimusi.

² Lobatševski geomeetria eellugu, tekkimist ja loogilise kooskõlalisuse põhjendamist käsitleb ülevaatlilikult artiklisari: K. Ariva, Lobatševski geomeetria (kogumikus: Matemaatika ja kaasaeg, Tartu, 12, 73—90; 13, 71—87; 14, 78—83; 15, 67—80; 16, 72—82; 18, 64—79; 20, 69—80; 1967—1975; vt. ka [9]).

jäänud teisendus määratakse täielikult selle puutujahüpertasandi kui ruumi E_3 ortogonaalteisendusega. Kokkuvõttes võime niisiis öelda, et *hüperboolse rühma teisendustel ruumis $L_3(q)$ on täpselt sama vabadus mis isomeetrilistel teisendustel ruumis E_3* : iga kaht punkti x ja x' (esimesel juhul ruumis $L_3(q)$, teisel juhul ruumis E_3) on võimalik viia ühtimisse, kusjuures pärast seda võib veel teha teisenduse, mille vabaduseks on ruumi E_3 ortogonaalteisenduse vabadus.

Näitame järgnevalt, et *hüperboolne rühm osutub ruumi $L_3(q)$ isomeetriate rühmaks*. Selleks tuleb kõigepealt määrata kahe punkti vaheline kaugus ruumis $L_3(q)$.

Punktide $x \in L_3(q)$ ja $y \in L_3(q)$ vaheliseks *kauguseks* $d_L(x, y)$ ruumis $L_3(q)$ nimetatakse neid punkte ühendavate ja täielikult ruumis $L_3(q)$ asetsevate joonte kaarte pikkuste vähimat väärtust nende punktide vahel.

Kaugus $d_L(x, y)$ on siin defineeritud täpselt samuti nagu kahe punkti vaheline kaugus sfääri $S_3(r)$ geomeetrias, kus ta on neid punkte ühendava suurringjoone kaare pikkus. Viimane avaldub otspunktide kohavektorite skalaarkorrutise kaudu (art. 54). Osutub, et ka $d_L(x, y)$ on täielikult määratud vektorite x ja y kui ruumis E_4 asetseva pseudosfääri punktide kohavektorite skalaarkorrutisega.

Selles veendumiseks tuletame kõigepealt pseudosfääri $L_3(q)$ jaoks samalaadse esimese ruutvormi, nagu oli eelmises artiklis ruutvorm (53.7) sfääri $S_3(r) \subset E_4$ jaoks. Kõigepealt tuleb leida sfääri $S_3(r)$ esitusele (53.5) analoogiline esitus $L_3(q)$ puhul. Selleks läheb vaja hüperboolseid funktsioone ([3], lk. 164), mida oleme kasutanud juba art-s 52.

Nagu märgitud, pseudosfääri punkti korral $x_4 \geq q$, ning et $\operatorname{ch} u$ kujutab reaaltelje piirkonna $[0, \infty)$ piirkonnaks $[1, \infty)$, siis võib leida arvu u_1 nii, et

$$\frac{x_4}{q} = \operatorname{ch} u_1.$$

Asendamisel võrrandisse (56.1) saame

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = q^2 \operatorname{sh}^2 u_1.$$

On tekkinud sama olukord nagu art-s 31 sfääri $S_2(r) \subset E_3$ puhul, ainult et r asemel on praegu $q \operatorname{sh} u_1$ (vt. ka võrrandi (53.6) tuletamist). Järelikult

$$L_3(q) = \left\{ x : x = (q \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \cos u_3, q \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \sin u_3, q \operatorname{sh} u_1 \sin u_2, q \operatorname{ch} u_1), (u_1, u_2, u_3) \in [0, \infty) \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi] \right\}. \quad (56.2)$$

Joon ruumis $L_3(q)$ määratakse nüüd võrranditega $u_i = u_i(t)$, kus $i = 1, 2, 3$ ja $t \in T \subset \mathbb{R}$. Tema kaare pikkuse arvutamiseks tuleb

üldise eeskirja kohaselt (art. 19 ja 29) leida esmalt $ds^2=dx^2$ (vrd. (53.7)), seejärel

$$s = \int_a^b ds.$$

Siin ds^2 arvutamise lihtsustamiseks tähistame ajutiselt $q \text{ sh } u_1 = R$ ja võtame võrrandi (56.2) puhul kasutusele koordinaadid x_1, x_2, x_3 ja x_4 . Seejuures saame uuesti võrduse (53.7):

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dR^2 + R^2[du_2^2 + \cos^2 u_2 du_3^2],$$

kuhu nüüd tuleb asendada $R = q \text{ sh } u_1$ ja $dR = q \text{ ch } u_1 du_1$ ning lisada $-dx_4^2 = -[d(q \text{ ch } u_1)]^2 = -q^2 \text{ sh}^2 u_1 du_1^2$, sest ruumis 1E_4

$$dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2.$$

Kokkuvõttes, arvestades võrdust $\text{ch}^2 u_1 - \text{sh}^2 u_1 = 1$, leiame $L_3(q)$ jaoks:

$$ds^2 = q^2 \{ du_1^2 + \text{sh}^2 u_1 [du_2^2 + \cos^2 u_2 du_3^2] \}. \quad (56.3)$$

Huvitava järelduse saame siit asendusega $u_3 = 0$. Sel puhul (56.2) põhjal $x_2 = 0$, seega pseudosfääri $L_3(q)$ on lõigatud alguspunkti o (praegu keskpunkti) läbiva hüpertasandiga ruumis 1E_4 . See hüpertasand kujutab endast ruumi 1E_3 , mistõttu $L_3(q)$ ja selle hüpertasandi ühisosa $L_2(q)$ on ruumi 1E_3 imaginaarse raadiusega sfääri (ruumi 1E_4 hüpersfääri, n.-ö. suursfääri) üks kate ehk pseudosfäär ruumis 1E_3 (joon. 5). Samal ajal (56.3) annab $u_3 = 0$ puhul:

$$ds^2 = q^2 \{ du_1^2 + \text{sh}^2 u_1 du_2^2 \}. \quad (56.4)$$

Tulemus on asendustega $v_1 = qu_1$, $v_2 = u_2$ viidav kujju

$$ds^2 = dv_1^2 + \text{sh}^2 \frac{v_1}{q} dv_2^2. \quad (56.5)$$

Võrdlus esimese ruutvormi kujuga (50.4) näitab, et v_1 ja v_2 on geodeetilised koordinaadid, kusjuures v_1 -jooned, mille korral $dv_2 = 0$, on geodeetilised, seega lokaalselt lühimad jooned ning v_1 on neil loomulik parameeter. Et (56.5) puhul $\sqrt{g_{22}} = \text{sh} \frac{v_1}{q}$ ja seega

$$\frac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial v_1^2} = \frac{1}{q^2} \text{sh} \frac{v_1}{q}, \text{ siis Gaussi võrrandi (48.6) erikujust (vt. art. 52)}$$

$$K = -\frac{1}{\text{sh} \frac{v_1}{q}} \cdot \frac{1}{q^2} \text{sh} \frac{v_1}{q} = -\frac{1}{q^2} = \text{const} < 0. \quad (56.6)$$

Järelikult $L_2(q)$ on konstantse negatiivse kõverusega. Tal on nii-kiis küllalt väikeses piirkonnas sisegeomeetria, mis kehtib ruumi E_3 konstantse negatiivse kõverusega pinna iga punkti teatavas ümbruses. Nimetus pseudosfäär on $L_2(q)$ ja $L_3(q)$ puhul seega igati õigustatud (vrd. art. 52).

Pöördume nüüd esialgse ülesande poole: avaldada $L_3(q)$ kahe punkti x ja y vaheline kaugus $d_L(x, y)$. Kasutades reeperi valiku eespool märgitud vabadust, võime valida i_4 nii, et $ox = qi_4$ (sel korral $x_1 = x_2 = x_3 = 0$), ja edasi i_1 nii, et ta oleks punktidega o , x ja y määratud 2-tasandil (sel korral $y_2 = y_3 = 0$). Reeperi sellise valiku korral ruumis 1E_4 punktid x ja y on $L_3(q)$ joonel, mis määratakse (56.2) järgi võrranditega $u_2 = 0$, $u_3 = 0$. See joon on, nagu äsja selgus, $L_2(q)$ geodeetiline joon, kusjuures x vastab temal väärtusele $u_1 = 0$. Et $v_1 = qu_1$ on loomulik parameeter, siis punkt y vastab väärtusele $u_1 = \frac{d_L(x, y)}{q}$. Nende punktide kohavektorid on seega (56.2)

järgi

$$\vec{x} = \vec{ox} = (0, 0, 0, q),$$

$$\vec{y} = \vec{oy} = \left(q \operatorname{sh} \frac{d_L(x, y)}{q}, 0, 0, q \operatorname{ch} \frac{d_L(x, y)}{q} \right),$$

mistõttu

$$\operatorname{ch} \frac{d_L(x, y)}{q} = - \frac{xy}{q^2}. \quad (56.7)$$

Niisiis, $d_L(x, y)$, samuti nagu $d_S(x, y)$ valemis (53.3) on täielikult määratud punktide x ja y kohavektorite skalaarkorrutisega xy .

Siit järeldub ühtlasi ka see, et hüperboolse rühma teisendus on ruumi $L_3(q)$ isomeetria, sest ta on ruumi 1E_4 isomeetria ning järelikult jääb tema puhul muutumatuks vektorite skalaarkorrutis ja (56.7) põhjal ka kaugus $d_L(x, y)$ iga kahe punkti $x, y \in L_3(q)$ vahel.

Tulemust on huvitav võrrelda olukorraga ruumi E_3 konstantse negatiivse kõverusega pinnal (art. 52), näiteks traktrissi pöörlemisega saadud pseudosfääril. Isomeetriat sellisel pinnal saab käsitleda üksnes punktide teatavate ümbruste ulatuses, kusjuures ta ei ole taandatav liikumisele ruumis E_3 , vaid temaga kaasneb alati ka ümbruse painutamine; pealegi ei mahu D. Hilberti tulemuse põhjal igas suunas lõpmatu Lobatševski tasand tervikuna ühelegi sellisele pinnale. Teisiti on lugu pseudosfääriga $L_2(q)$ ruumis 1E_3 . Sellel on küllalt väikese piirkonna ulatuses sama sisegeomeetria, kuid ta on igas suunas lõpmatu, kusjuures liikumised (isomeetriad) temas tekitatakse ruumi 1E_3 liikumiste poolt ilma mingite painutamisteta. Oieti alles nüüd võib öelda, et lõpmatu Lobatševski tasand on tõesti olemas. Analoogiliselt on pseudosfäär $L_3(q) \subset {}^1E_4$ igas suunas lõpmatu Lobatševski ruumi mudel.

Geomeetriat Lobatševski ruumis nimetatakse *Lobatševski geomeetriaks* ehk *hüperboolseks geomeetriaks*. Selle geomeetria mõistetele lisame sageli eesliite «hüperboolne» või selle lühendina *h-*, eriti kui on karta segiminekut ruumi 1E_3 või 1E_4 vastavate mõistetega.

Hüperboolne tasand ehk *h-tasand* defineeritakse, samuti nagu hüpertasand ruumis E_n (art. 11), ruumi $L_3(q)$ alamhulgana.

$$\{x : d_L(x, a) = d_L(b, x), a \neq b\}.$$

Seatud tingimus on valemi (56.7) põhjal samaväärne nõudega, et

$$ax = bx,$$

millest selgub, et vektor x on ruumis 1E_4 ortogonaalne vektoriga $a - b$. Seega hüperboolne tasand on pseudosfääri $L_3(q)$ ning ruumi 1E_4 punkti o läbiva hüpertasandi ühisosa. Seejuures võib baasi ruumis 1E_4 valida niimoodi, et see hüperboolne tasand määratakse võrrandiga $u_3=0$. Siit järeldub, et iga tasand Lobatševski ruumis $L_3(q)$ kujutab endast Lobatševski tasandit $L_2(q)$.

Sirgeks ruumis $L_3(q)$ ehk h -sirgeks nimetatakse kahe h -tasandi ühisosa, kui see pole tühi. Baasi saab alati valida niimoodi, et h -sirge määratakse võrranditega $u_2=u_3=0$; seega on ta võrrandiga $u_3=0$ määratud hüperboolse tasandi geodeetiline joon.

57. Hüperboolne trigonomeetria. Üsna analoogiliselt sfäärilise trigonomeetriaga (art. 54) saab tuletada valemite süsteemi, mis seob kolmnurga elemente hüperboolses geomeetrias.

Olgu ruumis $L_3(q)$ antud kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti x, y ja z , mida nimetame tippudeks. Kaugusi

$$d_L(y, z) = a, \quad d_L(z, x) = b, \quad d_L(x, y) = c$$

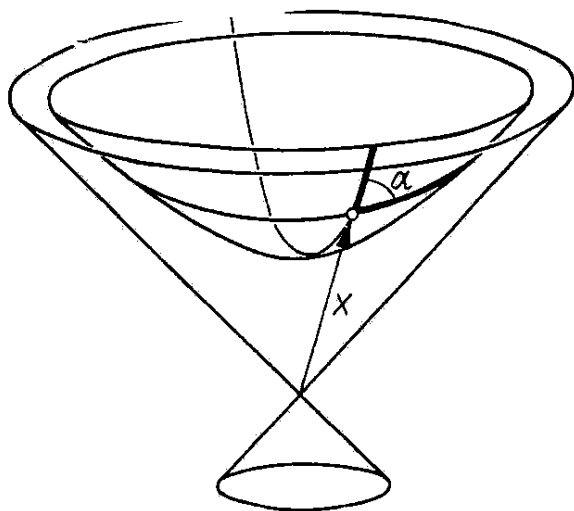
nimetame küljepikkusteks. Valemi (56.7) järgi

$$yz = -q^2 \operatorname{ch} \frac{a}{q}, \quad zx = -q^2 \operatorname{ch} \frac{b}{q}, \quad xy = -q^2 \operatorname{ch} \frac{c}{q},$$

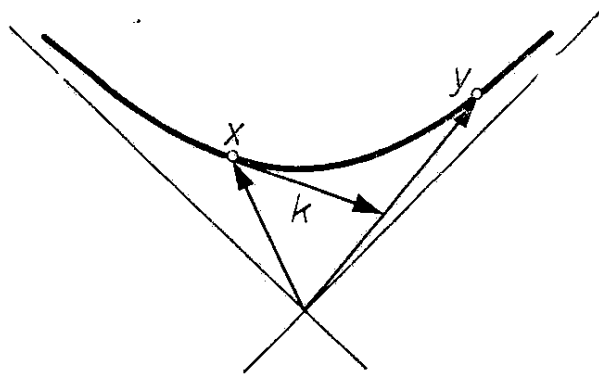
kus vasakutes pooltes on punktide x, y ja z kohavektorid.

Defineerime alljärgnevalt sisenurga näiteks tipu x juures. Vaatleme h -sirgeid xy ja xz . Kumbki neist on pseudosfääri $L_3(q)$ ja ruumi 1E_4 teatava 2-tasandi ühisosa ja kujutab endast seega joont pseudosfääril $L_3(q) \subset {}^1E_4$. Suuname need jooned punktist x vastavalt punktide y ja z poole ning võtame nende puutujad punktis x . Viimased asuvad pseudosfääril $L_3(q)$ punktis x võetud puutujahüpertasandil, mis on risti x kohavektoriga x (art. 7) ja on seega eukleidiline ruum E_3 (art. 8).

Nurgaks suunatud h -sirgete xy ja xz vahel ehk sisenurgaks α tipu x juures nimetatakse nurka kõnesolevate puutujate vahel selles puutujahüpertasandis kui ruumis E_3 (joon. 57).



Joonis 57



Joonis 58

Täiesti analoogiliselt art-ga 54 saame nende puutujate sihivektorid avaldada kujul (joon. 58)

$$k = \kappa y - x, \quad l = \lambda z - x,$$

kus κ ja λ tuleb määrata selliselt, et $kx = lx = 0$. Siit tulenevaist võrrandeist $(\kappa y - x)x = 0$, $(\lambda z - x)x = 0$ järeldeb, et

$$\kappa = \frac{x^2}{xy} = \frac{-q^2}{-q^2 \operatorname{ch} \frac{c}{q}} = \operatorname{ch}^{-1} \frac{c}{q}, \quad \lambda = \operatorname{ch}^{-1} \frac{b}{q}.$$

Sisenurga α saab nüüd avaldada seosest

$$kl = |k| |l| \cos \alpha. \quad (57.1)$$

Siin

$$\begin{aligned} kl &= (\kappa y - x)(\lambda z - x) = \kappa \lambda yz - \kappa xy - \lambda zx + x^2 = \\ &= -q^2 \operatorname{ch} \frac{a}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} \right)^{-1} + q^2 + q^2 - q^2 = \\ &= q^2 \left[1 - \operatorname{ch} \frac{a}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Edasi,

$$\begin{aligned} k^2 &= (\kappa y - x)^2 = \kappa^2 y^2 - 2\kappa xy + x^2 = -q^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{c}{q} + 2q^2 - q^2 = \\ &= q^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{c}{q} \left[\operatorname{ch}^2 \frac{c}{q} - 1 \right] = q^2 \operatorname{th}^2 \frac{c}{q} \end{aligned}$$

ja siit

$$|k| = q \operatorname{th} \frac{c}{q}.$$

Analoogiliselt

$$|l| = q \operatorname{th} \frac{b}{q}.$$

Tulemuste asendamisel valemisse (57.1) saame

$$1 - \operatorname{ch} \frac{a}{q} \left(\operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} \right)^{-1} = \operatorname{th} \frac{b}{q} \operatorname{th} \frac{c}{q} \cos \alpha.$$

Pärast võrduse mõlema poole korrutamist suurusega $\operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q}$ ja korraldamist tekib *hüperboolne koosinusteoreem*

$$\operatorname{ch} \frac{a}{q} = \operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} - \operatorname{sh} \frac{b}{q} \operatorname{sh} \frac{c}{q} \cos \alpha. \quad (57.2)$$

Avaldades siit viimase liikme ruudu ja asendades $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, saame

$$\operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q} \sin^2 \alpha = \operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q} - \left(\operatorname{ch} \frac{a}{q} - \operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} \right)^2. \quad (57.3)$$

Paremal

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q} &= \left(\operatorname{ch}^2 \frac{b}{q} - 1 \right) \left(\operatorname{ch}^2 \frac{c}{q} - 1 \right) = \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{b}{q} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{q} - \operatorname{ch}^2 \frac{b}{q} - \operatorname{ch}^2 \frac{c}{q} + 1, \\ \left(\operatorname{ch} \frac{a}{q} - \operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} \right)^2 &= \operatorname{ch}^2 \frac{a}{q} - 2 \operatorname{ch} \frac{a}{q} \operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q} + \operatorname{ch}^2 \frac{b}{q} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{q}; \end{aligned}$$

kui kogu parem pool tähistada Δ , siis

$$\Delta = 1 - \operatorname{ch}^2 \frac{a}{q} - \operatorname{ch}^2 \frac{b}{q} - \operatorname{ch}^2 \frac{c}{q} + 2 \operatorname{ch} \frac{a}{q} \operatorname{ch} \frac{b}{q} \operatorname{ch} \frac{c}{q}.$$

See avaldis on täielikult sümmeetriline tippude x , y ja z kõikvõimalike ümberpaigutuste suhtes. Järelikult peab ka võrduse (57.3) vasak pool olema sama omadusega, mistõttu

$$\Delta = \operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q} \sin^2 \alpha = \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{a}{q} \sin^2 \beta = \operatorname{sh}^2 \frac{a}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \sin^2 \gamma.$$

Pärast jagamist korrutisega $\operatorname{sh}^2 \frac{a}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{q} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{q}$ ja ruutjuure võtmist jõuame *hüperboolse siinusteoreemini*:

$$\frac{\sin \alpha}{\operatorname{sh} \frac{a}{q}} = \frac{\sin \beta}{\operatorname{sh} \frac{b}{q}} = \frac{\sin \gamma}{\operatorname{sh} \frac{c}{q}}. \quad (57.4)$$

Analoogiliselt sfäärilise trigonomeetriaga on võimalik tuletada *hüperboolse koosinusteoreemi duaalne kuju*

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} \frac{c}{q}. \quad (57.5)$$

Tuletuskäigu art-i 54 vastava osa eeskujul jätame lugeja enda hoolde (siin on see isegi lihtsam, sest (57.4) lugejad on positiivsed ja pole vaja tegelda kahe võimaliku märgiga nagu art-s 54; vt. ka [9], lk. 94–95).

Viimasest valemist tuleneb nagu sfäärilises trigonomeetriaski, et *hüperboolse kolmnurga sisenurkade poolt on määratud kõik küljepikkused*. Seetõttu ka hüperboolses geomeetrias pole olemas kolmnurkade sarnasust selles mõttes, nagu tunneme eukleidilisest geomeetriast.

Teine oluline järeldus on see, et iga *hüperboolse kolmnurga sisenurkade summa on väiksem kui π* . Tõepoolest, et $\sin \beta \sin \gamma > 0$ ja $\operatorname{ch} \frac{a}{\varrho} > 1$, siis

$$\sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} \frac{a}{\varrho} > \sin \beta \sin \gamma.$$

Liites siin mõlemal pool $-\cos \beta \cos \gamma$, saame vasakul (57.5) põhjal $\cos \alpha$, mistõttu

$$\cos \alpha > \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma = -\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \beta - \gamma).$$

Et koosinusfunktsioon on lõigus $[0, \pi)$ rangelt kahanev, siis

$$\alpha < \pi - \beta - \gamma$$

ja seega tõesti

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Täisnurkse hüperboolse kolmnurga jaoks, mil $\gamma = \frac{\pi}{2}$, saame koosinusteoreemi sellest kujust, mis sisaldab $\cos \gamma$, *hüperboolse Pythagorase teoreemi*:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{\varrho} = \operatorname{ch} \frac{a}{\varrho} \operatorname{ch} \frac{b}{\varrho}, \quad (57.6)$$

siinusteoreemist aga järeldub, et

$$\operatorname{sh} \frac{a}{\varrho} = \operatorname{sh} \frac{c}{\varrho} \sin \alpha. \quad (57.7)$$

Seetõttu

$$\operatorname{sh}^2 \frac{a}{\varrho} = \operatorname{sh}^2 \frac{c}{\varrho} (1 - \cos^2 \alpha)$$

ning järelikult

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \frac{c}{\varrho} \cos^2 \alpha &= \operatorname{sh}^2 \frac{c}{\varrho} - \operatorname{sh}^2 \frac{a}{\varrho} = \operatorname{ch}^2 \frac{c}{\varrho} - \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} = \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{\varrho} - \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} = \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} \left(\operatorname{ch}^2 \frac{b}{\varrho} - 1 \right) = \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} \operatorname{sh}^2 \frac{b}{\varrho} = \operatorname{ch}^2 \frac{a}{\varrho} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{\varrho} \operatorname{th}^2 \frac{b}{\varrho} = \\ &= \operatorname{ch}^2 \frac{c}{\varrho} \operatorname{th}^2 \frac{b}{\varrho}. \end{aligned}$$

Siit $\operatorname{th}^2 \frac{c}{\varrho} \cos^2 \alpha = \operatorname{th}^2 \frac{b}{\varrho}$ ning võttes ruutjuured, saame

$$\operatorname{th} \frac{b}{\varrho} = \operatorname{th} \frac{c}{\varrho} \cos \alpha. \quad (57.8)$$

Kui jagada omakorda võrduste (57.7) ja (57.8) pooled, on tulemuseks

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{a}{q}}{\operatorname{th} \frac{b}{q}} = \operatorname{ch} \frac{c}{q} \tan \alpha.$$

Arvestades valemit (57.6), saame pärast lihtsaid ümberkorraldusi:

$$\operatorname{th} \frac{a}{q} = \operatorname{sh} \frac{b}{q} \tan \alpha. \quad (57.9)$$

Märgime, et kui hüperboolse kolmnurga küljed on arvuga q võrreldes väga väikesed, siis seetõttu, et

$$\operatorname{ch} \frac{x}{q} \approx 1 + \frac{x^2}{2q^2}, \quad \operatorname{sh} \frac{x}{q} \approx \frac{x}{q}, \quad \operatorname{th} \frac{x}{q} \approx \frac{x}{q},$$

saame koosinusteoreemist

$$1 + \frac{a^2}{2q^2} \approx \left(1 + \frac{b^2}{2q^2}\right) \left(1 + \frac{c^2}{2q^2}\right) - \frac{b}{q} \frac{c}{q} \cos \alpha$$

ja siit ruutliikmete jaoks

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

siinusteoreemist tuleb

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Tulemusena jõuame eukleidilise trigonomeetria vastavate valemiteni. Täisnurkse kolmnurga puhul kehtivad seosed (57.6—9) annavad piirjuhul eukleidilise trigonomeetria vastavad seosed. Seetõttu võime sõnastada lause, millele saame edaspidigi kinnitust: *hüperboolse ruumi $L_3(q)$ väga väikeses piirkonnas (kui võrdlusaluseks on q) kehtib ligikaudu eukleidiline geomeetria*. Teisiti võib öelda, et kui $q \rightarrow \infty$, siis hüperboolsest ruumist $L_3(q)$ saab piirjuhul eukleidiline ruum E_3 . Võrdluseks märgime, et kui sfääri raadius r tõkestamatult kasvab, annab ka sfääriline geomeetria piirjuhul eukleidilise geomeetria, ainult et lähenemine toimub sel puhul «teiselt poolt» — geomeetriast, kus kolmnurga sisenurkade summa pole mitte väiksem kui π , nagu ruumi $L_3(q)$ puhul, vaid on suurem kui π .

58. Beltrami—Kleini mudel. Ajalooliselt jõuti Lobatševski geomeetriani teisiti, nimelt eukleidilise geomeetria aksioomide süsteemi analüüsimisel, eriti paralleelide aksioomi sõltumatuse probleemi uurimisel. Paralleelide aksioom eukleidilises geomeetrias nõuab teatavasti, et antud sirge ja sellel mitteasetseva punkti korral peab nendega samal tasandil olema ainult üks seda punkti läbiv sirge, mis ei lõika antud sirget. Probleem seisneb selles, kas see küllalt keerukas nõue on järeldatav eukleidilise geomeetria aksioomide süsteemi teistest nõuetest või on ta iseseisev, viimastest sõltumatu aksioom. Probleem oli lahtine antiikajast alates sajandite vältel,

kuni alles Lobatševski geomeetria loomisega sai selgeks, et paralleelide aksioom on sõltumatu. Viimane järeldus tuleneb asjaolust, et Lobatševski geomeetrias eukleidiline paralleelide aksioom ei kehti, samal ajal kui eukleidilise geomeetria ülejäänud aksioomide nõuded on rahuldatud.

Lõplik selgus tuli probleemisse siis, kui E. Beltrami¹ 1868. a. ja F. Klein² 1871. a. näitasid, kuidas ehitada Lobatševski geomeetria (vastavalt plani- ja stereomeetria) mudelit eukleidilise geomeetria rüpes.

Ruumi $L_3(q)$ käsitlemisel Minkowski ruumi 1E_4 pseudosfäärina võib vastava Beltrami—Kleini mudeli leida üpris lihtsalt. Võtame pseudosfääril punkti x_0 kohavektoriga

$$\vec{x_0} = o\vec{x_0} = (0, 0, 0, q).$$

Edasi vaatleme pseudosfääri suvalist punkti x , millel on kohavektor (56.2). Projitseerime selle alguspunkti o läbiva sirgega pseudosfääri punktis x_0 võetud puutujahüpertasandile punktiks x^* (joon. 59). See puutujahüpertasand kujutab endast ruumi E_3 , tema

punktide puhul $x_4^* = q$. Et kohavektorid $\vec{ox} = x$ ja $\vec{ox^*} = x^*$ on mõlemad projekteeriva sirge sihivektorid, siis üks neist on teise kordne ja nende koordinaadid on seetõttu võrreldavad. Järelikult

$$x_1^* : x_1 = x_2^* : x_2 = x_3^* : x_3 = q : x_4 \quad (58.1)$$

ehk

$$\frac{x_1^*}{q \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \cos u_3} = \frac{x_2^*}{q \operatorname{sh} u_1 \cos u_2 \sin u_3} = \frac{x_3^*}{q \operatorname{sh} u_1 \sin u_2} = \frac{q}{q \operatorname{ch} u_1}$$

ning siit

$$\begin{aligned} x_1^* &= q \operatorname{th} u_1 \cos u_2 \cos u_3, \\ x_2^* &= q \operatorname{th} u_1 \cos u_2 \sin u_3, \\ x_3^* &= q \operatorname{th} u_1 \sin u_2. \end{aligned}$$

Saame punkti $x^* \in E_3$ koordinaatide x_1^*, x_2^*, x_3^* avaldised sfäärkoordinaatides R, u_2, u_3 (art. 53), kusjuures, nagu näha,

$$R = q \operatorname{th} u_1.$$

Et $\operatorname{th} u_1 < 1$, $\lim_{u_1 \rightarrow \infty} \operatorname{th} u_1 = 1$, siis

$$R < q, \quad \lim_{u_1 \rightarrow \infty} R = q.$$

Seega punkti $x \in L_3(q)$ kujutis $x^* \in E_3$ on sellise sfääri $S_2(q)$ sees, mille raadius on q . Seejuures (56.7) ja (56.2) põhjal

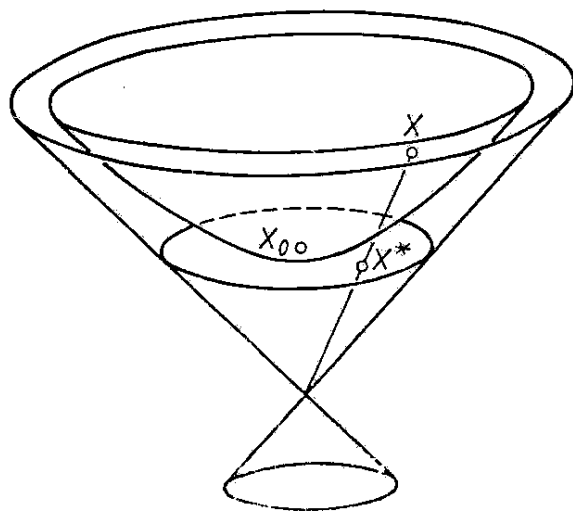
$$-q^2 \operatorname{ch} \frac{d_L(x_0, x)}{q} = x_0 x = -q^2 \operatorname{ch} u_1,$$

mistõttu

$$u_1 = \frac{d_L(x_0, x)}{q}$$

¹ Eugenio Beltrami (1835—1900), itaalia matemaatik.

² Felix Christian Klein (1849—1925), saksa matemaatik.



Joonis 59

ja protsess $u_1 \rightarrow \infty$ on samaväärne sellega, et $d_L(x, x_0) \rightarrow \infty$, s.t. punkti x lõpmata kaugenemisega ruumis $L_3(q)$. Järelikult niisugusel kaugenemisel on R piirväärtuseks q , mistõttu vastav punkt $x^* \in E_3$ läheneb lõpmatult sfäärile $S_2(q)$.

Kokkuvõttes, ruum $L_3(q)$ on kujutatud eukleidilise ruumi E_3 sfääri $S_2(q)$ sisemusse, kusjuures selle sfääri punktid kujutavad ruumi $L_3(q)$ «lõpmata kaugeid punkte».

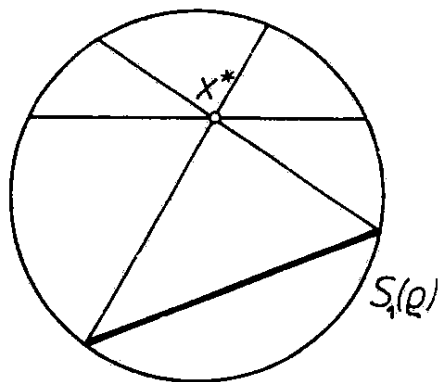
Märgime, et kõnesolev sfäär $S_2(q)$ tekib pseudosfääri $L_3(q) \subset \subset {}^1E_4$ punktis x_0 võetud puutujahüpertasandi (kui ruumi E_3) lõikamisel ruumi 1E_4 punktis o võetud isotroopse hüperkoonusega, ning meenutame, et viimane on afiinse geomeetria seisukohalt selle pseudosfääri asümptootiline hüperkoonus (joon. 59).

Hüperboolse e. Lobatševski ruumi $L_3(q)$ jaoks niiviisi tekkinud mudel sfääri $S_2(q) \subset E_3$ sisemuses kujutabki endast eespool mainitud Beltrami—Kleini mudelit¹.

Ruumi $L_3(q)$ sirged kui jooned imaginaarse raadiusega sfääri kattel asetsevad vastavalt definitsioonile alguspunkti o läbivatel tasanditel, need aga lõikavad punktis x_0 võetud puutujahüpertasandit mööda sirgeid. Järelikult hüperboolsed sirged kujutuvad Beltrami—Kleini mudelis sfääri $S_2(q) \subset E_3$ kõõludena (ilma otspunkti-deta). Analoogiliselt võib veenduda, et h -tasandid kujutuvad sfääri $S_2(q)$ sisemuse tasandiliste lõigetena, s.t. selliste ringide sisemustena, mille äärringjooned on sfääril $S_2(q)$.

Uurimegi lähemalt ühe suurringjoone $S_1(q)$ sisemust. See kujutab endast hüperboolse tasandi Beltrami—Kleini mudelit. Võtame mingi h -sirge ja väljaspool seda punkti x . Nende kujutisteks mudelis on ringjoone $S_1(q)$ teatav kõõl ja väljaspool seda olev sise-punkt x^* . Vahetult on võimalik veenduda, et läbi punkti x läheb lõpmata palju h -sirgeid, mis esialgu võetud h -sirget ei lõika (joon. 60; sellel on näidatud kujutised mudelis). Nende h -sirgete seas tõu-

¹ Sfääri $S_2(q)$ nimetatakse sageli selle mudeli absoluudiks; vrd. [9], lk. 12. Märkime, et akad. J. Nuudi poolt antud käsitus monograafias [9] on sisuliselt Lobatševski geomeetria käsitus Beltrami—Kleini mudelist lähtudes.



Joonis 60

sevad esile kaks, mille kujutistel $S_1(q)$ kõõludena on ühine otspunkt antud h -sirget kujutava kõõluga. (Märgime, et see otspunkt ei kujuta endast ruumi $L_3(q)$ punkti; teda võib käsitleda fiktiivse lõpmata kaugel punkti kujutisena.) Sellist kaht h -sirget nimetatakse antud h -sirge Lobatševski paralleelideks läbi punkti x .

Nii selgub, et hüperboolses ruumis ei kehti eukleidiline paralleelide aksioom. Sirgete paralleelsus omandab seal üldisema tähenduse. Mis puutub aga eukleidilise geomeetria ülejäänud aksioomidesse, kus nõutakse näiteks, et sirge oleks üheselt määratud oma kahe erineva punktiga, jaguneks kaheks ühise otspunktiga poolsirgeks ning ise jagaks teda läbiva tasandi kaheks pooltasandiks jms., siis need on hüperboolses geomeetrias tärdetud. Selles mõttes on viimane märksa lähedasem eukleidilisele geomeetria kui elliptiline geomeetria, kus puuduvad näiteks poolsirge ja pooltasandi mõisted.

Eespool selgus, et hüperboolse ruumi $L_3(q)$ puhul on määratud ka isomeetriliste teisenduste rühm — selleks on hüperboolne rühm. Seejuures on selle rühma teisendus määratud sama vabadusega mis isomeetriline teisendus ruumis E_3 . Järelikult saab ruumi $L_3(q)$ puhul defineerida kujundite, näiteks kolmnurkade kongruentsuse, lugedes kaht kujundit nagu eukleidilises geomeetrias kongruentseteks parajasti siis, kui leidub isomeetriline teisendus, mis kujutab ühe neist teiseks.¹

Tekib küsimus, missuguse tõlgenduse omandab ruumi $L_3(q)$ isomeetriline teisendus Beltrami—Kleini mudelis. Seostest (58.1) järeldub, et

$$x_i^* = q \frac{x_i}{x_4}; \quad i=1, 2, 3. \quad (58.2)$$

Teiselt poolt on teada, et ruumi $L_3(q)$ isomeetrilised teisendused moodustavad ruumis E_4 punkti o säilitavate isomeetriliste teisenduste rühma — Lorentzi üldrühma ehk pseudoortogonaalrühma teatava alamrühma, nimelt hüperboolse rühma (art. 13). Selle rühma iga teisendus on koordinaatide x_μ ; $\mu=1, \dots, 4$ vahendusel määratud valemitega (12.7), kus praegu $A_v=0$:

$$x'_v = \sum_{\mu=1}^4 x_\mu A_{\mu v}; \quad (58.3)$$

¹ Hüperboolse ruumi $L_3(q)$ orientatsiooni säilitavat isomeetrilist teisendust nimetatakse nagu eukleidilise ruumi E_3 korral (art. 10) liikumiseks ruumis $L_3(q)$.

siin $A = \|A_{\mu\nu}\|$ on selline pseudoortogonaalmatriks, mille korral $A_{44} > 0$ (art. 13). Tähistades nüüd kooskõlas seostega (58.2)

$$x_i^{*'} = q \frac{x_i'}{x_4'}; \quad i=1, 2, 3,$$

saame, et Beltrami—Kleini mudelis on ruumi $L_3(q)$ isomeetriline teisendus esitatud valemitega

$$x_j^{*'} = q \frac{\sum_{i=1}^3 x_i A_{ij} + x_4 A_{4j}}{\sum_{i=1}^3 x_i A_{i4} + x_4 A_{44}}. \quad (58.4)$$

Kui jagada paremal läbi koordinaadiga $x_4 > 0$ ja teha asendused seostest (58.2), on tulemuseks järgmised teisendusvalemid:

$$x_j^{*'} = q \frac{q^{-1} \sum_{i=1}^3 x_i^* A_{ij} + A_{4j}}{q^{-1} \sum_{i=1}^3 x_i^* A_{i4} + A_{44}}. \quad (58.5)$$

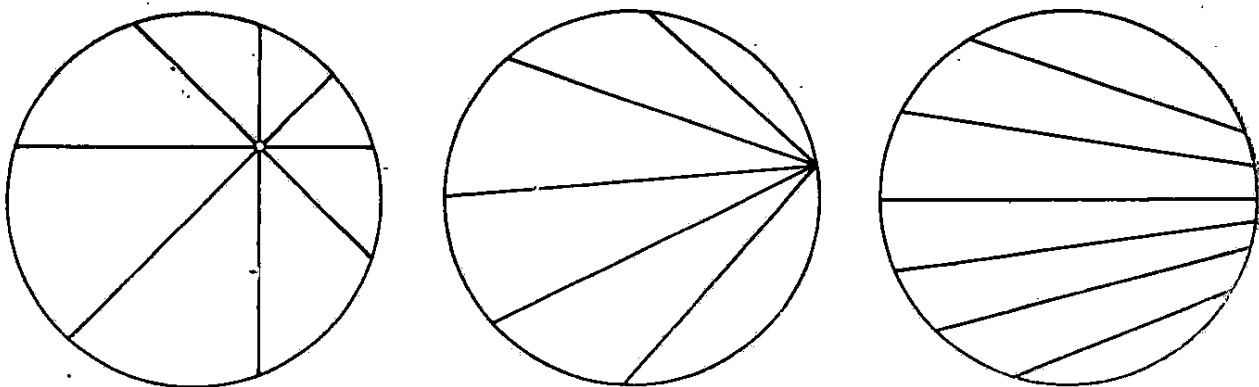
Niisiis, Lobatševski ruumi $L_3(q)$ isomeetriline teisendus kujutub Beltrami—Kleini mudelis valemitega (58.5) määratud teisenduseks, kusjuures nende valemite kordajad moodustavad pseudoortogonaalmatriksi, mille korral $A_{44} > 0$.

Valemid (58.5) määravad ruumis E_3 , kus sfääri $S_2(q)$ sisemuses realiseerub ruumi $L_3(q)$ Beltrami—Kleini mudel, teatava projektiivse teisenduse ([6], lk. 512, 544). Sellest, et hüperboolse rühma teisendused kujutavad pseudosfääri iseendaks (vrd. art. 13), ning mudeli konstruktsioonist on vahetult selge, et $S_2(q)$, samuti nagu tema sisemus, teiseneb iseendaks, tema iga kõõl aga kujutub jällegi tema teatavaks kõõluks.

Seejuures ruumi 1E_4 punkti x_0 säilitav isomeetriline teisendus jätab muutumatuks pseudosfääri puutujahüpertasandi selles punktis (kui teatava ruumi E_3) ning tekitab ühtlasi selle puutujahüpertasandi isomeetrilise teisenduse. Siit tuleneb, et ruumi $L_3(q)$ isomeetriline teisendus püsipunktiga x_0 kujutub Beltrami—Kleini mudelis ortogonaalteisendusena (orientatsiooni säilimisel pöördena) sfääri $S_2(q)$ keskpunkti x_0 ümber.

Väljaspool sfääri $S_2(q)$ jäävate ruumi E_3 punktidega on asi keerulisem. Et siin valemid (58.5) määraksid teisenduse tavalises mõttes, tuleb ruumi E_3 täiendada «lõpmata kaugete punktidega» ehk ebapunktidega ([6], lk. 479 ja 499) — sellistega, mis seatakse vastavusse neile kohavektoreile $\vec{x}$, mille korral $x_4 = 0$ (s.t. mis on ruumis 1E_4 ortogonaalsed vektoriga ox_0).

Valemitega (58.5) samaväärsetest seostest (58.4) järeldub (juhul kui $x_4 = 0$), et ebapunkt võib teiseneda ruumi tavaliseks väljaspool sfääri $S_2(q)$ olevaks punktiks (kusjuures pöördteisendus võib muidugi teha ka vastupidist).



Joonis 61

Illustreerime öeldut sirgesidumite käsitleusega ruumis $L_3(q)$. Teatavasti *sirgesidumiks* ruumis E_3 nimetatakse mingit ühte punkti läbivate sirgete hulka ([6], lk. 211). Beltrami—Kleini mudeli järgi on ruumis $L_3(q)$ kolme liiki sidumeid olenevalt sellest, kas ruumis E_3 sirgete ühine punkt on sfääri $S_2(q)$ sees, sfääril $S_2(q)$ või väljaspool sfääri $S_2(q)$. Ruumi $L_3(q)$ sirgeid kujutavad muidugi selle sfääri kõõlud sidumi sirgetel. Vastavalt sellele kõneldakse kas *lõikuvate*, *paralleelsete* (Lobatševski mõttes) või *hajuvate hüperboolsete h -sirgete sidumeist* (vt. joon. 61, kus nad on kujutatud ühe võrra väiksema mõõtme korral — sidumi asemel kõneldakse siis *kimbust*).

Seni puudub meil hajuvate hüperboolsete sirgete geomeetriline iseloomustus (peale selle, et nad pole lõikuvad ega paralleelsed). Siin aitabki võimalus teisendada ruumi E_3 nende sirgete ühispunkt, millel olevad kõõlud kujutavad hajuvaid h -sirgeid, sobiva isomeetrilise teisendusega (58.4) ruumi E_3 lõpmata kaugesse punkti. Sel juhul kõnesolevad sirged ruumis E_3 teisenevad paralleelseteks sirgeteks ja vaadeldavaid h -sirgeid kujutavad kõõlud seega paralleelseteks kõõludeks. Osutub, et mingile kahele paralleelsele kõõlule vastavad h -sirged on ruumis $L_3(q)$ risti sellise h -sirgega, mida kujutab nende kõõlude keskpunkte läbiv kõõl.

Näitame seda juhul, kui see viimane kõõl osutub sfääri $S_2(q)$ diameetriks; üldjuhu võib muuta kõnealuseks juhuks ruumi $L_3(q)$ sobiva isomeetrilise teisendusega (mudelil kujutab seda sobiv teisendus (58.5)). Diameetri omakorda saab paraja pöördega viia x_1^* -teljele ruumis E_3 , millel $u_2 = u_3 = 0$, ning paralleelsed kõõlud seejärel pöördega selle telje ümber viia paralleelseteks x_3^* -teljega.

Seose (56.2) põhjal, kus nüüd $u_2 = u_3 = 0$, kujutab diameeter sel korral pseudo-sfääri joont $\mathfrak{J}_1$:

$$x_1 = (q \operatorname{sh} u_1, 0, 0, q \operatorname{ch} u_1),$$

mingi vaadeldav kõõl aga joont $\mathfrak{J}_2$, millel on punktis, kus $u_1 = \frac{b}{q}$, $u_2 = u_3 = 0$, ühine puutuja joonega:

$$x_2 = \left(q \operatorname{sh} \frac{b}{q} \cos u_2, 0, q \operatorname{sh} \frac{b}{q} \sin u_2, q \operatorname{ch} \frac{b}{q} \right)$$

(viimane kujutub ringjooneks raadiusega $q \operatorname{th} \frac{b}{q}$, millele see kõõl on puutujaks).

Siin

$$x'_1 = (q \operatorname{ch} u_1, 0, 0, q \operatorname{sh} u_1),$$

$$x'_2 = \left(-q \operatorname{sh} \frac{b}{q} \sin u_2, 0, q \operatorname{sh} \frac{b}{q} \cos u_2, 0 \right),$$

mistõttu kõnesolevas punktis võetud puutujate sihivektoreiks on

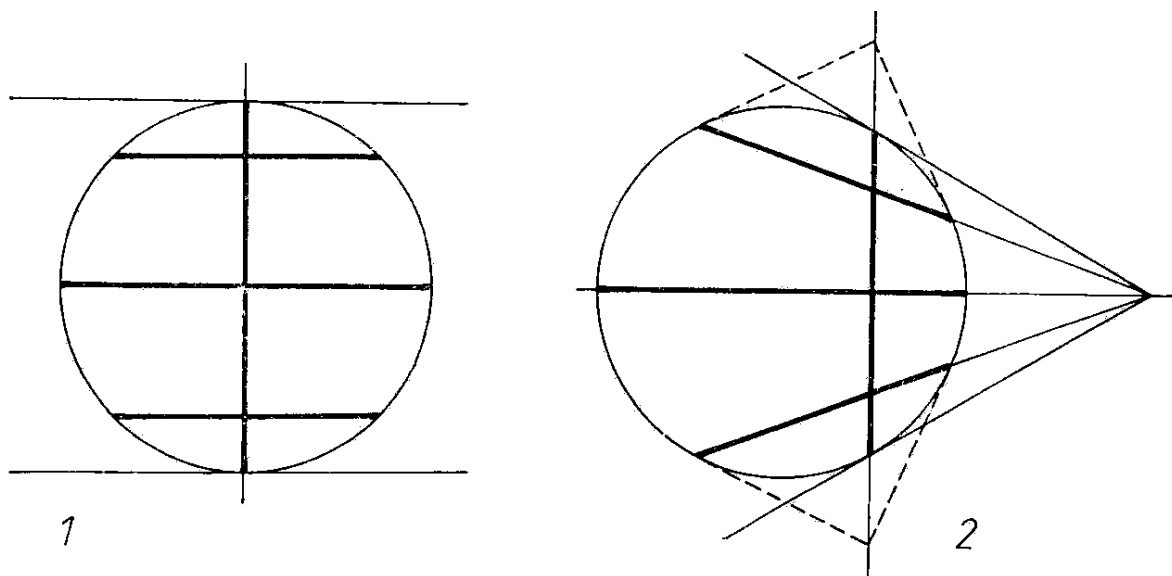
$$x'_1 = \left(q \operatorname{ch} \frac{b}{q}, 0, 0, q \operatorname{sh} \frac{b}{q} \right),$$

$$x'_2 = \left(0, 0, q \operatorname{sh} \frac{b}{q}, 0 \right).$$

Need vektorid on tõesti ortogonaalsed, mistõttu jooned $\mathfrak{F}_1$ ja $\mathfrak{F}_2$ — tegelikult hüperboolsed sirged — lõikuvad hüperboolses ruumis $L_3(q)$ risti, nagu oligi väidetud.

Võtame nüüd diameetri otspunktides sfääri $S_2(q)$ puutujad, mis on paralleelsed vaadeldavate kõõludega ja millel on viimaseid sisaldavate sirgetega seega ühine lõpmata kaugel punkt (joon. 62, 1). Pärast ruumi $L_3(q)$ suvalist isomeetrilist teisendust, millele vastavas teisenduses (58.5) see lõpmata kaugel punkt läheb harilikuks punktiks, saame joonisel 62, 2 näidatud pildi. Siin ühispunktiga kõõludeks kujutuvad h -sirged lõikuvad risti. Seejuures hajuvate h -sirgete kujutisteks olevate kõõlude otspunktides võetud puutujad (joonisel punktiiriga) lõikuvad ristuva h -sirge kujutist sisaldaval sirgel. Siit nähtub, et igal kahel hajuvale h -sirgel on olemas mõlemat risti lõikav h -sirge. (Selle kujutise konstrueerimiseks tuleb tõmmata punktiiris näidatud puutujad ja ühendada nende lõikepunktid.) Teist ühist ristuvat h -sirget neil enam olla ei saa, sest muidu tekiks nelja täisnurgaga nelinurk, mille poolitamisel saaksime kaks kolmnurka, milles kummaski oleks sisenurkade summa π , see on aga hüperboolses geomeetrias võimatu. Niisiis, hajuvad h -sirged on iseloomustatavad kui sellised h -sirged, mis asuvad ühel ja samal h -tasandil ja millel on parajasti üks ühine ristuv h -sirge. (Eelnevast on nimelt selge, et lõikuvatel ja paralleelsetel h -sirgetel ei saa olla ühist ristuvat h -sirget.)

Hajuvate h -sirgete kimp (või sidum) on nüüd iseloomustatav kui selline, mille h -sirged on risti ühe h -sirgega antud hüperboolsel tasandil $L_2(q)$ (või ühe h -tasandiga ruumis $L_3(q)$).



Joonis 62

Kahe h -sirge vastastikuse käitumise iseloomustamiseks nende sirgete eri asendite puhul hüperboolsel tasandil tuleb eelõeldule lisada valemid, mis iseloomustavad ühe h -sirge punktide kaugust teisest. Need saame täisnurkse kolmnurga valemist hüperboolses trigonomeetrias. Vaatleme näiteks joonisel 63 kujutatud olukorda, kus täisnurkse kolmnurga xyz kujutise juures on näidatud külgede pikkused hüperboolses geomeetrias; seejuures $x=x_0$. Hüperboolsetele sirgetele viitame vastavate kõõlude otspunktide kaudu. Me teame, et $\operatorname{sh} \frac{a}{q} = \operatorname{sh} \frac{c}{q} \sin \alpha$, $\operatorname{th} \frac{b}{q} = \operatorname{th} \frac{c}{q} \cos \alpha$, $\operatorname{th} \frac{a}{q} = \operatorname{sh} \frac{b}{q} \tan \alpha$. Kaugenegu tipp y mööda h -sirget pq lõpmatuse; sel korral $\alpha = \text{const}$, $c \rightarrow \infty$, mistõttu $\operatorname{sh} \frac{c}{q} \rightarrow \infty$, $\operatorname{th} \frac{c}{q} \rightarrow 1$. Samal ajal kaugeneb ka täisnurkse kolmnurga tipp z punktist x mööda h -sirget rs . Kui nüüd tähistada $\lim b = \bar{b}$, siis eelmistest seostest saame vastavalt

$$\operatorname{sh} \frac{a}{q} \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow \infty, \quad \operatorname{th} \frac{\bar{b}}{q} = \cos \alpha, \quad 1 = \operatorname{sh} \frac{\bar{b}}{q} \tan \alpha. \quad (58.6)$$

Siit nähtub, et hajuvate h -sirgete rs ja uq puhul esimese sirge mingi punkti v kaugus teisest sirge punktist z , olles suurem kui küljepikkus $a \rightarrow \infty$, samuti kasvab v kaugenedes lõpmatult. Mis puutub a kasvusse b kasvuga võrreldes, siis see on märksa kiirem kui eukleidilises geomeetrias, kus on tegemist võrdelisusega $a = kb$.

Tõepoolest, seosest $\operatorname{th} \frac{a}{q} = k \operatorname{sh} \frac{b}{q}$, kus $k = \tan \alpha = \text{const}$, järeldub, et

$$a = q \operatorname{arth} \left(k \operatorname{sh} \frac{b}{q} \right) = kb + \frac{k(1+2k^2)}{6q^2} b^3 + \dots$$

Huvi pakuvad kaks viimast seost (58.6). Nendest nähtub, on hüperboolses geomeetrias olemas funktsionaalne seos nurga α ja lõigu pikkuse $\bar{b}$ vahel. Selle määrab asjaolu, et h -sirged pq ja qw on paralleelsed. Lobatševski eeskujul kõneldakse, et seoste (58.6) kehtivuse korral $\bar{b}$ on nurgale α vastav *paralleelsuselõik* ja α on lõigu pikkusele $\bar{b}$ vastav *paralleelsusnurk*; seda tähistatakse: $\alpha = \Pi(\bar{b})$. Niisiis, (58.6) põhjal

$$\cos \Pi(x) = \operatorname{th} \frac{x}{q}.$$

Seda laadi funktsionaalseid seoseid nurkade ja lõigu pikkuste vahel on võimalik tuletada teisigi (vt. harjutusülesanne 99); eukleidilises geomeetrias midagi taolist ei esine (küll aga sfäärilises ja elliptilises geomeetrias, nagu kerge näidata).

Märkimist väärib ka asjaolu, et seose $\operatorname{th} \frac{b}{q} = \operatorname{sh} \frac{a}{q} \tan \beta$ tõttu

$$\tan \beta = \frac{\operatorname{th} \frac{b}{q}}{\operatorname{sh} \frac{a}{q}} \rightarrow \frac{\operatorname{th} \frac{\bar{b}}{q}}{\infty} = 0 \Rightarrow \beta \rightarrow 0.$$

Seega võib täisnurkse kolmnurga nurk β saada kuitahes väikeseks. Seejuures võib ka α olla väga väike. Järelikult leidub täisnurkseid kolmnurki, mille sisenurkade summa on kui tahes lähedal täisnurgale. Veel enam, võib näidata protsessi, kus kolmnurga kõik nurgad lähenevad nullile. Üks sellise protsessi piirasendeid on näiteks *kidunud kolmnurk* pqw — kolmnurk kolme lõpmata kauge tipuga, mille külgedeks on tavalised h -sirged.

Punkti y kaugenemisel mööda sirget ts paralleelsuse suunas $x_1^* \rightarrow q$, mistõtt
 $\operatorname{th} \frac{a}{q} \rightarrow 0$ ja $a \rightarrow 0$, s. t. toimub asümptootiline lähenemine. Siin $x_1^* = q \operatorname{th} \frac{b}{q}$ ja
 seega

$$\frac{q - x_1^*}{q + x_1^*} = \frac{\left(e^{\frac{b}{q}} + e^{-\frac{b}{q}} \right) - \left(e^{\frac{b}{q}} - e^{-\frac{b}{q}} \right)}{\left(e^{\frac{b}{q}} + e^{-\frac{b}{q}} \right) + \left(e^{\frac{b}{q}} - e^{-\frac{b}{q}} \right)} = e^{-\frac{2b}{q}}.$$

Järelikult

$$\operatorname{th} \frac{a}{q} = \frac{\sigma}{q} e^{-\frac{b}{q}}.$$

Et väikeste a väärtuste korral $\operatorname{th} \frac{a}{q} \approx \frac{a}{q}$, siis näeme, et a vähenemine toimub
 ligikaudu eksponentsiaalselt.

Kõige selle valguses pakub huvi selgitada, mida kujutab endast hüperbool-
 sel tasandil antud sirgest võrdsetel kaugustel olevate punktide hulk. Sirgepaar,
 nagu eukleidilises geomeetrias, see ilmselt olla ei saa. Vaatleme tema kujutist
 Beltrami—Kleini mudelis. Valemist (58.7) näeme, et

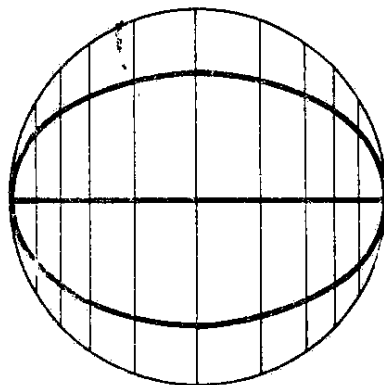
$$q^2 - x_1^{*2} = \frac{x_2^{*2}}{\operatorname{th}^2 \frac{a}{q}},$$

s. t.

$$\frac{x_1^{*2}}{q^2} + \frac{x_2^{*2}}{\left(q \operatorname{th} \frac{a}{q} \right)^2} = 1.$$

Kui $a = \text{const}$, siis saame siit kohe, et kõnesoleva punktihulga kujutis on ellips,
 mille suurteljeks on ringjoone $S_2(q)$ diameeter. Vastavat joont hüperboolsel
 tasandil nimetatakse *ekvidistandiks* (joon. 65). Selle pöörlemisel suurteljele vas-
 tava sirge ümber saadakse *sirge ekvidistantpind* ruumis $L_3(q)$ (kujutiseks on
 piklik pöördellipsoid), pöörlemisel väiketeljele vastava sirge ümber tekib *tasandi*
ekvidistantpind ruumis $L_3(q)$ (kujutiseks on lame pöördellipsoid); viimast nime-
 tatakse ka lihtsalt *ekvidistantpinnaks*.

Lihtsamad pinnad ruumis $L_3(q)$ pole sellega veel ammandatud. Loomulikult
 võib defineerida *sfäärid* ruumis $L_3(q)$ kui punktihulgad $\{x: d_L(c, x) = r\}$. Sfäär
 lõikab risti teatava lõikuvate sirgete sidumi kõiki sirgeid. Kui tema mingi dia-
 meetri üks otspunkt fikseerida, teist aga lasta tõkestamatult kaugeneda mööda



Joonis 65

sirget, siis piirjuhul saadakse pind, mis lõikab risti teatava paralleelsete sirgete sidumi kõiki sirgeid; seda pinda nimetatakse hüperboolses geomeetrias *piirsfääriks* ehk *orisfääriks*. Tasandil saadakse analoogiliselt *piirringjoon* ehk *oritsükel*. Märgime, et hajuvate sirgete sidumi kõiki sirgeid risti lõikavaks pinnaks on ekvidistantpind.

Harjutusülesanded

95. Tuletada valem ringjoone pikkuse arvutamiseks Lobatševski tasandil.

96. Veenduda, et asendusega $r=iq$ saame sfääriliste trigonomeetria valemeist (näiteks koosinus- ja siinusteoreemist jt.) Lobatševski trigonomeetria vastavad valemid.

97. Tuletada valemid, mis seovad täisnurkse kolmnurga kaht teravnurka hüpotenuusiga või kaatetiga:

$$\cot \alpha \cdot \cot \beta = \operatorname{ch} \frac{c}{q}, \quad \cos \alpha = \sin \beta \operatorname{ch} \frac{a}{q}.$$

98. Järeldada hüperboolsest koosinusteoreemist, et kolmnurga külje pikkus ei ületa kahe ülejäänud külje pikkuste summat ega ole väiksem nende vahest.

99. Hulknurka Lobatševski tasandil $L_2(q)$ nimetatakse korrapäraseks, kui tal on võrdse pikkusega küljed ja võrdsed sisenurgad. Veenduda, et kolmnurga korral järeldub küljepikkuste võrdsusest sisenurkade võrdsus ning et sel korral sisenurk α avaldub küljepikkuse a kaudu järgmiselt: $\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{a}{2q} \right) > \frac{1}{2}$;

seega $\alpha < \frac{\pi}{3}$ ja kui $a \rightarrow \infty$, siis $\alpha \rightarrow 0$. Näidata, et korrapärase nelinurga sisenurk

α avaldub küljepikkuse a kaudu järgmiselt: $\cos \alpha = \operatorname{th}^2 \frac{a}{2q}$, seega $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ja kui $a \rightarrow \infty$, siis $\alpha \rightarrow 0$.

100. Näidata valemi (58.7) abil, et kahe hajuva h -sirge ühise ristlõigu pikkus on ühe sirge punkti minimaalne kaugus teisest sirgest, kusjuures punkti lõpmatul kaugenemisel sellest ristsirgest mööda üht sirget tema kaugus teisest sirgest kasvab tõkestamatult.

101. Selgitada, millistesse punktidesse lähevad valemitega (58.5) määratud hüperboolse liikumisega harjutusülesandes 17 antud pseudoortogonaalmatriksi puhul $x_1^* x_2^* x_3^*$ -teljestiku alguspunkt $(0, 0, 0)$ ja ruumi $L_3(1)$ lõpmata kauged punktid $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ ja $(0, 0, 1)$.

102. Näidata, et kui liikumine Lobatševski ruumis, mida tõlgendatakse pseudosfäärina $L_3(q) \subset {}^1E_4$, jätab paigale h -sirge ja seda läbiva h -tasandi, siis teda määravad valemid (58.3) saab $x_1 x_2 x_3 x_4$ -teljestiku sobiva valikuga ruumis 1E_4 viia kujju

$$x'_1 = \frac{x_1 + \lambda x_4}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \frac{\lambda x_1 + x_4}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \quad 0 < \lambda < 1;$$

asendused $x_4 = ct$, $x'_4 = ct'$, $\lambda = \frac{v}{c}$ viivad siit Lorentzi eriteisenduseni erirelatiivsusteoorias.

103. Vaadeldes eelmise ülesande liikumist Beltrami—Kleini mudelis valemite (58.5) vastava erikuju abil, näidata, et Lobatševski ruumi sfääri esitab selles mudelis üldjuhul lame pöördellipsoid, mille pöördetelg läbib mudelit ääristava $S_2(q)$ keskpunkti x_0 (erijuhul, kui sfääri keskpunkt kujutub punktiks x_0 , on sfääri kujutiseks samuti sfäär keskpunktiga x_0).

§ 14. MITTEEUKLEIDILISTE RUUMIDE STEREOGRAAFILISED MUDELID

Eelmises art-s käsitletud Beltrami—Kleini mudeli heaks küljeks on see, et Lobatševski geomeetria sirged kujutuvad siin sirge osadena — tasandil E_2 või ruumis E_3 fikseeritud vastavalt ringjoone või sfääri kõõludena. Samal ajal aga meetrilised suurused — kaugused ja nurgad — on selles esitatud moonutustega. Uhe uut laadi mudeli, milles Lobatševski geomeetria nurgad on antud moonutusteta, konstrueeris 1882. a. H. Poincaré.

Kui Lobatševski ruumi $L_3(\varrho)$ käsitleda Minkowski ruumi 1E_4 pseudosfäärina, nagu eespool tehtud, saab Poincaré mudelile minna üle lihtsa võttega, mis paljusk sarnaneb Beltrami—Kleini mudeli moodustamisega. Sfääri $S_2 \subset E_3$ korral oli see võte tuntud juba antiikajal ja sai nimeks stereograafiline projektsioon. Et niisuguse projektsiooni puhul säilivad nurgad, siis teeb see ta praegugi kasulikuks kartograafias. Lobatševski geomeetria uurimisel on stereograafiline projektsioon ja selle abil saadav Poincaré mudel samuti väga kasulikud. Näiteks kujutuvad ringjooned, ekvidistandid (nende hulgas ka sirged) ja piirringjooned sel puhul kõik teatavateks ringjoonteks, vastavad pinnad aga sfäärideks eukleidilises geomeetrias.

59. Stereograafiline projektsioon. Võtame eukleidilise ruumi E_3 sfääril S_2 ühe punkti p (pooluse) ja paneme läbi sfääri keskpunkti o tasandi, mis on risti vektoriga $\overrightarrow{op}$ (ekvaatoritasandi). Projitseerime sfääri punktid punktist p kõnesolevale tasandile, s.t. seame punktile $x \in S_2$ vastavusse niisuguse punkti u sellel tasandil, et p , x ja u asuvad ühel sirgel (joon. 66). Näitlikult on selge, et sel viisil tekib pooluseta sfääri $S_2 \setminus \{p\}$ üksühene pealekujutus eukleidilisele tasandile E_2 ; seda kujutust nimetatakse *stereograafiliseks projektsiooniks*.

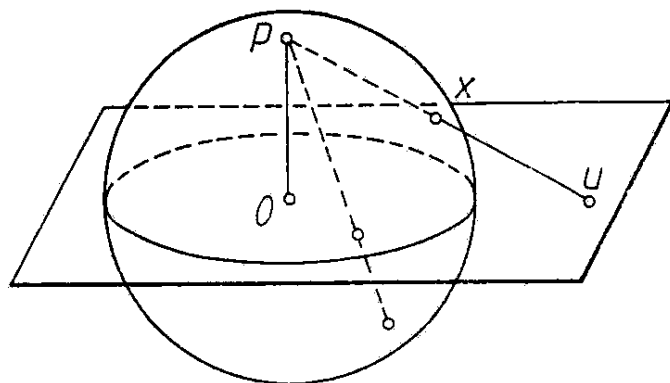
Kõnesolev kujutus $S_2 \setminus \{p\} \rightarrow E_2$ esines juba Ptolemaiiose (2. saj.) töös, kus on ühtlasi näidatud, et sel puhul säilivad kõik nurgad; nimetuse andis sellele belgia matemaatik F. d'Aiguillon [egijoon] (1566—1617).

Alljärgnevalt käsitleme stereograafilist projektsiooni analüütiliselt ja tõestame tema äsjamainitud omaduse. Teeme seda kohe üldiselt nii sfääri $S_3(r) \subset E_4$ kui ka pseudosfääri $L_3(\varrho) \subset {}^1E_4$ korral, et haarata ka elliptilist ja Lobatševski (ehk hüperboolset) ruumi.

Alustame sfääril $S_3(r) \subset E_4$; siin

$$S_3(r) = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = r^2\}.$$

Võtame punkti $p \in S_3(r)$ (pooluse) koordinaatidega $(0, 0, 0, r)$ ning leiame suvalise punkti $x \in S_3(r) \setminus \{p\}$ jaoks võrrandiga $x_4 = 0$ määratud hüpertasandil (ekvaatoritasandil) sellise punkti u koordinaatidega $(u_1, u_2, u_3, 0)$, et u asub punktidega p ja x määratud sirgel.



Joonis 66

Viimane koosneb punktidest kohavektoritega $p + t(x - p)$. Seega tuleb leida t nii, et

$$u = p + t(x - p).$$

Et $t \neq 0$, sest $u \neq p$, siis võime tähistada $t^{-1} = \tau \neq 0$, ning saame, et

$$x = p + \tau(u - p). \quad (59.1)$$

Samal ajal $x \in S_3(r)$, mistõttu $x^2 = r^2$ ehk

$$[p + \tau(u - p)]^2 = r^2.$$

Siin $p^2 = r^2$, $pu = 0$ ja seetõttu

$$r^2 - 2\tau r^2 + \tau^2(u^2 + r^2) = r^2.$$

Järelikult

$$\tau = \frac{2r^2}{u^2 + r^2}$$

ning kui nüüd seoses (59.1) minna üle koordinaatidele, on tulemuseks:

$$x_i = \frac{2r^2 u_i}{u^2 + r^2}; \quad i = 1, 2, 3; \quad x_4 = r \frac{u^2 - r^2}{u^2 + r^2}. \quad (59.2)$$

Sellised valemid korraldavad üksühese vastavuse ekvaatoritasandi E_3 kõigi punktide u hulga ja pooluseta sfääri $S_3(r) \setminus \{p\}$ punktide x hulga vahel, määrates sel teel teatava kujutuse

$$S_3(r) \setminus \{p\} \rightarrow E_3,$$

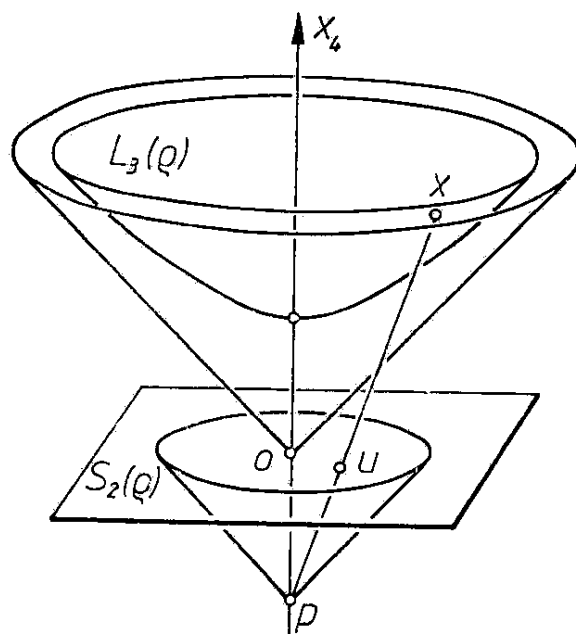
mida ka siin nimetatakse *stereograafiliseks projektsiooniks*.

Varem vaadeldud kujutuse $S_2(r) \setminus \{p\} \rightarrow E_2$ esitavad täpselt samad valemid (59.2), ainult et $i = 1, 2$ ning vastavalt sellele asub x_4 kohale x_3 .

Analoogiliselt tekib ruumi 1E_4 pseudosfääri

$$L_3(q) = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -q^2, x_4 > 0\}$$

stereograafiline kujutus. Punktiks p tuleb võtta punkt koordinaatidega $(0, 0, 0, -q)$, hüpertasand aga endiselt määrata võrrandiga $x_4 = 0$ (joon. 67). Erinevus seisneb üksnes selles, et varasemate r



Joonis 67

ja r^2 asemel tuleb nüüd võtta vastavalt $-q$ ja $-q^2$. Võrrandite (59.1) asemel saame seega

$$x_i = \frac{2q^2 u_i}{q^2 - u^2}; \quad i=1, 2, 3; \quad x_4 = q \frac{q^2 + u^2}{q^2 - u^2}. \quad (59.3)$$

Et siin peab olema $x_4 > 0$, siis $q^2 - u^2 > 0$, s. t. $u^2 < q^2$. Tekib ükshene vastavus pseudosfääri $L_3(q)$ kui Lobatševski ruumi kõigi punktide x hulga ja eukleidilise ruumi E_3 sfääri $S_2(q) = \{u : u^2 = q^2\}$ sees olevate punktide u hulga vahel. Saadud vastavust $x \mapsto u$ nimetatakse *pseudosfääri stereograafiliseks projektsiooniks*. Ta kujutab Lobatševski ruumi $L_3(q)$ eukleidilise ruumi E_3 teatava sfääri $S_2(q)$ sisemusse ja sarnaneb selles mõttes Beltrami—Kleini mudeli andnud kujutusega. Sarnasuse kõrval on aga mitmeid olulisi erinevusi, mille juures peatume pikemalt ülejärgmises artiklis.

Pöördudes tagasi sfääri $S_3(r) \subset E_4$ stereograafilise projektsiooni juurde, näitame võimaluse elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ teatava mudeli konstrueerimiseks eukleidilise ruumi E_3 geomeetria vahenditega. Elliptiline ruum $S_3^*(r)$ defineeritakse kui sfääri $S_3(r)$ diametraalsete punktide paaride (e -punktide) hulk, milles kahe e -punkti vaheline distant määratakse vastavate punktide vahelise vähima kaugusena sfääril $S_3(r)$ (art. 55). Võrrandiga $x_4 = 0$ määratud ekvaatoritasand jagab sfääri $S_3(r)$ kaheks poolsfääriks. Võtame neist selle, mille korral $x_4 \leq 0$. Siis (59.2) järgi $u^2 \leq r^2$, s. t. kõnesolev poolsfäär kujutub stereograafilise projektsiooniga ekvaatoritasandil E_3 asuva sfääri $S_2(r)$ sisse (vrd. joon. 66). Selle poolsfääri iga punkt x , mille korral $x_4 < 0$, aga samuti ka tema kujutis u sfääri $S_2(r)$ sees, esitab elliptilise ruumi teatavat punkti (e -punkti). Teisiti on lugu poolsfääri ääre $S_2(r)$ punktidega, kus $x_4 = 0$. Elliptilise ruumi punktide saamiseks tuleb samastada iga kaks diametraalset punkti sellel äärel $S_2(r)$.

Niiviisi tekibki *elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ mudel, milles e -punktideks on sfääri $S_2(r)$ sisemuse punktid ruumis E_3 ja selle sfääri enda diametraalsete punktide paarid.*

Elliptilise ruumi tasandeiks (e -tasandeiks) on sfääri $S_3(r)$ lõiked keskpunkti o läbivate hüpertasanditega ruumis E_4 , kusjuures diametraalsed punktid tuleb samastada. Mudelile üleminekuks tuleb sellel sfääril $S_3(r)$ piirduda ülalmärgitud poolsfääriga ja seejärel rakendada stereograafilist projektsiooni. Selgitame, mis on e -tasandite kujutised mudelis.

Punkti o läbiv hüpertasand ruumis E_4 määratakse teatavasti võrrandiga

$$\sum_{i=1}^3 A_i x_i + A_4 x_4 = 0 \quad (59.4)$$

(art. 1); tema kujutise võrrandi saame, kui teeme asendused stereograafilise projektsiooni võrrandeist (59.2).

Kui $A_4 = 0$, siis on tulemuseks võrrand

$$\sum_{i=1}^3 A_i u_i = 0, \quad (59.5)$$

mis määrab sfääri $S_2(r)$ keskpunkti o läbiva tasandi ruumis E_3 . Kujutiseks mudelis on selle tasandi ühisosa sfääri $S_2(r)$ sisemusega — teatava suurringjoone sisemus, millele on lisatud suurringjoone diametraalsete punktide paaride hulk.

Kui $A_4 \neq 0$, saab võrrandile (59.4) anda kuju

$$\sum_{i=1}^3 c_i x_i = r x_4, \quad (59.6)$$

kus $c_i = -r A_i / A_4$. Asendus seosest (59.2) annab kujutise võrrandiks

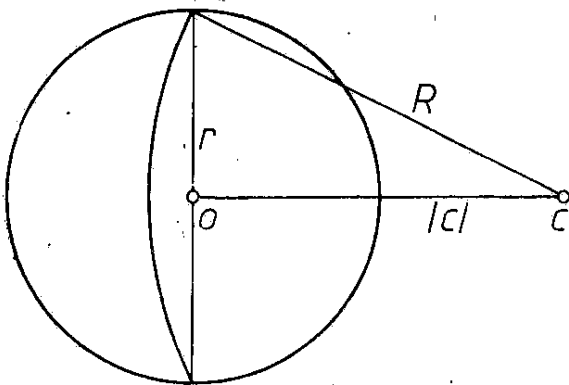
$$2 \sum_{i=1}^3 c_i u_i = u^2 - r^2.$$

Vasakul on skalaarkorrutis $cu = \sum_{i=1}^3 c_i u_i$. Viies selle paremale ja r^2 vasakule ning liites kummalegi poole c^2 , saame võrrandile kuju

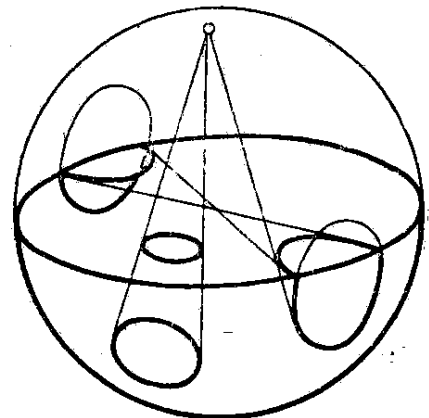
$$(u - c)^2 = c^2 + r^2,$$

milles tunneme ära eukleidilise ruumi E_3 sfääri võrrandi, kusjuures keskpunktiks on c ja raadiuseks $R = \sqrt{c^2 + r^2}$. Nagu kerge veenduda, lõikab $S_2(R)$ sfääri $S_2(r)$ mööda viimase suurringjoont (vrd. joon. 68). Seega üldiselt e -tasandi kujutiseks mudelis on märgitud omadusega sfääri $S_2(R)$ osa sfääri $S_2(r)$ sees, millele tuleb lisada seda osa ääristava suurringjoone diametraalsete punktide paaride hulk; erijuhul võib $S_2(R)$ asemel olla sfääri $S_2(r)$ diameetertasand.

Elliptilise ruumi sirge kujutise saamiseks tuleb võtta mingi kahe teda läbiva e -tasandi kujutiste lõige. See on niisiis kahe ülalmainitud (ja vajalikul viisil täiendatud) sfääriosa lõige. Seega e -sirge kujutiseks on sfääri $S_2(r)$ mingit kaht diametraalset punkti ühendav ringjoone kaar, mille otspunktid tuleb samastada.



Joonis 68



Joonis 69

Huvitav on see, et mitte üksnes sfääri $S_3(r)$ ja selle diameeterhüpertasandi ühisosa, vaid ka sfääri $S_3(r)$ ja suvalise hüpertasandi lõige annab stereograafilises projektsioonis kujutisena ruumi E_3 sfääri, nagu me järgnevalt näitame. Elliptilise ruumi ülalkirjeldatud mudeli seisukohalt tähendab see, et sfäär kõnealuses ruumis (ühest e -punktist võrdsetel distantidel olevate e -punktide hulk, mis määratakse just ülalmainitud lõikega) kujutub mudelis samuti sfäärina. Otseselt on see nii, kui kujutatav sfäär mahub kõnesolnud $S_3(r)$ poolsfäärile; kui ta ei mahu, siis tulevad appi võtta diameetraalsete punktide kujutised (vrd. joon. 69, kus seda on illustreeritud ühe võrra madalama mõõtme korral).

Tõestuseks tuleb teha suvalise hüpertasandi võrrandisse

$$A_0 + \sum_{i=1}^3 A_i x_i + A_4 x_4 = 0$$

juba eespool kasutatud asendus võrrandeist (59.2). Pärast nimetajaga $u^2 + r^2$ läbi-korrutamist ja korraldamist on tulemuseks võrrand

$$(A_0 + rA_4)u^2 + 2r^2 \sum_{i=1}^3 A_i u_i + r^2(A_0 - rA_4) = 0,$$

mis tõesti määrab sfääri ruumis E_3 ([6], lk. 284).

Elliptilise ruumi stereograafilise mudeli ehituse uurimisel piirdume esialgu öelduga. Mõningaid täiendusi lisandub järgmistes artiklites, kus ühtlasi antakse analoogiline, kuid märksa olulisem mudel Lobatševski ruumi jaoks.

60. Stereograafilise kujutuse konformsus. Järgnevalt tõestame, et eelmises artiklis defineeritud stereograafilise kujutuse korral kõik nurgad säilitavad suuruse, mis neil oli algselt kas sfäärilises (elliptilises) või Lobatševski geomeetrias. Selleks tuleb eelnevalt tuletada ruutvorm $ds^2 = dx^2$ kujutusi määravate valemite (59.2) või (59.3) järgi.

Alustame sfäärist $S_3(r) \subset E_4$. Siin (59.2) järgi

$$dx_i = 2r^2(u^2 + r^2)^{-2} \left[du_i(u^2 + r^2) - u_i 2 \sum_{j=1}^3 u_j du_j \right], \quad (60.1)$$

$$\begin{aligned} dx_4 &= r(u^2 + r^2)^{-2} \left[2 \sum_{j=1}^3 u_j du_j (u^2 + r^2) - (u^2 - r^2) 2 \sum_{j=1}^3 u_j du_j \right] = \\ &= 4r^3(u^2 + r^2)^{-2} \sum_{j=1}^3 u_j du_j, \end{aligned} \quad (60.2)$$

mistõttu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 dx_i^2 &= 4r^4(u^2 + r^2)^{-4} \sum_{i=1}^3 \left[du_i^2(u^2 + r^2)^{-2} - \right. \\ &\quad \left. - 2u_i du_i \cdot 2 \sum_{j=1}^3 u_j du_j (u^2 + r^2) + u_i^2 \cdot 4 \left(\sum_{j=1}^3 u_j du_j \right)^2 \right] = \\ &= 4r^4(u^2 + r^2)^{-4} \left[(u^2 + r^2) \sum_{i=1}^3 du_i^2 - 4(u^2 + r^2) \left(\sum_{i=1}^3 u_i du_i \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4u^2 \left(\sum_{i=1}^3 u_i du_i \right)^2 \right] \end{aligned}$$

ja seega kokkuvõttes

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 + dx_4^2 = \frac{4r^4}{(u^2 + r^2)^2} \sum_{i=1}^3 du_i^2,$$

s. t.

$$ds^2 = \frac{4r^4}{(u^2 + r^2)^2} (du_1^2 + du_2^2 + du_3^2). \quad (60.3)$$

Analoogiliselt tuleb talitada pseudosfääri $L_3(Q) \subset {}^1E_4$ korral, ainult siin on vaja dx_i puhul r^2 asemel võtta $-Q^2$. Samal ajal

$$\begin{aligned} dx_4 &= Q(Q^2 - u^2)^{-2} \left[2 \sum_{i=1}^3 u_i du_i (Q^2 - u^2) - (Q^2 + u^2) \left(-2 \sum_{i=1}^3 u_i du_i \right) \right] = \\ &= 4Q^3 (Q^2 - u^2)^{-2} \sum_{i=1}^3 u_i du_i. \end{aligned}$$

Seega

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i^2 - dx_4^2 = \frac{4Q^4}{(Q^2 - u^2)^2} \sum_{i=1}^3 du_i^2,$$

s. t.

$$ds^2 = \frac{4Q^4}{(Q^2 - u^2)^2} (du_1^2 + du_2^2 + du_3^2). \quad (60.4)$$

Mõlema tulemuse (60.3) ja (60.4) juures on tegemist olukorraga, kus ruutvorm $ds^2 = dx^2$ erineb ruutvormist $du^2 = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$ ainult teatava teguri $f(u)$ poolest:

$$dx^2 = f(u) du^2. \quad (60.5)$$

Teisiti öeldes, mingi joone γ punkti x kohavektori $x(t)$ ja tema kujutise vastava punkti u kohavektori $u(t)$ korral vektori $dx = x' dt$ skalaarruut ruumis E_4 või 1E_4 erineb vektori $du = u' dt$ skalaarruudust ruumis E_3 punktist $u \in E_3$ sõltuva skalaarteguri $f(u)$ poolest. Seejuures x' kui suvalise funktsiooni $x(t)$ tuletis mingis punktis võib olla suvaline vektor, mistõttu öeldu käib iga vektori ja selle kujutise kohta.

Olgu ruumi E_4 sfääril või ruumi 1E_4 pseudosfääril tegemist kahe joonega γ ja $\mathcal{K}$, mis lõikugu mingis punktis z . Esimese punkti x kohavektoriks olgu $x(t)$, teise punkti y kohavektoriks $y(t)$, kusjuures kummagi joone parameetrid olgu kooskõlastatud nii, et ühine punkt z vastab kummalgi parameetri väärtusele t_0 . Nurgaks nende joonte vahel lõikepunktis z nimetatakse nurka nende joonte puutujate vahel selles punktis, seega nurka vektorite $x'(t_0)$ ja $y'(t_0)$ vahel. Selle arvutamiseks on valem

$$\cos \alpha = \frac{x'y'}{|x'| |y'|}.$$

Joonte kujutistel stereograafilises projektsioonis on vastavate punktide u ja v kohavektoreiks $u(t)$ ja $v(t)$; seejuures punktis z

$$x'^2 = f(w) u'^2, \quad y'^2 = f(w) v'^2, \quad (60.6)$$

kus w on punktile z selles kujutuses vastav punkt. Tuleb leida, kui-

das on seotud $x'y'$ ja $u'v'$. Selleks saab kasutada valemit $(x' - y')^2 = x'^2 - 2x'y' + y'^2$, millest

$$x'y' = \frac{1}{2} [x'^2 + y'^2 - (x' - y')^2]. \quad (60.7)$$

Seoste (60.1) ja (60.2) lineaarsusest $du_i = u'_i dt$ suhtes järeldub, et x' koordinaadid on u' koordinaatide lineaarfunktsioonid, mistõttu $x' - y'$ kujutiseks on $u' - v'$ ja järelikult lisaks võrdustele (60.6) kehtib ka

$$(x' - y')^2 = f(w) (u' - v')^2.$$

Asendus seosesse (60.7) annab nüüd, et

$$x'y' = \frac{1}{2} f(w) [u'^2 + v'^2 - (u' - v')^2] = f(w) u'v'.$$

Järelikult

$$\cos \alpha = \frac{f(w) u'v'}{\sqrt{f(w)} |u'| \cdot \sqrt{f(w)} |v'|} = \frac{u'v'}{|u'| |v'|},$$

kus paremal on koosinus nurgast kujutisvektorite u' ja v' vahel. Nagu selgub, on see nurk võrdne nurgaga vektorite x' ja y' endi vahel.

Kokkuvõttes on tõestatud, et *kujutus omadusega* (60.5), *seega ka stereograafiline kujutus, säilitab nurgad*. Seda asjaolu arvestades kõneldakse, et sellise omadusega kujutus on *konformne*. Stereograafilise kujutuse jaoks tähendab see, et väga väikese kolmnurga korral, mille puhul elliptilist geomeetriat sfääril $S_3(r)$ ja hüperboolset geomeetriat pseudosfääril $L_3(q)$ lähendab eukleidiline geomeetria, on selle kolmnurga stereograafilisel kujutisel ruumis E_3 samad sisenurgad; mistõttu kujutis on originaaliga ligikaudu sarnane (ehk konformne; lad. k. *conformis* — samakujuline).

61. Lobatševski geomeetria Poincaré mudel. Pseudosfääri $L_3(q)$ stereograafilise projektsiooni korral kujutub Lobatševski ruum eukleidilise ruumi E_3 sfääri $S_2(q) = \{u : u^2 = q^2\}$ sisemusse (vrd. joon. 67). Tekib Lobatševski geomeetria teatav uus mudel, mida selle esmakirjeldaja järgi nimetatakse *Poincaré mudeliks*.

Selgitame, milleks kujutuvad selles mudelis hüperboolsed tasandid ja sirged. Hüperboolne tasand on pseudosfääri $L_3(q)$ lõige keskpunkti o läbiva hüpertasandiga, iga sellise lõike aga määrab võrrand (59.4). Soovitava lõike kujutise võrrandi saamiseks tuleb siia teha asendused võrrandeist (59.3). Kui $A_4 = 0$, siis on tulemuseks võrrand (59.5), mis määrab sfääri $S_2(q)$ keskpunkti läbiva tasandi ruumis E_3 . Hüperboolse tasandi kujutiseks on selle tasandi ühisosa sfääri $S_2(q)$ sisemusega, s.t. teatava suurringjoone sisemus. Kui $A_4 \neq 0$, siis saab võrrandile (59.4) anda kuju

$$\sum_{i=1}^3 c_i x_i = q x_4, \quad (61.1)$$

kus $c_i = -qA_i/A_4$. Asendus annab nüüd vastava hüperboolse tasandi kujutise võrrandiks

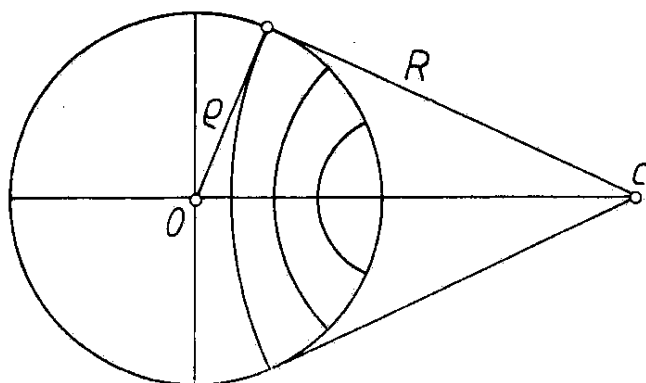
$$2 \sum_{i=1}^3 c_i u_i = q^2 + u^2.$$

Vasakul on skalaarkorrutis $cu = \sum_{i=1}^3 c_i u_i$. Viies selle paremale ja q^2 vasakule ning liites kummalegi poolele c^2 , saame võrrandile kuju

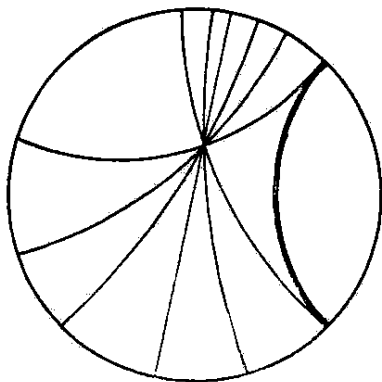
$$(u - c)^2 = c^2 - q^2. \quad (61.2)$$

Selleks et võrrandiga (61.1) määratud hüpertasandi ja pseudo-sfääri $L_3(q)$ lõige poleks tühi, peab olema $c^2 > q^2$, kusjuures lõike kui hüperboolse tasandi kujutis asub, nagu näha võrrandist (61.2), teataval sfääril ruumis E_3 . Selle sfääri keskpunkt on c ja raadius $R = \sqrt{c^2 - q^2}$, mistõttu R^2 on sfääri $S_2(q)$ keskpunkti o ja punkti c vahelise kauguse ruudu c^2 ja sfääri $S_2(q)$ raadiuse ruudu q^2 vahe (joon. 70). Seega on saadud sfäär $S_2(R)$ ortogonaalne sfääriga $S_2(q)$. Hüperboolne tasand kujutub antud sfääri $S_2(q)$ ortogonaalselt lõikava sfääri $S_2(R)$ osana sfääri $S_2(q)$ sees; erijuhul võib $S_2(R)$ asemel olla sfääri $S_2(q)$ diameetertasand. Kui lõigata seda omakorda mingi teise hüperboolse tasandi kujutisega, näiteks suur-ringjoone sisemusega, saame hüperboolse sirge kujutise, milleks on sfääriga $S_2(q)$ risti lõikuva ringjoone kaar sfääri $S_2(q)$ sisemuses. Kui on tegemist kahe suur-ringjoone sisemuse lõikega, saame hüperboolse sirge kujutiseks sfääri $S_2(q)$ diameetri (ilma otspunkti-deta), mida võib vaadelda ülalkirjeldatud ringjoone kaare piirjuhuna, kui selle ringjoone keskpunkt c kaugeneb lõpmatult (joon. 70).

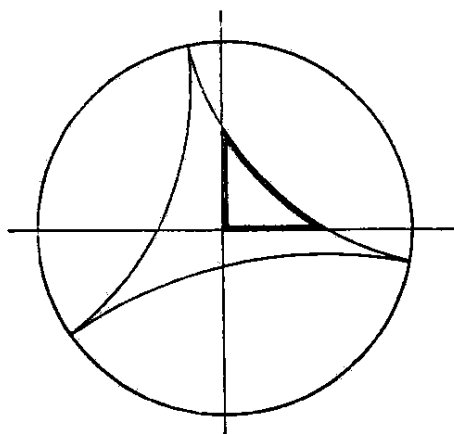
Siit on veel kord selgesti näha, et Lobatševski geomeetrias ei kehti eukleidiline paralleelide aksioom. Joonisel 71 on hüperboolse tasandi $L_2(q)$ mudelil kujutatud hüperboolne sirge ja valik seda mittelõikavaid hüperboolseid sirgeid läbi antud punkti; äärmised neist kujutavad Lobatševski paralleele antud sirgele läbi antud punkti, ülejäänud on selle sirge suhtes hajuvad.



Joonis 70



Joonis 71



Joonis 72

Arvestame veel seda, et stereograafilise projektsiooni konformsuse tõttu nurgad hüperboolsete sirgete vahel kujutuvad Poincaré mudelis loomulikus suurus. Jooniselt 72 on seega vahetult näha, et kolmnurga sisenurkade summa on väiksem kui kaks täisnurka. Ühtlasi on seal kujutatud kidunud kolmnurk, mis koosneb kolmest hüperboolsest sirgest, millest iga kaks on Lobatševski paralleelid. Selgub kohe, et leidub kolmnurki kuitahes väikeste sisenurkadega — on vaja vaid võtta tipud küllalt kaugel, nii et nende kujutised Poincaré mudelis oleksid küllalt lähedal sfäärile $S_2(q)$.

Huvitavalt saab Poincaré mudeli abil käsitleda hüperboolseid sirgekimpe või sidumeid. Neid on kolme liiki: lõikuvate, paralleelsete ja hajuvate hüperboolsete sirgete kimbud või sidumid. Esimesel juhul sirgetel on ühispunkt, mis teisel juhul on kaugenenud lõpmatusse (s.t. Poincaré mudelis on läinud sfäärile $S_2(q)$). Kolmandal juhul, kui piirduda sirgesidumiga, on hüperboolsed sirged selles risti ühe hüperboolse tasandiga.

Mudeli seisukohalt võib igal neist juhtudest näidata sfäärile $S_2(q)$ lisaks veel ühe sfääri — esimesel kahel juhul ühispunkti c kui nullraadiusega sfääri, millel on võrrand $(u - c)^2 = 0$, kord sfääri $S_2(q)$ sees, kord sellel sfääril, kolmandal juhul mainitud hüperboolset tasandit kujutava sfääri võrrandiga (61.2).

Kaks sfääri määravad eukleidilises geomeetrias teatava sfäärikimbu järgmiselt. Üheks sfääriks olgu sfäär $S_2(q)$ võrrandiga $u^2 - q^2 = 0$. Lisame talle mingi sfääri võrrandiga $(u - c)^2 = R^2$ ehk

$$u^2 - 2cu + c^2 - R^2 = 0.$$

Nende sfäärade võrranditest tekib süsteem, millest saab võrrandite poolte lahutamisel järeldada ühe tasandi võrrandi:

$$2cu + (R^2 - q^2 - c^2) = 0. \quad (61.3)$$

Seda tasandit nimetatakse antud kahe sfääri *radikaaltasandiks* ([6], lk. 293; kui sfäärid lõikuvad, siis läbib see nende lõikeringjoone). Öeldakse, et kolmas sfäär kuulub kahe antud sfääriga samasse kimpu, kui temal ja sfääril $S_2(q)$ on seesama radikaaltasand mis kahel esialgsel.

Sfäärikimpu on lihtne kirjeldada, kui lisandunud sfäär on sfääri $S_2(q)$ suhtes teises või kolmandas eespool märgitud asendis. Alustame kolmandast: lisandunud sfäär lõigaku ortogonaalselt sfääri $S_2(q)$. Sel korral on radikaaltasandiks lõikeringjoont läbiv tasand ja kimp koosneb seda ringjoont läbivatest sfääridest. Teisel juhul $R=0$, $c^2=q^2$ ning võrrand (61.3), omades praegu kuju $cu - q^2 = 0$, määrab sfääri $S_2(q)$ punkti c läbiva ja selle punkti kohavektoriga c ristuva tasandi, milleks on sfääri $S_2(q)$ puutujatasand punktis c . Kimp koosneb sfääri $S_2(q)$ punktis c puutuvatest sfääridest. Esi-
mese juhu analüüs jääb pisut hilisemaks.

Mis osa on nende kimpude sfääridel Poincaré mudelis Lobatševski geomeetria seisukohalt? Vastamiseks näitame, et iga sfäär, mille keskpunkt c' on kõnesolnud kimbu radikaaltasandil ja mis on ortogonaalne sfääriga $S_2(q)$, on ortogonaalne kimbu iga sfääriga. Tõepoolest, kui võrrandiga

$$(u - c')^2 = r^2$$

antud sfääri puhul keskpunkt c' on radikaaltasandil võrrandiga (61.3), s. t. kehtib

$$2cc' + (R^2 - q^2 - c^2) = 0,$$

ning kui leiab aset selle sfääri ortogonaalsus sfääriga $S_2(q)$:

$$r^2 + q^2 = c'^2,$$

siis kehtib ka siit võrduste poolte liitmisel saadav seos

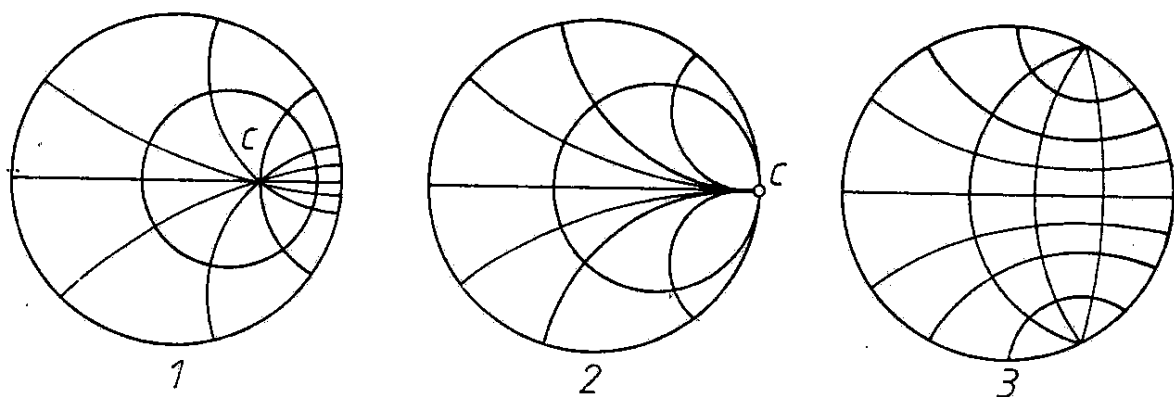
$$2cc' + R^2 + r^2 - c^2 = c'^2$$

ehk

$$R^2 + r^2 = (c' - c)^2,$$

mis tähendabki vaadeldava sfääri ortogonaalsust kimbu sfääriga. Seejuures sfääriga $S_2(q)$ ortogonaalne sfäär on hüperboolse tasandi kujutis. Iga kahe sellise sfääri lõikejoon on hüperboolse sirge kujutis.

Analüüsime nüüd edasi eespool näidatud kolme juhtu. Alustame kolmandast. Siin on kimbu sfääride seas üks, mis on teatava hüperboolse tasandi kujutis. Viimati mainitud hüperboolsete sirgete kujutised lõikavad seda eukleidilise geomeetria seisukohalt risti,



Joonis 73

kuid et Poincaré mudelis nurgad kujutuvad loomulikes suurustes, siis ka vastavad hüperboolsed sirged lõikavad seda hüperboolset tasandit risti ja moodustavad seega just selle hajuvate hüperboolsete sirgete sidumi, millest lähtusime. Sfäärkimbu iga teine sfäär lõikab nende kujutisi risti ja on seega teatava ekvidistantpinna ühe katte kujutis (vrd. joon. 73,3).

Esimesel juhul sfäärkimbu sfääride seas on punkt c kui null-raadiusega sfäär, kusjuures ortogonaalsus viimasega tähendab lihtsalt punkti c läbimist. Niisiis, üle-eelmises lõigus kõne all olnud hüperboolsed sirged läbivad kõik ühte punkti, lõigates risti kõiki neid pindu, mida kujutavad vaadeldava sfäärkimbu sfäärid. Viimased pinnad on seega sfäärid Lobatševski geomeetrias (vrd. joon 73,1).

Teine juht erineb eelmisest vaid selle poolest, et c on sfääril $S_2(q)$, mistõttu kõnesolevad hüperboolsed sirged on Lobatševski paralleelid. Sfäärkimbu sfäärid kujutavad endast sel korral piir-sfääre, s.t. pindu, mis lõikavad paralleelide sidumi sirgeid risti (vrd. 73,2).

Nii näeme, et *eukleidilise ruumi E_3 sfäär (täpsemalt selle mittetühi osa $S_2(q)$ sees) kujutab Poincaré mudelis Lobatševski ruumi sfääri, piirsfääri või ekvidistantpinda, olenevalt sellest, kas tema ühisosa sfääriga $S_2(q)$ on tühi, ühepunktiline hulk (s.t. toimub puutumine) või ringjoon*. Kui ta viimasel juhul lõikab sfääri $S_2(q)$ ortogonaalselt, on tegemist hüperboolse tasandi (kui ekvidistantpinna erijuhu) kujutisega.

Analoogiliselt, *Lobatševski tasandi Poincaré mudeli puhul kujutab ringjoon (täpsemalt selle mittetühi osa $S_1(q)$ sees) Lobatševski geomeetria ringjoont, piirringjoont või ekvidistanti* (joon. 73, vastavalt 1, 2 või 3).

62. Geomeetria ruumi E_3 pseudosfääril. Meenutame, et terminit «mitteeukleidiline geomeetria» kasutasime juba art-s 52, kus märkisime sellega konstantse kõverusega pinna sisegeomeetriat, juhul kui kõverus pole null. Seejuures $K = \text{const} < 0$ puhul sai see geomeetria nimeks Lobatševski geomeetria. Hiljem, kui andsime Lobatševski ruumi $L_3(q)$ täpsema käsitlese Minkowski ruumi 1E_4 imaginaarse raadiusega hüpersfääri abil, selgus art-s 56, et selle ruumi tasandil $L_2(q)$ kehtib tõesti seesama Lobatševski geomeetria mis enne. Seni on aga lahtine küsimus, kui suures ulatuses saab Lobatševski tasandi geomeetriat realiseerida ühel või teisel konstantse negatiivse kõverusega pinnal ruumis E_3 . Miks oli meil üldse vaja minna välja ruumist E_3 ?

Üks kõige lihtsamini kirjeldatav konstantse negatiivse kõverusega pind ruumis E_3 on pseudosfäär — pind, mis tekib traktrissi pöörlemisel oma asümptoodi ümber (art. 52, joon. 52). Pöördpinna meridiaanid kui geodeetilised jooned etendavad selle pinna sisegeomeetrias sirgjoonte osa. Pseudosfääri korral on nendeks ühes suunas üksteisele asümptootiliselt lähenevad pöörleva traktrissi asendid.

Olles nüüd eelmises ja käesolevas paragrahvis lähemalt tutvunud Lobatševski geomeetriaga, võime öelda, et need meridiaanid on nähtavasti omavahel paralleelsed hüperboolsed sirged. Neid risti lõikavad pseudosfääri paralleelide kaared peaksid niisiis kujutama piirringjoonte kaari Lobatševski geomeetrias.

Alljärgnevalt näitame, et see on tõesti nii, ning selgitame ühtlasi, missuguse osa Lobatševski tasandist ja mil moel saab realiseerida pseudosfääri ruumis E_3 . Pseudosfääril tuleb seejuures piirida ühega kahest sümmeetrilisest poolest, näiteks joonisel 52 ülemisega, muidu poleks tegemist lihtpinnaga.

Eespool uurisime Lobatševski ruumi $L_3(q)$ Poincaré mudelit sfääri $S_2(q)$ sees. Selgus, et paralleelide sidum kujutub selles mudelis sfääril $S_2(q)$ olevast punktist c lähtuvate ja selle sfääriga ristuvate ringjoonte kaarte hulgana. Kui võtta sfääri $S_2(q)$ diameetertasand, mis läbib punkti c , siis see lõikab mudelist välja Lobatševski tasandi mudeli ringjoone $S_1(q)$ sees, millele sidumist jääb teatav paralleelide kimp. Kimpu kuuluvaid hüperboolseid sirgeid risti lõikavateks joonteks on piirringjooned, mis mudelis kujutuvad ringjoont $S_1(q)$ punktis c puutuvate ringjoontena (joon. 73,2).

Võtame c ossa punkti $(q, 0, 0)$ ja diameetertasandiks u_1u_2 -tasandi. Eesmärgiga lähendada olukorda pseudosfääri omale valime uued parameetrid v_1 ja v_2 nii, et parameetrijoonteks $v_2 = \text{const}$ ja $v_1 = \text{const}$ oleksid nende paralleelide ja piirringjoonte kujutised. Selleks võtame v_2 ja v_1 ossa kõnesolevate kujutiste kui ringjoonte raadiused (joon. 74). Ringjoonte võrrandid on siis vastavalt

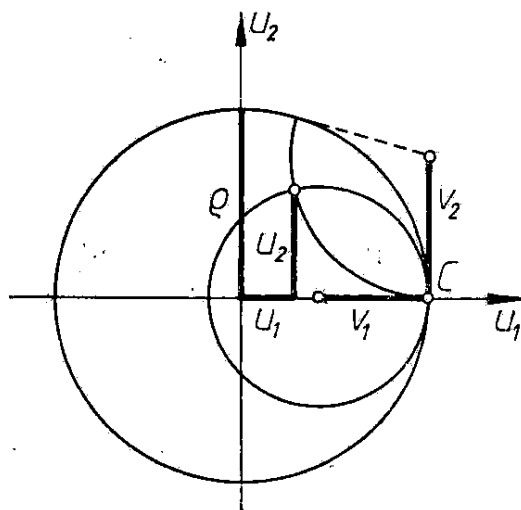
$$(u_1 - q)^2 + (u_2 - v_2)^2 = v_2^2, \quad (62.1)$$

$$[u_1 - (q - v_1)]^2 + u_2^2 = v_1^2,$$

ehk pärast ümberkorraldusi

$$(u_1 - q)^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 = 0,$$

$$(u_1 - q)^2 + 2(u_1 - q)v_1 + u_2^2 = 0.$$



Joonis 74

Sellest süsteemist tuleb avaldada $u_1 - q$ ja u_2 . Võrrandite poolte lahutamisel jõuame seoseni

$$2(u_1 - q)v_1 + 2u_2v_2 = 0,$$

millele saab anda võrde kuju

$$\frac{u_1 - q}{-v_2} = \frac{u_2}{v_1}.$$

Seega eksisteerib λ nii, et

$$u_1 - q = -\lambda v_2, \quad u_2 = \lambda v_1. \quad (62.2)$$

Asendus võrrandisse (62.1) annab nüüd

$$\lambda^2(v_1^2 + v_2^2) - 2\lambda v_1 v_2 = 0.$$

Lahendile $\lambda = 0$ vastab puutepunkt c ; teiseks lahendiks saame

$$\lambda = \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (62.3)$$

Edasi võtame ds^2 avaldise (60.4) Poincaré mudelis ja arvestame, et praegu $u_3 = 0$; saame

$$ds^2 = \frac{4q^4}{(q^2 - u_1^2 - u_2^2)^2} (du_1^2 + du_2^2). \quad (62.4)$$

Siin tuleb üle minna parameetritele v_1 ja v_2 . Kõigepealt leiame (62.2) ja (62.3) järgi, et

$$du_1 = d\left(-\frac{2v_1v_2^2}{v_1^2 + v_2^2}\right) = 2 \frac{v_2^2(v_1^2 - v_2^2)dv_1 - 2v_1^3v_2dv_2}{(v_1^2 + v_2^2)^2},$$

$$du_2 = d\left(\frac{2v_1^2v_2}{v_1^2 + v_2^2}\right) = 2 \frac{2v_1v_2^3dv_1 + v_1^2(v_1^2 - v_2^2)dv_2}{(v_1^2 + v_2^2)^2}$$

ja pärast mõningaid arvutusi saame

$$du_1^2 + du_2^2 = 4 \frac{v_2^4 dv_1^2 + v_1^4 dv_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)^2}.$$

Seejuures

$$\begin{aligned} q - u_1^2 - u_2^2 &= q^2 - (q - \lambda v_2)^2 - \lambda^2 v_1^2 = 2q\lambda v_2 - \lambda^2(v_1^2 + v_2^2) = \\ &= 4v_1v_2^2 \frac{q - v_1}{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Järelkult (62.4) järgi

$$ds^2 = \frac{q^4}{v_1^2 v_2^4 (q - v_1)^2} (v_2^4 dv_1^2 + v_1^4 dv_2^2)$$

ehk

$$ds^2 = q^4 \left[\frac{dv_1^2}{v_1^2 (q - v_1)^2} + \frac{v_1^2 dv_2^2}{v_2^4 (q - v_1)^2} \right].$$

Siin on võimalik leida uued parameetrid w_1 ja w_2 selliselt, et

$$dw_1 = q^2 \frac{dv_1}{v_1 (q - v_1)}, \quad dw_2 = \frac{dv_2}{v_2^2},$$

nimelt

$$w_1 = q \ln \frac{v_1}{q - v_1}, \quad w_2 = -\frac{1}{v_2}. \quad (62.5)$$

Pärast nende parameetritele üleminekut saame

$$ds^2 = dw_1^2 + e^{\frac{2w_1}{q}} dw_2^2.$$

Tulemus erineb pseudosfääri esimesest ruutvormist (52.10) ainult tähistuse poolest; seejuures selgub, et

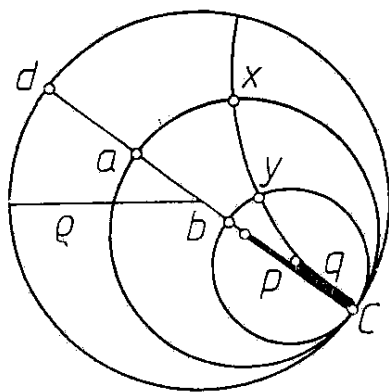
$$\sqrt{1-K} = \frac{1}{q}.$$

Siin w_1 -jooned on ühtlasi v_1 -jooned; seega Lobatševski geomeetrias paralleelide kimbu sirged; samaaegselt on nad pseudosfääri meridiaanid. Muutuv parameeter w_1 on neil meridiaani kaare pikkus. Seejuures alguspunktiks $w_1=0$ on (62.5) järgi selline punkt, kus $\frac{v_1}{q-v_1}=1$, s.t. kus $v_1=\frac{q}{2}$. Need alguspunktid moodustavad

Poincaré mudelis niisuguse ringjoone, mis puutub ringjoont $S_1(q)$ punktis c ja läbib tema keskpunkti o . Lobatševski tasandil vastab sellele ringjoonele teatav piirringjoon, pseudosfääril aga maksimaalse raadiusega paralleel, mis on ühtlasi pseudosfääri ääreks (tagasipöörde servaks). Kui $v_1 \rightarrow 0$, siis $w_1 \rightarrow -\infty$, sellele aga vastab punkti lõpmatu kaugenemine traktrissil. Järelikult *pseudosfäär kujutab endast Lobatševski tasandi teatava piirringjoone sisemust, sedagi juhul, kui see sisemus mähkida lõpmata palju kordi pseudosfäärile* (nii nagu eukleidilise tasandi võib lõpmata palju kordi mähkida pöördsilindrile).

Sellega seoses kerkib veel kord juba art-s 52 mainitud probleem: kas eukleidilises ruumis E_3 leidub mõni teine konstantne negatiivse kõverusega pind, millel oleks realiseeritav kogu Lobatševski tasand. Nagu märgitud, tõi probleemisse selguse D. Hilbert 1901. a., tõestades, et sellist pinda ei leidu: kõik siledad konstantse negatiivse kõverusega pinnad on ääregal. Pärast seda sai selgeks, et kogu Lobatševski tasandi käsitlemist mingi pinna abil on võimalik teha üksnes ruumist E_3 väljumise hinnaga — nii ongi tehtud §-s 13.

Et w_1 on kaare pikkus geodeetilisel joonel mingist alguspunktist arvates ehk lihtsalt punkti kaugus hüperboolsel sirgel sellest alguspunktist, siis saame anda lihtsa konstruktsiooni kahe punkti vahelise kauguse määramiseks Lobatševski tasandil Poincaré mudeli abil. Selles mudelis antud kahe punkti x ja y korral



Joonis 75

tuleb konstrueerida neid läbiv ja ringjoonele $S_1(q)$ risti toetuv ringjoone kaar (hüperboolne sirge), läbi selle ühe otspunkti c tõmmata ringjoont $S_1(q)$ puutuvad ja neid punkte x ja y läbivad ringjooned ning määrata nende raadiused p ja q kui v_1 vastavad väärtused (joon. 75). Seejuures tuleb valemi (62.5) järgi arvutada w_1 vastavad väärtused. Otsitav kaugus $d_L(x, y)$ on nende vahe absoluutväärtus: seega

$$d_L(x, y) = q \left| \ln \left(\frac{p}{q-p} : \frac{q}{q-q} \right) \right|. \quad (62.6)$$

Niisuguse valemiga antakse kahe punkti vaheline kaugus Lobatševski geomeetrias Poincaré mudeli abil. Meenutame, et nurgad on selles mudelis esitatud nende loomulikus suuruses (art. 60).

Harjutusülesanded

104. Kartograafias kasutatakse stereograafilise projektsiooni kõrval eriti laialdaselt sfääri sellist konformset kujutust tasandile, mis saadakse, kui võrrandis (31.1) võtta $\theta_1 = 2 \arctan e^{u_1} - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = u_2$. Näidata, et sel puhul on tõesti tege-

mist omadusega (60.5), s.t. konformsusega. Kõnesolevat kujutust nimetatakse *Mercatori projektsiooniks*, teda kasutatakse laialt navigatsioonis, sest meridiaanid ja paralleelid kujutuvad siin ristuvate sirglõikudena ning seega sama kursiga sõitva laeva või lennuki trajektoor (loksodroom sfääril), lõigates meridiaane konstantse nurga all, kujutub konformsuse tõttu samuti sirglõiguna.

105. Olgu Lobatševski tasandi $L_2(q)$ Poincaré mudelis lisaks ringjoone $S_1(q)$ keskpunktile o võetud veel mingi punkt x , mis on sellest eukleiidilises geomeetrias kaugusel r , $r < q$. Arvutada valemi (62.6) abil $d_L(o, x)$ ja kontrollida tulemust valemi (60.4) järgi.

106. Kolme täisnurgaga nelinurka nimetatakse Lobatševski geomeetrias *Lamberti¹ nelinurgaks*, seejuures keskmise täisnurga lähiskülgede võrdsuse korral võrdhaarseks Lamberti nelinurgaks. Paigutades need lähisküljed Poincaré mudelis kahele ristuvale diameetrile ja kasutades selle mudeli konformsust, näidata, et neljas sisenurk α avaldub lähiskülgede võrdse pikkuse a kaudu valemiga $\cos \alpha = \text{sh}^2 \frac{a}{q}$, seega $\text{sh} \frac{a}{q} \leq 1$ ehk $a \leq q \text{ arsh } 1 \approx 0,88q$.

¹ Johann Heinrich Lambert (1728–1777), saksa matemaatik, kes kõnesolevat nelinurka uurides pidas esmakordselt võimalikuks sellise geomeetria olemasolu, kus neljas nurk on teravnurk.

§ 15. MÕNDA DIFERENTSIAALGEOMEETRIAST MITTEEUKLEIDILISTES RUUMIDES

Käesoleva peatüki eelmistes paragrahvides oli pearõhk mitte-eukleidiliste ruumide nendel omadustel, mille poolest nad erinevad eukleidilisest ruumist E_3 . Lokaalsete omaduste poolest on aga kõik need ruumid üsna sarnased. Selgelt tuleb see ilmsiks joonte ja pindade diferentsiaalgeomeetria uurimisel. Järgnevas näeme, et modifikatsioonid, mis tulevad Bartelsi—Frenet' valemeisse jooneteoorias või Darboux'—Cartani valemeisse pinnateoorias üleminekuga eukleidilisest ruumist mitte-eukleidilisse, on sedavõrd väikesed, et need valemid saab anda ühtselt kõikide kõnesolevate ruumide jaoks.

Ühtlasi on järgnev käsitlus heaks kordamiseks, sest selles antakse joone ja pinna kohta kõik põhiline ning niisuguses lühiesituses, milles tulevad kujukalt esile liikuva teljestiku meetodi eelised. Nii näiteks selgub sfääride, ekvidistantpindade ja piirsfääride eriline koht kõigi teiste pindade seas Lobatševski ruumis $L_3(q)$. Huvitav on ka nende pindade sisegeomeetria: nad realiseerivad ruumi $L_3(q)$ rüpes nii mitte-eukleidilised tasandid (sfääride abil ja ekvidistantpindade näol) kui ka eukleidilise tasandi (piirsfäärina), seejuures tervikulatuses.

63. Joon mitte-eukleidilises ruumis. Mitte-eukleidilise ruumi all mõistame käesolevas artiklis kolmemõõtmelist kas elliptilist või Lobatševski (ehk hüperboolset) ruumi. Esimese ruumi lihtsa mudeli saame eukleidilise ruumi E_4 sfäärist $S_3(r)$, kui samastame selle diametraalsed punktid. Seejuures poolsfääri ulatuses geomeetria sfääril $S_3(r)$ ja elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ ühtivad täielikult, erinevused ilmnevad alles sfääri $S_3(r)$ nendes piirkondades, mis ühe poolsfääri piiridesse ei mahu.

Sfääril $S_3(r)$ asuva joone korral joone punkti x kohavektor $\overrightarrow{ox} = \mathbf{x}(s)$ rahuldab tingimust

$$|\mathbf{x}| = r,$$

kus o on sfääri keskpunkt ja r raadius. Järelikult $\mathbf{x}^2 = r^2 = \text{const}$ ja siit $2\mathbf{x}\mathbf{x}' = 0$, s. t. puutuja sihiühikvektor $\mathbf{x}' = \mathbf{t}$ on risti kohavektoriga.

Siin on huvitav võimalus uurida sfääril $S_3(r)$ asuvat joont art-s 28 saadud tulemuste abil. Vaatleme ruumis E_4 joont konstantse esimese kõverusega

$$k_1 = \frac{1}{r} = \text{const} \quad (63.1)$$

ning nimetame selle *sfääriliseks kujutiseks* joont sfääril $S_3(r)$, mille punkti x kohavektor $\overrightarrow{ox}$ on kollineaarne ruumis E_n võetud joone puutujaga, s. t.¹

¹ Järgnev valem määrab sfääril $S_3(r)$ õieti kaks joont, millele vastavad punktid on diametraalsed; teisiti öeldes tekib joon elliptilises ruumis $S_3^*(r)$. Edaspidi jääme siiski sfäärilise geomeetria terminoloogia raamidesse.

$$x = \pm r t_1. \quad (63.2)$$

Valemist (28.7), kus tuleb arvestada võrdust (63.1), saame

$$x' = \pm r t'_1 = \pm t_2$$

ning et siit $|x'| = 1$, siis ruumi E_4 kõnesoleva joone loomulik parameeter on ka tema sfäärilise kujutise loomulik parameeter, kusjuures $\pm t_2$ on tema puutuja sihivektor t . Arvutades nüüd (28.8) põhjal

$$t' = \pm t'_2 = \mp \frac{1}{r} t_1 \pm k_2 t_3 = -\frac{1}{r^2} x + k n,$$

kus on kasutatud tähistusi $k = k_2$ ja $n = \pm t_3$, oleme saanud esimese Bartelsi—Frenet' valemi sfäärilise kujutise jaoks. Edasi,

$$n' = \pm t'_3 = \mp k_2 t_2 \pm k_3 t_4 = -k t + \kappa b,$$

kus $\kappa = k_3$ ja $b = \pm t_4$, on Bartelsi—Frenet' teine valem. Lõpuks (vt. (28.10), kus praegu $n = 4$)

$$b' = \pm t'_4 = \mp k_3 t_3 = -\kappa n$$

kujutab endast Bartelsi—Frenet' kolmandat valemit.

Seejuures iga joon sfääril $S_3(r)$ on ruumi E_4 teatava joone sfääriline kujutis. Selle joone leidmiseks on kasutada seos (63.2), kus art-i 28 käsitluse kohaselt t_1 on otsitava joone punkti kohavektori tuletis loomuliku parameetri järgi. Kohavektori saamiseks tuleb lihtsalt teha integreerimine. Järelikult valemid

$$x' = t, \quad (63.3)$$

$$t' = -\frac{1}{r^2} x + k n, \quad (63.4)$$

$$n' = -k t + \kappa b, \quad (63.5)$$

$$b' = -\kappa n \quad (63.6)$$

kehtivad sfääri $S_3(r)$ iga joone korral. Kui siin $r \rightarrow \infty$, siis on tulemuseks eukleidilise ruumi E_3 joone Bartelsi—Frenet' valemid.

Analoogiliselt saab käsitleda ka joont Lobatševski ruumis $L_3(q)$ — pseudosfääril ehk imaginaarse raadiusega sfääri ühel kattel Minkowski ruumis 1E_4 . Pseudosfääril $L_3(q)$ asuva joone punkti x kohavektori $\overrightarrow{ox} = x(q)$ korral

$$x^2 = -q^2.$$

Kui nüüd ruumis 1E_4 vaadelda joont esimese kõverusega

$$k_1 = \frac{1}{q} = \text{const} \quad (63.7)$$

ja puutuja sihivektoriga

$$t_1 = \frac{1}{q} x,$$

siis joon pseudosfääril on selle pseudosfääriline kujutis. Seejuures (30.3) ja (63.7) põhjal

$$x' = q t_1' = t_2,$$

seega ruumis 1E_4 võetud joone puhul on art-s 30 kasutatud parameeter σ pseudosfäärilise kujutise loomulik parameeter, sest $|x'| = |t_2| = 1$. Tähistades $t_2 = t$, saame (30.4) alusel

$$t' = t_2' = \frac{1}{q} t_1 + k_2 t_3 = \frac{1}{q^2} x + kn,$$

kus $k = k_2$, $n = t_3$. Edasi (30.5) põhjal

$$n' = t_3' = -k_2 t_2 + k_3 t_4 = -kt + \kappa b,$$

kus $\kappa = k_3$, $b = t_4$. Lõpuks (30.6) järgi

$$b' = t_4' = -k_3 t_3 = -\kappa n.$$

Tulemuseks on Bartelsi—Frenet' valemid Lobatševski ruumis $L_3(q)$ antud joone jaoks:

$$x' = t, \quad (63.8)$$

$$t' = \frac{1}{q^2} x + kn, \quad (63.9)$$

$$n' = -kt + \kappa b, \quad (63.10)$$

$$b' = -\kappa n. \quad (63.11)$$

Kui siin $q \rightarrow \infty$, siis piirjuhul saame jälle, samuti nagu sfääril $S_3(r)$ antud joone puhul, eukleidilise ruumi E_3 joone Bartelsi—Frenet' valemid.

Kõik need kolm juhtu saab haarata ühte käsitlusse, kui võtta kasutusele elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ puhul konstant $K = \frac{1}{r^2}$, Lobat-

ševski ruumi $L_3(q)$ puhul konstant $K = -\frac{1}{q^2}$ ning lugedes, et eukleidilise ruumi korral $K = 0$. Seda konstantset suurust K nimetatakse vaadeldava ruumi kõveruseks. Siis saab Bartelsi—Frenet' valemid kõigi kolme ruumi puhul võtta kokku järgmiselt:

$$x' = t,$$

$$t' = -Kx + kn,$$

$$n' = -kt + \kappa b,$$

$$b' = -\kappa n.$$

Kordajaid k ja κ nimetatakse siin kõigil kolmel juhul vastavalt joone kõveruseks ja väändeks. Samuti kantakse mitteeukleidilise ruumi juhule üle ka reeperi $\{x; t, n, b\}$ telgede ja tasandite nimetused: pea- ja binormaal, kooldumistasand jne.

64. Pind mitteukleidilises ruumis. *Pinnaks* (täpsemalt *lihtpinnaks*; vrd. art. 31 ja 32) neljamõõtmelises eukleidilises ruumis E_4 või Minkowski ruumis 1E_4 nimetatakse selle ruumi alamhulka

$$\mathcal{F} = \{x : x = x(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\},$$

kus $x = ox$ on punkti x kohavektor mingi alguspunkti o korral ja $x(u_1, u_2)$ on $u_1 u_2$ -tasandi mingis piirkonnas D määratud selline pidevalt diferentseeruv vektorfunktsioon ($k \geq 1$), et D igas punktis osatuletised x_1 ja x_2 on lineaarselt sõltumatud vektorid (vrd. art. 31).

Samuti nagu art-s 32 defineeritakse ka siin joon pinnal võrranditega $u_\alpha = u_\alpha(t)$; $\alpha = 1, 2$, seejuures samal viisil nagu (32.4) tuleatakse valem

$$x'(t_0) = x_1(p_1, p_2) u'_1(t_0) + x_2(p_1, p_2) u'_2(t_0).$$

Siit nähtub, et pinnal fikseeritud punkti $p \in \mathcal{F}$ läbivate joonte puutujad on ühel ja samal 2-tasandil, mis läbib punkti p vektorite $x_1(p_1, p_2)$ ja $x_2(p_1, p_2)$ rihis. Seda 2-tasandit nimetatakse pinna *puutujatasandiks* punktis p , teda ortogonaalselt täiendavat 2-tasandit läbi punkti p aga pinna *normaaltasandiks* punktis p .

Seame eesmärgiks uurida pinda elliptilises ruumis $S_3^*(r)$. Vaatleme niisugust pinda $\mathcal{F}$ eukleidilise ruumi E_4 sfääril $S_3(r)$, mis on sümmeetriline sfääri keskpunkti o suhtes selles mõttes, et koos iga punktiga $x \in \mathcal{F}$ asetseb pinnal ka punkt x^* omadusega $ox^* = -x$. Ühendades o suhtes sümmeetrilised punktid paaridesse, saame sfäärist $S_3(r)$ elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ (kui kõigi selliste paaride hulga; vt. art. 55), pinnast $\mathcal{F}$ aga selle teatava alamhulga, mida nimetatakse pinnaks $\mathcal{F}^*$ elliptilises ruumis $S_3^*(r)$.

Kõnesoleva pinna $\mathcal{F} \subset S_3(r)$ puutujatasand punktis x sisaldub sfääri $S_3(r)$ puutujahüpertasandis, mistõttu pinna normaaltasand läbib sfääri sellesse punkti x suunduva raadiuse.

Seome pinna punktiga x ristuvad ühikvektorid e_1 ja e_2 puutujatasandil ning e_3 ja e_4 normaaltasandil, valides

$$e_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 B_{\alpha\beta} x_\beta; \quad \alpha = 1, 2; \quad (64.1)$$

$$e_4 = -\frac{1}{r} x. \quad (64.2)$$

Samuti nagu pinna $\mathcal{F} \subset E_3$ korral saime valemid (42.2) ja (42.3) neis kehtivate seostega (42.5) ja (42.6), tekivad siingi valemid

$$dx = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_\alpha e_\alpha, \quad (64.3)$$

$$de_\mu = \sum_{\nu=1}^4 \omega_{\mu\nu} e_\nu; \quad \mu = 1, 2, 3, 4, \quad (64.4)$$

kusjuures samasusest $e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu}$ järelduvad diferentseerimisel seosed

$$\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} = 0 \quad (64.5)$$

(vrd. art. 42).

Erilist tähelepanu pälvivad kordajate $\omega_{\alpha 3}$ ja $\omega_{\alpha 4}$ avaldised. Seose (64.2) poolte diferentseerimisel saame

$$\omega_{41}e_1 + \omega_{42}e_2 + \omega_{43}e_3 = -\frac{1}{r}(\omega_1e_1 + \omega_2e_2),$$

sest (64.5) põhjal $\omega_{44} = 0$, ja siit

$$\omega_{14} = -\omega_{41} = \frac{1}{r}\omega_1, \quad \omega_{24} = -\omega_{42} = \frac{1}{r}\omega_2, \quad (64.6)$$

$$\omega_{34} = -\omega_{43} = 0. \quad (64.7)$$

Seejuures (64.1) asendamisel valemisse (64.3) ja tulemuse võrdlemisel täisdiferentsiaali avaldisega

$$dx = \sum_{\beta=1}^2 x_\beta du_\beta$$

tekivad seosed

$$du_\beta = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_\alpha B_{\alpha\beta}, \quad (64.8)$$

millest nähtub, et ω_1 ja ω_2 on lineaarsed diferentsiaalvormid (vrd. art. 42).

Kordajad $\omega_{\alpha 3}$ leiame seostest (64.4) ja (64.7) järelduva valemi

$$de_3 = \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{3\alpha} e_\alpha$$

abil, korrutades selle pooli skalaarselt vektoriga e_α :

$$e_\alpha de_3 = \omega_{3\alpha}$$

ja arvestades, et (64.5) põhjal $\omega_{\alpha 3} = -\omega_{3\alpha}$. Et samal ajal

$$de_3 = \sum_{\beta=1}^2 e_{3\beta} du_\beta,$$

kus $e_{3\beta} = \frac{\partial e_3}{\partial u_\beta}$, siis

$$\omega_{\alpha 3} = - \left(\sum_{\gamma=1}^2 B_{\alpha\gamma} x_\gamma \right) \left(\sum_{\beta=1}^2 e_{3\beta} du_\beta \right) = \sum_{\beta,\gamma=1}^2 B_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} du_\beta;$$

siin oleme tähistanud

$$b_{\gamma\beta} = -x_\gamma e_{3\beta}.$$

Asendades veel du_β seosest (64.8), saame

$$\omega_{\alpha 3} = \sum_{\beta,\gamma,\delta=1}^2 B_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} B_{\delta\beta} \omega_\delta,$$

kus on muidugi otstarbekas tähistada

$$b_{\alpha\delta}^* = \sum_{\beta,\gamma=1}^2 B_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} B_{\delta\beta},$$

et lõpuks saada

$$\omega_{\alpha 3} = \sum_{\delta=1}^2 b_{\alpha\delta}^* \omega_{\delta}.$$

Seejuures samasusest $x_{\gamma} e_3 = 0$ järeldeb osadiferentseerimisel

$$x_{\gamma\beta} e_3 + x_{\gamma} e_{3\beta} = 0,$$

mistõttu $b_{\gamma\beta} = x_{\gamma\beta} e_3$ on sümmeetrilised γ ja β suhtes (sest $x_{\gamma\beta}$ on seda); samuti on siis sümmeetrilised α ja δ suhtes ka $b_{\alpha\delta}^*$.

Siin võib eesmärgiks seada kordajate $b_{\alpha\delta}^*$ maatriksi maksimaalse lihtsustamise vektorite e_1 ja e_2 sobiva valikuga. Selleks vaatleme avaldist

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \omega_{\alpha 3} &= \sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \left(\sum_{\beta,\gamma=1}^2 B_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta} du_{\beta} \right) = \\ &= \sum_{\beta,\gamma=1}^2 \left(\sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} B_{\alpha\gamma} \right) b_{\gamma\beta} du_{\beta} = \sum_{\beta,\gamma=1}^2 b_{\gamma\beta} du_{\gamma} du_{\beta}, \end{aligned}$$

mis, nagu näha, kujutab endast diferentsiaalruutvormi; teda nimetatakse pinna $\mathcal{T} \subset S_3(r)$ teiseks ruutvormiks. Teiselt poolt

$$\sum_{\alpha=1}^2 \omega_{\alpha} \omega_{\alpha 3} = \sum_{\alpha,\delta=1}^2 b_{\alpha\delta}^* \omega_{\alpha} \omega_{\delta}$$

on selle ruutvormi avaldis ortonormeeritud baasis $\{e_1, e_2\}$. Iga ruutvormi puhul leidub teatavasti selline ortonormeeritud baas, millel see ruutvorm omandab kanoonilise kuju ([1], lk. 445), teisiti öeldes, millel kordajate $b_{\alpha\delta}^*$ maatriksil on diagonaalkuju. Võtteski $\{e_1, e_2\}$ ossa selle baasi, saame

$$b_{11}^* = k_1, \quad b_{12}^* = b_{21}^* = 0, \quad b_{22}^* = k_2.$$

Nii leiame, et vektorite e_1 ja e_2 sellise valiku korral tulevad seostele (64.6) lisaks seosed

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = k_1 \omega_1, \quad \omega_{23} = -\omega_{32} = k_2 \omega_2. \quad (64.9)$$

Kui neid koos võrdustega (64.2) ja (64.5) arvestada valemis (64.3) ja (64.4), saame pinna $\mathcal{T} \subset S_3(r)$ jaoks Darboux'—Cartani valemitega analoogilised valemid:

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \quad (64.10)$$

$$de_1 = -\frac{1}{r^2} \omega_1 x + \omega_{12} e_2 + k_1 \omega_1 e_3, \quad (64.11)$$

$$de_2 = -\frac{1}{r^2} \omega_2 x - \omega_{12} e_1 + k_2 \omega_2 e_3, \quad (64.12)$$

$$de_3 = -k_1 \omega_1 e_1 - k_2 \omega_2 e_2. \quad (64.13)$$

Analoogiliselt saab käsitleda pinda $\mathcal{T}$ ka Lobatševski ruumis $L_3(q)$, tõlgendades viimast pseudosfäärina Minkowski ruumis 1E_4 .

Sellise pinna $\mathcal{T}$ puutujatasand asetseb pseudosfääri $L_3(q)$ puutuja-hüpertasandis, mis osutub teatavasti kolmemõõtmeliseks eukleidi-liseks ruumiks (art. 8). Seetõttu pinna normaaltasand punktis $x \in \mathcal{T}$ läbib pseudosfääri keskpunkti o sellesse punkti suunduva sirge, osutudes seega pseudoeukleidiliseks tasandiks (art. 8).

Paarikaupa ruumis E_4 ristuvad ühikvektorid e_μ ; $\mu=1, 2, 3, 4$ saab siduda pinna $\mathcal{T}$ punktiga täpselt samuti nagu eespool pinna $\mathcal{T} \subset S_3(r) \subset E_4$ puhul, seejuures seost (64.2) arvestades, kus praegu r asemel tuleb võtta q . Samalaadsed tulevad ka valemid (64.3) ja (64.4), kuid erinevus on (64.5) osas, sest nüüd kehtivad samasused

$$e_i e_j = \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3;$$

$$e_i e_4 = 0, \quad e_4^2 = -1,$$

millest diferentseerimisega saadakse seosed

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad -\omega_{i4} + \omega_{4i} = 0, \quad \omega_{44} = 0.$$

Erinevusest, mis ilmneb teise seoserühma juures, tuleneb erinevus ka valemis (64.6), mis omandavad nüüd kuju

$$\omega_{14} = \omega_{41} = -\frac{1}{q} \omega_1, \quad \omega_{24} = \omega_{42} = -\frac{1}{q} \omega_2.$$

Samal ajal avaldiste (64.9) tuletuskäik ei too kaasa mingeid erinevusi varasemaga võrreldes.

Kokkuvõttes saame pinna $\mathcal{T} \subset L_3(q)$ jaoks valemid, mis erinevad valemist (64.10–13) ainult selle poolest, et paremates pooltes tuleb vektori x ette $-\frac{1}{r^2}$ asemel $\frac{1}{q^2}$. Kui samuti nagu art-s 63

võtta kasutusele ruumi kõverus K , lugedes $S_3^*(r)$ puhul $K = \frac{1}{r^2}$

ruumi $L_3(q)$ puhul $K = -\frac{1}{q^2}$ ja ruumi E_3 puhul $K = 0$, saame kõi-kide nende ruumide jaoks ühiselt kirjutada *Darboux'—Cartani valemid* pinnateoorias järgmisel kujul:

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2, \quad (64.14)$$

$$de_1 = -K \omega_1 x + \omega_{12} e_2 + k_1 \omega_1 e_3, \quad (64.15)$$

$$de_2 = -K \omega_2 x - \omega_{12} e_1 + k_2 \omega_2 e_3, \quad (64.16)$$

$$de_3 = -k_1 \omega_1 e_1 - k_2 \omega_2 e_2. \quad (64.17)$$

Nende valemite alusel saab mainitud ruumides arendada pinnateooriat üsna samamoodi, nagu on eespool tehtud ruumi E_3 puhul (ptk. III). Nii näiteks on k_1 ja k_2 endiselt pinna *peakõverused*.

65. Ümaruspinnad ja nende sisegeomeetriad. Äsjasaadud valemite rakendamise näitena vaatleme mõningaid lihtsamaid pindu mitteeukleidilises ruumis. Defineerime pinna *ümaruspunkti* kui sellise, kus peakõverused on võrdsed: $k_1 = k_2$. Pinda, mille kõik punktid on ümaruspunktid, nimetatakse *ümaruspinnaks*.

Art-s 45 on näidatud, et ümaruspind eukleidilises ruumis E_3 on

sfäär või selle osa. Seetõttu ruumi E_3 ümaruspinnal kehtib sfääri-line geomeetria, mis küllalt väikeses piirkonnas ühtib elliptilise planimeetriaga.

Vaatleme nüüd ümaruspindu mitteeukleidilistes ruumides ja uurime neil kehtivaid geomeetriaid. Sel korral valemist (64.17) järeldub (64.14) põhjal, et

$$de_3 = -k_1 \omega_1 e_1 - k_2 \omega_2 e_2 = -k dx, \quad (65.1)$$

kus k tähistab k_1 ja k_2 ühist väärtust. Rakendades välisdiferentseerimist (art. 44), saame

$$\begin{aligned} 0 &= -dk \wedge dx = -dk \wedge (\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) = \\ &= -(dk \wedge \omega_1) e_1 - (dk \wedge \omega_2) e_2. \end{aligned}$$

Vektorite e_1 ja e_2 lineaarse sõltumatuse tõttu

$$dk \wedge \omega_1 = dk \wedge \omega_2 = 0.$$

Asendades

$$dk = \frac{\partial k}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial k}{\partial u_2} du_2 = \partial_1 k \omega_1 + \partial_2 k \omega_2,$$

kus (64.8) põhjal

$$\partial_\alpha k = \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial k}{\partial u_\beta} B_{\alpha\beta},$$

leiame, et

$$\partial_2 k \omega_2 \wedge \omega_1 = \partial_1 k \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

mistõttu

$$\partial_2 k = \partial_1 k = 0$$

ja seega $dk=0$ ehk $k=\text{const.}$ Sellest aga tuleneb (65.1) põhjal, et

$$d\left(x + \frac{1}{k} e_3\right) = dx + \frac{1}{k} de_3 = dx + \frac{1}{k} (-k dx) = 0. \quad (65.2)$$

Tulemuste analüüsi on otstarbekas teha eraldi elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ ja Lobatševski ruumi $L_3(q)$ korral.

Tõlgendades elliptilist ruumi $S_3^*(r)$ sfääri $S_3(r) \subset E_4$ abil, järeldame võrdusest (65.2), et vektor $l = x + \frac{1}{k} e_3 = -re_4 + \frac{1}{k} e_3$ ruumis E_4 on konstantne. Järelikult on konstantsed ka sfääri $S_3(r)$ punktide temaga kollineaarsed kohavektorid, mistõttu vastav diametraalsete punktide paar kui ruumi $S_3^*(r)$ punkt c jääb liikumatuks. Seejuures

$$xl = -re_4 \left(-re_4 + \frac{1}{k} e_3 \right) = r^2 = \text{const}, \quad (65.3)$$

mistõttu korrutatavate vektorite vahelise nurga α jaoks saame

$$\cos \alpha = \frac{xl}{|x||l|} = \frac{r^2}{r \sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{1}{k^2}}} = \text{const}. \quad (65.4)$$

Ruumis $S_3^*(r)$ tähendab see, et distant $(ra$ või $r(\pi - \alpha))$ punktide x ja c vahel jääb muutumatuks. Seega pind $\mathcal{F} \subset S_3^*(r)$ koosneb punktist c konstantsel distantil olevatest punktidest ja on sfäär ruumis $S_3^*(r)$ või selle osa. Samal ajal ruumi E_4 seisukohalt tähendab valem (65.3) seda, et sfääri $S_3(r)$ vaadeldavate punktide x kohavektorid rahuldavad teatava hüpertasandi võrrandit $xl = r^2$, mistõttu pind $\mathcal{F}$ tekib sfääri $S_3(r)$ ja selle hüpertasandi lõikest või selle osast. Et hüpertasand ruumis E_4 on ruum E_3 , siis *vaadeldav ümaruspind $\mathcal{F}$ tekib sfääril $S_3(r)$ asetsevast tavalisest sfääril $S_2(r_1) \subset E_3$ või selle osast sfääri $S_3(r)$ keskpunkti o suhtes diametraalsete punktide juurdevõtmisel ja paaridesse ühendamisel*. Järelikult geomeetria, mis ümaruspinnal kehtib, on sfääriline geomeetria, mis küllalt väikeses piirkonnas ühtib elliptilise geomeetriaga. Pole raske avaldada ka ümaruspinna $\mathcal{F}$ Gaussi kõverust $K_1 = \frac{1}{r_1^2}$.

Selleks leiame tuntud viisil keskpunkti o kauguse

$$h = \frac{r^2}{|l|}$$

kõnesolevast hüpertasandist (art. 3) ning avaldame (joon. 76)

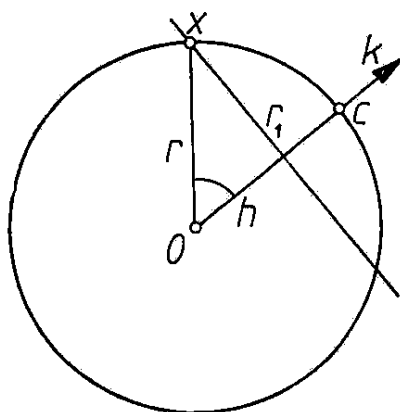
$$r_1^2 = r^2 - h^2 = r^2 - \frac{r^4}{r^2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{r^4 + \frac{r^2}{k^2} - r^4}{r^2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k^2 + \frac{1}{r^2}}.$$

Seega

$$K_1 = \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r^2} + k^2 = K + k^2; \quad (65.5)$$

nagu näeme, pinna $\mathcal{F}$ kõverus K_1 ületab k^2 võrra ruumi $S_3^*(r)$ kõveruse K .

Asume nüüd uurima ümaruspinna $\mathcal{F}$ ehitust ja sisegeomeetriat Lobatševski ruumis $L_3(q)$, tõlgendades viimast pseudosfäärina Minkowski ruumis 1E_4 . Siin on oluline, kas (65.2) põhjal konstantne



Joonis 76

vektor $l = x + \frac{1}{k} e_3 = -\varrho e_4 + \frac{1}{k} e_3$ on reaalse või imaginaarse pikkusega või on ta isotroopne.

Kui see vektor on imaginaarse pikkusega $i\sigma$, $\sigma = \text{const}$, siis on pseudosfääril olemas punkt c temaga kollineaarse kohavektoriga $c = \frac{\varrho}{\sigma} l$ ning see punkt c on liikumatu. Seejuures kaugus $d_L(x, c)$ punktide x ja c vahel ruumis $L_3(\varrho)$, mis (56.7) põhjal määratakse valemiga $\text{ch} \frac{d_L(x, c)}{\varrho} = -\frac{xc}{\varrho^2}$, on samuti nagu α seose (65.4) järgi konstantne, sest $xc = x \left(\frac{\varrho}{\sigma} l \right) = \frac{\varrho}{\sigma} (-\varrho e_4) \left(-\varrho e_4 + \frac{1}{k} e_3 \right) = -\frac{\varrho^3}{\sigma} = \text{const}$. Seega $\mathcal{T} \subset L_3(\varrho)$ on sfäär ruumis $L_3(\varrho)$ või selle osa.

Kui vektor $l = x + \frac{1}{k} e_3$ on reaalse pikkusega, siis temaga ristuv hüpertasand ruumis 1E_4 , mis läbib pseudosfääri $L_3(\varrho)$ keskpunkti o , lõikab pseudosfääri mööda üht hüperboolset tasandit. Et see vektor on konstantne, siis tasand ei muutu. Kui vaadelda punktist $x \in L_3(\varrho)$ sellele tasandile risti tõmmatud hüperboolset sirget, siis see on punktiga o ja vektoritega x ja $x + \frac{1}{k} e_3 = l$ määratud tasandi lõige pseudosfääriga. Kõnesoleva hüperboolse sirge ja tasandi lõikepunkti kohavektor ruumis 1E_4 on

$$y = \frac{x + k\varrho e_3}{\sqrt{1 - k^2}},$$

sest selline y on vektorite x ja $x + \frac{1}{k} e_3$ rihis, risti teise vektoriga ning pikkusega $i\varrho$, nagu kerge veenduda. Seejuures

$$\text{ch} \frac{d_L(x, y)}{\varrho} = -\frac{xy}{\varrho^2} = -\frac{x(x + k\varrho e_3)}{\varrho^2 \sqrt{1 - k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} = \text{const}, \quad (65.6)$$

nii et x ja y vaheline kaugus ruumis $L_3(\varrho)$ on konstantne. Järelikult pind $\mathcal{T}$ koosneb fikseeritud hüperboolsest tasandist konstantset kaugusel olevatest punktidest ja on seega ekvidistantpind või selle osa.

Lõpuks, kui vektor $l = x + \frac{1}{k} e_3$ on isotroopne, tuleb vaadelda hüperboolset sirget, mille lõikab pseudosfäärist välja punkti o ning vektoritega x ja l määratud tasand. Punkti x liikumisel mööda pinda $\mathcal{T}$ moodustab see sirge paralleelide sidumi ruumis $L_3(\varrho)$, sest tema kujutis näiteks Beltrami—Kleini mudelis läbib sfääri $S_2(\varrho)$ seda

fikseeritud punkti, milleks kujutub konstantse vektori l siht. Seejuures $dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$ on risti vektoritega x ja $l = x + \frac{1}{k} e_3$, tähendab pinna $\mathcal{F}$ puutujatasand on risti selle paralleelide sidumi sirgetega ja pind $\mathcal{F}$ kujutab endast piirsfääri või selle osa.

Kõiki neid tulemusi on lihtne kokku võtta mitte-eukleidiliste ruumide stereograafiliste mudelite abil järgmiselt: ümaruspind mitte-eukleidilises ruumis kujutub stereograafilises mudelis sfäärina või selle osana; sellel sfääril on Lobatševski ruumi $L_3(q)$ Poincaré mudeli puhul kolm võimalikku asendit sfääri $S_2(q)$ suhtes, mis vastavad ruumi $L_3(q)$ sfäärile, ekvidistantpinnale või piirsfäärile.

Asudes nüüd uurima ruumi $L_3(q)$ ümaruspinna sisegeomeetriat, märgime kohe, et siin tulevad välja nii eukleidiline kui ka mõlemad mitte-eukleidilised geomeetriad, seejuures mitte ainult lokaalselt (küllalt väikestes piirkondades), vaid terviklike ümaruspindade puhul kogu eukleidilise, elliptilise või Lobatševski tasandi ulatuses.

Põhjenduseks märgime esmalt, et ruumi $L_3(q)$ ümaruspind on pseudosfääri $L_3(q)$ lõige hüperatasandiga ruumis 1E_4 , sest tema punkti x kohavektoril $\overrightarrow{ox} = x = -qe_4$ on omadus

$$xl = -qe_4 \left(-qe_4 + \frac{1}{k} e_3 \right) = -q^2,$$

mistõttu ta rahuldab teatava hüperatasandi võrrandit $xl + q^2 = 0$.

Kui $l^2 \neq 0$, siis võib sellel hüperatasandil leida punkti o' selliselt, et $\overrightarrow{oo'}$ on kollineaarne vektoriga l . Punkti o' kohavektor o' peab olema kujuga $o' = \lambda l$ ja rahuldama hüperatasandi võrrandit; seega $\lambda l \cdot l + q^2 = 0$ ja siit $\lambda = -q^2/l^2$. Nüüd aga

$$\begin{aligned} (x - o')^2 &= x^2 - 2xo' + o'^2 = x^2 - 2x \left(-\frac{q^2}{l^2} l \right) + \left(-\frac{q^2}{l^2} l \right)^2 = \\ &= -q^2 - 2 \frac{q^4}{l^2} + \frac{q^4}{l^2} = -q^2 \left(1 + \frac{q^2}{l^2} \right) = \\ &= -q^2 \frac{\left(-q^2 + \frac{1}{k^2} \right) + q^2}{-q^2 + \frac{1}{k^2}} = \frac{q^2}{q^2 k^2 - 1} = \text{const.} \end{aligned}$$

Näeme, et ümaruspind osutub teatavaks sfääriks keskpunktiga o' kõnesoleval hüperatasandil, kusjuures on leitud ka selle sfääri raadiuse ruut.

Juhul kui $l^2 < 0$ ehk $-q^2 + \frac{1}{k^2} < 0$ ja ümaruspind, nagu eespool selgus, on ruumi $L_3(q)$ sfäär, osutub see hüperatasand ruumiks E_3 , ning ümaruspinnal, mis on sfäär raadiusega $r' = \frac{q}{\sqrt{q^2 k^2 - 1}}$ ruumis

E_3 , kehtib sfääriline (elliptiline) geomeetria, kusjuures kõverus on

$$K' = \frac{1}{r'^2} = \frac{-1 + q^2 k^2}{q^2} = -\frac{1}{q^2} + k^2 = K + k^2.$$

Kui $l^2 > 0$ ehk $-\frac{1}{q^2} + \frac{1}{k^2} > 0$ ja ümaruspind on ruumi $L_3(q)$ ekvidistantpind, osutub kõnesolev hüpertasand ruumiks 1E_3 ning ümaruspinnal, mis on pseudosfäär raadiusega $\rho' = \frac{q}{\sqrt{q^2 k^2 - 1}}$ ruumis 1E_3 , kehtib hüperboolne ehk Lobatševski geomeetria; seejuures kõverus on

$$K' = -\frac{1}{q'^2} = \frac{-1 + q^2 k^2}{q^2} = -\frac{1}{q^2} + k^2 = K + k^2.$$

Nagu näha, on mõlemal juhul ümaruspinna kõverus k^2 võrra suurem ruumi $L_3(q)$ kõverusest $K = -\frac{1}{q^2}$ (huvitav on see, et samasugune on tulemus (65.5) põhjal ruumi $S_3^*(r)$ ning (45.14) põhjal ka ruumi E_3 ümaruspinna puhul). Seejuures esimesel juhul $k^2 > \frac{1}{q^2}$, teisel juhul $k^2 < \frac{1}{q^2}$. Märgime, et teine juht haarab võimaluse $k=0$,

millal (65.6) põhjal $\text{ch} \frac{d_L(x, y)}{q} = 1$ ja seega $d_L(x, y) = 0$. Sel korral kujutab ekvidistantpind endast fikseeritud hüperboolsest tasandist kaugusel 0 olevate punktide hulka ja järelikult ühtib selle tasandiga. Tema kõverus ühtib siis ruumi $L_3(q)$ kõverusega.

Vaatlusest jäi praegu välja võimalus, mil $l^2 = 0$ ehk $k^2 = \frac{1}{q^2}$. Sel juhul osutub ümaruspind ruumis $L_3(q)$ piirsfääriks. Käsitledes seda juhtu ükskõik kumma varasema juhu piirjuhina, kui $k \rightarrow \frac{1}{q}$, saame, et siis $K' \rightarrow 0$. See lubab arvata, et piirsfääri sisegeomeetria ühtib selliste pindade sisegeomeetriaga ruumis E_3 , mille täiskõverus on null, seega eukleidilise planimeetriaga (vähemalt küllalt väikese piirkonna ulatuses),

Tegelikult on asi järgmine; piirsfääril kehtib kogu eukleidiline planimeetria. Selles veendumiseks vaatleme ruumi $L_3(q)$ Poincaré mudelit ruumi E_3 sfääri $S_2(q)$ sisemuses. Piirsfääri kujutab selles mudelis sfäär, mis puutub seestpoolt sfääri $S_2(q)$. Koordinaadid u_1, u_2, u_3 ruumis E_3 valime nii, et o on $S_2(q)$ keskpunktis ja puutepunkt on $(0, 0, q)$. Analooiliselt valemitega (59.2) saame vaadelda sfääri esitada parameetriliste võrranditega

$$u_1 = \frac{2R^2 v_1}{v^2 + R^2}, \quad u_2 = \frac{2R^2 v_2}{v^2 + R^2}, \quad u_3 = \gamma + R \frac{v^2 - R^2}{v^2 + R^2}, \quad (65.7)$$

kus $(0, 0, \gamma)$ on sfääri keskpunkt, R tema raadius ja $(v_1, v_2) \in E_2$, $v^2 = v_1^2 + v_2^2$; seejuures $\gamma + R = \varrho$. Samal viisil nagu valemi (60.3) tuletamisel saame, et

$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 = \frac{4R^4}{(v^2 + R^2)^2} (dv_1^2 + dv_2^2). \quad (65.8)$$

Lobatševski ruumi seisukohalt tuleb Poincaré mudeli korral kasutada valemit (60.4), kus jääb nüüd vaid selgitada, kuidas avaldub võrrandite (65.7) puhul nimetajas olev suurus $\varrho^2 - u^2$. Siin $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ arvutamiseks märgime, et vaadeldava sfääri punktide puhul

$$u_1^2 + u_2^2 + (u_3 - \gamma)^2 = R^2,$$

ning et siin $R = \varrho - \gamma$, siis

$$u^2 - 2\gamma u_3 = \varrho^2 - 2\varrho\gamma.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \varrho^2 - u^2 &= 2\gamma(\varrho - u_3) = 2\gamma \left(\varrho - \gamma - R \frac{v^2 - R^2}{v^2 + R^2} \right) = \\ &= 2\gamma R \left(1 - \frac{v^2 - R^2}{v^2 + R^2} \right) = \frac{4\gamma R^3}{v^2 + R^2} \end{aligned}$$

ning seega (60.4) ja (65.8) põhjal piirsfääri puhul

$$ds^2 = \frac{\varrho^4}{\gamma^2 R^2} (dv_1^2 + dv_2^2) = dw_1^2 + dw_2^2, \quad (65.9)$$

kus

$$w_\alpha = \frac{\varrho^2}{\gamma R} v_\alpha; \quad \alpha = 1, 2.$$

Viimased seosed määravad piirsfääri kujutuse kogu $w_1 w_2$ -tasandile, mis, nagu selgub ruutvormi (65.9) kujust, osutub piirsfääri isomeetriaks eukleidilise tasandiga E_2 . Seega piirsfääril ruumis $L_3(\varrho)$ kehtib tõesti kogu eukleidiline planimeetria.

Niisiis, ruumi $L_3(\varrho)$ ümaruspindadel, kui vaadelda vastavaid tervikpindu — sfääre, ekvidistantpindu ja piirsfääre — saab realiseerida nii mõlemad mitte-eukleidilised kui ka eukleidilise planimeetria. Võrdluseks märgime, et ruumi E_3 ühelgi pinnal pole Lobatševski planimeetria terves ulatuses realiseeritav (art. 52 ja 62).

66. Cliffordi pinna sisegeomeetria. Ekvidistantpind Lobatševski ruumis $L_3(\varrho)$ koosneb antud tasandist võrdsel kaugusel olevatest punktidest. Eukleidilises ruumis E_3 on tasandi ekvidistantpinnaks muidugi antuga paralleelne tasand. Samal ajal sfääri võib ükskõik kummas ruumis käsitleda kui punkti ekvidistantpinda.

Analoogiliselt võib defineerida sirge ekvidistantpinna kui antud sirgest võrdsel kaugusel olevate punktide hulga. Eukleidilises ruumis on selliseks pöörd-silinder. Järgnevalt käsitleme sirge ekvidistantpinda elliptilises ruumis $S_3^*(r)$.

Näitame, et ta ühtib eespool (art. 55) defineeritud Cliffordi pinnaga ning et tema sisegeomeetria ühtib lokaalselt eukleidilise geomeetriaga.

Elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ saame sfäärilist $S_3(r) \subset E_4$ diametraalsete punktide samastamisel (art. 55). Seejuures sirge selles ruumis tekib sfääri keskpunkti o läbiva 2-tasandi punktidest. Vahime paarikaupa ristuvad ühikvektorid e_1, e_2, e_3, e_4 nii, et e_1 ja e_2 asuksid sellel 2-tasandil. Suvalise punkti $x \in S_3(r)$ kohavektori x saab ühesel viisil esitada kujul

$$x = x_I + x_{II},$$

kus

$$x_I = x_1 e_1 + x_2 e_2 = r_I (e_1 \cos u_1 + e_2 \sin u_1), \quad (66.1)$$

$$x_{II} = x_3 e_3 + x_4 e_4 = r_{II} (e_3 \cos u_2 + e_4 \sin u_2), \quad (66.2)$$

viimastes avaldistes oleme $x_1 x_2$ -tasandil ja $x_3 x_4$ -tasandil läinud üle polaarkoordinaatidele. Et $x^2 = r^2$, siis

$$r_I^2 + r_{II}^2 = r^2. \quad (66.3)$$

Punkt $x_I \in E_4$ kohavektoriga x_I on punkti x projektsioon $x_1 x_2$ -tasandile. Punkti x kaugus d vaadeldavast sirgest elliptilises ruumis $S_3^*(r)$ on r -kordne nurk vektorite x ja x_I vahel. Seega

$$\cos \frac{d}{r} = \frac{xx_I}{|x||x_I|} = \frac{x_I^2}{r_I r} = \frac{r_I}{r}.$$

Kui see kaugus on konstant R , siis

$$\cos^2 \frac{R}{r} = \frac{r_I^2}{r_I^2 + r_{II}^2}$$

ja siit

$$r_I^2 \sin^2 \frac{R}{r} = r_{II}^2 \cos^2 \frac{R}{r}.$$

Esitades selle võrduse võrdena ja tähistades viimase võrdsed pooled λ , saame

$$r_I^2 = \lambda \cos^2 \frac{R}{r}, \quad r_{II}^2 = \lambda \sin^2 \frac{R}{r}.$$

Asendus seosesse (66.3) annab nüüd $\lambda = r^2$. Seega vaadeldavast sirgest kaugusel R oleva punkti x korral (66.1) ja (66.2) põhjal

$$x_1 = r \cos \frac{R}{r} \cos u_1, \quad x_2 = r \cos \frac{R}{r} \sin u_1, \quad (66.4)$$

$$x_3 = r \sin \frac{R}{r} \cos u_2, \quad x_4 = r \sin \frac{R}{r} \sin u_2. \quad (66.5)$$

Parameetrite u_1 ja u_2 vabal muutumisel saame siit parameetrilised võrrandid sirge ekvidistantpinna jaoks ruumis $S_3^*(r)$. Seejuures on selge, et väärtuspaaridele (u_1, u_2) ja $(u_1 + 2k\pi, u_2 + 2l\pi)$ vastab sama punkt sellel pinnal.

Jooned sisevõrranditega $u_1 = t$, $u_2 = \pm t$ asetsevad, nagu kerge näha, korraga hüpertasandil võrranditega

$$x_1 \sin \frac{R}{r} - x_3 \cos \frac{R}{r} = 0,$$

$$x_3 \sin \frac{R}{r} \mp x_4 \cos \frac{R}{r} = 0,$$

seega nende ühisel 2-tasandil, ning on järelikult elliptilise ruumi sirged, kujutades endast vaadeldava sirge Cliffordi paralleele (art. 55). Sirge kõnesolev ekvidistantpind ühtib niisiis varem defineeritud Cliffordi pinnaga. Tema iga punkti

läbib vaadeldava sirge (pinna telje) kaks Cliffordi paralleeli (vrd. harjutusüleandega 94).

Võrrandite (66.4) ja (66.5) järgi on kerge leida Cliffordi pinna esimest ruutvormi:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \\ &= r^2 \cos^2 \frac{R}{r} [(-\sin u_1 du_1)^2 + (\cos u_1 du_1)^2] + \\ &+ r^2 \sin^2 \frac{R}{r} [(-\sin u_2 du_2)^2 + (\cos u_2 du_2)^2] = \\ &= r^2 \cos^2 \frac{R}{r} du_1^2 + r^2 \sin^2 \frac{R}{r} du_2^2. \end{aligned}$$

Kui tähistada

$$w_1 = u_1 r \cos \frac{R}{r}, \quad w_2 = u_2 r \sin \frac{R}{r},$$

saame

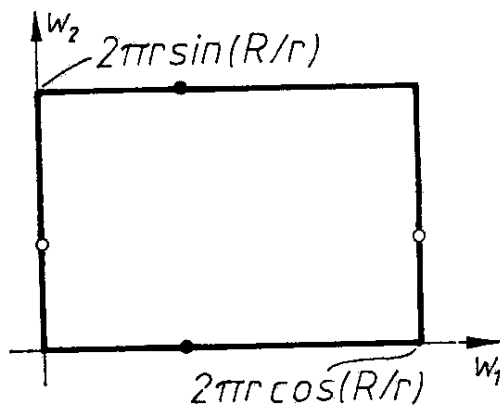
$$ds^2 = dw_1^2 + dw_2^2,$$

millest nähtubki, et Cliffordi pinna sisegeomeetria on eukleidiline geomeetria.

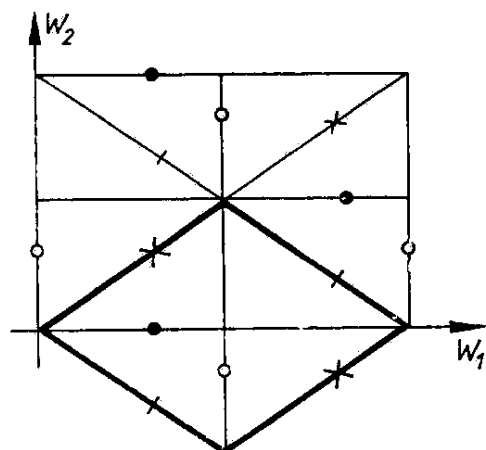
Seejuures väärtuspaaridele (w_1, w_2) ja $\left(w_1 + 2k\pi r \cos \frac{R}{r}, w_2 + 2l\pi r \sin \frac{R}{r}\right)$ vastab sama punkt, mistõttu sfääri $S_3(r)$ vaadeldava alamhulgaga ekvivalentse hulga saamiseks tuleb teha eukleidilise $w_1 w_2$ -tasandi E_2 faktoriseerimine, lugedes omavahel ekvivalentseks E_2 need punktid, mille koordinaatideks on ülalnimetatud väärtuspaarid. Kui vaadelda tasandil E_2 ristkülikut

$$\left\{ (w_1, w_2) : 0 \leq w_1 < 2\pi r \cos \frac{R}{r}, 0 \leq w_2 < 2\pi r \sin \frac{R}{r} \right\},$$

siis selles on igast ekvivalentsusklassist parajasti üks punkt, kuid selle ristküliku servadel tuleb punktid $(w_1, 0)$ ja $\left(w_1, 2\pi r \sin \frac{R}{r}\right)$ samastada, samuti nagu punktid $(0, w_2)$ ja $\left(2\pi r \cos \frac{R}{r}, w_2\right)$; teisiti öeldes, selle ristküliku vastasservad tuleb kokku kleepida (joon. 77). Saadav punktihulk on ehitatud samasuguselt nagu toor, ainult geomeetria temal on küllalt väikeses piirkonnas sama mis



Joonis 77



Joonis 78

eukleidilisel tasandil E_2 . Tervikuna on aga tema pindala lõplik suurus, mis on võrdne kõnesolnud ristküliku pindalaga, seega väärtusega

$$2\pi r \cos \frac{R}{r} \cdot 2\pi r \sin \frac{R}{r} = 2\pi^2 r^2 \sin \frac{2R}{r}.$$

Cliffordi pinna kui elliptilise ruumi $S_3^*(r)$ alamhulga saamiseks tuleb veel arvestada, et selles ristkülikus annavad (u_1, u_2) ja $(u_1 + \pi, u_2 + \pi)$ valemite (66.4) ja (66.5) põhjal sama punkti $x^* \in S_3^*(r)$, sest kui esimesele vastab $x \in S_3(r)$ kohavektoriga x , siis teisele vastab diametraalne punkt $x' \in S_3(r)$ kohavektoriga $-x$ (joon. 78, kus ühtemoodi märgitud punktid kuuluvad samastamisele). Niisiis, Cliffordi pinna pindala saamiseks tuleb eeltoodud väärtus jagada kahega, nii et tulemuseks on $\pi^2 r^2 \sin \frac{2R}{r}$.

Märgime, et viimatimainitud punktide samastamist arvestades saab Cliffordi pinna ehitust iseloomustada rombi abil, mille külgedeks on esialgse ristküliku kaks pooldiagonaali ja ülejäänud kahe pooldiagonaaliga ekvivalentsed lõigud (joon. 78). Seejuures tuleb rombi vastasküljed paarikaupa kokku kleepida. Viimastest saadakse, nagu kerge veenduda, Cliffordi pinna kaks sirgjoonelist moodustajat.

Harjutusülesanded

107. Kontrollida, et joon ruumis E_4 , mille puhul

$$x = \left(r \sin \frac{R}{r} \cos t, r \sin \frac{R}{r} \sin t, r \cos \frac{R}{r} \cos \lambda t, r \cos \frac{R}{r} \sin \lambda t \right),$$

kus R ja λ on konstandid, asetseb sfääril $S_3(r)$ keskpunktiga alguspunktis o (vrd. ka võrranditega (66.4—5)). Näidata loomulikule parameetrile ülemineku ja valemite (63.3—6) abil, et selle joone kõverus ja vääne sfääril $S_3(r)$ on järgmised konstandid:

$$k = \frac{|\lambda^2 - 1| \sin \frac{2R}{r}}{2r \left(\sin^2 \frac{R}{r} + \lambda^2 \cos^2 \frac{R}{r} \right)}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{r \left(\sin^2 \frac{R}{r} + \lambda^2 \cos^2 \frac{R}{r} \right)};$$

seega on tegemist ruumi E_3 kruvijoone analoogiga.

108. Näidata, et kui eelmises ülesandes antud joone puhul $\lambda = 0$, siis on tegemist ringjoonega ruumis E_3 sfääril $S_2(r)$. Veenduda, et sel korral joone kõverus $k = \frac{1}{r \tan \frac{R}{r}}$ sfäärilises (elliptilises) geomeetrias on ühtlasi selle joone

geodeetiliseks kõveruseks sfääril $S_2(r)$.

109. Kontrollida, et joon ruumis E_4 , mille puhul

$$x = \left(q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \cos t, q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \sin t, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{sh} \lambda t, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{ch} \lambda t \right),$$

kus R ja λ on konstandid, asetseb pseudosfääril $L_3(q)$ (ehk Lobatševski ruumis). Veenduda, kasutades eelmise harjutusülesande lahendamise võtteid, et selle joone kõverus ja vääne Lobatševski ruumis $L_3(q)$ on järgmised konstandid:

$$k = \frac{(1+\lambda^2) \operatorname{sh} \frac{2R}{q}}{2q \left(\operatorname{sh}^2 \frac{R}{q} + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \frac{R}{q} \right)}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{q \left(\operatorname{sh}^2 \frac{R}{q} + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \frac{R}{q} \right)}.$$

110. Näidata, et kui eelmises ülesandes antud joone puhul $\lambda=0$, siis on tegemist ringjoonega, mille hüperboolne raadius on R ja keskpunkt on pseudosfääri $L_3(q)$ punkt x_0 kohavektoriga $(0, 0, 0, q)$. Järeldada sellest, et ringjoone vääne on null ja kõverus

$$k = \frac{1}{q \operatorname{th} \frac{R}{q}}$$

(vrd. [9], lk. 216).

111. Veenduda, et joon ruumis 1E_3 , mille puhul

$$x = \left(q \operatorname{sh} \frac{R}{q}, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{sh} t, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{ch} t \right),$$

asetseb pseudosfääril $L_2(q)$ ning kujutab endast ekvidistanti — x_2x_3 -tasandile vastavast hüperboolsest sirgest kaugusel R olevate punktide hulka. Teha kindlaks, et sellel joonel on kõverus

$$k = \frac{1}{q} \operatorname{th} \frac{R}{q}$$

(vrd. [9], lk. 217).

112. Näidata art-s 65 kasutatud meetodile analoogilist kasutades, et joon Lobatševski tasandil $L_2(q)$ (siis vääne $\kappa=0$), mille kõverus $k=\text{const}$, osutub ringjooneks (kui $k > \frac{1}{q}$), ekvidistandiks (kui $k < \frac{1}{q}$) või piirringjooneks (kui $k = \frac{1}{q}$).

113. Veenduda, et pind ruumis 1E_4 , mille puhul

$$x = \left(q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \cos u_1, q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \sin u_1, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{sh} u_2, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{ch} u_2 \right),$$

asetseb pseudosfääril $L_3(q)$ ning kujutab endast x_3x_4 -tasandi poolt väljalõigatava hüperboolse sirge ekvidistantpinda — kaugusel R olevate punktide hulka. Näidata, et selle pinna sisegeomeetriaks on eukleidiline geomeetria ning et harjutus-ülesandes 109 antud joon lõikab sellel pinnal u_2 -jooni (ekvidistante) konstantse nurga all.

V. TENSORVÄLJAD MUUTKONNAL

§ 16. TENSORID JA TENSORVÄLJAD

Lineaaralgebra sellistel mõistetel nagu vektor, lineaar-, bilineaar- ja ruutvorm ning lineaarteisendus ([1], lk. 3 ja 4, 337, 359, 428¹, 441) on mõndagi ühist, mis lubab neid ühendada üldisema mõiste — tensori mõiste abil. Üldistuse tõeline õigustus on aga uued rakendused, mis tensori mõiste ees avanuvad. Kõige hinnatavamad neist saadakse üleminekuga lineaaralgebrast nüüdisaegsesse diferentsiaalgeomeetrias, kus üheks põhiliseks uurimisvahendiks on kujunenud tensorväljad — niisugused objektid, kus piirkonna $U \subset \mathbb{R}^n$ või sellele vastava hulga igas punktis on antud tensor, erijuhul vektor, lineaarvorm, ruutvorm vms. Ruutvormiväljadeks lihtpinnal on näiteks esimene ja teine ruutvorm, vektorväljadeks peasihiliste ühikvektorite väljad jne. Mitmesugustel tensorväljadel on olulisi rakendusi teoreetilises mehaanikas, füüsikas jm.

67. Tensori mõiste. Vektorid, millega tegelesime art-s 1, moodustavad teatavasti n -mõõtmelise *vektorruumi*, sest nende puhul on rahuldatud aksioomid ([1], lk. 337; 341; [6], lk. 489):

$$1^\circ x + y = y + x,$$

$$2^\circ (x + y) + z = x + (y + z);$$

$$3^\circ \exists 0, x + 0 = x,$$

$$4^\circ \exists (-x), x + (-x) = 0,$$

$$5^\circ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$6^\circ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,$$

$$7^\circ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$8^\circ 1x = x,$$

$$9^\circ \exists \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n;$$

$$x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n = 0 \Rightarrow x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0.$$

Siin võib asuda ka üldisele seisukohale, lugedes, et x, y ja z on lihtsalt elemendid teatavast hulgast V (vektorruumist) ning λ, μ suvalised elemendid nn. põhikorpusest K , milleks on praegu $\mathbb{R}$, s.t. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, samuti $x^i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, \dots, n$ (kusjuures i ei tähenda astmenäitajat, vaid ülemist indeksit; näiteks x^2 tuleb lugeda siin

¹ Terminile «lineaarvorm» antakse õpikus [1] kitsas (esimese astme homogeense polünoomi) tähendus. Siin mõistame lineaarvormina vastavat kujutust $V \rightarrow \mathbb{R}$ (mida [1] nimetab «lineaarseteks funktsionaaliks»; samal ajal bilineaarvormi käsitletakse seal kujutisena $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$).

mitte « x ruudus» vaid « x kaks» jne.). Eeldada tuleb muidugi ka, et hulgas V on määratud elementide (vektorite) liitmine ja reaalarvuga korrutamine, mille kohta aksioomid 1° – 8° õieti käivadki.

Aksioom 9° fikseerib seejuures, et vektorruumi V mõõde on n . Sel puhul vastavus $x \in V \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ korraldab isomorfismi vektorruumi V ja $\mathbb{R}^n$ vektorite ruumi vahel ([1], lk. 348).

Kahe vektorruumi V ja W korral kujutust $f: V \rightarrow W$ nimetatakse *lineaarkujutuseks*, kui

$$\begin{aligned} 1) \quad & f(x+y) = f(x) + f(y), \\ 2) \quad & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

Kõik sellised lineaarkujutused moodustavad uue vektorruumi järgmiselt: defineerime λf ja $f+g$ valemitega

$$\begin{aligned} a) \quad & (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \\ b) \quad & (f+g)(x) = f(x) + g(x); \end{aligned}$$

siin g tähendab samuti lineaarkujutust $g: V \rightarrow W$ ning kerge on kontrollida, et ka nii defineeritud λf ja $f+g$ on lineaarkujutused $V \rightarrow W$ (vrd. [1], lk. 357–359), kusjuures nende puhul on rahuldatud aksioomid 1° – 8° . Niisiis, kõik lineaarkujutused $f: V \rightarrow W$ moodustavad antud V ja W korral vektorruumi.

Erilist tähelepanu väärib erijuht, mil W on ühemõõtmeline vektorruum. Sel juhul leiab aset isomorfism $W \rightarrow \mathbb{R}$ ja W ossa võib võtta lihtsalt $\mathbb{R}$. Lineaarkujutust $a: V \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse *lineaarvormiks*¹. Kõik lineaarvormid moodustavad vektorruumi, mida nimetatakse vektorruumi V *kaasruumiks* ja tähistatakse V^* (vrd. [3], lk. 478).

Kui V on n -mõõtmeline, siis ka V^* on n -mõõtmeline. Tõepoolest, 9° , 1) ja 2) põhjal

$$\begin{aligned} a(x) &= a(x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n) = \\ &= x^1 a(e_1) + x^2 a(e_2) + \dots + x^n a(e_n); \end{aligned}$$

tähistades

$$a(e_1) = a_1, \quad a(e_2) = a_2, \quad \dots, \quad a(e_n) = a_n, \quad (67.1)$$

saame

$$a(x) = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \quad (67.2)$$

Tekib vastavus $V^* \rightarrow \mathbb{R}^n$, milles $a \mapsto (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Kui $b \mapsto (b_1, b_2, \dots, b_n)$, siis b) põhjal

$$(a+b)(e_i) = a(e_i) + b(e_i) = a_i + b_i,$$

seejuures a) järgi

$$(\lambda a)(e_i) = \lambda a(e_i) = \lambda a_i.$$

Samal ajal järeldub võrdustest (67.1) ja (67.2), et $a \mapsto (0, 0, \dots, 0)$ parajasti siis, kui $a=0$, s.t. kui iga $x \in V$ korral $a(x)=0$. Seetõttu vastavus $V^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ on vektorruumide isomorfism. Et $\mathbb{R}^n$ on n -mõõtmeline, siis on seda ka V^* ([1], lk. 348).

¹ Vt. eelmine allmärkus.

Aksioomis 9° nõutud elementideks kaasruumis V^* on näiteks lineaarvormid $f^1, f^2, \dots, f^n$, mille korral

$$\begin{aligned} f^1 &\mapsto (1, 0, \dots, 0), \\ f^2 &\mapsto (0, 1, \dots, 0), \\ &\vdots \\ f^n &\mapsto (0, 0, \dots, 1), \end{aligned}$$

ehk mille puhul

$$f^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{kui } i=j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j. \end{cases} \quad (67.3)$$

Seejuures võrdustega a) ja b) defineeritud tehete seisukohalt

$$a = a_1 f^1 + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n. \quad (67.4)$$

Tõepoolest, 1), 2), a) ja b) alusel

$$\begin{aligned} (a_1 f^1 + a_2 f^2 + \dots + a_n f^n) (x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n) &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_j f^j \right) \left(\sum_{i=1}^n x^i e_i \right) = \sum_{i,j=1}^n a_j x^i f^j(e_i) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_j x^i \delta_i^j = a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, \end{aligned}$$

mistõttu võrduse (67.4) parem pool ühtib (67.2) põhjal vasaku poolega, sest suvaline

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n \in V$$

kujutub nende puhul samaks reaalarvuks.

Aksioomis 9° näidatud hulka $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nimetatakse teatavasti vektorruumi V baasiks ([1], lk. 342). Kaasruumi V^* ühe baasi moodustavad niisiis tema elemendid $f^1, f^2, \dots, f^n$. Üldiselt baase ruumides V ja V^* , mille puhul on rahuldatud tingimused (67.3), nimetatakse teineteise *kaasbaasideks*.

Osutub, et $(V^*)^* = V$, s. t. ruumid V ja V^* on teineteise kaasruumid. See võrdus järeldub seosest (67.2), kus a_i ja x^i sisalduvad täiesti samaväärselt. Seost (67.2) võib nimelt käsitleda eeskirjana, mis fikseeritud vektori $x \in V$ korral seab igale elemendile $a \in V^*$ (lineaarvormile ruumis V) vastavusse reaalarvu $a(x)$. Sel korral tekib a) ja b) põhjal lineaarvorm kaasruumis V^* , kusjuures a_i ja x^i samaväärsusest järeldub, et niiviisi võib kätte saada iga lineaarvormi ruumis V^* . Seega V ja $(V^*)^*$ vahel on olemas loomulik isomorfism, mis lubabki need kaks vektorruumi samastada.

Linearkujutuse $V \rightarrow W$ teine tähtis erijuht on see, mil $W = V$. Sel korral kõneldakse vektorruumi V *lineaarteisendusest* $A: V \rightarrow V$ ([1], lk. 359). Kaasruumi V^* mõiste võimaldab niisugust lineaarteisendust käsitleda sama skeemi järgi nagu bilineaarvormi, kusjuures skeemi üldistus viibki tensori mõisteni. *Bilineaarvorm* kujutab endast teatavasti kujutust $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, mis on lineaarne

mõlema argumendi järgi ([1], lk. 441); seega, kui siin $(x, z) \mapsto \mapsto f(x, z)$, siis

$$\begin{aligned} f(x+y, z) &= f(x, z) + f(y, z), & f(x, z+w) &= f(x, z) + f(x, w), \\ f(\lambda x, z) &= \lambda f(x, z), & f(x, \lambda z) &= \lambda f(x, z). \end{aligned}$$

Antud lineaarteisenduse $A: V \rightarrow V$ korral on võimalik määrata analoogiline kujutus $T: V \times V^* \rightarrow \mathbf{R}$ järgmiselt:

$$T(x, a) = a(A(x)). \quad (67.5)$$

Võrdustest 1), 2), a) ja b) järeldub otseselt selle kujutuse T lineaarsus mõlema argumendi järgi:

$$\begin{aligned} T(x+y, a) &= T(x, a) + T(y, a), & T(x, a+b) &= T(x, a) + T(x, b), \\ T(\lambda x, a) &= \lambda T(x, a), & T(x, \lambda a) &= \lambda T(x, a). \end{aligned} \quad (67.6)$$

Seejuures iga selliste lineaarsusomadustega kujutus $T: V \times V^* \rightarrow \mathbf{R}$ on tekitatud parajasti ühe lineaarkujutuse $A: V \rightarrow V$ poolt. Niisuguse A saamiseks tuleb nimelt fikseeritud $x \in V$ puhul vaadelda kujutust $V^* \rightarrow \mathbf{R}$, kus $a \mapsto T(x, a)$, lineaarvormina ruumis V^* ja arvestada, et iga lineaarvorm ruumis V^* on võrduse $(V^*)^* = V$ kohaselt samastatav teatava vektoriga $y \in V$, mis tulebki lugeda vektoriks $A(x)$. Vahetult on võimalik (67.6) abil kontrollida, et selline A on lineaarkujutus $V \rightarrow V$. Jõuame uuesti võrduseni (67.5), ainult nüüd määrab ta A antud T järgi. Niiviisi on korraldatud üksühene vastavus bilineaarkujutuste $T: V \times V^* \rightarrow \mathbf{R}$ (s.t. tingimusi (67.6) rahuldavate kujutuste) ja lineaarkujutuste $A: V \rightarrow V$ vahel. Meenutame ühtlasi analoogilist üksühest vastavust lineaarkujutuste $V^* \rightarrow \mathbf{R}$ ja vektorite $x \in V$ vahel.

Kõike öeldut üldistades saame tensori mõiste anda järgmiselt. *Tensoriks*¹ nimetatakse antud vektorruumi V korral kujutust

$$T: \underbrace{V \times \dots \times V}_p \times \underbrace{V^* + \dots \times V^*}_q \rightarrow \mathbf{R},$$

mis on lineaarne oma iga argumendi järgi (ehk, nagu öeldakse, on $(p+q)$ -lineaarne). Täpsemalt on siin tegemist $(p+q)$ -järku, p korda kovariantse ja q korda kontravariantse tensoriga T ehk lühemalt, (p, q) -tensoriga T .

Äsjamainitud üksüheseid vastavusi silmas pidades võime nüüd öelda, et $(0,1)$ -tensor on samastatav vektoriga ruumis V , $(1,1)$ -tensor aga lineaarkujutusega $V \rightarrow V$. Vahetult on selge, et lineaarvorm $a: V \rightarrow \mathbf{R}$ on $(1,0)$ -tensor ning bilineaarvorm $V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ $(2,0)$ -tensor.

Hästituntud üksühene vastavus ruutvormide $F: V \rightarrow \mathbf{R}$ ja sümmeetriliste bilineaarvormide $f: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ vahel ([1], lk. 443), mille kohaselt $F(x) = f(x, x)$ ja $f(x, y) = \frac{1}{2} [F(x+y) - F(x) -$

¹ Lad. k. *tensor* — pingutaja; nimetus kujunes teoreetilises mehaanikas elastsusnähtuste uurimisel, nimelt pingete iseloomustamisel.

— $F(y)]$ (vrd. eespool (10.2)), võimaldab järgnevalt ka ruutvorme käsitleda eri tüüpi (2,0)-tensorite, nn. sümmeetriliste tensorite abil.

68. Vektorruumi tensorialgebra. Osutub, et antud vektorruumi V ning fikseeritud p ja q korral kõik (p, q) -tensorid moodustavad vektorruumi, kui kahe sellise tensori T ja S korral defineerida

$$(T+S)(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q) = \\ = T(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q) + S(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q), \quad (68.1)$$

$$(\lambda T)(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q) = \lambda T(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q). \quad (68.2)$$

Vahetult võib kontrollida, et aksioomid 1°—8° on siin rahuldatud. Seejuures 0 osas on tensor, mille puhul kogu $V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^*$ kujutub arvuks $0 \in \mathbf{R}$. Mis puutub aksioomi 9°, siis on ka see n -mõõtmelise vektorruumi V korral rahuldatud, kuid muidugi arvust n erineva naturaalarvu puhul; kontrolli lükkame edasi järgmisse artiklisse.

Vektoralgebra lineaartehete — liitmise ja reaalarvuga korrutamise kõrval saab tensorite puhul defineerida ka nende *korrutamise*. Olgu antud (p, q) -tensor T ja (r, s) -tensor S . Kui $(p, q) \neq (r, s)$, siis liita me neid ei saa, aga korrutada küll ja nimelt järgmisel moel. Defineerime $T \cdot S$ valemiga

$$(T \cdot S)(z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, \dots, z_{p+r}, a^1, \dots, a^q, a^{q+1}, \dots, a^{q+s}) = \\ = T(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q) \cdot S(z_{p+1}, \dots, z_{p+r}, a^{q+1}, \dots, a^{q+s}); \quad (68.3)$$

paremal on tegelikult kahe reaalarvu korrutis. Tulemus $T \cdot S$ osutub, nagu kerge kontrollida, $(p+r, q+s)$ -tensoriks. Rõhutame, et kahe (p, q) -tensori T ja S korrutis $T \cdot S$ on $(2p, 2q)$ -tensor ja läheb seega (p, q) -tensorite vektorruumist välja. (Seetõttu polegi varem vaadeldud kahe lineaarvormi või kahe vektori seda laadi korrutisi, sest need oleksid viinud seni tundmatute objektideni.)

Kui tahame moodustada ka tensorite korrutamise suhtes kinnist hulka, siis tuleb vaadelda $(0, 0)$ -tensorite vektorruumi ehk $\mathbf{R}$, $(1, 0)$ -tensorite vektorruumi ehk V^* , $(0, 1)$ -tensorite vektorruumi ehk V , $(1, 1)$ -tensorite vektorruumi jne., (p, q) -tensorite vektorruumi jne. *otsesummat*. Viimase all mõistetakse kõnesolevatest vektorruumidest järjest võetud tensorite lõpmatute süsteemide hulka, kus igas süsteemis on ainult mingi lõplik arv tensoreid nullist erinevad ja milles süsteemide liitmine ning reaalarvuga korrutamine on defineeritud kõigi süsteemides samal kohal olevate tensorite liitmise või vastavalt sama reaalarvuga korrutamise teel (vrd. [1], lk. 513). Niisugune otsesumma kujutab endast (lõpmatumõõtmelist) vektorruumi selles mõttes, et aksioomid 1°—8° on rahuldatud; kontrolli jätame lugeja hooleks. Ühtlasi on see otsesumma kinnine tensorite korrutamise suhtes, mis lisandub niisiis vektorruumi tehetele. Tulemuseks on teatav algebra ([1], lk. 153), mida nüüd on kohane nimetada *tensorialgebraks*.

Lisaks liitmis- ja korrutamistehetele on tensorialgebrale omased

veel teatavad spetsiifilised tehted — argumentide permuteerimine ja ahendamine.

Olgu naturaalarvude $1, 2, \dots, p$ seast valitud mingid k erinevat $r_1, r_2, \dots, r_k$ kasvavas järjekorras. Vaatleme nende teatavat permutatsiooni $r_{\sigma(1)}, r_{\sigma(2)}, \dots, r_{\sigma(k)}$. Antud (p, q) -tensori T korral defineerime

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(\dots, z_{r_1}, \dots, z_{r_2}, \dots, z_{r_k}, \dots) = \\ = T(\dots, z_{r_{\sigma(1)}}, \dots, z_{r_{\sigma(2)}}, \dots, z_{r_{\sigma(k)}}, \dots); \end{aligned} \quad (68.4)$$

punktiirid tähistavad kirjutamata jäänud argumente, mis jäävad muutumatuks, väljakirjutatud argumendid esimese p seast aga vahetuvad. Vahetult võib kontrollida, et T_{σ} on samuti (p, q) -tensor. Oeldakse, et ta on saadud tensorist T r_1 -se, r_2 -se, $\dots$, r_k -nda *argumendi permutatsiooniga* σ . Nii näiteks võib bilineaarvormist f saada bilineaarvormi f_{σ} väärtustega $f_{\sigma}(z_1, z_2) = f(z_2, z_1)$; siin $\sigma(1) = 2$; $\sigma(2) = 1$.

Analoogiliselt defineeritakse arvude $1, 2, \dots, q$ seast valitud $s_1, s_2, \dots, s_l$ korral tensor T_{τ} , mis on saadud tensorist T $p+s_1$ -se, $p+s_2$ -se, $\dots$, $p+s_l$ -nda *argumendi permutatsiooniga* τ .

Et iga permutatsiooni saab tuletada teatava arvu transpositsioonide teel ([1], lk. 17), siis on ka argumentide iga permuteerimine tensoris saadav argumendipaaride teatava arvu transpositsioonide järjest rakendamise tulemusena.

Antud (p, q) -tensori T ahendamiseks tuleb valida üks argument z_k esimese p seast ja üks argument a^l viimase q seast. Fikseerides kõik ülejäänud argumendid, saame seose (67.5) põhjal teatava lineaarteisenduse

$$A = A(z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_p, a^1, \dots, a^{l-1}, a^{l+1}, \dots, a^q),$$

kus paremal on näidatud, et see lineaarteisendus sõltub tegelikult nendest ülejäänud argumentidest; seejuures sõltuvus on iga niisuguse argumendi suhtes sama seose (67.5) põhjal lineaarne.

Lineaarteisendus $A : V \rightarrow V$ määrab teatavasti ühe invariantse reaalarvu — oma jälje $J(A)$, mis iga konkreetse baasi korral ruumis V on teisendusmaatriksi peadiagonaali elementide summa ([1]; lk. 372, 377) ja ülejäänud argumentide suhtes seetõttu samuti lineaarne. Tekib uus kujutus $\underbrace{V \times \dots \times V}_{p-1} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{q-1} \rightarrow \mathbb{R}$, mis

nende argumentide igale fikseerimisele seab vastavusse $J(A)$ ja mis kujutab endast teatavat $(p-1, q-1)$ -tensorit. See viimane tensor kannab nimetust: antud (p, q) -tensori A ahend k -nda ja $(p+l)$ -nda *argumendi järgi*.

Tensoralgebra ülalkirjeldatud põhitehted — liitmine, korrutamine (sealhulgas reaalarvuga kui $(0,0)$ -tensoriga), argumentide permuteerimine ja ahendamine võimaldavad kombineerida mitmeid uusi, rakendustes tähtsaid võtteid uute tensorite saamiseks antuist.

Kui mingi valiku $r_1, r_2, \dots, r_k$ korral moodustada kõikvõimalikud permutatsioonid ja antud (p, q) -tensorist T , kus $k \leq p$, teha kõik

tensorid T_σ ning seejärel võtta kõigi nende aritmeetiline keskmine

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma} T_{\sigma}, \quad (68.5)$$

siis tekib uus (p, q) -tensor, mille kohta öeldakse, et ta on saadud tensorist T selle *sümmetriseerimisel* r_1 -se, r_2 -se, ..., r_k -nda argumendi järgi. Näiteks bilineaarvormi f sümmetriseerimisel saadakse sümmeetriline bilineaarvorm f' selliselt, et

$$f'(z_1, z_2) = \frac{1}{2} [f(z_1, z_2) + f(z_2, z_1)].$$

Üldiselt, (p, q) -tensorit T nimetatakse *sümmeetriliseks* r_1 -se, r_2 -se, ..., r_k -nda argumendi järgi, $k \leq p$, kui ta ei muutu neist ühegi kahe transponeerimisel. Lihtne on järeldada, et tensori sümmetriseerimisel tekib sümmeetriline tensor.

Eelöeldu käib analoogiliselt ka (p, q) -tensori T $p+s_1$ -se, $p+s_2$ -se, ..., $p+s_l$ -nda argumendi kohta, $l \leq q$.

Sümmetriseerimise kõrval tuleb sageli kasutada ka tensori *kaldsümmetriseerimist* ehk *alterneerimist*, mis antud (p, q) -tensori korral tähendab üleminekut tensorile

$$\frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) T_{\sigma}, \quad (68.6)$$

kus kordajaks (lad. k. *signum* — märk) on

$$\text{sgn } \sigma = \begin{cases} +1, & \text{kui } \sigma \text{ on paarispermutatsioon,} \\ -1, & \text{kui } \sigma \text{ on paaritu permutatsioon} \end{cases}$$

([1], lk. 17, 366). Bilineaarvormi f puhul tekib niimoodi kaldsümmeetriline bilineaarvorm f'' selliselt, et

$$f''(z_1, z_2) = \frac{1}{2} [f(z_1, z_2) - f(z_2, z_1)].$$

Üldiselt, (p, q) -tensorit T nimetatakse *kaldsümmeetriliseks* r_1 -se, r_2 -se, ..., r_k -nda argumendi järgi, $k \leq p$, kui ta muudab märgi neist ükskõik millise kahe transponeerimisel. Kaldsümmetriseerimisel tekib alati kaldsümmeetriline tensor. Kõik see on muidugi ülekantav ka argumentidele viimase q seast.

Laialdaselt kasutatakse sellist kombineeritud tehet nagu kahe tensori ahendatud korrutise moodustamine, mille juurde me järgnevalt asume.

69. Tensori koordinaadid. Tensorite ahendatud korrutist ja üldiselt antud tensori ahendit on lihtne selgitada tensori koordinaatide abil vektorruumi V teataval baasil $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sellised koordinaadid on asendamatud ka tensorväljade käsitlemisel.

Antud (p, q) -tensori T koordinaatideks baasil $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ nimetatakse reaalarve

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = T(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}), \quad (69.1)$$

kus $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ on selle baasi kaasbaas; siin indeksid $i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_q$ omandavad üksteisest sõltumatult väärtusi $1, 2, \dots, n$. Seega on tegemist teataval viisil organiseeritud n^{p+q} reaalarvuga.

Näiteks bilineaarvormi f koordinaadid $f(e_i, e_k) = a_{ik}$ moodustavad selle bilineaarvormi maatriksi baasil $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ([1], lk. 442). Lineaarteisenduse A kui tensori koordinaadid, milleks (67.5) põhjal on

$$\begin{aligned} T_i^j &= T(e_i, f^j) = f^j(A(e_i)) = f^j\left(\sum_{k=1}^n A_i^k e_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_i^k f^j(e_k) = \sum_{k=1}^n A_i^k \delta_k^j = A_i^j, \end{aligned} \quad (69.2)$$

moodustavad lineaarteisenduse maatriksi baasil ε ([1], lk. 362). Lineaarvormi a koordinaadid (67.1) on $a(x)$ avaldise (67.2) kordajad a_i muutujate x^i ees, vektori x kui tensori koordinaadid on aga kordajad x^i samas avaldises muutujate a_i järel.

Võrdustest (68.1—3) ja (69.1) järeldub vahetult, et

$$(T+S)_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + S_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \quad (69.3)$$

$$(\lambda T)_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \lambda T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}, \quad (69.4)$$

$$(T \cdot S)_{i_1 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_{q+s}} = T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot S_{i_{p+1} \dots i_{p+r}}^{j_{q+1} \dots j_{q+s}}. \quad (69.5)$$

Kui σ on arvude $1, 2, \dots, p$ seast tehtud valiku $r_1, r_2, \dots, r_k$ mingi permutatsioon, siis (68.4) ja (69.1) põhjal

$$(T_\sigma)_{\dots i_{r_1} \dots i_{r_2} \dots i_{r_k} \dots}^{j_1 j_2 \dots j_q} = T_{\dots i_{r_{\sigma(1)}} \dots i_{r_{\sigma(2)}} \dots i_{r_{\sigma(k)}} \dots}^{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Tensori sümmetriseerimisel ja alterneerimisel kasutatakse koordinaatide puhul järgmist sümboolikat. Kui (p, q) -tensor T koordinaatidega $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ on sümmetriseeritud oma esimese $k < p$ argumendi järgi, siis saadud tensori (68.5) koordinaadid tähistatakse $T_{(i_1 i_2 \dots i_k) i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$.

Näiteks

$$T_{(i_1 i_2 i_3) i_4}^{j_1} = \frac{1}{3!} \left(T_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{j_1} + T_{i_2 i_3 i_1 i_4}^{j_1} + T_{i_3 i_1 i_2 i_4}^{j_1} + \right. \\ \left. + T_{i_2 i_1 i_3 i_4}^{j_1} + T_{i_1 i_3 i_2 i_4}^{j_1} + T_{i_3 i_2 i_1 i_4}^{j_1} \right).$$

Analoogiliselt talitatakse sümmetriseerimisel mingite teiste argumentide järgi. Kui need argumentid pole kõrvuti, siis vahelejäädud argumentidele vastavad indeksid eraldatakse püstkriipsude vahele. Näiteks

$$a_{(i_1 | i_2 | i_3)} = \frac{1}{2} (a_{i_1 i_2 i_3} + a_{i_3 i_2 i_1}).$$

Tensori alterneerimisel eeskirja (68.6) järgi kumersulud (...) asendatakse siin nurksulgudega [...]. Näiteks

$$T_{[i_1 i_2 | i_3 | i_4]}^{j_1} = \frac{1}{3!} \left(T_{i_1 i_2 i_3 i_4}^{j_1} + T_{i_2 i_4 i_3 i_1}^{j_1} + T_{i_4 i_1 i_3 i_2}^{j_1} - \right. \\ \left. - T_{i_2 i_1 i_3 i_4}^{j_1} - T_{i_1 i_4 i_3 i_2}^{j_1} - T_{i_4 i_2 i_3 i_1}^{j_1} \right);$$

märgime, et paremal ülemises reas on 1, 2, 4 tsükleerimisel saadud paarispermutatsioonidele vastavad liidetavad, alumise rea liikmed vastavad paaritutele permutatsioonidele.

Tensori ahendi koordinaatide tuletamist alustame (1,1)-tensorist T ehk lineaarteisendusest A . Siin on ahendiks $J(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i$, mis (69.2) järgi avaldub kujul

$$J(A) = \sum_{i=1}^n T(e_i, f^i).$$

Vastavalt sellele on üldiselt (p, q) -tensorist T k -nda ja $(p+l)$ -nda argumenti järgi ahendamisel saadud $(p-1, q-1)$ -tensori koordinaadid

$$T(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}, e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, \dots, f^{j_{l-1}}, f^{j_{l+1}}, \dots, f^{j_q}) = \\ = \sum_{i=1}^n T(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}, e_i, e_{i_{k+1}}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, \dots, f^{j_{l-1}}, f^i, f^{j_{l+1}}, \dots, f^{j_q}) = \\ = \sum_{i=1}^n T_{i_1 \dots i_{k-1} i i_{k+1} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_q}. \quad (69.6)$$

Sageli tuleb ahendada mitme argumentipaari järgi. Summamärkide kuhjumise vältimiseks rakendatakse A. Einsteini¹ ettepanekul kokkulepet, mille kohaselt hoopiski loobutakse nendest märkidest ja alati, kui mingi täht esineb üksliikmes indeksina kaks korda, loe-

¹ Albert Einstein (1879—1955), saksa füüsikateoreetik, rakendas kõnesolevat kokkulepet oma üldrelatiivsusteooriale pühendatud töödes.

takse, et toimub summeerimine selle indeksi kõigi väärtuste järgi (vrd. [6], lk. 395; tähti erinevate lisaindeksitega, näiteks i_1 ja i_2 loetakse seejuures eri tähtedeks).

Huvitav on see, et antud (p, q) -tensori T , vektorite $z_1, z_2, \dots, z_p$ ja lineaarvormide $a^1, a^2, \dots, a^q$ korral osutub $T(z_1, z_2, \dots, z_p, a^1, a^2, \dots, a^q)$ ahendatud korrutiseks. Tõepoolest, T lineaarsusest oma iga argumendi järgi järeldub, et

$$\begin{aligned} T(z_1, z_2, \dots, z_p, a^1, a^2, \dots, a^q) &= \\ &= T(z_1^{i_1} e_{i_1}, z_2^{i_2} e_{i_2}, \dots, z_p^{i_p} e_{i_p}, a_{j_1}^1 f^{j_1}, a_{j_2}^2 f^{j_2}, \dots, a_{j_q}^q f^{j_q}) = \\ &= T(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_p^{i_p} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_q}^q = \\ &= T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_p^{i_p} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_q}^q, \end{aligned} \quad (69.7)$$

viimane avaldis on aga $(0,0)$ -tensor, mis on (69.5) ja (69.6) põhjal saadud ülalmärgitud tensorite (vektor on $(0,1)$ -tensor ja lineaarvorm $(1,0)$ -tensor) korrutamisel ja tekkinud korrutise kui $(p+q, p+q)$ -tensori täielikul ahendamisel.

Rakendustes on oluline osata koordinaatide järgi ära tunda, kas on tegemist tensoriga või mitte, eriti aga eri baasidel antud koordinaatide järgi otsustada, kas on tegemist ühe ja sama tensoriga või mitte. Iseloomuliku tunnuse saamiseks vaatleme, kuidas teisevad tensori koordinaadid üleminekul ühelt baasilt teisele vektorruumis V . Erijuhtudel, kui tegemist on vektoriga, lineaarteisendusega või bilineaarvormiga, leiame vastuse kõrgema algebra kursusest ([1], lk. 349, 376, 443). Järgnev tulemus üldistab neid lahendusi suvalise tensori juhule.

Olgu vektorruumis V antud kaks baasi $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ja $\varepsilon' = \{e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}\}$, kusjuures $\varepsilon' = \varepsilon C$ ehk üksikasjalikumalt

$$e_{i'} = e_i C_i^{i'} \quad (69.8)$$

(summeerida i järgi!), kus $C = \|C_i^{i'}\|$ on teatav regulaarmatriks ([1], lk. 349), s.t. $\det |C| \neq 0$. Esimese baasi kaasbaasi elemendid (lineaarvormid) tähistame endiselt $f^1, f^2, \dots, f^n$, kuid korraldame nad nüüd veeruna, mille tähistame η . Teise kaasbaasi elemendid $f^{1'}, f^{2'}, \dots, f^{n'}$ korraldame veeruks η' . Sel korral (67.3) järgi

$$f^j(e_i) = \delta_i^j; \quad f^{j'}(e_{i'}) = \delta_{i'}^{j'}.$$

Võrduse (67.4) kohaselt saab avaldada

$$f^{j'} = {}'C_j^{j'} f^j.$$

Siit järeldame, et

$$\delta_{i'}^{j'} = f^{j'}(e_{i'}) = ({}'C_j^{j'} f^j)(e_i C_i^{i'}) = {}'C_j^{j'} f^j(e_i) C_i^{i'} = {}'C_j^{j'} \delta_i^j C_i^{i'} = {}'C_i^{j'} C_i^{i'},$$

mistõttu $'C = \|{}'C_j^{j'}\|$ on C pöördmatriks, sest $'CC$ üldelement on

ühikmaatriksi üldelement $\delta_{i'}^{j'}$, seega $'CC$ on ühikmaatriks. Niisiis, $'C=C^{-1}$ ja $\eta' = C^{-1}\eta$. Edaspidi jätame C^{-1} üldelemendilt märgi $'$ ära, seega $C^{-1} = \|C_j^{j'}\|$. Erinevalt C üldelemendist $C_{i'}^j$, on siin priimiga indeks ülal. Tekivad seosed $f^{j'} = C_j^{j'} f^j$,

$$C_i^{j'} C_{i'}^i = \delta_{i'}^{j'}, \quad C_{i'}^i C_j^i = \delta_j^i. \quad (69.9)$$

Järgnevalt võimegi tuletada valemi, mis seob (p, q) -tensori koordinaate eri baasidel ε ja ε' :

$$\begin{aligned} T_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{j'_1 j'_2 \dots j'_q} &= T(e_{i'_1}, e_{i'_2}, \dots, e_{i'_p}, f^{j'_1}, f^{j'_2}, \dots, f^{j'_q}) = \\ &= T(e_{i_1} C_{i'_1}^{i_1}, e_{i_2} C_{i'_2}^{i_2}, \dots, e_{i_p} C_{i'_p}^{i_p}, C_{j_1}^{j'_1} f^{j_1}, C_{j_2}^{j'_2} f^{j_2}, \dots, C_{j_q}^{j'_q} f^{j_q}) = \\ &= C_{j_1}^{j'_1} C_{j_2}^{j'_2} \dots C_{j_q}^{j'_q} T(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) C_{i'_1}^{i_1} C_{i'_2}^{i_2} \dots C_{i'_p}^{i_p} = \\ &= C_{j_1}^{j'_1} C_{j_2}^{j'_2} \dots C_{j_q}^{j'_q} T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} C_{i'_1}^{i_1} C_{i'_2}^{i_2} \dots C_{i'_p}^{i_p}. \end{aligned} \quad (69.10)$$

Tulemuse rakendamine näiteks lineaarteisenduse puhul annab (69.2) põhjal tuttava valemi ([1], lk. 376)

$$A_{i'}^{j'} = C_j^{j'} A_i^j C_{i'}^i \quad \text{ehk} \quad A' = C^{-1} A C. \quad (69.11)$$

Nüüd saab täielikult selgitada küsimuse tensori määramisest koordinaatide järgi. Olgu teataval baasil ε antud reaalarvusteem $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, s.t. teataval viisil indeksitega organiseeritud n^{p+q} reaalarvu süsteem, mille abil on seose (69.7) järgi määratav (p, q) -tensor T . Olgu samal viisil määratud teatav (p, q) -tensor baasil ε' antud reaalarvusteemi $T_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}$ abil. Tulemuseks on seesama tensor T parajasti siis, kui süsteemide arvud on seotud valemiga (69.10). Tingimuse tarvilikkus on eespool tõestatud, piisavuse põhjendamiseks tuleb (69.7) parem pool kirjutada välja baasil ε' arvestada, et selles $z^{i'} = C_{i'}^i z^i$, $a_{j'} = a_j C_j^{j'}$, ning korduvalt rakendada võrdusi (69.9).

Valemit (69.10) nimetatakse sageli teisenemise tensorseaduseks. Juhtudel, mil $p+q=2$, saab teda esitada maatriksite korrutamise abil ([1], lk. 89). Juhul kui $p=q=1$, ongi seda tehtud valemis (69.11); ülemisi indekseid on käsitletud esimestena, alumisi teis-tena.

Kui samas laadis vaadelda bilineaarvormi, mil $p=2$, $q=0$, tähistades koordinaatide maatriksi $A = \|a_{i_1 i_2}\|$, saame (69.10) järel-
dusena

$$a_{i'_1 i'_2} = a_{i_1 i_2} C_{i'_1}^{i_1} C_{i'_2}^{i_2}. \quad (69.12)$$

Et siin paremal saada maatriksite korrutise üldelementi ([1], lk. 89) tuleb parem pool kirjutada kujul $C_{i'_1}^{i_1} a_{i_1 i_2} C_{i'_2}^{i_2}$ ja seejärel esi-

meses teguris üleminekuga maatriksi $C = \|C_{i'}^i\|$ transponeeritud maatriksile C^t vahetada ülemise ja alumise (s.t. esimese ja teise) indeksi osad. Niiviisi jõuame tuntud seoseni $A' = C^t A C$ ([1], lk. 443).

Uusi jooni lisandub tensoralgebras juhul, kui vektorruumis V on fikseeritud teatav regulaarne bilineaarvorm g , teisiti öeldes, kui V on muudetud *regulaarseks bilineaarse meetrikaga ruumiks* ([1], lk. 443), nagu see rakendustes sageli esineb. Nii on näiteks valemiga (1.5) defineeritud skalaarkorrutis üks selline bilineaarvorm, mis muudab ruumi E_n vektorite hulga eukleidiliseks vektorruumiks.

Üldiselt moodustavad g koordinaadid $g_{i_1 i_2} = g(e_{i_1}, e_{i_2})$ teatava regulaarmaatriksi $\|g_{i_1 i_2}\|$, kusjuures (69.12) järgi

$$g_{i' i'_2} = g_{i_1 i_2} C_{i'}^{i_1} C_{i'_2}^{i_2}. \quad (69.13)$$

Sellel regulaarmaatriksil on olemas pöördmaatriks. Selle pöördmaatriksi transponeeritud maatriksi tähistame $\|g^{j_1 j_2}\|$. Seega

$$g_{i_1 i_2} g^{j_1 j_2} = \delta_{i_1}^{j_1}, \quad g^{j_1 j_2} g_{i_1 i_2} = \delta_{i_1}^{j_1}. \quad (69.14)$$

Määrame antud baasil ε koordinaatide $g^{j_1 j_2}$ järgi (0,2)-tensori g^* , s.t. defineerime

$$g^*(a^1, a^2) = g^{j_1 j_2} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2.$$

Osutub, et see tensor g^* ei sõltu baasi ε valikust. Põhjenduseks näitame, et selle tensori koordinaadid teisel baasil ε' , mis (69.10) järgi avalduvad kujul

$$g^{j'_1 j'_2} = C_{j_1}^{j'_1} C_{j_2}^{j'_2} g^{j_1 j_2}, \quad (69.15)$$

on parajasti maatriksi $\|g_{i' i'_2}\|$ pöördmaatriksist transponeerimisel saadud maatriksi elemendid, nii et baasil ε' ülalkirjeldatud viisil määratav tensor ühtib tensoriga g^* . Tõepoolest, (69.13), (69.15), (69.9) ja (69.14) järgi

$$\begin{aligned} g_{i' i'_2} g^{j'_1 j'_2} &= (g_{i_1 i_2} C_{i'}^{i_1} C_{i'_2}^{i_2}) (C_{j_1}^{j'_1} C_{j_2}^{j'_2} g^{j_1 j_2}) = g_{i_1 i_2} C_{i'}^{i_1} (C_{i'}^{i_2} C_{j_2}^{j'_2}) C_{j_1}^{j'_1} g^{j_1 j_2} = \\ &= g_{i_1 i_2} C_{i'}^{i_1} \delta_{i_2}^{j_2} C_{j_1}^{j'_1} g^{j_1 j_2} = (g_{i_1 i_2} g^{j_1 j_2}) C_{i'}^{i_1} C_{j_1}^{j'_1} = \\ &= \delta_{i_1}^{j_1} C_{i'}^{i_1} C_{j_1}^{j'_1} = C_{i'}^{j'_1} C_{i_1}^{j_1} = \delta_{i_1}^{j'_1}, \end{aligned}$$

kuid seda oligi vaja näidata.

Koos (2,0)-tensoriga g on niisiis fikseeritud ka teatav (0,2)-tensor g^* ; tensoreid g ja g^* nimetatakse vastavalt *ko-* ja *kontravariantseks meetriliseks tensoriks* vektorruumis V . Nende abil saab korraldada üksühese vastavuse ruumi V ja selle kaasruumi V^* vahel järgmiselt. Vektori $z \in V$ puhul kujutab tema ahendatud korrutis tensoriga g endast (1,0)-tensorit ehk lineaarvormi, seega ruumi V^* elementi, mille koordinaatideks on $z^i g_{ii}$. Analoogiliselt, lineaarvormi $a \in V^*$ puhul on tema ahendatud korrutis tensoriga g^* (0,1)-tensor

ehk vektor koordinaatidega $a_i g^{ij_2}$. Seejuures niiviisi korraldatud kujutused $V \rightarrow V^*$ ja $V^* \rightarrow V$ on teineteise pöördkujutused, sest

$$(z^i g_{ij}) g^{jj_2} = z^i (g_{ij} g^{jj_2}) = z^i \delta_i^{j_2} = z^{j_2},$$

seega mõlemad on üksühesed pealekujutused.

Samal viisil saab suvalise (p, q) -tensori puhul iga ülemise indeksi muuta g abil alumiseks ja iga alumise indeksi g^* abil ülemiseks, s.t. muuta p ja q väärtusi summat $p+q$ muutmata. Seda operatsiooni nimetatakse *indeksi langetamiseks* või *tõstmiseks*. Näiteks tensorist T koordinaatidega $T_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ võib saada nii tensori koordinaatidega $T_{i_1 j_1}^{j_2 j_2}$ kui ka tensori koordinaatidega $T_{i_1 i_2}^{i_1 i_1}$, kuid samal ajal näiteks ka tensorid koordinaatidega $T_{j_1 j_2}^{j_2 j_2}$ ja $T_{i_1 i_1}^{i_1 i_1}$. Asi läheb veelgi keerulisemaks, kui langetatavaid või tõstetavaid indekseid on mitu. Selleks et tulemusi lühemalt kirja panna ja seejuures määramatusest lahti saada, on lepitud kokku bilineaarse meetrikaga vektorruumi (erijuhul eukleidilise vektorruumi) tensorite puhul kasutada indekseid uut järjestust, mis on ühtne nii ülemiste kui alumiste jaoks. Näiteks kui $p+q=3$ ja kõik indeksid on langetatud, siis tulemuses $T_{i_1 i_2 i_3}$ indekseid uuesti tõstes kirjutatakse $T_{i_1 i_2 i_3} g^{i_1 j_1} = T_{i_2 i_3}^{j_1 j_1}$, $T_{i_1 i_2 i_3} g^{i_2 j_2} = T_{i_1 i_3}^{j_2 j_2}$ ja $T_{i_1 i_2 i_3} g^{i_3 j_3} = T_{i_1 i_2}^{j_3 j_3}$. Tegelikult loetakse vastavust $V \leftrightarrow V^*$ arvestades, et kõik need tensorid on õieti üks ja seesama tensor. Sel puhul kaob vajadus eristada alumisi ja ülemisi indekseid, mistõttu väikeste $p+q$ väärtuste korral loobutakse lisaindeksitest ja äsjavaadeldud tensor kirjutatakse koordinaatide järgi kas kujul T_{ijk} või T^i_{jk} või ükskõik missugusel samaväärsel kujul, näiteks T_i^{jk} või T^{ij}_k .

Huvipakkuvasse vahekorda satuvad nüüd tensorid g ja g^* ise. Siin g_{ij} annab esimese indeksi tõstmisel (69.14) põhjal

$$g^i_j = g_{kj} g^{ki} = \delta^i_j,$$

ja kui nüüd tõsta ka teine indeks, saame

$$g^i_k g^{kj} = \delta^i_k g^{kj} = g^{ij},$$

mis kujutab endast g^* koordinaate. Seega vastavust $V \leftrightarrow V^*$ arvestades võib lugeda, et g ja g^* on ühe ja sama tensori — *meetrilise tensori* kaks erikuju (ko- ja kontravariantne kuju).

70. Tensorväli. Üldjoontes on tensorvälja mõistet tutvustatud käesoleva paragrahvi sissejuhatuses. Täpsema definitsiooni sõnastamiseks tuleb algul meenutada ruumis E_n antud piirkonna mõistet ([3], lk. 154; 155).

Lahtiseks keraks punkti $c \in E_n$ ümber raadiusega r nimetatakse punktihulka

$$K(c, r) = \{x : d(x, c) < r\}.$$

Olgu antud mingi hulk $A \subset E_n$. Punkti z nimetatakse hulga A *rajapunktiks*, kui iga lahtine kera tema ümber sisaldab nii hulka A kuuluvaid kui ka mittekuuluvaid punkte. Hulga A kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga A *rajaks*. Näiteks lahtise kera $K(c, r)$ rajaks on sfäär

$$S(c, r) = \{x : d(x, c) = r\}.$$

Hulka $A \subset E_n$ nimetatakse *lahtiseks*, kui ta koos oma iga punktiga sisaldab ka mingi lahtise kera selle punkti ümber. Näiteks lahtine kera on lahtine hulk ([3], lk. 152). Hulga A ja tema raja ühendit nimetatakse hulga A *sulundiks*. Hulka, mis ühtib oma sulundiga, teisiti öeldes, mis sisaldab oma raja, nimetatakse *kinniseks* hulgaks. Näiteks põhjapoolsfääri $\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 > 0\} \subset E_3$ raja on ekvaatorringjoon, sulund on $\{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2, x_3 \geq 0\}$ ja see on kinnine.

Hulka $D \subset E_n$, mis on mingi lahtise hulga A ja selle raja mingi alamhulga P ühend, nimetatakse *piirkonnaks* ruumis E_n . Kui raja alamhulk P on tühi, siis kõneldakse lahtisest piirkonnast, kui ta aga ühtib kogu rajaga, siis kinnisest piirkonnast. Kinniseks piirkonnaks on näiteks kinnine kera

$$\bar{K}(c, r) = K(c, r) \cup S(c, r) = \{x : d(x, c) \leq r\},$$

kui aga sellest välja jätta rajasfääri poolused — mingid kaks diametraalsed punkti —, saame piirkonna, mis pole ei lahtine ega kinnine.

Ruumi E_3 piirkondade seas eristatakse *tükiti sileda rajaga piirkondi*. Nii nimetatakse piirkonda, mille raja on teatava lõpliku arvu lihtpindade sulundite ühend. Selline on näiteks lahtine kera, sest ilma poolusteta sfäär on lihtpind (art. 31) ja tema sulundiks on kogu sfäär — lahtise kera raja; siin on raja üheainsa lihtpinna sulund. Kinnise kuubi $\{x : -1 \leq x_i \leq 1; i = 1, 2, 3\}$ raja koosneb kuuest kinnisest ruudust, mis on lihtpinnad. Toori sisemus $\{x : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 < b^2, 0 < b < a\}$ on lahtine piirkond, mille raja on üksainus lihtpind.

Tükiti sileda rajaga piirkonna mõiste on laiendatav ka n -mõõtmelise eukleidilise ruumi E_n juhule; kui vastavalt üldistada lihtpinna mõistet. Lihtsamatel juhtudel on seda eespool juba alustatud; näiteks on defineeritud hüperatasand (art. 1) ja hüpersfäär (art. 7) ruumis E_n . Art-s 72 anname üldise lihthüperpinna mõiste ja näitame, et hüperatasand ja poolusteta hüpersfäär on selle erijuhud. Praegu võime ruumis E_3 antud piirkondi vajalikult üldistades tuua tükiti sileda rajaga piirkondade näiteid ruumis E_n . Selline on näiteks kinnine kuup $\{x : -1 \leq x_i \leq 1; i = 1, \dots, n\}$ — kinnine piirkond, lahtine kera $K(c, r)$, alamhulk $\{x : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - a)^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 < b^2, 0 < b < a\}$ jt.

Olgu üldiselt tegemist mingi piirkonnaga D ruumis E_n . Selgi-

tame järgnevalt, mida mõista tensorvälja all piirkonnas D . Ruumi E_n vektorite hulk kujutab endast n -mõõtmelist vektorruumi V . Olgu iga punkti $x \in D$ jaoks antud teatav (p, q) -tensor T_x vektorruumis V selliselt, et vabalt fikseeritud $z_1, \dots, z_p \in V$ ja $a^1, \dots, a^q \in V^*$ korral tensori väärtus $T_x(z_1, \dots, z_p, a^1, \dots, a^q)$ on punkti x koordinaatide $x_1, \dots, x_n$ funktsioon, seejuures k korda pidevalt diferentseeruv kõigi oma argumentide x_i järgi, kus $k \geq 1$. Sel korral kõnelakse, et piirkonnas $D \subset E_n$ on antud sile (p, q) -tensorväli T sileduse järguga k .

Sileduse tingimust on lihtne väljendada tensori koordinaatide abil. Selleks tuleb vektorruumis V fikseerida vabalt mingi baas ja kooskõlas võrdusega (69.1) tähistada

$$T_x(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}, f^{j_1}, f^{j_2}, \dots, f^{j_q}) = T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}(x_1, \dots, x_n);$$

paremal on näidatud sõltuvus punkti x koordinaatidest. Tensorväli T on sile (sileduse järguga k) parajasti siis, kui kõik tema koordinaadid fikseeritud baasil on k korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid, kus $k \geq 1$. Tõepoolest, tarvilikkus on siin ilmne, piisavus aga järeldub sellest, et $T_x(z_1, z_2, \dots, z_p, a^1, a^2, \dots, a^q)$ on fikseeritud $z_1, z_2, \dots, z_p, a^1, a^2, \dots, a^q$ korral seose (69.7) põhjal võrdne avaldisega

$$T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}(x_1, \dots, x_n) z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_p^{i_p} a_{j_1}^1 a_{j_2}^2 \dots a_{j_q}^q, \quad (70.1)$$

see on aga diferentseeruvate koordinaatide korral diferentseeruv $x_1, \dots, x_n$ järgi niisama palju korda kui viimased.

Et baas on fikseeritud täiesti vabalt, siis jääb öeldu püsima ka üleminekul ühelt baasilt teisele. See on vahetult näha teisenemise tensorseadusest (69.10).

Sageli on piirkonnas D otstarbekas koordinaatide $x_1, \dots, x_n$ asemel kasutada teistsuguseid, nn. kõverjoonelisi koordinaate. Nii näiteks rakendatakse tasandil polaarkoordinaate, mis on eriti head sellises piirkonnas nagu ring; ruumis tuntakse sfäär- ja silinderkoordinaate ([3], lk. 316) jne.

Hea näite mitmesuguste koordinaatide otstarbekusest saime eespool Lobatševski ruumi $L_3(q)$ mudelite uurimisel eukleidilise ruumi E_3 lahtises keras $K(0, q)$ (art. 58 ja 61). Beltrami—Kleini mudeli puhul osutusid x_1^*, x_2^*, x_3^* kõrval kasulikeks koordinaadid u_1, u_2, u_3 , mis on nendega seotud valemite

$$\begin{aligned} x_1^* &= q \operatorname{th} u_1 \cos u_2 \cos u_3, \\ x_2^* &= q \operatorname{th} u_1 \cos u_2 \sin u_3, \\ x_3^* &= q \operatorname{th} u_1 \sin u_2 \end{aligned} \quad (70.2)$$

abil (art. 58). Seejuures (58.1) põhjal

$$x_i^* = q \frac{x_i}{x_4}; \quad i=1, 2, 3,$$

kus x_1, x_2, x_3, x_4 on pseudosfääri $L_3(Q) \subset E_4^1$ vastava punkti x koordinaadid. Poincaré mudeli jaoks olid kõige sobivamad valemitega (59.3) määratud koordinaadid, mis me tähistame nüüd u'_1, u'_2, u'_3 . Tekivad seosed

$$x_i^* = \frac{2Q^2 u'_i}{Q^2 + u'^2_1 + u'^2_2 + u'^2_3}; \quad i=1, 2, 3$$

ja nende kaudu muidugi ka teatavad seosed üleminekuks koordinaatidelt u_1, u_2, u_3 koordinaatidele u'_1, u'_2, u'_3 .

Kõverjoonelisteks nimetatakse niisuguseid uusi koordinaate seetõttu, et mingi kahe koordinaadi väärtuste fikseerimisel saadakse üldiselt kõverjooned. Näiteks u_1 fikseerimine annab sfääri raadiusega $R=Q$ th $u_1 < Q$ ja nüüd kas u_2 või u_3 fikseerimisega saadakse sellel kas paralleel (u_3 -joon) või meridiaan (u_2 -joon); samal ajal u_1 -jooned, piki mida $u_2 = \text{const}$ ja $u_3 = \text{const}$, on keskpunkti o läbivad sirged — selle sfääri normaalid. Niisiis, koordinaatjoonteks on ringjooned ja sirged, mis moodustavad kolm jooneparve. Kõnesoleva lahtise kera iga punkti, mis pole x_3^* -teljel, läbib parajasti üks joon igast parvest, kusjuures need jooned on, nagu kerge näha, paarikaupa risti.

Veelgi üldisemad on u'_i -jooned. Näiteks u'_1 -joon, piki mida $u'_2 = a_2$, ja $u'_3 = a_3$, on joon parameetriliste võrranditega

$$x_1^* = \frac{2Q^2 t}{c^2 + t^2}, \quad x_2^* = \frac{2Q^2 a_2}{c^2 + t^2}, \quad x_3^* = \frac{2Q^2 a_3}{c^2 + t^2}, \quad c^2 = Q^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

ja osutub üldjuhul, nagu parameetri t elimineerimisega kerge näha, tasandi $a_3 x_2^* - a_2 x_3^* = 0$ lõikejooneks niisuguse elliptilise silindriga, mille moodustajad on paralleelsed x_3^* -teljega, seega ellipsiks. Samuti on teatavateks ellipsiteks ka u'_2 - ja u'_3 -jooned (kusjuures erijuhtudel on võimalikud nende ellipsite kidumised kera diameetriteks x_i^* -telgedel).

Üleminekul kõverjoonelistele koordinaatidele piirkonnas D kaob ruumi E_n kõigi punktide jaoks ühiste baaside eriline tähendus. Nad asenduvad punktist x sõltuvate baasidega, mille moodustavad seda punkti läbivate koordinaatjoonte puutujavektorid.

Olgu antud n funktsiooni

$$x_j = x_j(u^1, u^2, \dots, u^n); \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (70.3)$$

mis seavad koordinaadid $x_1, x_2, \dots, x_n$ sõltuvusse n ülemise indeksiga nummerdatud argumendist $u^1, u^2, \dots, u^n$ (« u üks», « u kaks» jne.).

Valemeilt (70.3) tuleb nõuda, et

1° nad kujutaksid teatava piirkonna¹ $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ üksüheselt piirkonnaks $D \subset E_n$ või vähemalt selle mingiks osapiirkonnaks D' ,

¹ Piirkonna mõiste ruumis $\mathbb{R}^n$ defineeritakse kauguse (1.1) abil samuti nagu ruumis E_n , ainult et ruumi $\mathbb{R}^n$ puhul kauguse osa sellega piirdubki. Ruum $\mathbb{R}^n$ jääb lihtsalt koordinaatide $u^1, \dots, u^n$ ruumiks, eukleidilise ruumi E_n geomeetriaist võetakse temasse ainult piirkondi puudutavad mõisted (n.ö. topoloogia mõisted; [3], lk. 420) jättes täiesti kõrvale sellised geomeetria mõisted nagu sirge, hüpertasand jne.

2° nii nende kui ka pöördkujutust $D' \rightarrow \Delta$ määravate valemite

$$u^i = u^i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (70.4)$$

paremad pooled oleksid k korda pidevalt diferentseeruvad kõigi oma argumentide järgi vastavalt Δ või D' igas punktis, $k \geq 1$.

Sel korral kõneldakse, et valemid (70.3) määravad piirkonnas D (täpsemalt osapiirkonnas D') sileda kõverjoonelise koordinaadistiku sileduse järguga k , muutujaid $u^1, u^2, \dots, u^n$ aga nimetatakse *kõverjoonelisteks koordinaatideks*.

Näiteks valemid (70.2) määravad sileda kõverjoonelise koordinaadistiku sileduse järguga ∞ ruumi E_3 lahtises keraskas, millest on välja jäetud püstdiameeter; siin $\Delta = (0, \infty) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi)$ ja (kui u_1, u_2, u_3 indeksid kirjutada ülemiste indeksitena)

$$u^1 = \operatorname{arth} \frac{1}{\rho} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$u^2 = \arctan \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}},$$

$$u^3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}.$$

Tingimustest 1° ja 2° saab teha olulise järelduse osatuletisdeterminantide (ehk jakobiaanide) $\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right|$ ja $\det \left| \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right|$ kohta ([3], lk. 214). Et (70.3) ja (70.4) määravad teineteise pöördkujutused, siis nende järjest sooritamine annab samasuse:

$$x_j \equiv x_j(u^1(x_1, x_2, \dots, x_n), u^2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u^n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Arvutades nüüd osatuletised x_h järgi, saame liitfunktsiooni diferentseerimise valemi kohaselt ([3], lk. 180, 215)

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x_h},$$

kus vasakul on ühe sõltumatu muutuja osatuletis teise järgi, seega δ_h^j , ja paremal on maatriksite $\left\| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right\|$ ja $\left\| \frac{\partial u^i}{\partial x_h} \right\|$ korrutise üldelement. Minnes viimases võrduses üle determinantidele, saame seose

$$\det |\delta_h^j| = \det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right| \cdot \det \left| \frac{\partial u^i}{\partial x_h} \right|,$$

kus vasakul on ühikmaatriksi determinant, seega 1. Järelikult $\left\| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right\|$ ja $\left\| \frac{\partial u^i}{\partial x_h} \right\|$ on osapiirkonna D' igas punktis x teineteise pöördmaatriksid, nende determinantide korrutis on 1 ja mõlemad determinandid on nullist erinevad.

Valemite (70.3) kohaselt osutub punkti $x \in D'$ kohavektor $\overrightarrow{ox} = x$ sõltuvaks kõverjoonelistest koordinaatidest $u^1, u^2, \dots, u^n$:

$$x = x(u^1, u^2, \dots, u^n).$$

Viimaste fikseerimisel, peale ühe — näiteks u^i (loetakse « u^i ») saame teatava joone, mida nimetatakse *koordinaatjooneks*, täpsemalt, *u^i -jooneks*. Selle joone puutujavektor on kohavektori x tuleks parameetri u^i järgi, seega osatuletis $\frac{\partial x}{\partial u^i}$, mida on edaspidi otstarbekas tähistada lühidalt x_i . Niiviisi tekib igas punktis $x \in D'$ n vektorit — osatuletisvektorite $x_1, x_2, \dots, x_n$ väärtused selles punktis, kusjuures punktides $x \in D'$ on need vektorid lineaarselt sõltumatud, sest nende koordinaatidest moodustatud determinant $\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right|$ on nullist erinev igas punktis $x \in D'$, nagu eespool selgus. Järelikult need vektorid — koordinaatjoonte puutujavektorid — moodustavad igas punktis $x \in D'$ baasi, mis sõltub sellest punktist x .

Mingite teiste kõverjoonelistest koordinaatide $u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}$ puhul tekib analoogiline punktist sõltuv baas $\{x_{1'}, x_{2'}, \dots, x_{n'}\}$ teatava osapiirkonna D'' igas punktis x . Seega igas punktis $x \in D' \cap D''$ on määratud vastav baasiteisendus:

$$x_{i'} = x_i C_{i'}^i. \quad (70.5)$$

Maatriks $C = |C_{i'}^i|$ osutub tegelikult osatuletismaatriksiks, nimelt selle teisenduse jaoks, mis viib ühtedelt kõverjoonelistelt koordinaatidelt $u^1, u^2, \dots, u^n$ teistele $u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}$ ja on määratud mingite teisendusvalemitega

$$u^i = u^i(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}).$$

Sel puhul

$x = x(u^1(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}), u^2(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}), \dots, u^n(u^{1'}, u^{2'}, \dots, u^{n'}))$ ja liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja kohaselt

$$\frac{\partial x}{\partial u^{i'}} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

Seega valemis (70.5) võime täpsustada: $C_{i'}^i = u_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, ja kirjutada need valemid kujul

$$x_{i'} = x_i u_{i'}^i. \quad (70.6)$$

Samuti nagu eespool võib veenduda, et kui teha pöördteisendus, mis määratakse mingite valemitega $u^{i'} = u^{i'}(u^1, u^2, \dots, u^n)$, siis osatuleviste $u_{i'}^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ maatriks on maatriksi $\|u_{i'}^i\|$ pöördmaatriks:

$$u_{i'}^{j'} u_{i'}^i = \delta_{i'}^{j'}, \quad u_{i'}^i u_j^{i'} = \delta_j^i. \quad (70.7)$$

Saadud seosed (70.6) ja (70.7) üldistavad valemid (69.8) ja (69.9) kõverjoonelistel koordinaatide juhule. Erinevus on selles, et baasid ja baasiteisendusmaatriks sõltuvad nüüd punktist x . Samasugusesse sõltuvusse satuvad muidugi ka tensorvälja T argumentide $z_1, z_2, \dots, z_p, a^1, a^2, \dots, a^q$ koordinaadid punktist x sõltuval baasil, mistõttu valemi (69.7) paremas pooles (70.1) on nüüd kõik selles sisalduvad suurused punkti x (ehk selle punkti asendit määravate parameetrite $u^1, u^2, \dots, u^n$) funktsioonid, seejuures diferentseeruvad funktsioonid.

Tensorvälja T koordinaatide teisenemise seadus (69.10) üleminekul ühtedelt kõverjoonelistelt koordinaatidelt teistele omandab nüüd kuju

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{j'_1 j'_2 \dots j'_q} = u_{j_1}^{j'_1} u_{j_2}^{j'_2} \dots u_{j_q}^{j'_q} T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} u_{i'_1}^{i_1} u_{i'_2}^{i_2} \dots u_{i'_p}^{i_p}. \quad (70.8)$$

Kandes sellele juhule üle eelmise paragrahvi tulemuse tensori määramisest koordinaatide järgi, võime sõnastada järgmise lause. *Olgu piirkonnas D' määratud kõverjoonelistel koordinaatide $u^1, u^2, \dots, u^n$ puhul antud (p, q) -tensorväli oma koordinaatidega $T_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}(u^1, u^2, \dots, u^n)$ ning olgu piirkonnas D'' määratud koordinaatide $u^1, u^2, \dots, u^n$ puhul antud (p, q) -tensorväli koordinaatidega $T_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}(u^1, u^2, \dots, u^n)$. Need tensorväljad ühtivad piirkonnas $D' \cap D''$ parajasti siis, kui on rahuldatud võrdused (70.8).*

Tensorväljadele kanduvad üle ka kõik tensoralgebra mõisted ja operatsioonid, sest punkti $x \in D$ suvalisel fikseerimisel saame tensorväljadest vektorruumi V tavalised tensorid. Nii võib tensorvälju liita (kui nad on sama (p, q) -tüüpi), korrutada (saades (p, q) - ja (r, s) -tensorväljast $(p+r, q+s)$ -tensorvälja) ja ahendada (kui $p > 0$ ja $q > 0$) ning saab kõnelda sümmeetrilisest ja kaldsümmeetrilisest tensorväljast.

Harjutusülesanded

114. Näidata, et iga $(2, 0)$ -tensor on ühelainsal viisil avaldatav sümmeetrilise tensori ja kaldsümmeetrilise tensori summana.

115. Avaldada $(3, 0)$ -tensori (ehk *trilineaarvormi*) f kaudu temast kõigi kolme argumenti järgi alterneerimisel saadav kaldsümmeetriline $(3, 0)$ -tensor, kirjutada välja viimase tensori koordinaatide avaldised tensori f koordinaatide kaudu.

116. Tähistame antud vektorruumi V korral sümboliga S^k või $\wedge^k$ vastavalt sümmeetriliste või kaldsümmeetriliste $(k, 0)$ -tensorite hulga. Näidata, et mõlemad hulgad on tensorite liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes vektorruumid. Kuidas avaldub V mõõtme n kaudu ruumi S^k või $\wedge^k$ mõõde (s. t. ruumi suvalise elemendi oluliste koordinaatide arv)?

117. Selgitada, kas ruumide $S^0, S^1, \dots, S^k, \dots$ otsesumma $\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k$ (kui tensoralgebra teatav alamvektorruum) on tensorite korrutamise suhtes alamalgebra. Lahendada sama küsimus otsesumma $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k$ puhul!

118. Näidata, et $\bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k$ osutub tensorite sümmetriseeritud korrutamise suhtes algebraks, nn. *sümmeetriliseks algebraks*. Veenduda, et sümmeetriline algebra on samastatav n muutuja polünoomide ringiga üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$ ([1], lk. 254; siin n on V mõõde).

119. Näidata, et $\bigwedge^{n+1} = \bigwedge^{n+2} = \dots = 0$ ning et $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k = \bigoplus_{k=0}^n \bigwedge^k$ on tensorite alterneeritud korrutamise suhtes algebra, nn. *välisalgebra* (ehk *Grassmanni algebra*; vrd. art. 78, samuti [1], lk. 504).

§ 17. RIEMANNI MEETRIKA

Eriline tähendus tensorväljade seas on sümmeetrilistel (2,0)-tensorväljadel (ehk bilineaarvormiväljadel), mida võib art-s 67 märgitud üksühese vastavuse põhjal käsitleda ka ruutvormiväljadena. Kui niisuguse välja ruutvorm on igas punktis positiivselt määratud, siis nimetatakse seda välja Riemanni¹ meetrikaks. Selle eespool käsitletud erijuhud on pinna esimene ruutvorm ja vektorite skalaarkorrutis eukleidilises ruumis E_n . Käesolevas paragrahvis ühendame need erijuhud, üldistades neid sobivalt — esimest üleminekuga kõrgemasse mõõtmesse (osalt on seda juba tehtud IV ptk-s), teist üleminekuga «tasaruumist» «köverruumi». Koos sellega käsitleme rakenduslikult tähtsaid konstruktsioone uute tensorväljade saamiseks esialgsest, kusjuures ei piisa üksnes tensoralgebrast, vaid tensorarvutust tuleb laiendada ka tensoranalüüsi valdkonda.

71. Meetriline tensorväli. Alustame piirkonna $D \subset E_n$ geomeetria käsitlemisest kõverjoonelistel koordinaatide abil. Igas fikseeritud punktis x on sel puhul määratud kohavektori x osatuletisvektoritest $x_1, x_2, \dots, x_n$ moodustunud baas, mis üleminekul teistele kõverjoonelistele koordinaatidele teiseneb valemite (70.6) kohaselt. Kordajaiks neis valemis on osatuletised $u_j^{j'} = \frac{\partial u^{j'}}{\partial u^j}$, kusjuures

$$du^{j'} = u_j^{j'} du^j.$$

Viimastes seostes tunneme ära (0,1)-tensorvälja koordinaatide teisenemisseaduse, s.o. (70.8) erijuhu $p=0$ ja $q=1$ korral, millele alluvad praegu du^j ja $du^{j'}$. Üldiselt kujutab (0,1)-tensorväli endast vektorvälja piirkonnas D , sest kui $z^{j'} = u_j^{j'} z^j$, siis on igas punktis $x \in D$ määratud vektor $z = x_j z^j$, sõltumatult kõverjoonelistel koordinaatide valikust. Tõepoolest, (70.6) ja (70.7) põhjal

$$x_{j'} z^{j'} = x_j u_{j'}^j u_h^{j'} z^h = x_j \delta_h^{j'} z^h = x_j z^j.$$

Niisiis du^j käituvad nagu vektori koordinaadid.

¹ B. Riemann seadis oma 1854. a. ettekandes sellise tensorvälja «kövera» n -mõõtmelise ruumi geomeetria — Riemanni geomeetria aluseks, üldistades sellega C. Fr. Gaussi poolt antud pinna sisegeomeetria mõistet.

Vaatleme nüüd kahe vektori $z = x_i z^i$, $w = x_k w^k$ skalaarkorrutist

$$zw = (x_i z^i) (x_k w^k) = (x_i x_k) z^i w^k.$$

Kui tähistada siin

$$x_i x_k = g_{ik}, \quad (71.1)$$

saame

$$zw = g_{ik} z^i w^k. \quad (71.2)$$

Valemite (70.6) järgi

$$g_{i'k'} = x_{i'} x_{k'} = (x_i u_{i'}^{i'}) (x_k u_{k'}^{k'}) = g_{ik} u_{i'}^i u_{k'}^k. \quad (71.3)$$

Siin g_{ik} ja $g_{i'k'}$ sõltuvad, samuti nagu vektorid x_i ja $x_{i'}$, diferentseeruvalt punkti $x \in D$ koordinaatidest. Võrdlus teisenemisseadusega (70.8) näitab, et meil on tegemist teatava (2,0)-tensorväljaga g , millele g_{ik} ja $g_{i'k'}$ on koordinaatideks. Seejuures g on sümmeetriline tensorväli, sest (71.1) annab skalaarkorrutise kommutatiivsuse tõttu, et $g_{ki} = g_{ik}$.

Valemiga (71.1) defineeritud tensorvälja g nimetatakse ruumi E_n meetriliseks tensorväljaks (piirkonnas D). Nimetus on tulnud sellest, et g määrab täielikult ruumi E_n meetrika. Vahetult on see näha siis, kui võtta $u^j = x_j$. Sel korral x_i on vektor koordinaatidega

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_i^j \quad \text{ning järelikult} \quad g_{ik} = x_i x_k = \sum_{j=1}^n \delta_i^j \delta_k^j = \delta_{ik}; \quad \text{seega} \quad (71.2)$$

järgi

$$zw = \delta_{ik} z^i w^k = z^1 w^1 + \dots + z^n w^n,$$

mis on täielikus kooskõlas skalaarkorrutise esialgse definitsiooniga (vt. (1.5)). Skalaarkorrutis aga määrab tõesti kogu meetrika: kaugused, nurgad, pind- ja ruumalad, nagu selgus I ptk-s.

Tensorvälja g koordinaatide järgi saab arvutada samu meetrilisi suurusi suvaliste kõverjooneliste koordinaatide $u^1, u^2, \dots, u^n$ puhul. Nii tuleb näiteks joone kaare pikkuse arvutamisel lähtuda samuti nagu pinnateoorias (art. 36) sellest, et $s'(t) = |\mathbf{x}'(t)|$ ehk $ds^2 = d\mathbf{x}^2$. Et

$$d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} du^i = x_i du^i$$

ja seega

$$\begin{aligned} ds^2 = d\mathbf{x}^2 &= d\mathbf{x} d\mathbf{x} = (x_i du^i) (x_k du^k) = \\ &= (x_i x_k) du^i du^k = g_{ik} du^i du^k, \end{aligned}$$

siis on kaare pikkuseks

$$s = \int_a^b \sqrt{g_{ik} du^i du^k}, \quad (71.4)$$

kus paremal tuleb muidugi mõelda asendusi $u^i = u^i(t)$ joone võrrandeist. Sirgjoone võrrandid kõverjoonelistes koordinaatides pole enam lineaarsed, seetõttu sirglõigu pikkuse kui otspunktide vahelise kauguse leidmine käib üldjuhul just seda laadi määratud integraali arvutamise kaudu. Ainult juhul, kui $u^j = x_j$, mil punkte a ja b läbiva

sirgjoone parameetrilised vörrandid on $x_j = a_j + t(b_j - a_j)$; saame varasemast tuttava tulemuse: siis $g_{ik} = \delta_{ik}$, $dx_j = dt(b_j - a_j)$ ning

$$s = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} (b_i - a_i) (b_k - a_k)} dt = \\ = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2} \Big|_0^1 = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Joontevaheline nurk defineeritakse samuti nagu art-s 36 nende puutujatevahelise nurgana lõikepunktis. Arutlustega, mis on täiesti analoogilised mainitud art-s kasutatutega, saame valemit (36.3) üldistava eeskirja selle nurga arvutamiseks:

$$\cos \varphi = \frac{g_{ik} dv^i dw^k}{\sqrt{g_{ik} dv^i dv^k} \sqrt{g_{ik} dw^i dw^k}}. \quad (71.5)$$

Samuti valem (36.5), mis on muidugi rakendatav ka tasandil E_2 antud piirkonna pindala arvutamiseks kõverjoonelistele koordinaatide u^1 ja u^2 abil, saab oma loomuliku üldistuse ruumi E_n juhule. Olgu ruumis E_3 antud mõõtuv piirkond D ([2], lk. 407) ruumalaga $V(D)$. Viimane on avaldatav teatavasti kolmekordse integraalina ([3], lk. 307):

$$V(D) = \iiint_D dV = \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3.$$

Üleminekuks kõverjoonelistele koordinaatidele tuleb teha muutujate vahetus (70.3), kus praegu $n=3$. Sel juhul aga ([3], lk. 314)

$$\iiint_D dV = \iiint \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u^1, u^2, u^3)} \right| du^1 du^2 du^3,$$

kus

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u^1, u^2, u^3)} = \det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^2} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u^3} & \frac{\partial x_2}{\partial u^3} & \frac{\partial x_3}{\partial u^3} \end{vmatrix}.$$

Kui arvutada viimase determinandi ruut; korrutades ridu ridadega ([1], lk. 44), saame näiteks esimese ja teise rea puhul

$$\frac{\partial x_1}{\partial u^1} \frac{\partial x_1}{\partial u^2} + \frac{\partial x_2}{\partial u^1} \frac{\partial x_2}{\partial u^2} + \frac{\partial x_3}{\partial u^1} \frac{\partial x_3}{\partial u^2} = x_1 x_2 \text{ jne.,}$$

kokkuvõttes aga

$$\left[\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(u^1, u^2, u^3)} \right]^2 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{vmatrix} = \det |g_{ij}|.$$

Järelikult

$$V(D) = \int_{\Delta} \sqrt{\det |d_{ij}|} du^1 du^2 du^3. \quad (71.6)$$

Saadud valem on valemi (36.5) loomulik üldistus, olles samal ajal erijuht veelgi üldisemast tulemusest.

Olgu ruumis E_n antud mõõtluv piirkond D ([3], lk. 321) ruumalaga

$$\mu(D) = \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n = \int_{\Delta} \dots \int \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(u^1, \dots, u^n)} \right| du^1 \dots du^n.$$

Tehes samad operatsioonid mis eespool, leiame, et

$$\left[\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(u^1, \dots, u^n)} \right]^2 = \det |g_{ij}|,$$

mistõttu

$$\mu(D) = \int_{\Delta} \dots \int \sqrt{\det |g_{ij}|} du^1 \dots du^n. \quad (71.7)$$

Huvitav on märkida, et saadud valem on ühtlasi valemi (4.6) üldistus, kui viimases $m=n$. Selles veendumiseks tuleb piirkonnaks D võtta n -rööptahukas, mis (4.5) kohaselt koosneb punktidest $x \in E_n$ kohavektoritega

$$x = a + k_i u^i, \quad (71.8)$$

kus $0 \leq u^i \leq 1$. Siit $x_i = k_i$, $g_{ij} = x_i x_j = k_i k_j$ ja $\det |g_{ij}| = \det |k_i k_j| = \text{const}$. Järelikult

$$\mu(D) = \int_0^1 \dots \int_0^1 \sqrt{\det |k_i k_j|} du^1 \dots du^n = \sqrt{\det |k_i k_j|} = V(k_1, \dots, k_n).$$

Valemiga (71.8) määratud koordinaate $u^1, \dots, u^n$ ruumis E_n polegi õige nimetada kõverjoonelisteks, sest tegelikult u^i -joon, millel ülejäänud u^j , $j \neq i$ on fikseeritud, kujutab endast sirget (art. 2). Nad üldistavad ruumis E_3 tuntud afiinseid koordinaate ([6], lk. 107) ruumi E_n juhule. Nagu äsja selgus, on meetrilisel tensoril g nende puhul konstantseid koordinaadid. See tensor koos oma kontravariantse kujuga g^* võimaldab arendada ruumi E_n analüütilist geomeetriat afiinsetes koordinaatides. Piirdume siin üheainsa näitega.

Hüpertasandi võrrandile (1.2) tuleb afiinsetes koordinaatides kuju

$$B_0 + B_i u^i = 0.$$

Hüpertasandi $(n-1)$ -riht koosneb vektoreist w , mille afiinsed koordinaadid w^i rahuldavad tingimust

$$B_i w^i = 0.$$

Siin w^i on vektori w kui $(0,1)$ -tensori koordinaadid, viimase seose vasaku poole kui lineaarvormi kordajad aga on $(1,0)$ -tensori B koordinaadid. Kontravariantse meetrilise tensori g^* abil saab moodustada korrutise Bg^* ahendi, millel on koordinaadid $B_i g^{ij} = N^j$. See ahend kui $(0,1)$ -tensor on vektor N , mis kujutab endast vaadeldava hüpertasandi normaalvektorit. Tõepoolest,

$$Nw = g_{ik} N^i w^k = g_{ik} (B_i g^{ij}) w^k = B_i (g_{jk} g^{ij}) w^k = B_i \delta_k^j w^k = B_i w^i = 0$$

iga selle hüpertasandi $(n-1)$ -rihti kuuluva vektori w korral. Normaalvektori N skalaarruut avaldub järgmiselt:

$$N^2 = g_{jk} N^j N^k = g_{jk} (B_i g^{ij}) (B_l g^{lk}) = (g_{jk} g^{ij}) (B_i B_l g^{lk}) = \delta_k^i (B_i B_l g^{lk}) = B_k B_l g^{kl},$$

mistõttu hüpertasandil on normaalvõrrand

$$\frac{B_0 + B_i u^i}{\sqrt{B_k B_l g^{kl}}} = 0.$$

Punkt afiinsete koordinaatidega u_0^i on valemi (3.1) põhjal sellest hüpertasandist kaugusel

$$\frac{|B_0 + B_i u_0^i|}{\sqrt{B_k B_l g^{kl}}}.$$

Pöördudes tagasi üldiste kõverjooneliste koordinaatide $u^1, u^2, \dots, u^n$ juurde ruumi E_n piirkonnas D , lahendame järgmise ülesande. Vaatleme selles piirkonnas teatavat joont parameetrilise vektorvõrrandiga $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in T \subset \mathbf{R}$, kus $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), \dots, u^n(t))$, ning selle joone suvalises punktis x_t vektorit $\mathbf{z}(t) \in V_{x_t}$, mis avaldugu kujul

$$\mathbf{z}(t) = x_i(t) z^i(t);$$

siin $x_i(t)$ tähistab x_i väärtust joone punktis x_t ja $z^i(t)$ on vektori $\mathbf{z}(t)$ koordinaadid punktis x_t võetud baasil $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. Missuguseid tingimusi peavad rahuldama need koordinaadid $z^i(t)$, et vektor $\mathbf{z}(t)$ oleks tegelikult konstantne, s.t. kanduks edasi piki vaadeldavat joont oma väärtust muutumata, ehk nagu öeldakse, oleks *rööp-ülekan*des piki seda joont.

Et seatud tingimuse kohaselt $\mathbf{z}(t) = \text{const}$ ja konstantne funktsioon on diferentseeruv (tuletisega 0), siis peavad ka $z^i(t)$ olema diferentseeruvad ning

$$d(x_i(t) z^i(t)) = 0.$$

Siin

$$x_i(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}(u^1(t), \dots, u^n(t)),$$

mistõttu

$$dx_i = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^k} du^k = x_{ik} du^k.$$

Tähistades nüüd vektori x_{ik} koordinaadid baasil $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sümboliga Γ_{ik}^j , saame

$$x_{ik} = x_j \Gamma_{ik}^j \quad (71.9)$$

ja seega

$$dx_i = x_j \Gamma_{ik}^j du^k.$$

Vektori $\mathbf{z}(t)$ konstantsuse tingimusest

$$dx_i \cdot z^i + x_i \cdot dz^i = 0$$

ehk

$$(x_j \Gamma_{ik}^j du^k) z^i + x_i dz^i = 0$$

järeldub:

$$x_j (dz^j + \Gamma_{ik}^j z^i du^k) = 0.$$

Et siin $x_1, \dots, x_n$ on lineaarselt sõltumatud, siis saame soovitud tingimused kujul

$$dz^j + \Gamma_{ik}^j z^i du^k = 0. \quad (71.10)$$

Vastupidiselt arutledes on kerge kindlaks teha, et need tingimused on mitte üksnes tarvilikud, vaid ka piisavad selleks, et $\mathbf{z} = \text{const}$.

Seega, kui on tegemist kõverjoonelistest koordinaatidega, siis *piki* antud joont selle igas punktis x_t määratud vektor z on rööpülekan-des (s.t. jääb konstantseks) siis ja ainult siis, kui tema koordinaadid parameetri t funktsioonidena rahuldavad võrrandeid (71.10); kus $du^k = [u^k(t)]' dt$ ja kordajaisse Γ_{ik}^j , kui $u^1, \dots, u^n$ funktsiooni-desse tuleb teha asendused $u^1 = u^1(t), \dots, u^n = u^n(t)$.

Osutub, et kordajad Γ_{ik}^j on avaldatavad meetrilise tensori g koordinaatide ja nende osatuletiste kaudu. Tõepoolest, kui arves-tada, et $g_{ik} = x_i x_k$ ja võtta mõlemal pool osatuletised u^l järgi, saame

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} = x_{il} x_k + x_i x_{kl} = (x_j \Gamma_{il}^j) x_k + x_i (x_j \Gamma_{kl}^j);$$

s.t.

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} = g_{jk} \Gamma_{il}^j + g_{ij} \Gamma_{kl}^j. \quad (71.11)$$

Siin on otstarbekas saadud seosed kirjutada välja veel kaks korda, tsükleerides indeksite i, k, l järgi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} &= g_{jl} \Gamma_{ki}^j + g_{kj} \Gamma_{li}^j, \\ \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} &= g_{ji} \Gamma_{lk}^j + g_{lj} \Gamma_{ik}^j. \end{aligned}$$

Võrdusest (71.9) ja sellest, et segatuletised ei sõltu diferentseeri-mise järjekorrast ([3], lk. 170), järeldub, et $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$, mistõttu viimase kolme võrduse paremates pooltes üksliikmetena kirjutatud avaldised (tegelikult summad) on paarikaua võrdsed. Liites näi-teks kahe viimase pooled ja lahutades neist seejärel esimese vasta-vad pooled, saame

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} = 2g_{ml} \Gamma_{ik}^m.$$

Siin jääb veel korrutada suurustega $\frac{1}{2} g^{lj}$ ja summeerida l järgi, et paremal saada

$$g_{ml} g^{lj} \Gamma_{ik}^m = \delta_m^j \Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ik}^j.$$

Seega

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right). \quad (71.12)$$

Siin puutume esmakordselt kokku meetrilise tensorvälja koordi-naatidest moodustatud spetsiifiliste avaldistega, millega tuleb tege-mist teha ka edaspidi. Kordaja Γ_{ik}^j niisugust avaldist, valem

(71.12) paremat poolt, tähistatakse sageli sümbooliga $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ ik \end{smallmatrix} \right\}$, mida nimetatakse *Christoffeli*¹ sümbooliks.

Eelmise artikli tulemused käivad erijuhul ka tasandil E_2 antud piirkonna D kohta, kui selles kasutatakse kõverjoonelisi koordinaate u^1, u^2 . Näiteks polaarkoordinaatide u_1, u_2 korral, mil D on tasand E_2 ilma pooluseta (otstarbekas on tagasi tulla alumiste indeksite juurde), saame

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2), \\ d\mathbf{x} &= (du_1 \cos u_2 - u_1 \sin u_2 du_2, du_1 \sin u_2 + u_1 \cos u_2 du_2), \\ ds^2 &= d\mathbf{x}^2 = du_1^2 + u_1^2 du_2^2, \end{aligned}$$

s. t. $g_{11}=1, g_{12}=0, g_{22}=u_1^2$. Võrrandiga $u_1=f(u_2)$ antud joone jaoks tasandil tekib tuntud eeskiri kaare pikkuse arvutamiseks ([2], lk. 282). Et siin $g^{11}=1, g^{12}=0, g^{22}=u_1^{-2}$, siis valemite (71.12) järgi

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = u_1^{-1},$$

mistõttu vektori $\mathbf{z}(t)$ konstantsuse tingimustel (71.10) on kuju

$$dz_1 = u_1^{-1} z_2 du_1, \quad dz_2 = -u_1^{-1} z_1 du_2.$$

72. Lihthüerpind. Ruumi E_3 geomeetria seisukohalt on tasandi piirkond lihtpinna üks erijuht, mil kõik punktid on tasandumispunktid ja $K \equiv 0$ (vt. art. 39). Üldise kõverpinna korral määrab pinna esimene ruutvorm $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ märksa huvitavama geomeetria — selle pinna sisegeomeetria (art. 48).

Analoogiliselt saab üldistada ka ruumi E_n piirkonna D käsitlemist kõverjooneliste koordinaatide abil. Selleks tuleb defineerida järgmine uus mõiste.

Lihthüerpinnaks ruumis E_{n+1} nimetatakse hulka

$$H = \{x : \mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2, \dots, u^n), (u^1, u^2, \dots, u^n) \in \Delta\},$$

kus Δ on ruumi $\mathbf{R}^n$ teatav piirkond ja

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ eksisteerivad pidevad osatuletisvektorid } \mathbf{x}_i &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}, \quad \mathbf{x}_{ij} = \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}, \dots, \mathbf{x}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k \mathbf{x}}{\partial u^{i_1} \dots \partial u^{i_k}} \text{ ning} \end{aligned}$$

2° vektorid $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ on lineaarselt sõltumatud piirkonna Δ igas punktis.

Suurimat naturaalarvu k , mille puhul on täidetud tingimus 1°, nimetatakse lihthüerpinna sileduse järguks; kui see tingimus on rahuldatud iga naturaalarvu k korral, siis öeldakse, et lihthüerpind on sileduse järguga ∞ .

Lihthüerpinna näiteks on hüpertasand, mis lihtsaimal juhul eraldatakse välja võrrandiga $x_{n+1}=0$; sel korral $x_i = u^i$; $i=1, \dots, n$; $\Delta = \mathbf{R}^n$.

Teise näitena vaatleme «punkteeritud» hüpersfääri

¹ Elvin Bruno Christoffel (1829—1900), saksa matemaatik, kes 1869. a. selgitas nende avaldiste erilise osa diferentsiaalruutvormide $g_{ij} du^i du^j$ teoorias.

$$H = \left\{ x : x = \left(\frac{2r^2 u^1}{u^2 + r^2}, \dots, \frac{2r^2 u^n}{u^2 + r^2}, r \frac{u^2 - r^2}{u^2 + r^2} \right), (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

kus $u^2 = (u^1)^2 + \dots + (u^n)^2$; vrd. (59.2). Et

$$x^2 = \frac{4r^4 u^2 + r^2 (u^2 - r^2)^2}{(u^2 + r^2)^2} = \frac{r^2 (u^2 + r^2)^2}{(u^2 + r^2)^2} = r^2,$$

siis on siin tõesti tegemist hüpersfääriga $S(0, r)$, kuid selle punkti $(0, \dots, 0, r)$ pole võimalik kätte saada $u^1, \dots, u^n$ ühegi väärtussüsteemi puhul. Vektori dx koordinaadid avalduvad seejuures valemitega (60.1) ja (60.2) (viimases tuleb u_i ja x_i asemele kirjutada nüüd vastavalt u^i ja x_{n+1}). Osatuletisvektori x_i koordinaadid on neis du^i kordajad. Vahetult võib kontrollida, et $x_1, \dots, x_n$ on kõikide $(u^1, \dots, u^n)$ korral lineaarselt sõltumatud. Seega on tõesti tegemist lihthüperpinnaga, mille siledusejärk on ∞ . Märkime, et ainus hüpersfäärist $S(0, r)$ väljäänud punkt on ühtlasi selle lihthüperpinna H raja.

Edaspidi kõneleme käesolevas artiklis lühidalt hüperpinnast, mõistes selle all lihthüperpinda. Hüperpinna üldisemast käsitlest, mis üldistab art-i 32 lõpuosa, tuleb juttu art-s 83.

Punkti $x \in H$ ja selles punktis arvutatud rihivektorite $x_1, \dots, x_n$ poolt määratud n -tasandit ruumis E_{n+1} nimetatakse hüperpinna H *puutujahüpertasandiks* punktis x , temaga ristuvat sirget läbi punkti x — hüperpinna H *normaaliks* selles punktis. Normaali sihis valime ühikvektori m selliselt, et vektorite $x_1, \dots, x_n$ ja m koordinaatidest moodustatud $(n+1) \times (n+1)$ -maatriks oleks positiivse determinandiga.

Hüperpinnale H kuuluva joone saab esitada võrranditega $u^i = u^i(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$ ja tema punkti x kohavektori seega kujul

$$x = x(u^1(t), \dots, u^n(t)).$$

Siit

$$dx = x_i du^i \quad (72.1)$$

ning seega

$$ds^2 = dx^2 = (x_i du^i)(x_k du^k) = g_{ik} du^i du^k, \quad (72.2)$$

kus

$$g_{ik} = x_i x_k \quad (72.3)$$

on piirkonnas Δ määratud funktsioonid, mis on mingi hüperpinna H antud $(2,0)$ -tensorvälja g koordinaatideks. Diferentsiaalruutvormi (72.1) nimetatakse hüperpinna H *esimeseks ruutvormiks*, tensorvälja g tema meetriliseks tensorväljaks ehk *esimeseks põhitensorväljaks*. Et esimene ruutvorm on vektori dx skalaarruut, siis omandab ta ainult mittenegatiivseid väärtusi, seejuures väärtuse 0 üksnes siis, kui $dx=0$ ehk (72.1) põhjal $du^i=0$; $i=1, \dots, n$. Järelikult on ta hüperpinna H igas punktis positiivselt määratud ruutvorm, mistõttu tema maatriksi peamiinorid on kõik positiivsed ([1], lk. 453); nende hulgas $g_{11} > 0, \dots, g_{nn} > 0$ ja $\det |g_{ik}| > 0$.

Esimese ruutvormi abil tuletatavaid geomeetrilisi mõisteid ja nende omadusi käsitleme lähemalt järgmises artiklis. Märkime siin vaid, et lihthüperpinnal on samalaadne sisemeetrika nagu selle erijuhtuks oleval lihtpinnal; see erijuht vastab väärtusele $n=2$ (vt.

art. 36). Praegu pöörame tähelepanu teatava arvutusaparaadi arendamisele, mille käigus tulevad uuesti esile Christoffeli sümbolid ja nende osa hüperpinna kõverusnähtuste iseloomustamisel.

Võttes hüperpinnal H antud joone puhul parameetri t ossa joone loomuliku parameetri s , saame arvutada

$$\begin{aligned}x' &= x_i(u^i)', \\x'' &= (x_i)'(u^i)' + x_i(u^i)'' = x_{ik}(u^i)'(u^k)' + x_i(u^i)''.\end{aligned}\quad (72.4)$$

Et vektorid $x_1, \dots, x_n$ ja m moodustavad hüperpinna H igas punktis x baasi ruumi E_{n+1} vektorite jaoks, siis kehtivad valemid

$$x_{ik} = x_j \Gamma_{ik}^j + m b_{ik}, \quad (72.5)$$

kus paremal olevad kordajad on sümmeetrilised alumiste indeksite suhtes (segatuletise vastava omaduse tõttu). Siin Γ_{ik}^j avalduvadki Christoffeli sümbolitena. Tõepoolest, võrdustest (72.3)

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} = x_{il} x_{k,l} + x_i x_{kl};$$

samal ajal (72.5) põhjal näiteks

$$x_{il} x_k = (x_j \Gamma_{il}^j + m b_{il}) x_k = (x_j x_k) \Gamma_{il}^j = g_{jk} \Gamma_{il}^j,$$

sest $m x_k = 0$, kuna m on vektorite $x_1, \dots, x_n$ poolt määratud puutujahüpertasandi n -rihi normaalvektor. Järelikult tekivad võrdused (71.11) ja nendest järelduvad juba tuttavalt viisil valemid (71.12).

Kordajate b_{ik} avaldamiseks valemest (72.5) korrutame selle pooli skalaarselt normaalühikvektoriga m ja arvestame uuesti võrdusi $m x_i = 0$; saame

$$b_{ik} = m x_{ik}. \quad (72.6)$$

Huvitav on see, et meil tekib siin teatav tensor b . Üleminekul mingitele teistele parameetritele $u^{1'}, \dots, u^{n'}$ hüperpinnal H tekivad juba tuttavalt viisil (art. 70) seosed

$$x_{i'} = x_i u_{i'}^i,$$

ja siit

$$x_{i'k'} = \frac{\partial}{\partial u^{k'}} (x_i u_{i'}^i) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u^{k'}} \frac{\partial u^i}{\partial u^{k'}} \right) u_{i'}^i + x_i u_{i'k'}^i,$$

kus on kasutatud liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja ([3], lk. 180, 215) ja tähistatud $\frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{k'}} = u_{i'k'}^i$. Seega

$$x_{i'k'} = x_{ik} u_{i'}^i u_{k'}^k + x_i u_{i'k'}^i = x_j (\Gamma_{ik}^j u_{i'}^i u_{k'}^k + u_{i'k'}^j) + m b_{ik} u_{i'}^i u_{k'}^k.$$

Võrdlus valemi (72.5) kujuga uutes parameetrites:

$$x_{i'k'} = x_j \Gamma_{i'k'}^{j'} + m b_{i'k'},$$

kus $x_{j'} = x_j u_{j'}^j$, annab järgmised teisendusvalemid:

$$u_{j'}^j \Gamma_{i'k'}^{j'} = \Gamma_{ik}^j u_{i'}^i u_{k'}^k + u_{i'k'}^j, \quad (72.7)$$

$$b_{i'k'} = b_{ik} u_{i'}^i u_{k'}^k. \quad (72.8)$$

Siit ongi näha, et b_{ik} ja $b_{i'k'}$ on teatava (2,0)-tensorvälja b koordinaadid eri parameetrites, samal ajal kui Γ_{ik}^j ja $\Gamma_{i'k'}^{j'}$ puhul analoogilist väita ei saa — teisenemise tensorseadust (70.8) rikub nende korral lisaliige $u_{i'k'}^j$!

Tensorvälja b nimetatakse hüperpinna H teiseks põhitensorväljaks, vastavat ruutvormi $b_{ik} du^i du^k$ — teiseks ruutvormiks. Kui H on hüpertasand, siis on ta omaette vaadelduna ruum E_n ning kui alguspunkt o valida temal, saame eelmises artiklis käsitletud olukorra. Valemite (71.9) ja (72.5) võrdlemine näitab, et sel korral $b_{ik} = 0$. Seega teine ruutvorm iseloomustab hüperpinna H erinevust hüpertasandist, tema kõverdumist.

Viimase nähtuse täpsem iseloomustamine tugineb suurusele

$$\begin{aligned} k_0 = m\ddot{x}'' &= (m x_{ik}) (u^i)' (u^k)' = b_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = \\ &= \frac{b_{ik} du^i du^k}{ds^2} = \frac{b_{ik} du^i du^k}{g_{ik} du^i du^k}, \end{aligned} \quad (72.9)$$

mida nimetatakse normaalkõveruseks (vrd. art. 36). Hüperpinna H fikseeritud punktis x on ruutvormide kordajad (ehk põhitensorväljade koordinaadid) g_{ik} ja b_{ik} kindlad reaalarvud, vektorid $l = x_k l^k$ selles punktis x võetud puutujahüpertasandil moodustavad aga n -mõõtmelise vektorruumi V_x selles määratud skalaarkorrutisega

$$kl = (x_i k^i) (x_k l^k) = g_{ik} k^i l^k.$$

Kui hüperpinnal H läbi punkti x võetud joone puutuja siht määratakse vektoriga l , siis $dx = x_k du^k \| l$, mistõttu $du^k = \theta l^k$ ja (72.9) põhjal

$$k_0 = \frac{b_{ik} l^i l^k}{g_{ik} l^i l^k}, \quad (72.10)$$

s.t. fikseeritud punktis x sõltub normaalkõverus k_0 ainult sihist: $k_0 = k_0(l)$. Statsionaarsed (sealhulgas ekstremaalsed) väärtused omandab ta neis sihtides, mille korral $\frac{\partial k_0}{\partial l^k} = 0$ ([3], lk. 217). Samuti nagu art-s 38 leiame, et nende sihtide ja k_0 vastavate väärtuste korral

$$(b_{ik} - k_0 g_{ik}) l^i = 0 \quad (72.11)$$

(vrd. (38.3)). Selleks et saadud homogeenne lineaarvõrrandisüsteem tõesti määraks soovitud sihi, s.t. omaks mittetriviaalse lahendi $l^1, \dots, l^n$, on teatavasti tarvilik ja piisav ([1], lk. 74), et süsteemi determinant oleks võrdne nulliga:

$$\det |b_{ik} - k_0 g_{ik}| = 0. \quad (72.12)$$

Siin on tegemist kahe ruutvormiga $b_{ik}l^il^k$ ja $g_{ik}l^il^k$, millest teine on positiivselt määratud. Sel puhul teatavasti leidub baas vektorruumis V_x , millel mõlemal ruutvormil on üheaegselt kanooniline kuju: esimesel $k_1(l^1)^2 + \dots + k_n(l^n)^2$, teisel $(l^1)^2 + \dots + (l^n)^2$, kusjuures $k_1, \dots, k_n$ on parajasti võrrandi (72.12) lahendid ([1], lk. 455). Sellel baasil $g_{i'k'} = \delta_{i'k'}$ ja seetõttu $kl = k^1l^1 + \dots + k^nl^n$ ning baas on ortonormeeritud. Võttes l ossa ühikvektori, saame $l^2 = g_{ik}l^il^k = (l^1)^2 + \dots + (l^n)^2 = 1$ ja valemist (72.10)

$$k_0 = k_1(l^1)^2 + \dots + k_n(l^n)^2.$$

Tulemus üldistab Euleri valemit (37.10) ja näitab selgesti, et $k_1, \dots, k_n$ on normaalkõveruse väärtused kõnesoleva ortonormeeritud baasi vektorite sihtides. Neid väärtusi nimetatakse hüperpinna *peakõverusteks*, sihte aga *peasihtideks*.

Peakõveruste arvutamiseks on võrrand (72.12), millest nähtub, et peakõverused hüperpinna igas punktis on täielikult määratud esimese ja teise ruutvormi poolt. Sellega on ühtlasi antud täpsem sisu eespool sõnastatud väitele, et teine ruutvorm (koos esimesega) iseloomustab hüperpinna kõverdumist.

Osutub, et esimene ja teine ruutvorm ei ole teineteisest sõltumatud, vaid nende kordajad on seotud teatavate kindlate seostega — *hüperpindade teooria põhivõrranditega*. Viimased tulenevad lihtsast nõudest: sellest, et valemite (72.5) järgi arvutatud osatule-

tis $x_{ikl} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^k \partial u^l}$ peab olema sümmeetriline viimase kahe indeksi k ja l suhtes (sümmeetria esimese kahe indeksi suhtes on juba arvestatud kordajate Γ_{ik}^j ja b_{ik} sümmeetrilisusega).

Vahetu arvutusega leiame:

$$x_{ikl} = \frac{\partial}{\partial u^l} (x_j \Gamma_{ik}^j + m b_{ik}) = x_{jl} \Gamma_{ik}^j + x_j \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + m_l b_{ik} + m \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^l}.$$

Paremal esimeses liikmerühmas on vaja teha asendus valemist (72.5), kusjuures eelnevalt on kasulik summeerimisindeksi tähiseks võtta m :

$$x_{ml} \Gamma_{ik}^m = (x_j \Gamma_{ml}^j + m b_{ml}) \Gamma_{ik}^m.$$

Lähemalt tuleb tegelda kolmanda liikmerühmaga, kus vektor $m_l = \frac{\partial m}{\partial u^l}$, samuti nagu x_{ik} valemis (72.5), on avaldatav baasil $x_1, \dots, x_n$, m : $m_l = x_k c_l^k + \mu_l m$.

Lähtume samasustest $x_i m = 0$, $m^2 = 1$ ja rakendame nende pooltele osatuletisoperaatorit $\frac{\partial}{\partial u^l}$:

$$x_{il} m + x_i m_l = 0, \quad 2m m_l = 0.$$

Vajalike asendustega saame

$$b_{il} + x_i (x_k c_l^k + \mu_l m) = 0, \quad m (x_k c_l^k + \mu_l m) = 0$$

ja siit

$$b_{il} + g_{ik}c_l^k = 0, \quad \mu_l = 0.$$

Kordajate c_l^k avaldamiseks korrutame esimeste seoste pooli suurus-
tega g^{jm} , ahendame m ja i järgi:

$$g^{jm}b_{ml} + g^{jm}g_{mk}c_l^k = 0$$

ja arvestame, et $g^{jm}g_{mk} = \delta_h^j$. Seega

$$m_l = -x_j g^{jm}b_{ml}.$$

Seda kõike arvestades saame x_{ikl} jaoks järgmise avaldise:

$$x_{ikl} = x_j \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^j \Gamma_{ik}^m - g^{jm}b_{ml}b_{ik} \right) + m \left(b_{ml}\Gamma_{ik}^m + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^l} \right).$$

Vahetame nüüd indekseid k ja l kohad ning lahutame uue võrduse
pooled esialgse omadest. Vasakul on x_{ikl} sümmeetria tõttu tulemu-
seks 0. Paremal peavad x_j ja m kordajad baasivektorite lineaarse
sõltumatuse tõttu olema seega samuti nullid:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^j \Gamma_{ik}^m - g^{jm}b_{ml}b_{ik} \right) - \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial u^k} + \Gamma_{mk}^j \Gamma_{il}^m - g^{jm}b_{mk}b_{il} \right) &= 0, \\ \left(b_{ml}\Gamma_{ik}^m + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^l} \right) - \left(b_{mk}\Gamma_{il}^m + \frac{\partial b_{il}}{\partial u^k} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (72.13)$$

Saadud võrdused seovadki esimese ja teise ruutvormi kordajaid,
sest Γ_{ik}^j avalduvad Christoffeli sümbolitena esimese ruutvormi
kordajate ja nende osatuletiste kaudu valemitega (71.12). Selleks
et ülemistes võrdustes (72.13) täielikult lahutada eri ruutvormide
kordajad, on kasulik nende pooli korrutada suurus- g_{hf} ning see-
järel ahendada korrutisi indekseid f ja j järgi. Seejuures tuleb arves-
tada, et $g_{hj}g^{jm} = \delta_h^m$. Suluavaldiste viimased liikmerühmad annavad
siis $b_{hk}b_{il} - b_{hl}b_{ik}$. Saadava võrrandi lõppkujus on otstarbekas need
liikmed viia teisele poole võrdusmärgi ning indeksi h tähise ase-
mele võtta j , vahetades muidugi ka ülejäänud liikmeis tähtede h ja
 j osad. Niiviisi saame lõpuks:

$$g_{jh} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial u^k} + \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mk}^h \Gamma_{il}^m \right) = b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}. \quad (72.14)$$

Paremal pool on koordinaatidega kirjas see, et teine põhitensor on
korrutatud iseendaga, tulemust on alterneeritud teise ja neljanda
argumendi järgi ning korrutatud teguriga 2. Järelikult paremal
pool on teatava (4,0)-tensori koordinaadid. Seetõttu on ka vasakul
pool teatava (4,0)-tensori koordinaadid, kusjuures need on aval-
datavad üksnes esimese ruutvormi kordajate ja nende osatuletiste
kaudu. Vasakpoolset avaldist on tavaks tähistada $R_{ij,kl}$; seega

$$R_{ij,kl} = g_{jh} \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial u^k} + \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mk}^h \Gamma_{il}^m \right) \quad (72.15)$$

ja võrrand (72.14) omandab kuju

$$R_{ij,kl} = b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}. \quad (72.16)$$

Erijuhul, kui $n=2$, on võrrandi (72.14) paremal pool oleval tensoril üksainus oluline koordinaat $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = \det |b_{\alpha\beta}| = K \det |g_{\alpha\beta}|$ (vrd. (39.2)), teised koordinaadid on kas selle vastandväärtused või nullid. Seega (72.14), võttes sel erijuhul lihtsa kuju

$$R_{12,12} = K \det |g_{\alpha\beta}|, \quad (72.17)$$

annab (72.15) ja (72.12) põhjal pinna täiskõveruse K avaldise pinna esimese ruutvormi kordajate $g_{\alpha\beta}$ ja nende osatuletiste kaudu ning langeb seega sisuliselt kokku Gaussi võrrandiga (48.9) ehk (48.10). Seetõttu võrrandit (72.14) nimetatakse *üldiseks Gaussi võrrandiks* (hüperpinna jaoks).

Tähelepanu väärib ka teine seos (72.13) esimese ja teise ruutvormi kordajate vahel. Juhul kui $n=2$, tekib siin kaks võrrandit

$$\frac{\partial b_{i1}}{\partial u^2} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial u^1} = b_{j1}\Gamma_{i2}^j - b_{j2}\Gamma_{i1}^j; \quad i, j = 1, 2,$$

mis on sisult samaväärsed Petersoni võrranditega (45.13) ja (45.14) ning taanduvad neile, kui u^1 - ja u^2 -jooned on pinna kõverusjooned, s.t. kui $g_{12} = b_{12} = 0$ (vrd. (71.12) ja (50.8)). Sellisel kujul, otseste seostena esimese ja teise ruutvormi kordajate vahel, tuletasid need võrrandid 1857. a. G. Mainardi¹ ja 1868. a. D. Codazzi². Neid nimetatakse *Petersoni—Mainardi—Codazzi võrranditeks*.

Rohkem seoseid hüperpinna esimese ja teise ruutvormi kordajate vahel üldjuhul ei eksisteeri. Kehtib nimelt järgmine teoreem.

Kui mingis piirkonnas $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ on antud kaks diferentsiaalruutvormi $g_{ik} du^i du^k$ ja $b_{ik} du^i du^k$, millest esimene on positiivselt määratud, nii et nende kordajad rahuldavad võrrandeid (72.13), (72.14), siis ruumis E_{n+1} eksisteerib hüperpind, mille jaoks nad on esimeseks ja teiseks ruutvormiks, kusjuures kaks niisugust hüperpinda võivad erineda üksnes ruumi E_{n+1} isomeetria poolest.

Erijuhul, kui $n=2$, tuntakse seda teoreemi *pinnateooria põhi-teoreemi* nime all. Teoreemi teine väide on sel erijuhul tõestatud art-s 46, esimese väite — pinna olemasolu põhjenduse skeem on antud õpikus [5], lk. 220; tugineda tuleb osatuletistega diferentsiaalvõrrandisüsteemide teooria vastavale lausele.

73. Riemanni geomeetria põhijooni. Anname nüüd kaasaja diferentsiaalgeomeetria ja selle rakenduste ühe põhilisema mõiste, mis haarab endasse pinna sisegeomeetria ning nii eukleidilise kui mitte-eukleidilise ruumi mõisted, üldistades viimaseid samas mõttes, nagu suvalise pinna sisegeomeetria üldistab tasandi, sfääri ja pseudosfääri sisegeomeetriat.

¹ Gaspare Mainardi (1800—1879), itaalia matemaatik.

² Delfino Codazzi (1824—1873), itaalia matemaatik.

Punkti hulka M_n , mida saab üksüheselt kujutada mingile piirkonnale $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, s.t. mille korral eksisteerib bijektsioon

$$\varphi: M_n \rightarrow \Delta,$$

nimetatakse *n-mõõtmeliseks lihtmuutkonnaks*. Kui $x \in M_n$ ja $\varphi(x) = (u^1, \dots, u^n)$, siis reaalarve $u^1, \dots, u^n$ nimetatakse punkti x (kõverjoonelisteks) koordinaatideks. Kui siin Δ on lahtine piirkond ruumis $\mathbb{R}^n$ (art. 70), siis kõneldakse lahtisest lihtmuutkonnast. Juhul $\Delta = \mathbb{R}^n$ on tegemist varem tuttava algmuutkonnaga (art. 1).

Olgu antud mingil piirkonnal $\Delta' \subset \mathbb{R}^m$ määratud funktsioonid

$$u^i = u^i(u^1, \dots, u^{m'}); \quad i=1, \dots, n; \quad m'=m \leq n, \quad (73.1)$$

ja

1° eksisteerigu piirkonnas Δ' pidevad osatuletised

$$u^i_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}, \quad u^i_{i'j'} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^{i'} \partial u^{j'}}, \quad \dots, \quad u^i_{i'_1 \dots i'_k} = \frac{\partial^k u^i}{\partial u^{i'_1} \dots \partial u^{i'_k}}, \quad \dots,$$

kusjuures

2° piirkonna Δ' igas punktis olgu maatriksil $\|u^i_{i'}\|$ maksimaalne võimalik astak m .

Sel korral nimetatakse lihtmuutkonna M_n alamhulka, mis koosneb nendest punktidest, mille koordinaatideks on antud funktsioonide väärtused, *m-mõõtmeliseks alammuutkonnaks*, juhul $m=1$ — *jooneks*, juhul $m=n-1$ — *hüperpinnaks*.

Kui *n-mõõtmelise* alammuutkonna korral funktsioonid (73.1) korraldavad piirkonna $\Delta' \subset \mathbb{R}^n$ üksühesse kujutuse ψ piirkonda $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, siis kõneldakse, et lihtmuutkonnas on $\psi(\varphi(\Delta'))$ ulatuses tehtud üleminek uutele (kõverjoonelistele) koordinaatidele $u^1, \dots, u^{n'}$. Sel korral on tingimusel 2° kuju $\det |u^i_{i'}| \neq 0$. Maatriksi $\|u^i_{i'}\|$ pöördmaatriks, mis on kujutuse ψ pöördkujutuse osatuletis-maatriks, tähistatakse $\|u^{i'}_i\|$.

Öeldakse, et lihtmuutkonnal M_n on antud (p, q) -*tensorväli*, kui iga koordinaatide süsteemi $u^1, \dots, u^n$ korral on antud diferentseeruvate funktsioonide süsteem $T^{j_1 \dots j_q}_{i_1 \dots i_p}(u^1, \dots, u^n)$ selliselt, et üleminekul uutele koordinaatidele $u^1, \dots, u^{n'}$ see funktsioonide süsteem teiseneb tensorseaduse (70.8) järgi.

(0,1)-*tensorvälja* nimetatakse *vektorväljaks*, sellest punkti x fikseerimisel saadavat (0,1)-*tensorit puutujavektoriks* punktis x . Puutujavektori koordinaate tähistame tavaliselt z^i või w^i .

Olgu lihtmuutkonnal M_n antud sümmeetriline (2,0)-*tensorväli* koordinaatidega $g_{ik}(u^1, \dots, u^n)$. Kui sel korral $\det |g_{ik}| \neq 0$ igas punktis $x \in M_n$, siis nimetatakse seda tensorvälja *Riemanni meetriliseks tensorväljaks*. Märgime, et tingimus $\det |g_{ik}| \neq 0$ ei sõltu koordinaatide süsteemist, sest teisenemisseadusest

$$g_{i'k'} = g_{ik} u^i_{i'} u^k_{k'} \quad (73.2)$$

järeldub determinantide korrutamise eeskirja kohaselt ([1], lk. 44), et

$$\det |g_{i'h'}| = \det |g_{ik}| \cdot (\det |u_{i'}^i|)^2.$$

Kahe vektorvälja ja Riemanni meetrilise tensorvälja abil saab moodustada ahendatud korrutise $g_{ik}z^i\omega^k$; selle väärtust punktis $x \in M_n$ nimetatakse antud väljavektorite *skalaarkorrutiseks*. Juhul kui $\omega^k = z^k$, tekib $g_{ik}z^iz^k$, mis igas punktis $x \in M_n$ kujutab endast ruutvormi $z^1, \dots, z^n$ suhtes. Kui see ruutvorm on positiivselt määratud igas punktis $x \in M_n$, siis antud sümmeetrilist (2,0)-tensorvälja nimetatakse *Riemanni meetrikaks*¹.

Näiteks meetriline tensorväli g eukleidilise ruumi E_n piirkonnas D on Riemanni meetrika, samal ajal kui analoogiliselt skalaarkorrutise abil näiteks Minkowski ruumis 4E_4 määratud tensorväli on näide üldisemat tüüpi Riemanni meetrilisest tensorväljast. Ruumis E_n antud hüperpinna esimene põhitensorväli on Riemanni meetrika.

Lihtmuutkonda M_n sellel antud Riemanni meetrilise tensorväljaga nimetatakse *Riemanni lihtmuutkonnaks* ehk *Riemanni lihtruumiks*. Edaspidi, kui ei ole just vastupidist öeldud, eeldame, et see tensorväli on Riemanni meetrika, s. t. et $g_{ik}z^iz^k$ on positiivselt määratud. Riemanni lihtmuutkonna teooriat nimetatakse Riemanni geometriaks.

Hiljem, art-s 83, selgitame põhjalikumalt, mida üldiselt mõista muutkonna all. Praegu piirdume viitega art-i 31 lõpuosale, kus mõningaid seda laadi selgitusi on antud seoses pinna mõistega, mis on näide kahemõõtmelisest muutkonnast. Üsna üldsõnaliselt kõneldes võib öelda, et muutkonnad saadakse lihtmuutkondade «kokkulappimise» teel. Näiteks juba hüpersfääri taolise muutkonna saamiseks on vaja ühendada vähemalt kaks teineteist suures osas katvat lihtmuutkonda — kaks «punkteeritud» hüpersfääri (art. 72). Seejuures tuleb märkida, et art-s 72 kasutatud võtet — hüpersfääri saamist «punkteeritud» hüpersfäärist viimase raja lisamisega — ei ole muutkonna üldisel käsitlemisel võimalik kasutada, sest raja mõiste eeldab asetsemist ruumis E_n , kuid muutkondi käsitletakse abstraktselt, ilma mingisse ruumi sisestamist eeldamata.

Et me käesolevas paragrahvis üldisemaid muutkondi peale lihtmuutkondade ei käsitلة, siis jätame edaspidi eesliite «liht-» ära.

Selgitame järgnevalt, kuidas Riemanni meetrika abil saab defineerida pinna ja hüperpinna sisemetrika käsitlemisest tuttavate mõistete üldistusi (vrd. art. 36 ja 71).

Olgu Riemanni muutkonnas antud joon võrranditega $u^i = u^i(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$. Selle joone *kaare pikkus* defineeritakse valemiga

$$s = \int_a^t \sqrt{g_{ik} du^i du^k}, \quad (73.3)$$

kus praegu $g_{ik} = g_{ik}(u^1(t), \dots, u^n(t))$, $du^i = [u^i(t)]' dt$.

Seostest (73.1), kus $m = n$, järeldub, et

$$du^i = u_{i'}^i du^{i'}, \quad (u^i)' = u_{i'}^i (u^{i'})'; \quad (73.4)$$

¹ Mõnikord, eriti relatiivsusteoorias, nimetatakse Riemanni meetrilist tensorvälja Riemanni meetrikaks ka siis, kui ta pole positiivselt määratud.

seega $(u^i)'$ on joone igas punktis teatava $(0,1)$ -tensori ehk vektori koordinaadid. Seda vektorit nimetatakse *joone puutujavektoriks* vaa-
deldavas punktis.

Kahe ühispunktiga joone vaheliseks *nurgaks* nimetatakse nurka nende puutujavektorite vahel selles punktis; seda arvutatakse valemi (71.5) järgi.

Olgu piirkonnas $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ antud mingi osapiirkond Λ . Alamhulka $D = \varphi^{-1}(\Lambda)$ nimetatakse sel korral piirkonnaks Riemanni muutkonnas M_n . Selle *ruumala* defineeritakse valemit (71.7) üldistava valemiga

$$\mu(D) = \int \dots \int_{\Lambda} \sqrt{\det |g_{ik}|} du^1 \dots du^n \quad (73.5)$$

(parema poole lõpliku väärtuse eksisteerimise tingimuste kohta vt. [3], lk. 321).

Analoogiliselt tuuakse sisse piirkonna m -ruumala mõiste m -mõõtmelises alammuutkonnas. Kui alammuutkond on määratud võrranditega (73.1), siis tehes valemist (73.3) järelduvas seoses

$$ds^2 = g_{ik}(u^1; \dots, u^n) du^i du^k$$

vastavad asendused, saame analoogilise seose alammuutkonna jaoks:

$$ds^2 = g_{ik}(u^1(u^{1'}, \dots, u^{m'}), \dots, u^n(u^1, \dots, u^{m'})) u_{i'}^i u_{k'}^k du^{i'} du^{k'}.$$

Siin on loomulik tähistada

$$\begin{aligned} g_{ik}(u^1(u^{1'}, \dots, u^{m'}), \dots, u^n(u^1, \dots, u^{m'})) u_{i'}^i u_{k'}^k &= \\ &= g_{i'k'}(u^{1'}, \dots, u^{m'}). \end{aligned}$$

Sel juhul alammuutkonnas

$$ds^2 = g_{i'k'} du^{i'} du^{k'}; \quad i', k' = 1, \dots, m;$$

seega ka alammuutkond osutub Riemanni muutkonnaks. Öeldakse, et tema Riemanni meetrika on indutseeritud esialgses muutkonnas M_n antud Riemanni meetrika poolt. Just sel teel tekibki muide ruumis E_n antud hüperpinna sisemeeetrika (juhul kui $n=3$, pinna sisemeeetrika ruumis E_3); sel puhul $g_{ik} = \delta_{ik}$ ning u^i ja $u^{i'}$ osas on

vastavalt x_i ja u_α , mistõttu tõesti $g_{\alpha\beta} = \sum_{i,k=1}^n \delta_{ik} x_{i\alpha} x_{k\beta} = x_\alpha x_\beta$. Samal

viisil tekib ka see Riemanni meetrika Minkowski ruumi 1E_4 pseudo-sfääril, mis on antud diferentsiaalruutvormiga (56.3) või (60.4) ning millest lähtudes on eespool välja arendatud Lobatševski geometria.

Olgu nüüd piirkonnas Δ' , millel on määratud alammuutkonda esitavad funktsioonid (73.1), antud mingi osapiirkond Λ' . Sellele alammuutkonnale vastava piirkonna D' m -ruumala defineeritakse valemiga

$$\mu(D') = \int \dots \int_{\Lambda'} \sqrt{\det |g_{i'k'}|} du^{1'} \dots du^{m'},$$

mis üldistab varasemast tuttavaid samalaadseid valemeid.

Sisukama geomeetria saamiseks Riemanni muutkonnas tuleb selgitada eukleidilise ja mitte-eukleidilise geomeetria sellise põhimõiste nagu sirgjoon üldistamise võimalusi kõnesolevale juhule. Siin võib lähtuda sirge mingist iseloomulikust omadusest. Kõige lihtsam on võtta aluseks sirge kui konstantse sihiga joon ruumis E_n , s.t. iseloomulikuks omaduseks võtta see, et sirgjoone puutujaühikvektor kandub edasi piki seda joont oma väärtust muutmata.

Osutub, et aparaat, mis on arendatud art-s 71 vektori rööpülekanne iseloomustamiseks kõverjoonelistes koordinaatides, on vahetult ülekantav Riemanni muutkonda M_n . Tõepoolest, olgu viimases võrranditega $u^i = u^i(t)$ antud joone igas punktis määratud vektor koordinaatidega $z^i(t)$. Moodustame Riemanni meetrika koordinaatidest g_{ik} valemite (71.12) paremates pooltes olevad avaldised — Christoffeli sümbolid, tähistades need Γ_{ik}^j :

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right). \quad (73.6)$$

Juhul kui $z^j(t)$ rahuldavad antud $u^i(t)$ korral diferentsiaalvõrrandisüsteemi

$$dz^j + \Gamma_{ik}^j z^i du^k = 0 \quad (73.7)$$

(vrd. (71.10)), öeldakse, et tegemist on vektori rööpülekandegaga piki antud joont.

Valemiga (73.3) määratud parameetrit s nimetatakse joone loomulikuks parameetriks. Osutub, et joone puutujavektor koordinaatidega $(u^i)'$, kus tuletis on võetud loomuliku parameetri järgi, rahuldab võrdust $g_{ik}(u^i)'(u^k)' = 1$. Viimase saame nimelt, kui teeme võrdusse $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ asenduse $du^i = (u^i)' ds$ ja taandame tulemusest ds^2 . Kõnesolev puutujavektor on niisiis ühikvektor — vektor, mille skalaarruut on 1.

Joont Riemanni muutkonnas nimetatakse geodeetiliseks jooneks, kui tema igas punktis arvutatud puutujaühikvektori korral on tegemist selle vektori rööpülekandegaga piki vaadeldavat joont. Geodeetilise joone korral peavad $z^j = (u^j)'$ rahuldama seega võrrandisüsteemi (73.7). Et sel puhul $dz^j = (u_j)'' ds$, siis saame geodeetiliste joonte määramiseks järgmise teist järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi:

$$(u^j)'' + \Gamma_{ik}^j (u^i)' (u^k)' = 0, \quad (73.8)$$

mis on aga muidugi samaväärne järgmise normaalse diferentsiaalvõrrandisüsteemiga ([8], lk. 220)

$$(u^j)' = z^j,$$

$$(z^j)' = -\Gamma_{ik}^j (u^1, \dots, u^n) z^i z^k.$$

Cauchy teoreemi ([8], lk. 237) kohaselt läheb läbi iga punkti $(u^1, \dots, u^n, z^1, \dots, z^n) \in \Delta \times S_{n-1}(0, 1)$ parajasti üks sellise süsteemi integraaljoon (siin on $S_{n-1}(0, 1)$ sellepärast, et $g_{ik} z^i z^k = g_{ik}(u^i)'(u^k)' = 1$). Et praegu $z^i = (u^i)'$ on joone puutujaühikvek-

tori koordinaadid, siis võib öelda, et läbi Riemanni lihtmuutkonna M_n iga punkti (koordinaatidega $u^1, \dots, u^n$) läheb igas sihis (koordinaatide $(u^1)', \dots, (u^n)'$ poolt määratud sihivektoriga) parajasti üks geodeetiline joon.

Geodeetilised jooned Riemanni muutkonnas on seega määratud sama vabadusega, mis sirged eukleidilises või mitte-eukleidilises ruumis.

Analüütiliselt pisut keerukam on lähtuda üldistamisel sirge teisest iseloomulikust omadusest — sellest, et tema kaar (sirglõik) on lühim oma otspunktide vahel. Tulemus on aga sama, nagu järgnevas veenduda võime.

Joone kaare pikkus määratakse valemiga (73.3), kus $t=b>a$. Integreeritavaks on siin teatav funktsioon

$$\varphi(u^1, \dots, u^n, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) = \sqrt{g_{ik}(u^1, \dots, u^n) \dot{u}^i \dot{u}^k}, \quad (73.9)$$

kus $u^i = u^i(t)$ tuleb tähistatud $\dot{u}^i$. Vaatleme antud joone kaare kõrval vöranditega

$$u^i = u^i(t) + \varepsilon \omega^i(t)$$

määratud naaberjoone kaart samade otspunktidega, s. t. $\omega^i(a) = \omega^i(b) = 0$, kus ε on teatav parameetrist t sõltumatu suurus — uus parameeter, mida edaspidi käsitleme hääbuvana, s. t. selliselt, et $\varepsilon \rightarrow 0$.

Antud joone ja naaberjoone kaarte pikkused on siis

$$s = \int_a^b \varphi(u^1, \dots, u^n, \dot{u}^1, \dots, \dot{u}^n) dt,$$

$$\bar{s} = \int_a^b \varphi(u^1 + \varepsilon \omega^1, \dots, u^n + \varepsilon \omega^n, \dot{u}^1 + \varepsilon \dot{\omega}^1, \dots, \dot{u}^n + \varepsilon \dot{\omega}^n) dt.$$

Pärast teise integreeritava funktsiooni arendamist Tayloriga valemiga ([3], lk. 193):

$$\varphi(u + \varepsilon \omega, \dot{u} + \varepsilon \dot{\omega}) = \varphi(u, \dot{u}) + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \omega^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{\omega}^i \right] + \dots,$$

kus ... tähendavad ε suhtes kõrgema astme liikmeid, saame

$$\bar{s} - s = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \omega^i + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{\omega}^i \right] dt + \dots$$

Integraali lineaarsuse tõttu tuleb siin tegemist määratud integraalidega

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \dot{\omega}^i dt, \quad i \text{ fikseeritud,}$$

mille puhul on lihtne rakendada ositi integreerimist ([2], lk. 311), tähistades $U^i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i}$, $dV^i = \dot{\omega}^i dt$. Et $V^i = \omega^i$, siis kõnesolev integraal on

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \omega^i \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) \omega^i dt; \quad i \text{ fikseeritud,}$$

kusjuures võrduste $\omega^i(a) = \omega^i(b) = 0$ tõttu esimene liige on 0. Järelikult

$$\bar{s} - s = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) \right] \omega^i dt + \dots$$

Nõuame nüüd, et antud joone kaar oleks lühim, võrreldes kõigi teiste samu otspunkte ühendavate joonte kaartega nende punktide vahel. Kõigepealt peab siis olema $\bar{s} - s > 0$ sõltumata sellest, kas hääbuv ε on positiivne või negatiivne. Selleks on muidugi tarvilik, et ε kordajaks olev määratud integraal oleks null $\omega^i(t)$ iga valiku korral. Valides kõik $\omega^i(t)$, välja arvatud üks, võrdseks nulliga ja rakendades variatsioonarvutuse vastavaid lemmasid¹, saame uued tarvilikud tingimused:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) = 0. \quad (73.10)$$

Rakendame neid nüüd funktsiooni (73.9) korral. Siin

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} &= \frac{\frac{\partial}{\partial u^i} (g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k)}{2 \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}} = \frac{\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k}{2 \frac{ds}{dt}}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} &= \frac{g_{jk} \delta_i^j \dot{u}^k + g_{jk} \dot{u}^j \delta_i^k}{2 \sqrt{g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k}} = \frac{g_{ik} \dot{u}^k}{\frac{ds}{dt}}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}^i} \right) &= \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-2} \left[\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^k + g_{ik} \ddot{u}^k \right) \frac{ds}{dt} - g_{ik} \dot{u}^k \frac{d^2 s}{dt^2} \right]. \end{aligned}$$

Asendus võrrandisse (73.10) annab pärast teguriga $-\frac{ds}{dt}$ läbikorrutamist

$$g_{ik} \ddot{u}^k + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^j \dot{u}^k - g_{ik} \dot{u}^k \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0.$$

Siin tuleb arvestada, et

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \dot{u}^j \dot{u}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k.$$

Jääb veel korrutada saadud võrrandite pooli suurustega g^{lm} ja seejärel ahendada indekseid m ja i järgi, et samasuste $g^{li} g_{ik} = \delta_k^l$ abil saada

$$\ddot{u}^l + \frac{1}{2} g^{li} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \dot{u}^j \dot{u}^k - \dot{u}^l \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0.$$

Kui vahetada indekseid tähistused, võttes i, j, l asemel vastavalt l, i, j , ning arvestada g_{ik} ja g^{ik} sümmeetriat ja tähistusi (73.6), saame võrrandi kujul

$$\ddot{u}^j + \Gamma_{ik}^j \dot{u}^i \dot{u}^k - \dot{u}^j \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} = 0. \quad (73.11)$$

Loomuliku parameetri s korral, mil $\dot{s} = 1$, $\ddot{s} = 0$, tulevad siit just täpselt geodeetiliste joonte diferentsiaalvõrrandid (73.8).

Seega jooned, mille kaared on lühimad oma otspunktide vahel, on geodeetilised jooned. Et me neid jooni iseloomustava omaduse kohta saime eespool vaid tarvilikke tingimusi, siis pole alust väita, et geodeetilise joone iga kaar on lühim.

¹ L. Kivistik. Variatsioonarvutus. Tartu, 1965, lk. 36—39 (vrd. ka [4], lk. 423). Võrrandisüsteemi (73.10), mille juhul $n=1$ tuletas L. Euler juba 1744. a., nimetatakse variatsioonarvutuses Euleri süsteemiks.

Sellekohane kontranäide on meile juba tuttav pindade käsitlemisest ruumis E_3 (art. 50): pinna geodeetilised jooned on Riemanni lihtmuutkonna geodeetiliste joonte erijuhud, samal ajal sfääri geodeetilise joone — suurringjoone — kaar, mis on pikem poolringjoonest, pole enam lühim oma otspunktide vahel sfääril.

74. Rööpülekanne ja kõverusteisendus. Pöördume tagasi vektori rööpülekanne juurde. Osutub, et kui mingi joone igas punktis on antud kaks vektorit koordinaatidega z^i ja w^i ning mõlema puhul on tegemist vektori rööpülekandegaga piki seda joont, siis ahendatud korrutis $g_{jk}z^jw^k$ on piki joont konstantne. Tõepoolest, nende vektorite rööpülekanne korral (73.7) järgi

$$dz^j = -\Gamma_{ml}^j z^m du^l, \quad dw^k = -\Gamma_{ml}^k w^m du^l$$

ja nüüd (73.6) põhjal

$$\begin{aligned} d(g_{jk}z^jw^k) &= dg_{jk}z^jw^k + g_{jk}dz^jw^k + g_{jk}z^jdw^k = \\ &= \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^l} du^l \right) z^jw^k - g_{jk}(\Gamma_{ml}^j z^m du^l) w^k - g_{jk}z^j(\Gamma_{ml}^k w^m du^l). \end{aligned}$$

Kui vahetada liikmerühmades summeerimisindeksite tähistused: esimeses j asemele i , teises m asemele i ja kolmandas j , k , m asemele vastavalt i , j , k , saame

$$d(g_{jk}z^jw^k) = \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} - g_{jk}\Gamma_{il}^j - g_{ij}\Gamma_{kl}^j \right) z^jw^k du^l.$$

Võrduste (71.11) põhjal, mida, nagu kerge kontrollida; rahuldavad suurused (73.6), on saadud suluavaldis võrdne nulliga ja seega tõesti $g_{jk}z^jw^k = \text{const}$ piki vaadeldavat joont.

See tulemus viib mõtte järgmisele tõlgendusele. Riemanni muutkonna M_n punktis x võetud vektorit koordinaatidega z^i võib funktsioonide $u^i(t)$ sobival valikul käsitleda seda punkti läbiva joone puutujavektorina, nõudes, et $z^i = (u^i)'$. Kui nüüd defineerida vektorite liitmine ja arvuga korrutamine samade tehete kaudu koordinaatidega (vrd. art. 1), saame puutujavektorite vektorruumi, mida on loomulik nimetada muutkonna M_n puutujavektorruumiks punktis $x \in M_n$ ja tähistada $T_x(M_n)$. Selle vektoreid koordinaatidega z^i, w^i jne. hakkame tähistama z, w jne. Lisaks on loomulik defineerida skalaarkorrutis

$$zw = g_{jk}z^jw^k$$

(vrd. (71.2)) ja sel viisil muuta $T_x(M_n)$ eukleidiliseks vektorruumiks ([1], lk. 415).

Asjane tulemus on sõnastatav järgmiselt: vektorite rööpülekanne piki antud joont võrranditega $u^i = u^i(t)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$ on iga kahe $t_1, t_2 \in T$ korral eukleidilise vektorruumi $T_{x(t_1)}(M_n)$ isomorfism eukleidilisele vektorruumile $T_{x(t_2)}(M_n)$ (vrd. [1], lk. 439).

Igast eukleidilisest vektorruumist saab nn. tsentroeukleidilise ruumi E_n^0 , kui vektoreid endid lugeda punktideks; vektor 0 on teatav «tsenter» $o \in E_n^0$ ja iga vektor on iseenda kui punkti kohavektor alguspunkti o korral (vrd. [6], lk. 491). Nüüd võib öelda; et rööp-

ülekanne piki antud joont määrab $T_{x(t_1)}(M_n)$ ja $T_{x(t_2)}(M_n)$ kui seda laadi tsentroekleidiliste ruumide isomeetria (art. 10), milles ühe ruumi tsenter läheb teise ruumi tsentriks. Neid tsentreid on, muide, kasulik samastada vastavalt punktidega $x(t_1)$ ja $x(t_2)$ muutkonnas M_n — n.-ö. puutepunktidega. Näiteks hüperpinna korral on tsenter ja puutepunkt tõesti üks ja sama punkt, sest $T_x(M_n)$ järgi tehtud tsentroekleidiline ruum on hüperpinna $M_n = H \subset E_{n+1}$ puutuja-hüpertasand tsentriga puutepunktis. Juhime ühtlasi tähelepanu rööpülekande ühele lihtsale tõlgendusele, mille andis F. Minding 1837. a. ja mis 1917. a. sai T. Levi-Civitalle¹ aluseks rööpülekande defineerimisel Riemanni muutkonna puhul.

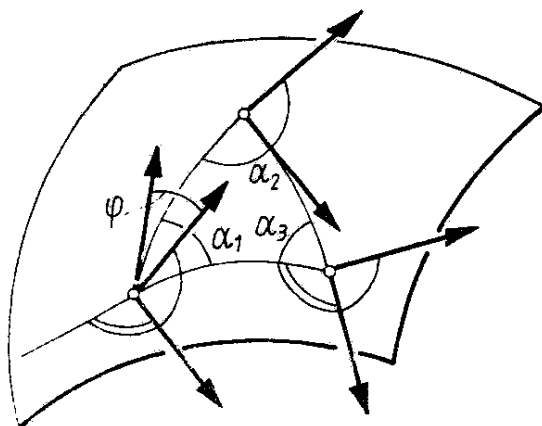
Olgu ruumis E_3 antud pind ja sellel joon. Vaatleme pinna puutujatasandeid joone punktides ja määrame saadud tasandiparve mähispinna — teatava torsi ehk tasanduva pinna, mis on painutatav tasandile (art. 47, näide 3). Arvestame nüüd, et pinna ja kõnesoleva torsi ülikitsad ribad piki antud joont langevad praktiliselt ühte (kuni teist järku hääbuvate suuruste täpsusega) ning et painutamisel sisegeomeetria säilib. Vektori rööpülekandeks piki antud joont tuleb kõnesolev riba painutada tasandile, tasandil kanda see vektor piki joont rööplükega edasi ning saadud vektorid viia riba tagasipainutamisega uuesti pinna puutujatasandisse.

Märgime ühtlasi, et sellise riba painutamisel joone geodeetiline kõverus säilib Mindingu teoreemi kohaselt (art. 48), mistõttu näiteks piki geodeetilist joont võetud riba painutub tasandile sirgjooneliseks ([5], lk. 189).

Rööpülekande abil võib anda uue käsitluse valemi (51.7) parema poole — pinnal paikneva geodeetilise kolmnurga nurgadefekti $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi$ jaoks. Võtame nurga α_1 tipus ühe külje puutujaühikvektori ja kanname selle rööpülekandega nurga α_2 tippu piki geodeetilist külge, mil ta jääb teatavasti sama külje puutujaühikvektoriks (joon. 79). Piki järgmist külge kandmisel jääb tema nurk $\pi - \alpha_2$ selle külje puutujaühikvektoriga muutumatuks, sest rööpülekandel skalaarkorrutis säilib. Täpselt samuti jääb muutumatuks tema nurk kolmanda külje puutujaühikvektoriga, mistõttu nurga α_1 tippu jõuab ta tagasi mitte endiseks vektoriks, vaid sellest nurga $\varphi = 2\pi - (\pi - \alpha_1) - (\pi - \alpha_2) - (\pi - \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \pi$ võrra pöördunud vektoriks. Seega geodeetilise kolmnurga nurgadefekt on tõlgendatav nurgana, mille võrra on pöördunud pinna puutujatasand piki seda kolmnurka tehtud rööpülekande poolt määratud isomeetria puhul.

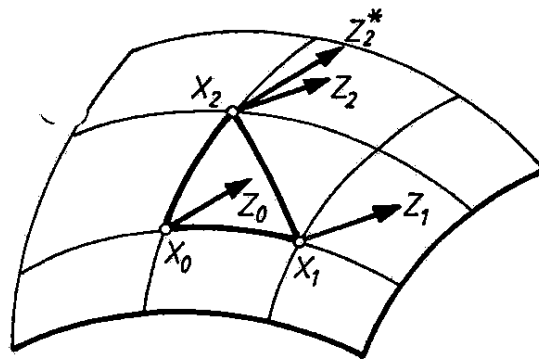
Pakub huvi, et see nurk on punktiks kokkutõmbuva geodeetilise kolmnurga korral seotud pinna täiskõverusega selles punktis, nagu selgus art-s 51.

Siit tuleneb väärtuslik idee püüda ka üldise Riemanni muutkonna kõverusnähtusi iseloomustada rööpülekande abil mööda mõne kõverjoonelise kolmnurga külgi.



Joonis 79

¹ Tullio Levi-Civita (1873–1941), itaalia matemaatik.



Joonis 80

Olgu muutkonnas M_n antud mingi vabalt võetud kahemõõtmeline alammuutkond ehk pind võrranditega $u^i = u^i(v^1, v^2)$. Selle punkti x_0 võime iseloomustada kõverjoonelistel koordinaatide väärtuspaariga (v_0^1, v_0^2) . Võtame läbi punkti x_0 v^1 -joone võrranditega $v^1 = t$, $v^2 = v_0^2 = \text{const}$ ja v^2 -joone võrranditega $v^1 = v_0^1 = \text{const}$, $v^2 = t$ ning nendel joontel paaridele $(v_0^1 + \Delta t, v_0^2)$ ja $(v_0^1, v_0^2 + \Delta t)$ vastavad punktid x_1 ja x_2 (joon. 80). Kui nüüd punktid x_1 ja x_2 ühendada mingi joonega sellel pinnal, näiteks võrrandite $v^1 = v_0^1 + \Delta t - t$, $v^2 = v_0^2 + t$ poolt määratud joonega, siis tekibki vajalik kolmnurk. Valides punktis $x = x_0$ mingi vektori $z = z_0$ koordinaatidega $z^i = z_0^i$, võime viia selle rööpülekanega kord piki v^1 -joont punkti x_1 vektoriks z_1 , kord piki v^2 -joont punkti x_2 vektoriks z_2 . Edasi võib vektori z_1 kanda piki külge $x_1 x_2$ samuti punkti x_2 vektoriks z_2^* . Selle võrdlemine vektoriga z_2 samas punktis x_2 peakski andma oodatud efekti. Protseduuri analüütilise kirjelduse saab anda üldjuhul ainult teatavas lähenduses, mis võimaldab täpseid otsustusi teha vaid mõningate piirväärtuste kohta. Seetõttu peame kohe algusest peale silmas piirprotsessi $\Delta t \rightarrow 0$, mille käigus vaadeldav kolmnurk tõmbub kokku punktiks x . Kõik allpool esinevad funktsioonid esitatakse Tayloriga valemitega, mis on täpsed kuni järguni $(\Delta t)^2$, viimane kaasa arvatud. Valemite kõrgemat järku liikmed näidatakse kirjutiste lihtsustamiseks punktiiriga «...».

Vaatleme näiteks piki mingit joont rööpülekanes olevat vektorit $z(t)$ koordinaatidega $z^j(t)$. Tayloriga valemi järgi ([2], lk. 231)

$$z^j(t + \Delta t) = z^j(t) + \dot{z}^j(t) \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{z}^j(t) (\Delta t)^2 + \dots, \quad (74.1)$$

kusjuures valemist (73.7), kui selle pooled jagada suurusega dt , saame

$$\dot{z}^j = -\Gamma_{ik}^j z^i \dot{u}^k.$$

Edasi

$$\ddot{z}^j = -\frac{d}{dt} (\Gamma_{ik}^j z^i \dot{u}^k) = -\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} \dot{u}^l \right) z^i \dot{u}^k - \Gamma_{ik}^j \dot{z}^i \dot{u}^k - \Gamma_{ik}^j z^i \ddot{u}^k,$$

kusjuures siia tuleb muidugi teha asendus

$$\dot{z}^i = -\Gamma_{ml}^i z^m \dot{u}^l.$$

Kui pärast seda vahetada teises liikmerühmas summeerimisindeksite i ja m tähistused, saame

$$\ddot{z}^j = -Q_{ikl}^j z^i \dot{u}^k \dot{u}^l - \Gamma_{ik}^j z^i \ddot{u}^k,$$

kus kirjutise lihtsustamiseks on tähistatud

$$Q_{ikl}^j = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} - \Gamma_{mk}^j \Gamma_{il}^m. \quad (74.2)$$

Asendustega Tayloriga valemisse (74.1) saame sellele kuju

$$\begin{aligned} z^j(t+\Delta t) &= z^j - (\Gamma_{ik}^j z^i \dot{u}^k) \Delta t - \frac{1}{2} (Q_{ikl}^j z^i \dot{u}^k \dot{u}^l + \Gamma_{ik}^j z^i \ddot{u}^k) (\Delta t)^2 + \dots = \\ &= z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \left(\dot{u}^k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}^k (\Delta t)^2 \right) - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i \dot{u}^k \dot{u}^l (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Paremal tunneme sulgudes ära osa funktsiooni $u^k(t)$ Tayloriga valemist:

$$u^k(t+\Delta t) - u^k(t) = \dot{u}^k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}^k (\Delta t)^2 + \dots, \quad (74.3)$$

seejuures vasak pool kujutab endast muutu Δu^k . Järelikult

$$z^j(t+\Delta t) = z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \Delta u^k - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i \Delta u^k \Delta u^l + \dots \quad (74.4)$$

Seose paremal pool väljakirjutatud liikmed lähendavad (74.1) ja (74.3) põhjal vasakut poolt selliselt, et viga on suurusega $(\Delta t)^2 \rightarrow 0$ võrreldes kõrgemat järku, s.t. nende liikmete summa on täpne kuni järguni $(\Delta t)^2$ (*incl.*).

Rakendame nüüd valemit (74.4) oma kolmnurga puhul. Et punktist x_0 punkti x_1 on liikumine piki v^1 -joont, siis Δu^k osas on

$$\Delta_1 u^k = \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^1 \partial v^1} (\Delta t)^2 + \dots \quad (74.5)$$

Seega

$$z_1^j = z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \Delta_1 u^k - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i \Delta_1 u^k \Delta_1 u^l + \dots \quad (74.6)$$

Analoogilise valemi võib kirjutada v^2 -joone jaoks, tähistades

$$\Delta_2 u^k = \frac{\partial u^k}{\partial v^2} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^k}{\partial v^2 \partial v^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

Sel juhul saame

$$z_2^j = z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \Delta_2 u^k - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i \Delta_2 u^k \Delta_2 u^l + \dots \quad (74.7)$$

Nüüd jääb veel viia vektor z_1 rööpülekanaliga punktist x_1 punkti x_2 vektoriks z_2^* . Et nende punktide kõverjoonelised koordinaadid muutkonnas M_n on vastavalt $u^k + \Delta_1 u^k$ ja $u^k + \Delta_2 u^k$, siis üleminekul esimeselt punktilt teisele on koordinaatide muutudeks suurused

$$\Delta u^k = \Delta_2 u^k - \Delta_1 u^k.$$

Seega valemi (74.4) kohaselt

$$z_2^{*j} = z_1^j - (\Gamma_{ik}^j)_1 z_1^i \Delta u^k - \frac{1}{2} (Q_{ikl}^j)_1 z_1^i \Delta u^k \Delta u^l + \dots, \quad (74.8)$$

kus $(\dots)_1$ tähendab väärtust punktis x_1 ja seega

$$(\dots)_1 = (\dots) + \frac{\partial}{\partial u^l} (\dots) \Delta_1 u^l + \dots \quad (74.9)$$

Paneme tähele, et viimases seoses pole tarvis minna järguni $(\Delta t)^2$, sest nii $(\Gamma_{ik}^j)_1$ kui ka $(Q_{ikl}^j)_1$ korrutuvad vastavalt teguritega Δu^k ja $\Delta u^k \Delta u^l$, mis tõstavad järku vähemalt ühe võrra. Seega asenduse tegemisel seosesse (74.8) võib paremal teise liikmerühma puhul piirduda sümboolses teisendusvalemis (74.9) väljakirjutatud liikmetega ning ka asenduses (74.6) piisab paremal esimesest kahest rühmast. Samal ajal (74.8) parema poole kolmandas liikmerühmas, kus teguriks on $\Delta u^k \Delta u^l$, piisab (74.9) ja (74.6) paremates pooltes koguni esimestest liikmetest. Järelikult

$$\begin{aligned} z_2^{*j} = & z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \Delta_1 u^k - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i \Delta_1 u^k \Delta_1 u^l - \\ & - \left(\Gamma_{ik}^j + \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} \Delta_1 u^l \right) (z^i - \Gamma_{ml}^i z^m \Delta_1 u^l) (\Delta_2 u^k - \Delta_1 u^k) - \\ & - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i (\Delta_2 u^k - \Delta_1 u^k) (\Delta_2 u^l - \Delta_1 u^l) + \dots \end{aligned}$$

Saadud avaldises tekivad läbikorrutamisel $(\Delta t)^2$ suhtes kõrgemat järku liikmed, mis tulevad kanda «...» sisse; lisaks on mitmeid koondumisi, näiteks kaovad $\Gamma_{ik}^j z^i \Delta_1 u^k$, samuti $Q_{ikl}^j z^i \Delta_1 u^k \Delta_1 u^l$, sest paremal keskmises reas on arvesse tulevaiks liikmeiks

$$- \Gamma_{ik}^j z^i (\Delta_2 u^k - \Delta_1 u^k) - \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} - \Gamma_{mk}^j \Gamma_{il}^m \right) z^i \Delta_1 u^l (\Delta_2 u^k - \Delta_1 u^k),$$

kusjuures keskmistes lähevad kasutusse tähistused (74.2). Kokkuvõttes, kui järjest kirjutada allesjäävad liikmed, saame

$$\begin{aligned} z_2^{*j} = & z^j - \Gamma_{ik}^j z^i \Delta_2 u^k - Q_{ikl}^j z^i \Delta_1 u^l \Delta_2 u^k - \\ & - \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i (\Delta_2 u^k \Delta_2 u^l - \Delta_2 u^k \Delta_1 u^l - \Delta_1 u^k \Delta_2 u^l) + \dots \end{aligned}$$

Tulemuse korraldamine valemi (74.7) arvestamisega annab

$$z_2^{*j} = z_2^j + \frac{1}{2} Q_{ikl}^j z^i (\Delta_1 u^k \Delta_2 u^l - \Delta_2 u^k \Delta_1 u^l) + \dots \quad (74.10)$$

Siin jääb teha vaid mõningaid lihtsamaid ümberkorraldusi. Kõigepealt järeldub seosest (74.5) ja $\Delta_2 u^i$ analoogilisest avaldisest, et neis avaldistes võib piirduda esimeste liikmetega, sest järgmised annavad asendamisel juba kõrgemat järku liikmeid. Need esi-

mesed liikmed aga kujutavad endast vastavalt v^1 -joone ja v^2 -joone puutujavektori koordinaate, kusjuures (74.10) suluavaldises on tegemist nende alterneeritud korrutise koordinaatidega.

Üldiselt, kahe vektori alterneeritud korrutist nimetatakse *bivektori*ks. Tähistame kooskõlas art-s 69 esitatuga

$$w^{kl} = \frac{\partial u^{[k}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{l]}{\partial v^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^k}{\partial v^1} \frac{\partial u^l}{\partial v^2} - \frac{\partial u^l}{\partial v^1} \frac{\partial u^k}{\partial v^2} \right); \quad (74.11)$$

need on äsja tekkinud bivektori w koordinaadid. Nende abil saab seosele (74.10) anda kuju

$$z_2^{*j} - z_2^j = Q_{ihl}^j z^i w^{hl} (\Delta t)^2 + \dots, \quad (74.12)$$

kus paremal tuleb summeerida indekseid i , k ja l järgi, andes neile sõltumatult väärtusi $1, \dots, n$. Näiteks k ja l puhul esinevad mingid kaks konkreetset väärtust p ja q kaks korda: kord $k=p$, $l=q$, kord $k=q$, $l=p$. Et $w^{qp} = -w^{pq}$, saab summas vastavad liikmed

$$Q_{ipq}^j z^i w^{pq} (\Delta t)^2, \quad Q_{ipq}^j z^i w^{qp} (\Delta t)^2$$

kokku võtta:

$$(Q_{ipq}^j - Q_{iqp}^j) z^i w^{pq} (\Delta t)^2.$$

Nii on lugu iga kahe erineva indeksiväärtuse korral (võrdsete väärtuste, s.t. $p=q$ puhul $w^{pp} = -w^{pp}$ ja järelikult $w^{pp} = 0$, mistõttu vastavad liikmed langevad välja). Seega

$$z_2^{*j} - z_2^j = \sum_{k < l} (Q_{ikl}^j - Q_{ilk}^j) z^i w^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \quad (74.13)$$

Tähistame

$$R_{i,kl}^j = Q_{ikl}^j - Q_{ilk}^j; \quad (74.14)$$

vahetult on näha nende suuruste süsteemi kaldsümmeetria viimase kahe indeksi suhtes:

$$R_{i,lk}^j = -R_{i,kl}^j. \quad (74.15)$$

Tänu sellele võib seoses (74.13) tagasi minna vaba summeerimise juurde ja kirjutada

$$z_2^{*j} - z_2^j = \frac{1}{2} R_{i,kl}^j z^i w^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \quad (74.16)$$

Tõepoolest konkreetsetele indeksiväärtustele p ja q , kus $p < q$, vastab viimases summas:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} R_{i,pq}^j z^i w^{pq} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} R_{i,qp}^j z^i w^{qp} (\Delta t)^2 = \\ & = \frac{1}{2} R_{i,pq}^j z^i w^{pq} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} (-R_{i,pq}^j) z^i (-w^{pq}) (\Delta t)^2 = R_{i,pq}^j z^i w^{pq} (\Delta t)^2, \end{aligned}$$

nii nagu on ette nähtud seoses (74.13); kui aga $k=l=p$, siis vastav liige on null ja langeb seega iseendast välja.

Seosest (74.16) võib saada täpse tulemuse teatava piirväärtuse jaoks. Suurust $\frac{1}{2}(\Delta t)^2$ võib tõlgendada võrdkülgse täisnurkse kolmnurga pindalana parameetrite v^1, v^2 tasandil, kui see muuta eukleidiliseks tasandiks art-s 1 näidatud viisil. Jagame seose (74.16) pooled selle suurusega ning loeme, et $\Delta t \rightarrow 0$. Sel korral $(\Delta t)^2$ suhtes kõrgemat järku liikmed lähevad piirprotsessis kaotsi ([2], lk. 98) ja tulemuseks on täpne võrdus

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{2}{(\Delta t)^2} (z_2^{*j} - z_2^j) \right] = (R_{i,kl}^j \omega^{kl}) z^i. \quad (74.17)$$

Et siin z^j on puutujavektorruumi $T_x(M_n)$ suvalise elemendi — puutujavektori koordinaadid, siis paremal sulgudes olevaid suurusi saab tõlgendada (antud kõverjoonelistele koordinaatide $u^1, \dots, u^n$ puhul) teatava lineaarteisenduse maatriksi elementidena. Rööpülekanal säilivad teatavasti vektorite skalaarkorrutised; seetõttu ka see lineaarteisendus säilitab nad, mistõttu ta osutub eukleidilise vektorruumi $T_x(M_n)$ automorfismiks (ehk vastava tsentro-eukleidilise ruumi tsentrit säilitavaks isomeetriaks). Allpool näitame, et kõnesolev lineaarteisendus ei sõltu tegelikult kõverjoonelistele koordinaatide $u^1, \dots, u^n$ valikust. Teda nimetatakse Riemanni muutkonna M_n bivektorile ω vastavaks *kõverusteisenduseks* punktis $x \in M_n$.

75. Riemanni—Christoffeli tensor. Kõverusteisenduse saab igas puutujaruumis $T_x(M_n)$ seada vastavusse igale bivektorile ω ja ta kujutab endast eukleidilise vektorruumi $T_x(M_n)$ automorfismi maatriksiga $\|R_{i,kl}^j \omega^{kl}\|$. Oluline osa on seejuures, nagu näha, suuruste süsteemil $R_{i,kl}^j$, mis on määratud valemitega (74.14) ja (74.2). Moodustame uue süsteemi, tähistades

$$\begin{aligned} R_{ij,kl} &= g_{jh} R_{i,kl}^h = g_{jh} (Q_{ikl}^h - Q_{ilk}^h) = \\ &= g_{jh} \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} - \Gamma_{mk}^h \Gamma_{il}^m \right) - \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^h}{\partial u^k} - \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m \right) \right]. \end{aligned} \quad (75.1)$$

Võrdlus valemiga (72.15) näitab, et tulemuseks on seesama suuruste süsteem, mis esines hüperpindade puhul ja sai seal sellesama tähise $R_{ij,kl}$. Mõlemal juhul suurused Γ_{ik}^j avalduvad Christoffeli sümboleina tensorvälja g_{ik} koordinaatide ja nende osatuletiste kaudu vastavalt valemitele (73.6) ja (71.12):

$$\Gamma_{ik}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right). \quad (75.2)$$

Arvestame nüüd neid avaldise $R_{ij,kl}$ jaoks ülal saadud valemis (75.1). Selleks rühmitame viimases liikmeid ümber, tähistades

$$P_{ikl}^h = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m,$$

nii et

$$R_{ij,kl} = g_{jh}(P_{ikl}^h - P_{ilk}^h). \quad (75.3)$$

Edasi leiame; et

$$g_{jh}P_{ikl}^h = g_{jh} \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l} + g_{jh} \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m. \quad (75.4)$$

Järgnevalt avaldame

$$\frac{\partial}{\partial u^l} (g_{jh} \Gamma_{ik}^h) = \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^l} \Gamma_{ik}^h + g_{jh} \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l}.$$

Et suurused (75.2) rahuldavad, nagu juba eespool märgitud, võrrandeid (71.11), siis saab nende võrrandite järgi teha siia asenduse:

$$\frac{\partial g_{jh}}{\partial u^l} = g_{mh} \Gamma_{jl}^m + g_{mj} \Gamma_{hl}^m,$$

seega

$$\frac{\partial}{\partial u^l} (g_{jh} \Gamma_{ik}^h) = (g_{mh} \Gamma_{jl}^m + g_{mj} \Gamma_{hl}^m) \Gamma_{ik}^h + g_{jh} \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial u^l}.$$

Avaldame viimase liikmerühma ja viime seosesse (75.4):

$$g_{jh}P_{ikl}^h = \frac{\partial}{\partial u^l} (g_{jh} \Gamma_{ik}^h) - (g_{mh} \Gamma_{jl}^m + g_{mj} \Gamma_{hl}^m) \Gamma_{ik}^h + g_{jh} \Gamma_{ml}^h \Gamma_{ik}^m.$$

Lõpust kaks liikmerühma koonduvad, sest ühes neist summeerimisindeksite h ja m vahetamisega ja g_{ik} sümmeetria arvestamisega lähevad nad teineteise vastandväärtusteks. Samal ajal (75.2) järgi

$$\begin{aligned} g_{jh} \Gamma_{ik}^h &= g_{jh} \left[\frac{1}{2} g^{hl} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^l} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right), \end{aligned}$$

sest $g_{jh}g^{hl} = \delta_j^l$; seega

$$g_{jh}P_{ikl}^h = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i \partial u^l} + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^i \partial u^l} \right) - g_{mh} \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ik}^h.$$

Võrduse (75.3) kohaselt tuleb $R_{ij,kl}$ saamiseks vahetada k ja l kohad ning tulemus lahutada äsja saadud suurusest. Seejuures võib arvestada, et segatuletise tuntud omaduse tõttu ([3], lk. 170)

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^l \partial u^k} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^k \partial u^l},$$

mistõttu lahutamisel see liige koondub välja. Niisiis,

$$\begin{aligned} R_{ij,kl} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^i \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial u^i \partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial u^j \partial u^k} \right) + \\ &+ g_{mh} (\Gamma_{jk}^m \Gamma_{il}^h - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{ik}^h). \end{aligned} \quad (75.5)$$

Sellisel avalduvad suurused $R_{ij,kl}$ Riemanni meetrika koordinaatide g_{ik} ja nende osatuletiste kaudu; edasisi asendusi valemist (75.2) pole mõtet teha, sest mingeid olulisi järeldusi need endaga kaasa ei too. Seni tehtud osaline asendus aga toob esile suuruste süsteemi $R_{ij,kl}$ siiani varjul olnud uue omaduse:

$$R_{kl,ij} = R_{ij,kl}. \quad (75.6)$$

Tõepoolest, vahetame valemis (75.5) indeksipaaride i, j ja k, l kohad, indeksite järjekorda paarides muutmata:

$$R_{kl,ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial u^k \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{ki}}{\partial u^l \partial u^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial u^k \partial u^i} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial u^l \partial u^i} \right) + \\ + g_{mh} (\Gamma_{ki}^m \Gamma_{hj}^h - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{hi}^h).$$

Siin parem pool on sama mis valemis (75.5), sest nii g_{ik} kui ka (75.2) kohaselt Γ_{ik}^j on sümmeetrilised i ja k suhtes ning segatuletis ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

Et (75.1) põhjal

$$R_{ij,lk} = -R_{ij,kl}, \quad (75.7)$$

siis see koos omadusega (75.6) annab

$$R_{ji,kl} = R_{kl,ji} = -R_{kl,ij} = -R_{ij,kl}.$$

Seega suuruste $R_{ij,kl}$ süsteem on sümmeetriline järjestatud paaride i, j ja k, l vahetamise suhtes, kuid antisümmeetriline ühe paari, seejuures ükskõik kumma, indeksite vahetamise suhtes.

Hüperpinna puhul, mil (72.16) põhjal

$$R_{ij,kl} = b_{ik} b_{jl} - b_{il} b_{jk}, \quad (75.8)$$

oleksid need omadused olnud järeldatavad ka parema poole abil, kuid see poleks aidanud üldise Riemanni muutkonna M_n korral, sest mitte iga Riemanni meetrika pole realiseeritav hüperpinna sisemeetrikana, nagu on näidanud vastavad uurimused (s.t. alati ei leidu funktsioone $b_{ik}(u^1, \dots, u^n)$ nii, et (75.5) puhul oleks rahuldatud (75.8)).

Sama lugu on ka valemi (75.8) kasutamisega $R_{ij,kl}$ teisenemiseaduse järeldamisel. Hüperpinna puhul tuletasime art-s 72 siit kergesti, et suurused $R_{ij,kl}$, avaldudes (2,0)-tensorväljade alterneeritud korrutise koordinaatidena, on ka ise teatava (4,0)-tensorvälja koordinaadid. Tekib küsimus, kas see tulemus kandub üle üldjuhule.

Üks võimalus vastust leida on lähtuda vahetult Riemanni meetrika koordinaatide g_{ik} teisenemiseadusest (73.2), tuletada siit Γ_{ik}^j teisenemiseadus (veendudes (72.7) üldkehtivuses) ning seejärel ka Q_{ikl}^j (või P_{ikl}^j) ja lõpuks $R_{ij,kl}$ teisenemiseadus. Seda teed kasutades tuleb aga teha väga pikki arvutusi. Seetõttu on otstarbekam võtta aluseks valem (74.17), mis on saadud üldise Riemanni muutkonna jaoks. Me teame, et selle vasakul pool on vektori (kahe

vektori vahe piirväärtuse) koordinaadid, mistõttu ka paremal pool üht vaba indeksit j omavad suurused teisenevad nagu vektori koordinaadid (vt. (73.4)):

$$(R_{i,kl}^j w^{kl}) z^i = u_{j'}^j (R_{i',k'l'}^{j'} w^{k'l'}) z^{i'}. \quad (75.9)$$

Sama võib öelda z^i kohta:

$$z^i = u_{i'}^i z^{i'},$$

samuti kahe vektori alterneeritud korrutise koordinaatide w^{kl} kohta:

$$w^{kl} = u_{k'}^k u_{l'}^l w^{k'l'}.$$

Asendamisel seosesse (75.9) saame

$$(R_{i,kl}^j u_{k'}^k u_{l'}^l w^{k'l'}) u_{i'}^i z^{i'} = u_{j'}^j (R_{i',k'l'}^{j'} w^{k'l'}) z^{i'}.$$

Niisugune võrdus peab kehtima iga vektori, s.t. suvaliste $z^{i'}$ korral, seega

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} R_{i,kl}^j u_{i'}^i u_{k'}^k u_{l'}^l \left(\frac{\partial u^{k'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^2} - \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{k'}}{\partial v^2} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} u_{j'}^j R_{i',k'l'}^{j'} \left(\frac{\partial u^{k'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^2} - \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{k'}}{\partial v^2} \right), \end{aligned}$$

kus oleme teinud asenduse (74.11). Kui avada sulud ja mõlemal pool teistes liikmerühmades vahetada summeerimisindeksite k' ja l' kohad, arvestades võrdust (74.15), saame

$$R_{i,kl}^j u_{i'}^i u_{k'}^k u_{l'}^l \frac{\partial u^{k'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^2} = u_{j'}^j R_{i',k'l'}^{j'} \frac{\partial u^{k'}}{\partial v^1} \frac{\partial u^{l'}}{\partial v^2}.$$

Et võrdus (74.17) kehtib igasuguse vaadeldavat punkti läbiva pinna korral, siis on $\frac{\partial u^{k'}}{\partial v^1}$ ja $\frac{\partial u^{l'}}{\partial v^2}$ vabalt valitavad ja seetõttu

$$R_{i,kl}^j u_{i'}^i u_{k'}^k u_{l'}^l = u_{j'}^j R_{i',k'l'}^{j'}.$$

Jääb vaid korrutada vasakult $\|u_{j'}^j\|$ pöördmaatriksiga $\|u_j^{j'}\|$, et saada (3,1)-tensori koordinaatide teisenemisseadus:

$$R_{i',k'l'}^{j'} = u_j^{j'} R_{i,kl}^j u_{i'}^i u_{k'}^k u_{l'}^l. \quad (75.10)$$

Saadud (3,1)-tensorit koordinaatidega $R_{i,kl}^{j'}$ nimetatakse Riemanni muutkonna M_n *kõverustensoriks*; et ta on määratud igas punktis $x \in M_n$, siis on tegelikult tegemist tensorväljaga. Üleminek koordinaatidele $R_{ij,kl}$ valemi (75.1) järgi on nüüd tõlgendatav indeksi langetamisena Riemanni meetrika abil (art. 69). (Sel juhul oleks õigem muidugi $R_{i,kl}^j$ asemele kirjutada $R_{i,kl}^j$). Järelikult $R_{ij,kl}$ on teatava (4,0)-tensori koordinaadid. Seda tensorit nimetatakse Riemanni muutkonna M_n *Riemanni—Christoffeli tensoriks* ehk (4,0)-*kõverustensoriks*. Tal on eespool märgitud sümmeetria ja antisümmeetria omadused, kuid lisaks neile saab valemist

(75.3) järeldada, et tema koordinaadid rahuldavad veel üht samasust.

Kirjutame selle valemi välja kolm korda, tsükleerides indekseid i, k ja l :

$$R_{ij,kl} = g_{jh}(P_{ikl}^h - P_{ilk}^h),$$

$$R_{kj,li} = g_{jh}(P_{kli}^h - P_{kil}^h),$$

$$R_{lj,ik} = g_{jh}(P_{lik}^h - P_{lki}^h).$$

Et Γ_{ik}^j on (75.2) põhjal sümmeetrilised indeksite i ja k suhtes, siis ka $g_{jh}P_{ikl}^h$ on (75.4) põhjal sümmeetrilised samade indeksite suhtes. Seetõttu viimaste võrduste poolte liitmisel koonduvad paremal kõik liikmerühmad paarikaupa välja. Tulemuseks on võrdus

$$R_{ij,kl} + R_{kj,li} + R_{lj,ik} = 0, \quad (75.11)$$

mida tuntakse *Ricci*¹ samasuse nime all. Riemanni—Christoffeli tensori omaduste (75.6) ja (75.7) põhjal võib sellele samasusele anda kuju, kus tsükleerimine toimub ükskõik missuguse kolme, näiteks kolme viimase indeksi suhtes:

$$R_{ij,kl} + R_{ik,lj} + R_{il,jk} = 0.$$

Siin teine ja kolmas liidetav on võrdsed samasuse (75.11) vastavalt kolmanda ja teise liidetavaga.

Ahendatud korrutisena saab moodustada (2,0)-tensori koordinaatidega

$$R_{jk} = g^{il}R_{ij,kl}, \quad (75.12)$$

seda nimetatakse *Ricci tensoriks*. Ta osutub sümmeetriliseks, sest

$$R_{kj} = g^{il}R_{ik,jl},$$

kuid siin võib kasutada summeerimisindeksite i ja l kohtade vahetamist, sümmeetriaomadust $g^{li} = g^{il}$ ja omadustest (75.6) ja (75.7) järelduvat võrdust $R_{lk,ji} = R_{ij,kl}$:

$$R_{kj} = g^{li}R_{lk,ji} = g^{il}R_{ij,kl} = R_{jk}.$$

Veelkordse ahendatud korrutisena tekib Riemanni muutkonna M_n nn. *skalaarkõverus*

$$R = g^{jk}R_{jk}. \quad (75.13)$$

Vaatleme neid tensoreid lähemalt kahemõõtmelise Riemanni muutkonna M_2 korral. Riemanni—Christoffeli tensori ülalosaadud omaduste põhjal tema koordinaat $R_{ij,kl}$ on null niipea, kui ühes paaris on indekseid võrdsed; näiteks $R_{ii,kl} = -R_{ii,kl}$ mistõttu $2R_{ii,kl} = 0$. Juhul $n=2$, mil indekseid omandavad ainult väärtusi 1 ja 2, on sel tensoril järelikult üksainus oluline koordinaat $R_{12,12}$, teised koordinaadid on kas selle vastandväärtused või nullid. Ricci tensori koordinaatideks $R_{jk} = g^{il}R_{ij,kl}$ on siin

$$R_{11} = g^{il}R_{i1,1l} = -g^{22}R_{12,12}, \quad R_{22} = g^{il}R_{i2,2l} = -g^{11}R_{12,12},$$

$$R_{12} = R_{21} = g^{il}R_{i2,1l} = g^{12}R_{12,12}.$$

¹ Gregorio Ricci-Curbastro (1853—1925), itaalia matemaatik.

Seejuures

$$\|g^{ij}\| = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det |g_{ij}|} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$

seega

$$-R_{ij} = g_{ij} \frac{R_{12,12}}{\det |g_{ij}|}.$$

Võrdlus valemiga (72.16) näitab, et paremal on g_{ij} kordajaks suurus, mis pinna sisegeomeetria korral tähendab pinna täis- ehk Gaussi kõverust K . Sel põhjusel nimetatakse kahemõõtmelise Riemanni muutkonna M_2 korral seda kordajat samuti *Gaussi kõveruseks* ja tähistatakse sama sümboliga K . Niisiis,

$$R_{ij} = -Kg_{ij}.$$

Skalaarkõveruseks saame siit

$$R = g^{ij}R_{ij} = -Kg^{ij}g_{ij} = -K\delta_i^i = -K(\delta_1^1 + \delta_2^2) = -2K, \quad (75.14)$$

nii et

$$R_{ij} = \frac{1}{2} R g_{ij}. \quad (75.15)$$

Suurema mõõtme n korral on mitu võimalust Gaussi kõveruse mõiste üldistamiseks. Üks neist oleks defineerida K seose (75.14) üldistamise teel skalaarkõveruse R kordsena, kuid nii viisi saaksime suuruse, mis iseloomustab Riemanni muutkonna M_n kõverusnähtusi $n > 2$ korral väga üldjoontes. Teine võimalus oleks võtta koordinaadi $R_{12,12}$ kõrval arvesse teisedki analoogilised koordinaadid, näiteks $n=3$ korral ka $R_{13,13}$ ja $R_{23,23}$. Kuid ka siis jääksid kõrvale koordinaadid $R_{12,13}$, $R_{12,23}$, $R_{13,23}$ (muide, rohkem olulisi koordinaate juhul $n=3$ pole). Seetõttu on kõige otstarbekam tuua valemi (74.17) abil sisse nn. lõikekõverus — mõiste, mida käsitleme järgmises artiklis.

Seoses võrdusega (75.15) märgime veel, et kui $n > 2$, siis üldjuhul analoogilist seost Riemanni meetrika ning tema Ricci tensori ja skalaarkõveruse vahel pole. Juhul kui $n > 2$, eraldab tingimus

$$R_{ij} = qg_{ij}$$

välja teatava Riemanni muutkondade M_n klassi, mille esindajaid nimetatakse *Einsteini ruumideks*; võrdustega (75.14) analoogilistest võrdustest järeldub siin

muide, et $q = \frac{1}{n} R$. Nimetus on tulnud sellest, et A. Einsteini töödest üldrela-

tiivsusteooria alal selgus nende ruumide eriline osa kaasaja gravitatsiooniteoorias (kus $n=4$ ja muutkonnal vaadeldakse mitte Riemanni meetrikat, vaid sellist Riemanni meetrilist tensorit, mille korral puutujaruumideks tulevad Minkowski ruumid (vt. art. 6).

76. Lõikekõverus. Pöördume tagasi valemi (74.17) juurde ja meenutame tema saamislugu. Me võtsime Riemanni muutkonnas M_n vabalt punkti x_0 , vaatlesime seda läbivat pinda võrranditega $u^i = u^i(v^1, v^2)$ ja sellel väikest kõverjoonelist kolmnurka tippudega x_0 , x_1 ja x_2 , millest x_α on punkti x_0 läbival v^α -joonel; $\alpha=1, 2$. Seejärel võtsime vabalt vektori z_0 punktis x_0 ja viisime ta rööpülekan- dega mööda külge x_0x_1 (või x_0x_2) punkti x_1 (või x_2) vektoriks z_1 (või z_2), edasi aga vektori z_1 mööda külge x_1x_2 punkti x_2 vektoriks z_2^* (joon. 80). Sel juhul tekkiski valem (74.17), kus w^{hl} on külgede x_0x_1 ja x_0x_2 puutujavektoreist moodustatud bivectori koordinaadid (74.11).

Rakendame nüüd neile puutujavektoritele Grami—Schmidt (vt. art. 2) ortogonaliseerimisprotsessi koos vektorite normeerimisega,

et saada ristuvate ühikvektorite paari. Kõigepealt tuleb normeerida vektor¹ $\frac{\partial u^i}{\partial v^1}$. Selleks arvutame tema skalaarruudu, tähistades selle g_{11} :

$$g_{11} = g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^k}{\partial v^1}. \quad (76.1)$$

Vastav ühikvektor on siis

$$e_1^i = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^i}{\partial v^1}. \quad (76.2)$$

Edasi tuleb leida vektor

$$f_2^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^2} - \lambda e_1^i,$$

seega kordaja λ nii, et see vektor oleks ortogonaalne äsja leitud vektoriga, s.t. et oleks

$$g_{ik} f_2^i e_1^k = g_{ik} \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^2} - \lambda e_1^i \right) e_1^k = 0.$$

Et $g_{ik} e_1^i e_1^k = 1$, siis siit

$$\lambda = g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \right) = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} g_{12},$$

kus

$$g_{12} = g_{ki} \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \frac{\partial u^i}{\partial v^2} = g_{ki} (\sqrt{g_{11}} e_1^k) \frac{\partial u^i}{\partial v^2}. \quad (76.3)$$

Lõpuks jääb veel saadud vektor

$$f_2^i = \frac{\partial u^i}{\partial v^2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} e_1^i$$

normeerida. Siin

$$\begin{aligned} g_{ik} f_2^i f_2^k &= g_{ik} \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} e_1^i \right) \left(\frac{\partial u^k}{\partial v^2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} e_1^k \right) = \\ &= g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}} + \frac{g_{12}^2}{g_{11}} = \frac{1}{g_{11}} \det |g_{\alpha\beta}|, \end{aligned}$$

kus

$$g_{22} = g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^2} \frac{\partial u^k}{\partial v^2}. \quad (76.4)$$

Niisiis,

$$e_2^i = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^2} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} e_1^i \right). \quad (76.5)$$

¹ Asja lihtsustamiseks esitame vektorid kohe nende koordinaatide abil.

Saadud seostest saab avaldada

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^1} = \sqrt{g_{11}} e_1^i,$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial v^2} = -\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} e_1^i + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} e_2^i.$$

Valemite (74.11) põhjal nüüd

$$\begin{aligned} w^{kl} &= \frac{1}{2} \{ e_1^k (g_{12} e_1^l + \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} e_2^l) - e_1^l (g_{12} e_1^k + \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} e_2^k) \} = \\ &= \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} \cdot \frac{1}{2} (e_1^k e_2^l - e_1^l e_2^k). \end{aligned}$$

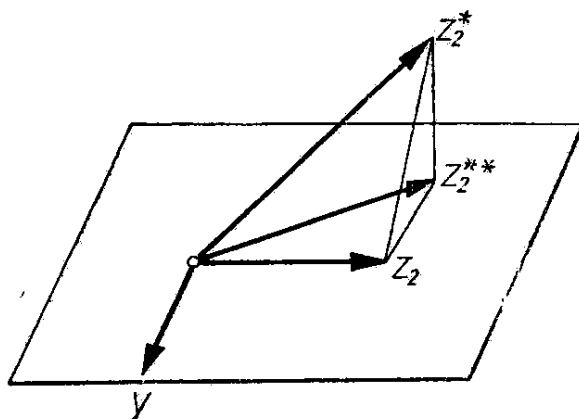
Siin on tekkinud ristuvate ühikvektorite kui (0,1)-tensorite alterneeritud korrutis, praegu koordinaatidega

$$f^{kl} = \frac{1}{2} (e_1^k e_2^l - e_1^l e_2^k).$$

Sellisel saadud bivektoreid nimetatakse *ühikbivektoriteks*; praegu on tegemist ühe niisugusega. Kokkuvõttes

$$w^{kl} = \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} f^{kl}. \quad (76.6)$$

Järgnevalt anname valemi (74.17) geomeetrilise tõlgenduse, vaadeldes tema tekkelugu nüüd pisut teisiti. Lähtume nimelt vektorist z_2 punktis x_2 . See läheb rööpülekanega mööda külge $x_2 x_0$ muidugi tagasi punkti x_0 vektoriks z_0 . Viimase edasikandmisel mööda külgi $x_0 x_1$ ja $x_1 x_2$ jõuame pärast ringkäiku jälle punkti x_2 , kuid juba uue vektoriga z_2^* . Eeldame lisaks, et lähtevektor z_2 on külje $x_2 x_0$ kui v^2 -joone puutujaühikvektor. Temast ringkäiguga saadud vektor z_2^* ei tarvitse enam olla isegi selle pinna puutujavektor, mida mööda ringkäik on tehtud (s.t. ta ei tarvitse avalduda punkti x_2 läbiva v^1 - ja v^2 -joone puutujavektorite lineaarkombinatsioonina). Küll aga võib teda ortogonaalselt projitseerida selle pinna puutujatasandile — v^1 - ja v^2 -joone puutujavektorite lineaarsele kattele



Joonis 81

puutujaruumis $T_{x_2}(M_n)$ kui n -mõõtmelises ruumis (joon. 81). Saadav vektor z_2^{**} on selline puutujatasandil, mille korral

$$\Delta^* z_2 = z_2^* - z_2^{**}$$

on risti selle puutujatasandiga ja järelikult ka sellel oleva vektoriga z_2 : $\Delta^* z_2 \perp z_2$. Seame eesmärgiks näidata, et $\Delta^{**} z_2 = z_2^{**} - z_2 \perp z_2$, juhul kui kõrvale jäetakse $\Delta^{**} z_2$ arendise liikmed, mis on kõrgemat järku kui $(\Delta t)^2 \rightarrow 0$. Selleks on küllalt kontrollida, et samal eeldusel

$$\Delta z_2 = z_2^* - z_2 = \Delta^* z_2 + \Delta^{**} z_2 \perp z_2,$$

see on aga lihtsasti tehtav valemi (74.16) abil. Tõepoolest, kõnesoleva täpsusega võib (74.7) põhjal valemis (74.16) z^i asemel kirjutada z_2^i ja pärast seda

$$\begin{aligned} z_2 \cdot \Delta z_2 &= g_{jh} z_2^j \Delta z_2^h = g_{jh} z_2^j \left(\frac{1}{2} R_{i,kl}^h z_2^i \omega^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} R_{ij,kl} z_2^i z_2^j \omega^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned}$$

Siin «...» ees olev avaldis on võrdne nulliga. Selles veendumiseks on vaja vahetada summeerimisindeksite i ja j kohad ning arvestada, et kuigi sisuliselt midagi ei muutu, on saadav tegur $R_{ji,kl} z_2^i z_2^j \omega^{kl}$ seose (75.7) põhjal $-R_{ij,kl} z_2^i z_2^j \omega^{kl}$, seega võrdne oma vastandväärtusega ja järelikult 0. Kokkuvõttes, kõnesoleva täpsusega

$$\Delta^{**} z_2 \perp z_2.$$

Võtame nüüd pinna puutujatasandil punktis x_2 veel teise ühikvektori y_2 , mis oleks risti ühikvektoriga z_2 selliselt, et baas $\{z_2, y_2\}$ annaks piirprotsessis $\Delta t \rightarrow 0$, kui $x_2 \rightarrow x_0$, samasuguselt orienteeritud baasi punktis x_0 nagu $\{e_1, e_2\}$. Sel korral kõnesoleva täpsusega $\Delta^{**} z_2 \parallel y_2$ ja kui nüüd tähistada $\varphi = \angle(z_2, z_2^{**})$, siis täisnurksest kolmnurgast, mille kaatetiks on punktist x_2 rakendatud z_2 (pikkusega 1) ja hüpotenuusiks z_2^{**} , järeldub, et $\Delta^{**} z_2 = y_2 \cdot \tan \varphi + \dots$. Siit

$$\tan \varphi = y_2 \cdot \Delta^{**} z_2 + \dots \quad (76.7)$$

Seejuures võib paremal $\Delta^{**} z_2$ asemel kirjutada $\Delta z_2 = \Delta^{**} z_2 + \Delta^* z_2$, sest $\Delta^* z_2 \perp y_2$, kuna $\Delta^* z_2$ on risti puutujatasandiga. Samuti võib Tayloriga valem

$$\tan \varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \dots$$

kasutades kõnesoleva täpsuse piirides kirjutada $\tan \varphi$ asemel φ . Seega (74.16) põhjal

$$\begin{aligned} \varphi &= y_2 \cdot \Delta z_2 + \dots = g_{jh} y_2^j \left(\frac{1}{2} R_{i,kl}^h z_2^i \omega^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2} R_{ij,kl} z_2^i y_2^j \omega^{kl} (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned} \quad (76.8)$$

Paremal pool olevat avaldist on kasulik veel edasi teisendada, vahetades selles summeerimisindeksite i ja j kohad

$$\frac{1}{2} R_{ji,kl} z_2^j y_2^i w^{kl} = -\frac{1}{2} R_{ij,kl} z_2^j y_2^i w^{kl}.$$

Liites tulemuse esialgsele avaldisele, millega ta on võrdne, saame selle avaldise kahekordsena. Järelikult võib ta kirjutada ka kujul

$$\frac{1}{2} R_{ij,kl} \cdot \frac{1}{2} (z_2^i y_2^j - z_2^j y_2^i) w^{kl} = \frac{1}{2} R_{ij,kl} f_2^{ij} w^{kl},$$

kus

$$f_2^{ij} = z_2^i y_2^j - z_2^j y_2^i = \frac{1}{2} (z_2^i y_2^j - z_2^j y_2^i)$$

on teatav ühikbivektor punktis x_2 . Kui nüüd arvestada veel valemit (76.6), saame võrdusele (76.8) kuju

$$\varphi = \frac{1}{2} R_{ij,kl} f_2^{ij} f^{kl} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} (\Delta t)^2 + \dots \quad (76.9)$$

Omaette tähelepanu väärrib tegur $\frac{1}{2} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}$, mida saab viia ühendusse ülalvaadeldud kõverjoonelise kolmnurga pindalaga pinnal. Tõepoolest, suurused $g_{\alpha\beta}$ pole muutuva punkti x korral seoste (76.1), (76.3) ja (76.4) põhjal midagi muud kui pinnal indutseeritud Riemanni meetrika koordinaadid ning kõnesoleva kolmnurga pindala on järelikult

$$S = \iint_{\Lambda} \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} dv^1 dv^2$$

(vt. art. 73), kus Λ on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk $v^1 v^2$ -tasandil; selle kolmnurga kaatetid on telgede sihilised ja pikkusega Δt . Kahekordse integraali keskväärtusteoreemi põhjal ([3], lk. 272)

$$S = (\sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|})_v \cdot \frac{1}{2} (\Delta t)^2,$$

kus $v = (v^1, v^2)$ on mingi punkt selles kolmnurgas Λ . Meil arvessemineva täpsusega võib seega siin punkti v asendada punktiga v_0 , millele pinnal vastab x_0 :

$$S = \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} \cdot \frac{1}{2} (\Delta t)^2 + \dots$$

Jagame nüüd võrduse (76.8) pooled selle pindalaga S ja teeme seejärel piirprotsessi $\Delta t \rightarrow 0$. Saame

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi}{S} = R_{ij,kl} \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_2^{ij} \right) f^{kl}.$$

Osutub, et $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f_2^{ij} = f^{ij}$. Tõepoolest piirprotsessis $\Delta t \rightarrow 0$ vektorid

z_2 ja y_2 lähevad kaheks ristuvaks ühikvektoriks pinna puutujatasandil punktis x_0 , mis on seega avaldatavad baasil $\{e_1, e_2\}$:

$$z_2 \rightarrow e_1 \cos \alpha + e_2 \sin \alpha,$$

$$y_2 \rightarrow -e_1 \sin \alpha + e_2 \cos \alpha;$$

siin on arvestatud veel, et $\{z_2, y_2\}$ ja $\{e_1, e_2\}$ on ühtemoodi orienteeritud. Siit järeldub, et

$$\begin{aligned} f_2^{ij} &= \frac{1}{2} (z_2^i y_2^j - z_2^j y_2^i) \rightarrow \frac{1}{2} [(e_1^i \cos \alpha + e_2^i \sin \alpha) (-e_1^j \sin \alpha + e_2^j \cos \alpha) - \\ &\quad - (e_1^j \cos \alpha + e_2^j \sin \alpha) (-e_1^i \sin \alpha + e_2^i \cos \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} [e_1^i e_2^j (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - e_2^i e_1^j (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)] = \\ &= \frac{1}{2} (e_1^i e_2^j - e_2^i e_1^j) = f^{ij}. \end{aligned}$$

Lõplikult,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi}{S} = R_{ij,kl} f^{ij} f^{kl}. \quad (76.10)$$

Vasakul piirväärtuse märgi all on lugejas pinna puutujatasandil vabalt võetud vektori ja sellest mööda kolmnurga külgi tehtud ringkäigus rööpülekandegaga saadud vektori puutujatasandilise komponendi vaheline nurk suunaga vektorist komponendi poole. Nime-tajas on kolmnurga pindala. Piirprotsess tähendab kolmnurga kokkutõmbumist ühte tippu x_0 . Tekkiv piirväärtus, nagu näha paremast poolest, sõltub üksnes sellest tipust x_0 kui Riemanni muutkonna M_n punktist ja pinna puutujatasandist selles punktis. Viimane asjaolu nõuab lähemalt selgitust. Asi on selles, et nagu äsja selgus, sõltub ühikbivektor koordinaatidega f^{ij} üksnes puutujatasandist ja orientatsioonist selles, sest iga kahe antud orientatsiooniga ortonormeeritud baasi korral sel tasandil tuleb sama ühikbivektor. Kuid ka orientatsioon pole oluline, sest baasivektorite järjestuse muutmisel vastav ühikbivektor muudab märki, kuid et ta esineb tegurina veel teistki korda, siis vaadeldav avaldis seejuures ei muutu.

Pinna puutujatasand pole aga midagi muud kui mingi kahe-mõõtmeline alamvektorruum τ puutujavektorruumis $T_{x_0}(M_n)$, mida võib teatavas mõttes vaadelda kahemõõtmelise lõikena selles viimati mainitud ruumis. Sel põhjusel nimetatakse valemi (76.9) paremat poolt Riemanni muutkonna M_n *lõikekõveruseks* ja tähistatakse $K(\tau)$; niisiis

$$K(\tau) = R_{ij,kl} f^{ij} f^{kl}, \quad (76.11)$$

kus f^{ij} on see ühikbivektor, mille määrab τ . Sõltuvus punktist $x_0 \in M_n$ selles sümbolis otseselt ei kajastu, kuid on muidugi olemas. Valemi (76.10) vasak pool annab lõikekõveruse $K(\tau)$ geomeetrilise tähenduse, kusjuures selgub huvitav tõsiasi: see vasak

pool sõltub punkti x_0 läbivast pinnast üksnes selle puutujatasandi kaudu — punktis puutuvate pindade korral on ta sama.

Märkimist väärrib veel $K(\tau)$ märgi tähendus. Kui $K(\tau) \geq 0$, siis ülekantava vektori puutujatasandiline komponent on pärast lähtepunkti jõudmist pöördunud algasendist sellesama orientatsiooni järgi, milles on tehtud ringkäik. Kui $K(\tau) \leq 0$, siis on olukord vastupidine. See selgub kohe valemi (76.7) analüüsimisel.

Lõikekõveruse $K(\tau)$ jaoks äsjasaadud valemi (76.11) rakendusvõimalusi kitsendab nõue, et f^{ij} peavad olema ühikbivektori koordinaadid. Püüame sellest nõudest vabaneda valemi (76.6) abil. Selle järgi

$$K(\tau) = \frac{R_{ij,kl} \omega^{ij} \omega^{kl}}{\det |g_{\alpha\beta}|}$$

ning ülesandeks jääb avaldada nimetaja bivektori koordinaatide ω^{ij} kaudu. Siin tuleb muidugi kasutada valemeid (76.1), (76.3) ja (76.4), mille kohaselt

$$\begin{aligned} \det |g_{\alpha\beta}| &= \left(g_{ik} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \right) \left(g_{jl} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} \frac{\partial u^l}{\partial v^2} \right) - \\ &- \left(g_{il} \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^l}{\partial v^2} \right) \left(g_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \right) = \\ &= (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2} \frac{\partial u^k}{\partial v^1} \frac{\partial u^l}{\partial v^2}. \end{aligned} \quad (76.12)$$

Suluavaldis on kaldsümmeetriline nii indekse i, j kui ka k, l suhtes, nagu kerge kontrollida. Summeerimisel kaldsümmeetrilise suurusega kehtib aga järgmine reegel:

$$a_{ij} = -a_{ji} \Rightarrow a_{ij} b^{ij} = a_{ij} b^{[ij]}. \quad (76.13)$$

Tõepoolest,

$$a_{ij} b^{[ij]} = a_{ij} \cdot \frac{1}{2} (b^{ij} - b^{ji}) = \frac{1}{2} (a_{ij} b^{ij} - a_{ij} b^{ji}).$$

Kui teises liikmes vahetada summeerimisindekse i ja j kohad, saame $-a_{ji} b^{ij} = a_{ij} b^{ij}$; seega (76.13) kehtib.

Selle reegli ja seejärel valemi (74.11) rakendamine seose (76.12) paremal pool annab

$$K(\tau) = \frac{R_{ij,kl} \omega^{ij} \omega^{kl}}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \omega^{ij} \omega^{kl}}. \quad (76.14)$$

Siin ongi tekkinud soovitud üldine avaldis lõikekõveruse jaoks. Nimetajas on teatav Riemanni meetrika abil moodustatud (4,0)-tensor, millel on samad algebralised omadused mis Riemanni—Christoffeli tensoril.

Kahemõõtmelise Riemanni muutkonna M_2 puhul on üksainus oluline koordinaat w^{12} , teised on kas nullid või $-w^{12}$. See koordinaat taandub viimasest valemist välja ja tulemuseks saame

$$K(\tau) = \frac{R_{12,12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

s. t. lõikekõverus on sel korral Gaussi kõverus K .

77. Mitteeukleidilised ruumid Riemanni muutkondadena. Seame ülesandeks selgitada eelmistes peatükkides käsitletud mitteeukleidiliste ruumide koha üldiste Riemanni muutkondade seas ning tutvustada sel puhul kerkivaid mõningaid probleeme ja nende lahendusi; vastavate tuletuskäikude üksikasjalik esitamine läheb paraku käesoleva kursuse raamidest välja.

Alustame eukleidilisest ruumist E_n . See on teatavasti alg- ja seetõttu ka lihtmuutkond, milles on võimalik valida koordinaadid niimoodi, et kas $g_{ik} = \delta_{ik}$ ja koos sellega kahe punkti vahelise kauguse arvutamine käib valemi

$$d(a, b) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + \dots + (a^n - b^n)^2}$$

järgi (art. 1 ja 71), või üldisemalt, $g_{ik} = k_i k_k = \text{const}$ (vt. (71.8)). Niisiis, ruum E_n on selline Riemanni muutkond M_n , kus $\Delta = \mathbb{R}^n$ ja Riemanni meetrika koordinaadid on võimalik muuta konstantideks. Nendele koordinaatidele vastavalt on valemi (73.6) järgi $\Gamma_{ik}^j = 0$, geodeetiliste joonte diferentsiaalvõrrandisüsteem (73.8) omandab kuju $\ddot{u}^j = 0$ ja lineaarsed lahendid $u^j = a^j + tk^j$ (vrd. 2.6), ning valemi (75.5) kohaselt

$$R_{ij,kl} = 0. \quad (77.1)$$

Vastavalt sellele on ruumi E_n lõikekõverus $K(\tau)$ valemi (76.14) järgi samaselt null.

Tekib küsimus, mida võib üldiselt öelda sellise Riemanni muutkonna M_n kohta, mille lõikekõverus on samaselt null. Küsimust on otstarbekas uurida pisut üldisemal kujul: mida võib öelda siis, kui $K(\tau)$ on konstantne igas punktis $x \in M_n$?

Kui see konstant tähistada K , siis valemist (76.14) järeldub, et

$$[R_{ij,kl} - K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})]w^{ij}w^{kl} = 0$$

ehk, kui nurksuluavaldis tähistada $R_{ij,kl}^*$,

$$R_{ij,kl}^* w^{ij} w^{kl} = 0.$$

Viimane tingimus peab olema rahuldatud samaselt $w^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial v^1} \frac{\partial u^j}{\partial v^2}$ suhtes. Detailne analüüs näitaks¹, et see on võimalik üksnes siis, kui $R_{ij,kl}^* = 0$ ehk

$$R_{ij,kl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (77.2)$$

Seega

$$K(\tau) \equiv 0 \Rightarrow R_{ij,kl} = 0.$$

¹ П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., 1964, с. 592, 593.

Edasi tekib küsimus, mida võib öelda Riemanni muutkonna M_n kohta, mille Riemanni—Christoffeli tensor on samaselt null, s.t. kehtib seos (77.1). (Meenutame, et pinnateoorias vastab sellele küsimus niisuguse pinna ehituse kohta, mille puhul $R_{12,12} = K \cdot \det |g_{\alpha\beta}| = 0$ ehk $K \equiv 0$ (art. 41)). Osutub, et kui $R_{ij,kl} \equiv 0$, siis Riemanni lihtmuutkond M_n on kas E_n või piirkond $D \subset E_n$.

Põhjenduse skeem on järgmine. Valemeist (73.2) ja (73.6) saab järeldada (72.7) üldkehtivuse. Kui otsida koordinaate $u^1, \dots, u^n$, milles oleks $\Gamma_{i'h'}^{j'} = 0$, siis tekkiva diferentsiaalvõrrandisüsteemi

$$u_{i'h'}^j = -\Gamma_{ik}^{j'} u_{i'}^i u_{h'}^k$$

lahenduvuseks on tarvilik ja piisav¹, et $u_{i'h'v'}^j = u_{i'v'h'}^j$, see aga annab pärast arvutusi (75.3) põhjal just tingimuse $R_{ij,kl} \equiv 0$. Piisavusest järeldub soovitud koordinaatide leidumine vähemalt teatava piirkonna $\Delta' \subset \Delta \subset \mathbb{R}^n$ ulatuses. Siis aga üldkehtivaist valemeist (71.11) järeldub, et $\frac{\partial g_{i'h'}}{\partial u^{i'}} = 0$, s.t. $g_{i'h'} = \text{const.}$

Edasi on koordinaatide lineaarteisendusega võimalik viia ruutvorm $g_{i'h'} u^{i'} u^{h'}$ normaalkujju ja sel teel saada, et $g_{i'h'} = \delta_{i'h'}$. Uutes koordinaatides on geodeetilistel joontel lineaarsed võrrandid ning geodeetilise kaare pikkus kui otspunktide vaheline kaugus avaldub just sellise valemiga (1.1) nagu ruumi E_n puhul nõutav (vrd. art. 71).

Sellega on selgitatud eukleidilise ruumi E_n koht Riemanni lihtmuutkondade M_n seas: M_n on E_n või piirkond selles parajasti siis, kui $K(\tau) \equiv 0$ ehk $R_{ij,kl} \equiv 0$. Näiteks pöördsilinder on tegelikult riba tasandil E_2 , pöördkoonuse üks kate aga sektor tasandil E_2 , mis mõlemad on vajalikul viisil keeratud pinnaks ruumis E_3 .

Järgnevalt läheme üle mitte-eukleidiliste ruumide juurde, alustades ruumi E_{n+1} hüpersfääril kehtivast elliptilisest geomeetriast. Lihtmuutkonna saamiseks tuleb hüpersfäärist üks punkt välja jätta. Järelejääv osa on

$$H = \left\{ x \in E_{n+1} : x = \left(\frac{2r^2 u^1}{u^2 + r^2}, \dots, \frac{2r^2 u^n}{u^2 + r^2}, r \frac{u^2 - r^2}{u^2 + r^2} \right), \right. \\ \left. (u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n \right\};$$

vt. (59.2) ja art. 72. Et siin $x^2 = r^2$, siis $2xx_i = 0$ ja $x_j x_i + x x_{ij} = 0$. Esimestest järeldustest tuleneb, et punkti $x \in H$ kohavektor x on ühtlasi hüperpinna H normaalvektor selles punktis ning normaalühikvektori m saamiseks jääb ta veel normeerida:

$$m = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{r} x.$$

Teised järeldused annavad (72.3) ja (72.6) põhjal, et

$$g_{ji} + r b_{ij} = 0$$

ehk

$$b_{ij} = -\frac{1}{r} g_{ij}.$$

¹ Tingimuse $u_{i'h'v'}^j = u_{i'v'h'}^j$ piisavust vaadeldava süsteemi lahenduvuseks ülikoolimatemaatika põhikursustes ei tõestata (vt. viidet [5], lk. 220).

Nüüd aga (72.16) järgi leiame, et

$$R_{ij,kl} = \frac{1}{r^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

mistõttu (76.14) kohaselt

$$K(\tau) = \frac{1}{r^2}. \quad (77.3)$$

Järelikult elliptilise ruumi $S_n^*(r)$ lõikekõverus on positiivne konstant ja võrdne selle hüpersfääri raadiuse ruudu pöördväärtusega, mille abil ruum $S_n^*(r)$ on moodustatud.

Analoogiliselt saab uurida ka Lobatševski ruumi. Selleks on vaja õige pisut modifitseerida hüperpinna käsitlust art-s 72, et hõlmata ka Riemanni meetrikat kandvad hüperpinnad pseudo-eukleidilises ruumis 1E_n . Viimaste puhul on ainus erinevus see, et normaalvektori $\mathbf{m}$ skalaarruut $\mathbf{m}^2$ on nüüd mitte 1, vaid -1 :

$$\mathbf{m}^2 = -1.$$

See aga toob art-i 72 käsitluses endaga kaasa ainult ühe erinevuse: võrduse (72.5) poolte korrutamisel skalaarselt vektoriga $\mathbf{m}$ ei saa me enam seost (72.6), vaid

$$b_{ik} = -\mathbf{m}x_{ik}.$$

Järelikult ka hiljem

$$-b_{il} + g_{ik}c_l^k = 0,$$

mistõttu nüüd

$$x_{ikl} = x_j \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{ml}^j \Gamma_{ik}^m + g^{jm} b_{ml} b_{ik} \right) + \mathbf{m} \left(b_{ml} \Gamma_{ik}^m + \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^l} \right).$$

Sellest tulenevalt asendub (72.16) järgmise Gaussi võrrandiga

$$R_{ij,kl} = -(b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk}). \quad (77.4)$$

Rakendame neid tulemusi Lobatševski ruumi $L_n(q)$ kui pseudo-eukleidilise ruumi ${}^1E_{n+1}$ imaginaarse raadiusega hüpersfääri ühe katte (n -mõõtmelise pseudosfääri) puhul. Võrrandeid (59.3) vaja-likult üldistades saame, et

$$L_n(q) = \left\{ x \in {}^1E_{n+1} : x = \left(\frac{2q^2 u^1}{q^2 - u^2}, \dots, \frac{2q^2 u^n}{q^2 - u^2}, q \frac{q^2 + u^2}{q^2 - u^2} \right), u^2 < q \right\}.$$

Siin $x^2 = -q^2$, mistõttu, samuti nagu varem, $2xx_i = 0$ ja $x_j x_i + x x_{ij} = 0$. Nüüd

$$\mathbf{m} = \frac{1}{q} x, \quad g_{ji} - q b_{ij} = 0$$

ehk

$$b_{ij} = \frac{1}{Q} g_{ij}.$$

Asendus Gaussi võrrandesse (77.4) annab

$$R_{ij,kl} = -\frac{1}{Q^2} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

mistõttu

$$K(\tau) = -\frac{1}{Q^2}.$$

Järelikult Lobatševski ruumi $L_n(Q)$ lõikekõverus on negatiivne konstant.

Lõpuks jääb veel selgitada üldiselt nende Riemanni lihtmuutkondade M_n ehitus, mille lõikekõverus on nullist erinev konstant. Siin tutvustame ainult tulemusi¹.

Sellest, et $K(\tau)$ on igas punktis $x \in M_n$ konstantne, s.t. ei sõltu kahemõõtmelise alamvektorruumi $\tau \subset T_x(M_n)$ valikust, jäeldub, nagu eespool selgus, võrdus (77.2). Kehtib järgmine Schuri² teoreem: kui $K(\tau)$ on konstantne igas punktis $x \in M_n$ ja $n \geq 3$, siis $K(\tau)$ on punktist x sõltumatu konstant, s.t. valemis (77.2) $K = \text{const}$.

Kui sel puhul $K > 0$, siis M_n on elliptilise ruumi piirkond, kui aga $K < 0$, siis M_n on Lobatševski ruumi piirkond.

Riemanni muutkonda, mille puhul on täidetud Schuri teoreemi eeldused, nimetatakse konstantse kõverusega ruumiks. Selline lihtmuutkond on niisiis kas eukleidilise või mitte-eukleidilise ruumi piirkond, mis erijuhul võib ühtida ka kogu ruumiga.

Huvitavad probleemid tekivad siis, kui vaadeldakse üldisi Riemanni ruume, mis on saadud Riemanni lihtmuutkondade «kokkulappimise» teel (art. 83). Näiteks konstantse kõverusega ruumide puhul tekib nn. ruumvormide probleem: missuguse tervikehitusega muutkonnal saab üldse anda ühe- või teistsuguse konstantse kõverusega Riemanni meetrika. Mõnikord konstantse kõverusega ruumi nimetataksegi lihtsalt ruumvormiks, eriti kui ta on täielik selles mõttes, et iga tema geodeetiline joon on määratav kogu arvteljel R (võib-olla küll mingi perioodilisusega).

Harjutusülesanded

120. Käsitledes punkti $x \in E_3$ sfäärkoordinaate kõverjoonelistel koordinaatidena ruumpiirkonnas $E_3 \setminus \{0\}$ (vt. allviidet lk-l 204, kus nüüd tähistame $R = u^1$, $u_2 = u^2$, $u_3 = u^3$), arvutada nende puhul meetrilise tensorvälja g koordinaadid ja Christoffeli sümboolite avaldised. Tuletada vektori z konstantsuse tingimused sfäärkoordinaatides.

121. Järeldada valemist (77.3), et ruumi E_{n+1} hüpersfääri $S_n(r)$ igas punktis kõik n peakõverust on võrdsed konstandiga $\frac{1}{r}$ — hüpersfäär on ümarushüperpind.

122. Veenduda, et valemite (73.7) vasakud pooled $Dz^j = dz^j + \Gamma_{ik}^j z^i du^k$ kujutavad endast teatava (0,1)-tensorvälja — vektorvälja z^i nn. absoluutse diferentsiaali (ehk kovariantse diferentsiaali) koordinaate, s.t. kontrollida, et nad teisenevad tensorseaduse kohaselt.

¹ Nende käsitlust vt. П. К. Рашевский, цит. соч., с. 591—599.

² Friedrich Schur (1856—1932), saksa matemaatik, a-il 1888—92 Tartu ülikooli matemaatikaprofessor. Kõnesoleva teoreemi tõestuse anname art-s 82.

123. Teha kindlaks, et ruumi E_{n+1} hüperpinnal H esimese ruutvormi poolt määratud Riemanni meetrika suhtes on sellel hüperpinnal antud vektorvälja z absoluutne diferentsiaal tõlgendatav kui hariliku diferentsiaali dz komponent puutujahüpertasandil.

124. Arvutada valemite (73.5) ja (60.3) järgi ruumi E_4 hüpersfääri $S_3(r)$ 3-ruumala (sfääri $S_2(r) \subset E_3$ täispindala üldistus).

125. Näidata, et kahemõõtmelise Riemanni muutkonna M_2 puhul koordinaatjoonte puutujaühikvektorid ükskõik kumma parve joontele on rööpülekandes piki teise parve suvalist joont parajasti siis, kui nendest parvedest moodustunud võrgu jaoks saab koordinaadid määrata nii, et $g_{11}=g_{22}=1$, s.t. kui võrk on Tšebõšovi võrk (art. 48).

126. Koordinaatidega z^i antud vektorvälja *absoluutseks tuletiseks* nimetatakse (1,1)-tensorvälja koordinaatidega $\nabla_k z^j = \frac{\partial z^j}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^j z^i$. Tõestada valem, mis võetakse sageli aluseks kõverustensori defineerimisel:

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) z^j = R_{i,kl}^j z^i.$$

127. Kontrollida, et mitteeuclidilised ruumid (ehk üldiselt Riemanni muutkonnad, mille Riemanni—Christoffeli tensoril on kuju (77.2) — nn. *konstantse kõverusega ruumid*) on ühtlasi Einsteini ruumid.

128. Tõestada, et kolmemõõtmeliste Riemanni muutkondade M_3 puhul kehtib samasus

$$R_{ij,kl} = \frac{R}{2} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + g_{il} R_{jk} - g_{ij} R_{kl} + g_{jk} R_{il} - g_{kl} R_{ij}.$$

Järeldada siit, et M_3 on Einsteini ruum siis ja ainult siis, kui ta on konstantse kõverusega ruum.

§ 18. VÄLISDIFERENTSIAALVORMID

Sümmeetriliste tensorväljade kõrval, mida rakendustes kõige ulatuslikumalt esindab Riemanni meetrika, on eriti viimasel ajal laialt kasutusel ka kaldsümmeetrilised tensorväljad. Nendega seonduv teatav eriline arvutus — välisdiferentsiaalvormide arvutus, mille rajas E. Cartan eelmisel sajandivahetusel (ja millega kahe sõltumatu muutuja u_1 ja u_2 korral tutvusime art-s 44). Lisaks rakendustele diferentsiaalgeomeetrias, mis otseselt kutsusid esile selle arvutuse loomise, on uus meetod võitnud eluõiguse ka mitme muutuja funktsioonide analüüsis, eriti integreerimisel, samuti välja-teoorias ja teoreetilise mehaanika või füüsika teistes osades.

78. Välisvormid ja Grassmanni algebra. Alustame kaldsümmeetrilisest $(p, 0)$ -tensorist a , s.t. tensorist omadusega $a_\sigma = (\text{sgn } \sigma) a$, mis antud vektorruumi V korral määratakse selle igal baasil $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ niisuguste koordinaatidega $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$, et

$$a_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}} = (\text{sgn } \sigma) a_{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (78.1)$$

Teisiti öeldes, a muudab märgi oma iga kahe argumendi transpitsiooni korral. Tema koordinaatide seast on olulised ainult sellised $a_{k_1 k_2 \dots k_p}$, kus $k_1 < k_2 < \dots < k_p$, sest iga ülejäänud koordinaat $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ on (78.1) põhjal kas ühega neist võrdne või erineb sellest ainult märgi poolest või ta on võrdne nulliga (kui $i_1, i_2, \dots, i_p$ seas on kaks võrdset). Nii on $n=3$, $p=2$ puhul olulised vaid

a_{12}, a_{13}, a_{23} , sest (78.1) tähendab praegu, et $a_{i_2 i_1} = -a_{i_1 i_2}$ ja näiteks $a_{22} = 0, a_{31} = -a_{13}$.

Antud baasi ja selle kaasbaasi $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ korral suvaliste $z_1, z_2, \dots, z_p \in V$ puhul (69.7) järgi

$$a(z_1, z_2, \dots, z_p) = a_{i_1 i_2 \dots i_p} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_p^{i_p} = a_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1}(z_1) f^{i_2}(z_2) \dots f^{i_p}(z_p),$$

sest üldiselt $f^j(z) = f^j(z^k e_k) = z^k f^j(e_k) = z^k \delta_k^j = z^j$. Seega

$$a = a_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} f^{i_2} \dots f^{i_p}, \quad (78.2)$$

kus paremal on tegemist tensoralgebra tehetega ja summeerimisega. Summeerimisel tekib liikmeid ühesuguste teguritega $a_{k_1 k_2 \dots k_p}$. Kui korraldada see summa oluliste koordinaatide järgi, on (78.1) alusel tulemuseks

$$a = \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p} \left(\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f^{k_{\sigma(1)}} f^{k_{\sigma(2)}} \dots f^{k_{\sigma(p)}} \right), \quad (78.3)$$

kus esimene summa võetakse kõigi selliste valikute $(k_1, k_2, \dots, k_p)$ järgi naturaalarvudest $1, 2, \dots, n$, et $k_1 < k_2 < \dots < k_p$, ja teine summa lisaindeksite $1, 2, \dots, p$ kõigi permutatsioonide σ järgi. Näiteks kui $n=3$, siis $p=2$ puhul

$$a = a_{12}(f^1 f^2 - f^2 f^1) + a_{13}(f^1 f^3 - f^3 f^1) + a_{23}(f^2 f^3 - f^3 f^2),$$

$p=3$ puhul aga

$$a = a_{123}(f^1 f^2 f^3 + f^2 f^3 f^1 + f^3 f^1 f^2 - f^2 f^1 f^3 - f^1 f^3 f^2 - f^3 f^2 f^1).$$

Suluavaldis (78.3) paremal pool, mida võib art-s 69 tehtud kokkuleppe põhjal kirjutada ka kujul $(p!) f^{[k_1, k_2, \dots, k_p]}$ ja mis kujutab endast seega üht kaldsummeerilist $(p, 0)$ -tensorit — teatava p baasilineaarvormi alterneeritud korrutise $(p!)$ -kordset, nimetatakse nende lineaarvormide väliskorrutiseks ja tähistatakse $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$. Niisiis,

$$\begin{aligned} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p} &= (p!) f^{[k_1, k_2, \dots, k_p]} = \\ &= \sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) f^{k_{\sigma(1)}} f^{k_{\sigma(2)}} \dots f^{k_{\sigma(p)}}, \end{aligned} \quad (78.4)$$

seejuures pole vajadust end siduda tingimusega $k_1 < k_2 < \dots < k_p$. Loeme, et (78.4) on üldse mingi p baasilineaarvormi väliskorrutise definitatsioonivalem. Paneme tähele, et selline väliskorrutis kui $(1, 0)$ -tensorite alterneeritud korrutis on kaldsummeeriline $(p, 0)$ -tensor, mistõttu ta näiteks mingi kahe teguri kohtade vahetamisel muudab märki ja selle järelalusena kahe võrdse teguri korral on null.

Võrduse (78.3) võib nüüd kirjutada kujul

$$a = \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}. \quad (78.5)$$

Paremal pool olevat avaldist nimetatakse p -nda astme välisvormiks. Selliselt nimetatakse p kaupa võetud baasilineaarvormide

väliskorrutiste iga lineaarkombinatsiooni. Praegu saadud välisvormi (78.5) kordajateks on kaldsümmeetrilise $(p, 0)$ -tensori a koordinaadid vektorruumi V antud baasil. Nii näeme, et kõnesolev tensor a on avaldatav teatava välisvormina.

Kehtib ka vastupidine väide: iga p -nda astme välisvorm — p kaupa võetud baasilineaarvormide väliskorrutiste lineaarkombinatsioon — on teatav kaldsümmeetriline $(p, 0)$ -tensor. Tõepoolest, olgu antud välisvorm $b_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p}$, kus summeerimisel mõeldakse, nagu alati seda laadi kirjutiste puhul, et iga i_π , kus $\pi = 1, \dots, p$, omandab ülejäänutest sõltumatult väärtused $1, \dots, n$. Sel juhul tekib aga väliskorrutise (78.4) antikommutatiiivsuse tõttu sarnaseid liikmeid, mida saab kokku võtta. Olulised on vaid sellised väliskorrutised $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$, kus $k_1 < k_2 < \dots < k_p$; teised erinevad nendest ülimalt märgi poolest või on nullid. Nii on $n=3$, $p=2$ puhul olulised vaid $f^1 \wedge f^2$, $f^1 \wedge f^3$, $f^2 \wedge f^3$ ja näiteks $f^1 \wedge f^1 = 0$, $f^3 \wedge f^2 = -f^2 \wedge f^3$.

Kui vaadeldav välisvorm korraldada baasilineaarvormide oluliste väliskorrutiste järgi, siis saame talle järgmise kuju:

$$\sum_{k_1 < \dots < k_p} \left(\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{k_{\sigma(1)} k_{\sigma(2)} \dots k_{\sigma(p)}} \right) f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p},$$

näiteks $n=3$, $p=2$ puhul kuju

$$(b_{12} - b_{21}) f^1 \wedge f^2 + (b_{13} - b_{31}) f^1 \wedge f^3 + (b_{23} - b_{32}) f^2 \wedge f^3.$$

Kui tähistada

$$a_{k_1 k_2 \dots k_p} = (p!) b_{[k_1 k_2 \dots k_p]} = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{k_{\sigma(1)} k_{\sigma(2)} \dots k_{\sigma(p)}}, \quad (78.6)$$

siis saab vaadeldava välisvormi esitada kujul

$$\sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}, \quad (78.7)$$

kui aga määrata reaalarvusteem $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$, võttes

$$a_{k_{\sigma(1)} k_{\sigma(2)} \dots k_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn} \sigma) a_{k_1 k_2 \dots k_p}, \quad (78.8)$$

siis (78.4) järgi siit

$$\sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p} \left(\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) f^{k_{\sigma(1)}} f^{k_{\sigma(2)}} \dots f^{k_{\sigma(p)}} \right) = a_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} f^{i_2} \dots f^{i_p}, \quad (78.9)$$

sest $\operatorname{sgn} \sigma$ võib kanda $a_{k_1 k_2 \dots k_p}$ juurde, seejärel arvestada võrdust (78.8) ning seda, et summeerimine kõigi näidatud $k_1, k_2, \dots, k_p$ ja kõigi σ järgi tähendab tegelikult vaba summeerimist. Välisvormi viimasest kujust ja sellest, et $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$ on omadusega (78.8), järeldubki, et tegemist on teatava kaldsümmeetrilise $(p, 0)$ -tensoriga (78.2).

Kokkuvõttes võime öelda, et kaldsümmeetriliste $(p, 0)$ -tensorite ja p -nda astme välisvormide vahel on üksühene vastavus, mida ühes suunas näitab üleminek tensorilt (78.2) vormile (78.5), teises suunas vormilt (78.7) tensorile (78.9).

Kui vormis (78.7) teha tagasi asendus (78.6) ja meenutada selle vormi lähtekuju, saame valemi

$$b_{i_1 i_2 \dots i_p} f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p} = (p!) \sum_{k_1 < \dots < k_p} b_{[k_1 k_2 \dots k_p]} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p} = \\ = \sum_{k_1 < \dots < k_p} \left(\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{\sigma(1) k_{\sigma(2)} \dots k_{\sigma(p)}} \right) f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}. \quad (78.10)$$

Edaspidi tegeleme põhiliselt välisvormidega, pidades vajaduse korral silmas, et nende varjus esinevad alati ka teatavad kaldsümmeetrilised tensorid. Nii näiteks saab lineaartehted $(p, 0)$ -tensoritega — liitmise ja reaalarvuga korrutamise — kanda siia vahetult üle ja tulemuseks on vastavad tehted välisvormidega kui algebra-liste avaldistega. Nende tehete mõttes on iga välisvorm sama astmega üksliikmete — teatavate avaldiste $a f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$ summa.

Tensoralgebras (art. 68) võime nüüd välja eraldada vektorruumi $\mathbf{R}$ (kui $(0, 0)$ -tensorite vektorruumi), vektorruumi V^* (kui $(1, 0)$ -tensorite ehk lineaarvormide vektorruumi), kaldsümmeetriliste $(2, 0)$ -tensorite vektorruumi, kaldsümmeetriliste $(3, 0)$ -tensorite vektorruumi jne., kaldsümmeetriliste $(p, 0)$ -tensorite vektorruumi jne. otsesumma. Tulemuseks on avaldiste

$$a_0 + a_k f^k + \sum_{k < l} a_{kl} f^k \wedge f^l + \dots + \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p} + \\ + \dots + a_{12 \dots n} f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n \quad (78.11)$$

vektorruum. Avaldiste lõplikkust polegi siin vaja eeldada (nagu art-s 68), sest see selgub automaatselt: iga p -nda astme välisvorm on juhul $p > n$ võrdne nulliga, sest sel korral esineb igas väliskorrutises $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$ vähemalt üks baasilineaarvorm kaks korda, mistõttu iga niisugune väliskorrutis on null. (Näiteks kui f^l esineb kohtadel k_q ja k_r , siis pärast permutatsiooni σ , milles on vahetatud vaid need kohad, see korrutis ühelt poolt muudab (78.10) põhjal märki, teiselt poolt aga üldse ei muutu, sest neil kohtadel seisab sama f^l — seega on ta null). Ühtlasi on selge, et kui $p = n$, siis on üksainus oluline väliskorrutis $f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$; seda on avaldise (78.11) kirjutises juba arvestatud.

Avaldise (78.11) saab aga mitte üksnes liita ja reaalarvuga korrutada, vaid on võimalik määrata ka nende väliskorrutisi. Alustame näiteks kahe lineaarvormi $a = a_{i_1} f^{i_1}$ ja $b = b_{i_2} f^{i_2}$ väliskorrutisest, mis defineeritakse järgmiselt:

$$a \wedge b = (a_{i_1} f^{i_1}) \wedge (b_{i_2} f^{i_2}) = a_{i_1} b_{i_2} f^{i_1} \wedge f^{i_2}.$$

Sama avaldise saab eeltoodu järgi kirjutada ka kujul

$$\sum_{k_1 < k_2} (a_{k_1} b_{k_2} f^{k_1} \wedge f^{k_2} + a_{k_2} b_{k_1} f^{k_2} \wedge f^{k_1}),$$

mistõttu pärast oluliste väliskorrutiste järgi korraldamist leiame, et

$$a \wedge b = \sum_{k_1 < k_2} (a_{k_1} b_{k_2} - a_{k_2} b_{k_1}) f^{k_1} \wedge f^{k_2} = \sum_{k_1 < k_2} \begin{vmatrix} a_{k_1} & a_{k_2} \\ b_{k_1} & b_{k_2} \end{vmatrix} f^{k_1} \wedge f^{k_2}.$$

Analoogiliselt saab leida p lineaarvormi $a_\pi = a_{\pi i} f^i$; $\pi = 1, \dots, p$ väliskorrutise:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = (a_{1i_1} f^{i_1}) \wedge (a_{2i_2} f^{i_2}) \wedge \dots \wedge (a_{pi_p} f^{i_p}) = \\ = a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{pi_p} f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_p},$$

millele saab (78.10) põhjal kuju

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = \\ = \sum_{k_1 < \dots < k_p} \left(\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) a_{1k_{\sigma(1)}} a_{2k_{\sigma(2)}} \dots a_{pk_{\sigma(p)}} \right) f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p};$$

kuid erijuhul, mil $p=n$, kuju

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = \left(\sum_{\sigma} (\text{sgn } \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \right) f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$,
sest nõuet $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ rahuldab ainsana $1, 2, \dots, n$. Viimase valemi sulgudes tunneme ära determinandi $\det |a_{ji}|$ ([1], lk. 20), eelmise valemi sulgudes aga determinandi $\det |a_{\pi k p}|$; $\pi, q = 1, \dots, p$ — lineaarvormide $a_1, a_2, \dots, a_p$ kordajate matriksi teatava p -ndat järku miinori. Niisiis näiteks $a_j = a_{ji} f^i$ puhul

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n = (\det |a_{ij}|) f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n. \quad (78.12)$$

Teoreem matriksi astakust, eriti aga selle järeldused ([1], lk. 67, 68), annavad nüüd huvitava tulemuse: *kui $a_1, a_2, \dots, a_p$ on lineaarselt sõltuvad lineaarvormid, siis nende väliskorrutis on võrdne nulliga:*

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_p = 0, \quad (78.13)$$

sest tema kui p -nda astme välisvormi kordajad on nullid (kuna $a_1, a_2, \dots, a_p$ kordajate matriksi astak on lineaarse sõltuvuse korral väiksem kui p).

Kehtib ka vastupidine väide; *võrdusest (78.13) järeldub $a_1, a_2, \dots, a_p$ lineaarne sõltuvus*. Selle tõestamiseks tuleb enne kindlaks teha, et väliskorrutised $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$, mis on võetud kõigi niisuguste valikute $k_1, k_2, \dots, k_p$ korral, kus $k_1 < k_2 < \dots < k_p$, on lineaarselt sõltumatud.

Kõigepealt on selge, et $f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$ kui $(n, 0)$ -tensor on nullist erinev, sest (78.4) põhjal

$$(f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n)(e_1, e_2, \dots, e_n) = (n!) f^1 f^2 \dots f^n(e_1, e_2, \dots, e_n) = \\ = (n!) f^1(e_1) f^2(e_2) \dots f^n(e_n) = (n!) \delta_1^1 \delta_2^2 \dots \delta_n^n = 1;$$

näiteks $n=2$ korral

$$(2!) \delta_1^1 \delta_2^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} (\delta_1^1 \delta_2^2 - \delta_1^2 \delta_2^1) = 2 \cdot \frac{1}{2} (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 1,$$

ning analoogiliselt ka $(n!) \delta_1^1 \delta_2^2 \dots \delta_n^n$ avaldises $(n!) \frac{1}{n!} [\delta_1^1 \delta_2^2 \dots \delta_n^n - \delta_1^2 \delta_2^1 \dots \delta_n^n - \dots - \delta_1^n \delta_2^2 \dots \delta_n^1 + \dots]$ on sulgudes ainsaks nullist erinevaks liidetavaks esimene: $1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$.

Oletame nüüd, et $p < n$ ning leiab aset lineaarne seos

$$\sum_{k_1 < \dots < k_p} \lambda_{k_1 k_2 \dots k_p} f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p} = 0. \quad (78.14)$$

Vajaliku lineaarse sõltumatuse tõestamiseks on vaja näidata, et siit iga valiku $l_1 < l_2 < \dots < l_p$ korral järeldub $\lambda_{l_1 l_2 \dots l_p} = 0$. Selleks moodustame seda täiendava valiku $l_{p+1} < \dots < l_n$ ja korrutame võrduse (78.14) pooli paremalt väliskorrutisega $f^{l_{p+1}} \wedge \dots \wedge f^{l_n}$. Vasakul tekkivatest n -nda astme väliskorrutistest on ainus nullist erinev $f^{l_1} \wedge f^{l_2} \wedge \dots \wedge f^{l_p} \wedge f^{l_{p+1}} \wedge \dots \wedge f^{l_n}$, sest kõigis teistes on mingid kaks tegurit võrdsed ja nad on väliskorrutise antikommutatiivsuse põhjal nullid. Seega saame:

$$\lambda_{l_1 l_2 \dots l_p} f^{l_1} \wedge f^{l_2} \wedge \dots \wedge f^{l_n} = \pm \lambda_{l_1 l_2 \dots l_p} f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n = 0$$

ja siit tõesti $\lambda_{l_1 l_2 \dots l_p} = 0$. Niisiis seos (78.14) on võimalik üksnes nulliga võrduvate kordajate puhul ning väliskorrutised $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$, kus $k_1 < k_2 < \dots < k_p$, on lineaarselt sõltumatud.

Kui nüüd kehtib (78.13), siis vasaku poole kordajad — lineaarvormide $a_1, a_2, \dots, a_p$ kordajate maatriksi p -ndat järku miinorid — on kõik võrdsed nulliga ning need lineaarvormid on tõesti lineaarselt sõltuvad. Kokkuvõttes, võrdus (78.13) on lineaarvormide $a_1, a_2, \dots, a_p$ lineaarse sõltuvuse tarvilik ja piisav tingimus.

Olles nüüd defineerinud ja uurinud p lineaarvormi väliskorrutist, läheme kahe üldise avaldise (78.11) juurde ja defineerime ka nende väliskorrutise. Kõigepealt loeme, et väliskorrutis on distributiivne ja et kummastki tegurist võib reaalarvulise kordaja korrutise ette tuua. Sel juhul taandub asi baasivormide väliskorrutiste korrutamisele. Nende jaoks anname järgmise loomuliku definitsiooni:

$$\begin{aligned} (f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}) \wedge (f^{l_1} \wedge f^{l_2} \wedge \dots \wedge f^{l_q}) = \\ = f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p} \wedge f^{l_1} \wedge f^{l_2} \wedge \dots \wedge f^{l_q}; \end{aligned}$$

seega on vaja vaid korrutatavad väliskorrutised kirjutada kõrvuti (vajalikus järjekorras), ühendada märgiga $\wedge$ ning kaotada sulud.

Kõige selle kohaselt näiteks

$$\begin{aligned} (1 + f^1 \wedge f^2 - f^1 \wedge f^3 \wedge f^4) \wedge (f^1 + f^2 - f^3 - f^4) = \\ = f^1 + f^2 - f^3 - f^4 - f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 - f^1 \wedge f^2 \wedge f^4 - f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 \wedge f^4; \end{aligned}$$

siin on arvestatud, et näiteks $f^1 \wedge f^2 \wedge f^1 = 0$, sest kaks tegurit on võrdsed, ning et $f^1 \wedge f^3 \wedge f^4 \wedge f^2 = f^1 \wedge f^2 \wedge f^3 \wedge f^4$, sest f^2 viimiseks oma õigele kohale on vaja teha kaks transpositsiooni, millest kumbki muudab märgi.

Tähtis on aru saada, et suvalise kahe avaldise (78.11) väliskorrutis on jälle sama tüüpi avaldis. Tõepoolest, baasivormide p -nda ja q -nda astme väliskorrutiste väliskorrutis on jälle baasivormide väliskorrutis, üldiselt astmega $p+q$, kui ei satu sisse võrdseid tegureid (selleks on muidugi tarvilik, et $p+q \leq n$); kui aga esineb võrdseid tegureid, siis on ta null (ja nii on see alati, kui $p+q > n$). Järelikult avaldiste (78.11) vektorruum on kinnine väliskorrutamise operatsiooni suhtes ja kujutab endast seega teatavat

algebrat, mida nimetatakse *Grassmanni algebraks* ([1], lk. 504; vrd. art. 44 ja harjutusülesanne 119).

Kui lineaarvormide alamvektorruum V^* Grassmanni algebras on n -mõõtmeline, siis Grassmanni algebra ise on 2^n -mõõtmeline. Tõepoolest, Grassmanni algebra baasi moodustavad avaldise (78.11) kuju kohaselt järgmised elemendid:

$$1; f^1, f^2, \dots, f^n; f^1 \wedge f^2, f^1 \wedge f^3, \dots; f^{n-1} \wedge f^n; \dots$$

$\dots$; kõik $f^{k_1} \wedge f^{k_2} \wedge \dots \wedge f^{k_p}$, $k_1 < k_2 < \dots < k_p$; $\dots$; $f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^n$, sest nad on lineaarselt sõltumatud, nagu me eespool selgitasime. Nende koguarv on tõesti

$$1 + n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{p} + \dots + 1 = (1+1)^n = 2^n;$$

siin oleme kasutanud asjaolu, et kombinatsioonide arv n elemendist p kaupa on $\binom{n}{p} = C_n^p$; samuti on arvestatud binoomvalemit $(a+b)^n$ arvutamiseks ([1], lk. 137), praegu nimelt juhul, mil $a=b=1$.

79. Välisdiferentsiaalvormid ja välisdiferentseerimine. Nii nagu kaldsümmeetrilise $(p, 0)$ -tensori uurimine viis eelmises art-s p -nda astme välisvormi mõisteni, täpselt samuti viib kaldsümmeetrilise $(p, 0)$ -tensorvälja analoogiline käsitlemine p -nda astme välisdiferentsiaalvormi mõisteni.

Vektorruumi V baasi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ asemele tuleb tensorväljade üleminekul piirkonna $D \subset E_n$ punkti x asendit määravatest parameetritest $u^1, u^2, \dots, u^n$ sõltuva kohavektori x osatuletiste $x_1, x_2, \dots, x_n$ baas. Tekib küsimus selle kaasbaasist, mis võiks asuda $\{f^1, f^2, \dots, f^n\}$ asemele.

Vastuse küsimusele saab funktsiooni täisdiferentsiaali mõiste analüüsimisel. Piirkonnas $U \subset E_n$ antud funktsiooni F täisdiferentsiaaliks punktis x nimetatakse teatavasti avaldist ([3], lk. 185)

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x)h_n, \quad (79.1)$$

kus $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ on osatuletised ja $h_1, h_2, \dots, h_n$ sellise vektori h koordinaadid, mis viib punktist x kohavektoriga x naaberpunkti x' kohavektoriga $x' = x + h$.

Täisdiferentsiaali üldlevinud sümbolil dF on see puudus, et näidatud on küll sõltuvus funktsioonist F , kuid sõltuvus punktist x ja vektorist h otseselt ei kajastu. Seetõttu täiendame ajutiselt seda sümbolit, tähistades avaldise (79.1) järgmiselt: $dF_{x,h}$. Vaatleme seda avaldist fikseeritud funktsiooni F ja fikseeritud punkti x kor-

ral, mil $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ on kindlad reaalarvud a_i ; $i=1, 2, \dots, n$. Sel juhul

$$dF_{x,h} = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n \quad (79.2)$$

kujutab endast lineaarvormi vektori h koordinaatidest, lineaarvorme meil aga just tarvis ongi. Niisiis, dF on fikseeritud F ja x korral lineaarvorm.

Osutub, et lineaarvormid $du^1, du^2, \dots, du^n$ — kõverjoonelistele koordinaatide (70.4) täisdiferentsiaalid — moodustavadki kaasbaasi osatuletisvektorite baasi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jaoks, kus $x_j = \frac{\partial x}{\partial u^j} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u^j}, \frac{\partial x_2}{\partial u^j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u^j} \right)$. Tõepoolest, valemi (79.2) järgi, kus loeme $F = u^k$ ja $h = x_j$, saame:

$$du^k_{x,x_j} = \frac{\partial u^k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u^j} + \frac{\partial u^k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial u^j} + \dots + \frac{\partial u^k}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial u^j};$$

siin paremal pool on asja lihtsustamiseks jäetud ära sõltuvuse näitamine punktist x . Samal ajal on see parem pool liitfunktsiooni diferentseerimise valemi kohaselt ([3], lk. 180, 215) järgmine:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u^j} = \frac{\partial u^k}{\partial u^j} = \delta_j^k.$$

Niisiis,

$$du^k_{x,x_j} = \delta_j^k$$

igas punktis $x \in D \subset E_n$, see aga ütlebki, et $\{du^1, du^2, \dots, du^n\}$ ja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ on teineteise kaasbaasid.

Järelikult välisvormide käsitlese ülekandmisel kaldsümmeetriliste tensorväljade juhule astuvad $f^1, f^2, \dots, f^n$ ossa diferentsiaalid $du^1, du^2, \dots, du^n$. Nii saame avaldise (78.5) ülekandmisel järgmise avaldise:

$$\omega = \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 k_2 \dots k_p}(u^1, u^2, \dots, u^n) du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}, \quad (79.3)$$

mida nimetatakse p -nda astme välisdiferentsiaalvormiks. Ta on teatavate üksliikmete — avaldise $a(u^1, u^2, \dots, u^n) du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$ summa. Veelgi üldisema avaldise saame (78.13) ülekandmisel:

$$a_0 + a_k du^k + \sum_{k < l} a_{kl} du^k \wedge du^l + \dots \\ \dots + a_{12 \dots n} du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n; \quad (79.4)$$

siin on asja lihtsustamiseks jäetud näitamata kordajate sõltuvus punktist x , s. t. parameetritest $u^1, u^2, \dots, u^n$.

Märgime, et avaldised (79.4) moodustavad Grassmanni algebra üle korpuse $\mathbb{R}$ vaid fikseeritud punktis x . Muutuva punkti x korral, kui kordajad osutuvad funktsioonideks teatavas piirkonnas $D' \subset \mathbb{R}^n$ (seejuures diferentseeruvateks, sest

diferentseeruvuse nõue sisaldub juba tensorvälja mõistes), kaob kordajate omadus olla mingi korpuse elemendid. Tõepoolest, diferentseeruvad funktsioonid piirkonnas D' moodustavad küll ringi (vrd. [1], lk. 135), kuid selles ringis on olemas nullitegurid (näiteks funktsioonid F_1 ja F_2 , millest esimene on null mingis osapiirkonnas $D_1 \subset D'$ ja teine selle täiendus $D_2 = D \setminus D_1$, kuid väljaspool neid on nullist erinevad). Seega see ring pole korpus.

Viimane asjaolu aga ei ole muidugi oluline takistus arvutamisel avaldistega (79.3) või üldisemalt (79.4). Neid avaldiseid võib liita, leida nende väliskorrutisi, sealhulgas muidugi ka korrutada 0-nda astme vormiga, s.t. piirkonnas D' määratud diferentseeruva funktsiooniga. Seejuures on nende avaldiste hulk mainitud operatsioonide suhtes kinnine. Ettevaatlik tuleb olla vaid funktsiooniga jagamisel, nõudes alati, et jagajal oleks tõepoolest olemas pöördelement piirkonnas määratud funktsioonide hulgas.

Asjaolu, et välisdiferentsiaalvormide kordajad on diferentseeruvad funktsioonid teatavas piirkonnas, annab võimaluse defineerida uue olulise tehte, millel pole analoogi tavalises Grassmanni algebras. Selleks on välisdiferentseerimise tehe, millega oleme põgusalt juba tutvunud erijuhul, mil $p=1$ ja $n=2$ (art. 44).

Üldine definitsioon on järgmine. Olgu meil tegemist p -nda astme välisdiferentsiaalvormiga (79.3). Selle välisdiferentsiaal defineeritakse kui $(p+1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm

$$d\omega = \sum_{k_1 < \dots < k_p} da_{k_1 k_2 \dots k_p} \wedge du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}. \quad (79.5)$$

Erijuhul, kui $p=0$ ja seega $\omega = a_0(u^1, u^2, \dots, u^n)$, saame siit $d\omega = da_0 = \frac{\partial a_0}{\partial u^i} du^i$; niisiis, sel erijuhul ühtib välisdiferentseerimine

funktsiooni tavalise diferentseerimisega (täisdiferentsiaali arvutamisega). Erinevalt art-st 44 tähistame ka suvalise p -nda astme välisdiferentsiaalvormi ω välisdiferentsiaali $d\omega$ tavalise sümboli d abil, nagu seda tänapäeval harilikult tehakse (märkides siiski, et art-s 44 kasutatud sümboli $d_{\wedge}$ kõrval on kirjanduses kasutusel ka sümbol D ning et viimase puhul tähistatakse väliskorrutist sageli mitte märgi $\wedge$ abil, vaid nurksulgudega: $[,]$).

Juhul kui $p=1$, kõneldakse lineaarsest diferentsiaalvormist ehk Pfaffi¹ vormist $\omega = a_i du^i$. Sel korral valemi (79.5) järgi

$$d\omega = da_i \wedge du^i = \frac{\partial a_i}{\partial u^j} du^j \wedge du^i.$$

Siin on tegemist vaba summeerimisega i ja j järgi. Valemi (78.10) põhjal, kus praegu $b_{i_1 i_2} = \frac{\partial a_{i_1}}{\partial u^{i_2}}$, leiame, et

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{k_1 < k_2} \left(\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{k_{\sigma(1)} k_{\sigma(2)}} \right) du^{k_1} \wedge du^{k_2} = \\ &= \sum_{k_1 < k_2} \left(\frac{\partial a_{k_2}}{\partial u^{k_1}} - \frac{\partial a_{k_1}}{\partial u^{k_2}} \right) du^{k_1} \wedge du^{k_2}. \end{aligned} \quad (79.6)$$

¹ Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), saksa matemaatik.

Erijuhul, mil $n=2$, saame art-st 44 tuttava valemi; kui aga näiteks $n=3$, siis

$$d\omega = \left(\frac{\partial a_2}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^2} \right) du^1 \wedge du^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial u^1} - \frac{\partial a_1}{\partial u^3} \right) du^1 \wedge du^3 + \\ + \left(\frac{\partial a_3}{\partial u^2} - \frac{\partial a_2}{\partial u^3} \right) du^2 \wedge du^3. \quad (79.7)$$

Välisdiferentseerimise tehtel on järgmised omadused: kui lisaks p -nda astme välisdiferentsiaalvormile (79.3) on antud välisdiferentsiaalvormid

$$\theta = \sum_{k_1 < \dots < k_p} b_{k_1 k_2 \dots k_p}(u^1, u^2, \dots, u^n) du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$$

ja

$$\vartheta = \sum_{l_1 < \dots < l_q} c_{l_1 l_2 \dots l_q}(u^1, u^2, \dots, u^n) du^{l_1} \wedge du^{l_2} \wedge \dots \wedge du^{l_q},$$

vastavalt astmega p ja q , siis

$$d(\omega \pm \theta) = d\omega \pm d\theta, \quad (79.8)$$

$$d(\vartheta \wedge \omega) = d\vartheta \wedge \omega + (-1)^q \vartheta \wedge d\omega, \quad (79.9)$$

erijuhul, kui $q=0$ ja $\vartheta = a(u^1, u^2, \dots, u^n)$:

$$d(a\omega) = da \wedge \omega + a d\omega \quad (79.10)$$

(vrd. (44.5) ja (44.6)).

Esimene omadus (79.8) järeldub kohe sellest, et

$$\omega \pm \theta = \sum_{k_1 < \dots < k_p} (a_{k_1 k_2 \dots k_p} \pm b_{k_1 k_2 \dots k_p}) du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p},$$

valemist (79.5) ja tuntud võrdusest

$$d(a_{k_1 k_2 \dots k_p} \pm b_{k_1 k_2 \dots k_p}) = da_{k_1 k_2 \dots k_p} \pm db_{k_1 k_2 \dots k_p}.$$

Omaduse (79.9) tõestus on pisut keerulisem. Kõigepealt märgime, et välisdiferentsiaal mingist välisdiferentsiaalvormist on eelmise omaduse põhjal seda vormi koostavate üksliikmete välisdiferentsiaalide summa ka siis, kui see vorm polegi veel korraldatud oluliste väliskorrutiste järgi kujju (79.3). Seetõttu võime kõnesoleva omaduse tõestamisel eeldada, et ϑ ja ω on üksliikmed: $\vartheta = c du^{l_1} \wedge du^{l_2} \wedge \dots \wedge du^{l_q}$, $\omega = a du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$. Sel juhul

$$\vartheta \wedge \omega = ca du^{l_1} \wedge du^{l_2} \wedge \dots \wedge du^{l_q} \wedge du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$$

ja

$$d(\vartheta \wedge \omega) = d(ca) \wedge du^{l_1} \wedge \dots \wedge du^{l_q} \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p} = \\ = (dc \cdot a + c \cdot da) \wedge du^{l_1} \wedge \dots \wedge du^{l_q} \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p} = \\ = (dc \wedge du^{l_1} \wedge \dots \wedge du^{l_q}) \wedge (adu^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p}) + \\ + (-1)^q (c du^{l_1} \wedge \dots \wedge du^{l_q}) \wedge (da \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p}).$$

Viimases liikmes tuli väliskorrutises teha $da = \frac{\partial a}{\partial u^i} du^i$ transpositsioon iga diferentsiaaliga $du^{l_1}, \dots, du^{l_q}$, et saada ta õigele kohale,

iga selline transpositsioon aga muudab avaldise märki — sellest tegur $(-1)^q$! Nüüd aga ongi näha, et kehtib valem (79.9).

Analoogiliselt saab üleminekuga üksliikmetele tõestada ka järgmise huvitava omaduse: välisdiferentseerimise kahekordne rakedamine annab nulli, s. t.

$$d(d\omega) = 0. \quad (79.11)$$

Tõepoolest, piisab, kui vaadelda juhtu, mil $\omega = a du^{k_1} \wedge du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$; siis $d\omega = \frac{\partial a}{\partial u^i} du^i \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p}$ ning

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d\left(\frac{\partial a}{\partial u^i}\right) \wedge du^i \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p} = \\ &= \frac{\partial^2 a}{\partial u^i \partial u^j} du^j \wedge du^i \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p}. \end{aligned}$$

Siin indeksite i ja j järgi toimub vaba summeerimine. Mingi konkreetse väärtusepaari arvud l_1 ja l_2 esinevad seejuures kaks korda, mistõttu

$$d(d\omega) = \sum_{l_1 < l_2} \left(\frac{\partial^2 a}{\partial u^{l_2} \partial u^{l_1}} - \frac{\partial^2 a}{\partial u^{l_1} \partial u^{l_2}} \right) du^{l_1} \wedge du^{l_2} \wedge du^{k_1} \wedge \dots \wedge du^{k_p}.$$

Suluavaldis on aga segatuletise tuntud omaduse ([3], lk. 188) tõttu võrdne nulliga ning (79.11) seega tõesti kehtib.

80. Üldine Stokesi valem. Välisvormidega arvutamine selliste tehete abil nagu liitmine ja väliskorrutamine mahub Grassmanni algebra raamidesse (art. 78). Välisdiferentsiaalvormide puhul lisandub neile välisdiferentseerimise tehe ning tekib üldisem arvutus, mida nimetatakse *välisdiferentsiaalvõrdutuseks* ehk *Cartani arvutuseks*. Sellel uuel arvutusel on mitmesuguseid väärtuslikke rakendusi. Eriti sobivaks on ta osutunud nn. integraalvalemite käsitlemisel. Põgusalt oli seda võimalik demonstreerida juba art-s 44, kus matemaatilise analüüsi sellised integraalvalemid nagu Greeni valem, Stokesi valem või Ostrogradski valem sai anda selle arvutuse abil kõik ühesugusel kujul (44.7) või (44.8), ehk üldiselt kujul

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_D d\omega, \quad (80.1)$$

kus ω on kas lineaarne või teise astme välisdiferentsiaalvorm, $d\omega$ tema välisdiferentsiaal, D on teatav piirkond, Γ tema raja ning integraal on kas joon-, pind- (erijuhul tasand- ehk kahekordne) või ruum- (ehk kolmekordne) integraal vastavalt sellele, üle mille ta on võetud.

Huvitav on see, et üldise kuju (80.1) alla on lihtsaima erijuhuna viidav ka Newtoni—Leibnizi valem ([2], lk. 376):

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (80.2)$$

kus $F'(x) = f(x)$. Tõepoolest, valemis (80.1) on vaja vaid lugeda, et $n=1$ ja et ω on 0-nda astme välisdiferentsiaalvorm ehk lihtsalt funktsioon $F(x)$, ning et D on lõik $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sel korral $d\omega = dF = F'(x)dx = f(x)dx$, D raja Γ aga on otspunktide järjestatud paar $\{a, b\}$. Jääb veel funktsiooni F «integraaliks» punktis a lugeda selle funktsiooni väärtus $F(a)$, see aga on hästi kooskõlas vastavate üldiste kaalutlustega, nagu peatselt näeme — ning (80.2) ongi käsitledav (80.1) erijuhuna.

Kõik see seab ülesande selgitada, kas seose (80.1) pooled on mõtestatavad ja kas selle seose tõesus kindlaks tehtav ka üldjuhul, kui mõõde n on suvaline naturaalarv ja ω vabalt võetud p -nda astme välisdiferentsiaalvorm. Järgnevalt näitame, et vastus on jaatav: kehtib nn. *üldine Stokesi valem* (80.1), millel on väärtuslikke rakendusi teoreetilises mehaanikas ja füüsikas ning mujalgi.

Alustame muutujate vahetusega n -kordses integraalis, mis teatavasti ([3], lk. 321, 322) käib teisenduse (70.3) puhul valemi

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{\Delta} f(x_1(u^1, \dots, u^n), \dots, x_n(u^1, \dots, u^n)) \left| \det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right| \right| du^1 \dots du^n \quad (80.3)$$

abil, kus asja lihtsustamiseks on piirdutud ühekordse integraali märgiga nagu valemis (80.1), sest kordsuse näitab juba diferentsiaalide arv.

Kui teisenduse (70.3) korral

$$\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right| > 0, \quad (80.4)$$

siis öeldakse, et teisendus säilitab orientatsiooni (vrd. [6], lk. 71, 247).

Vaatleme nüüd väliskorrutist $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$. Et täisdiferentsiaali avaldise järgi

$$dx_j = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} du^i,$$

siis valemi (78.14) põhjal

$$dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \left(\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \right| \right) du^1 \wedge du^2 \wedge \dots \wedge du^n,$$

sest selle valemi a_{ji} osas on nüüd $\frac{\partial x_j}{\partial u^i}$. Järelikult on valemis (80.3) õigem diferentsiaalide hariliku korrutise $dx_1 \dots dx_n$ asemel kirjutada väliskorrutis $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, sest siis tuleb orientatsiooni säilitavate teisenduste puhul valem (80.3) iseenesest välja. Vaid traditsiooni tõttu pole seda seni tehtud; nimelt polnud kordse integ-

raali sümboli tekkimise ja kinnistumise ajal väliskorrutamine veel tuntud¹.

Õeldu puudutab integraali

$$\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \quad (80.5)$$

üle piirkonna $D \subset E_n$. Uurimise all oleva valemi (80.1) vasakul pool on aga tegemist integraaliga üle selle piirkonna raja Γ . Kõigepealt tuleb käsitlust kitsendada ja vaadelda ainult tükiti sileda rajaga piirkondi D (vrd. art. 70) — selliseid piirkondi D , mille raja on teatava lõpliku arvu lihthüperpindade sulundite ühend. Sel juhul saab integraali üle kogu raja käsitleda summana integraalidest üle nende lihthüperpindade, nendeni jõudmiseks tuleb aga sobivalt üldistada pindintegraali mõistet.

Välisdiferentsiaalvormide abil saab selle üldistuse anda järgmiselt. Olgu ruumis E_n antud lihthüperpind (art. 72)

$$\mathcal{F} = \{x : x_i = x_i(u^1, \dots, u^{n-1}), (u^1, \dots, u^{n-1}) \in D' \subset \mathbb{R}^{n-1}\}$$

ning teatavas seda sisaldavas piirkonnas $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm

$$\omega = \sum_{k_1 < \dots < k_{n-1}} a_{k_1 \dots k_{n-1}}(x_1, \dots, x_n) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{n-1}}. \quad (80.6)$$

Sellesse vormi võib teha asenduse lihthüperpinna $\mathcal{F}$ parameetrilistest võrranditest $x_i = x_i(u^1, \dots, u^{n-1})$ ja sel teel saada vormi ω kitsend sellel lihthüperpinnal $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \omega|_{\mathcal{F}} = & \sum_{k_1 < \dots < k_{n-1}} a_{k_1 \dots k_{n-1}}(x_1(u^1, \dots, u^{n-1}), \dots, x_n(u^1, \dots, u^{n-1})) \\ & \cdot \left(\frac{\partial x_{k_1}}{\partial u^{i_1}} du^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x_{k_{n-1}}}{\partial u^{i_{n-1}}} du^{i_{n-1}} \right). \end{aligned}$$

Tulemus on $(n-1)$ -se astme välisvorm $(n-1)$ -mõõtmelise ruumi $\mathbb{R}^{n-1}$ piirkonnal D' , millele saab valemi (78.12) abil anda kuju

¹ Pakub huvi märkida, et kahekordset integraali 1769. a. esimesena käsitlenud L. Euleri töös käitus $dx dy$ selle integraali sümbolis sisuliselt väliskorrutisena, sest x ja y osade vahetamisel muutis ta märki ([3], lk. 286). Hiljem paraku omistati talle siiski hariliku korrutise tähendus ja sellest tulenevalt tekkis esimest ja teist liiki pindintegraali eristamine ([3], lk. 362, 263) ning üsna arusaamatu asjaolu, et määratud (ühekordne) integraal tuleb välja teist liiki joonintegraalina üle x -telje lõigu, aga kahekordne integraal — esimest liiki pindintegraalina üle xy -tasandi piirkonna. Alles välisdiferentsiaalvormide arvutus võimaldas tagasi tulla Euleri esialgse seisukoha juurde, üldistades seda ka kolme-, nelja- jne. n -kordsele integraalile. Järgnevalt tegeleme niisuguste (19. sajandil traditsiooniliseks saanud terminoloogia kohaselt teist liiki) integraalidega, milles integreeritav avaldis on $f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ja mis muudavad märki koos orientatsiooni muutmisega, täpselt samuti nagu ühekordne määratud integraal x -telje suuna muutmisel ([2], lk. 363). Nn. esimest liiki integraalid, mille puhul on loobutud orientatsiooni arvestamisest, on lihtsalt nende absoluutväärtused.

$$\omega|_{\mathcal{F}} = \sum_{k_1 < \dots < k_{n-1}} a_{k_1 \dots k_{n-1}} (x_1(u^1, \dots, u^{n-1}), \dots, x_n(u^1, \dots, u^{n-1})) \cdot D^{k_1 \dots k_{n-1}} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}, \quad (80.7)$$

kus

$$D^{k_1 \dots k_{n-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{k_1}}{\partial u^1} & \frac{\partial x_{k_1}}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial x_{k_1}}{\partial u^{n-1}} \\ \frac{\partial x_{k_2}}{\partial u^1} & \frac{\partial x_{k_2}}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial x_{k_2}}{\partial u^{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{k_{n-1}}}{\partial u^1} & \frac{\partial x_{k_{n-1}}}{\partial u^2} & \dots & \frac{\partial x_{k_{n-1}}}{\partial u^{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Tavalisel viisil on võimalik arvutada $(n-1)$ -kordne integraal sellest vormist $\omega|_{\mathcal{F}}$ üle piirkonna $D' \subset E_{n-1}$ (mille tõlgendamiseks on vaja ruumi $\mathbb{R}^{n-1}$ sisse viia eukleidilise ruumi E_{n-1} struktuur (art. 1) koos vastava orientatsiooniga). Esialgse vormi ω seisukohalt nimetatakse seda integraali (hüper-)pindintegraaliks vormist ω üle liht-hüperpinna $\mathcal{F}$ ja tähistatakse $\int_{\mathcal{F}} \omega$.

Niisiis,

$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_{D'} \omega|_{\mathcal{F}},$$

kus paremal on tuntud mõiste — $(n-1)$ -kordne integraal üle D' .

Juhul $n=3$ tekib siin tuttav teist liiki pindintegraal ([3], lk. 362–364). Seos õpikus [3] kasutatud tähistustega on järgmine: $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$; $a_{12}=Z$, $a_{31}=-a_{13}=Y$, $a_{23}=X$; $u^1=u$, $u^2=v$; $D^{12}=C$, $D^{31}=-D^{13}=B$, $D^{23}=A$ (vt. ka [3], lk. 358). Neis tähistustes tuleb

$$\omega = X dy \wedge dz + Y dz \wedge dx + Z dx \wedge dy$$

puhul avaldisele (80.7) kuju

$$\omega|_{\mathcal{F}} = [\varphi(u, v)A + \psi(u, v)B + \chi(u, v)C] du \wedge dv,$$

kus $\varphi(u, v) = X(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ning ψ ja χ saadakse analoogiliselt Y ja Z abil. See $\omega|_{\mathcal{F}}$ avaldis erineb õpikus [3] lk. 363 antud avaldiste summast vaid väliskorrutise märgi kasutamise poolest, viimase otstarbekusest oli aga juttu eespool.

Olles nüüd andnud täpse sisu valemi (80.1) pooltele, jääb veel teha kindlaks selle valemi enda kehtivus.

Kõigepealt tuleb täpsustada piirkonna D ja raja Γ vahetust integreerimisel. Asi on nimelt selles, et integraali (80.5) märk, nagu eespool selgitatud, sõltub orientatsioonist ruumis E_n . Tarvitseb vaid näiteks vahetada x_1 ja x_2 osad, ja $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ muudab kohe märgi. Eriti käib see integraali

$$\int_{\mathcal{F}} \omega = \int_{D'} \omega|_{\mathcal{F}}$$

kohta, sest orientatsiooni ruumis E_n võib kord fikseerida ja teda

mitte enam muuta, kuid orientatsioon lihthüperpinnal (ehk piirkonnas D') pole esialgu millegagi määratud. Pealegi on raja Γ üldjuhul mitte üksainus lihthüperpind, vaid mitme sellise sulundi ühend.

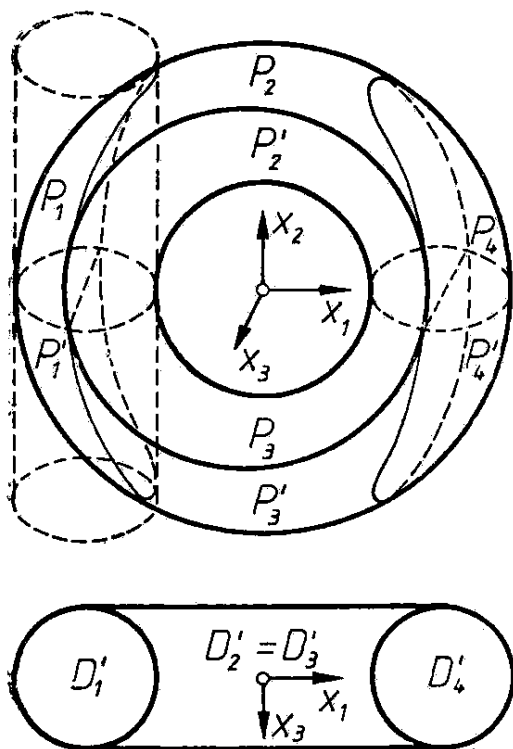
Seetõttu on vaja kõigepealt kooskõlastada raja moodustavate lihthüperpindade $\mathcal{T}_\sigma$ orientatsioonid ruumi E_n orientatsiooniga; $\sigma = 1, \dots, s$. Seda teeme kõverjoonelistel koordinaatide $v_1, v_2, \dots, v_n$ spetsiaalse valikuga suvalise punkti $x \in \mathcal{T}_\sigma$ ümbruses V_x . Me valime nad nii, et 1° kehtiks $\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial v_i} \right| > 0$, s.t. orientatsioon ruumis E_n ei muutuks, 2° $V_x \cap \mathcal{T}_\sigma$ oleks määratud võrrandiga $v_n = 0$ ja 3° $V_x \cap D$ oleks määratud ühega võrratustest $v_n < 0$ või $v_n \leq 0$. Sel juhul $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ on ümbruses $V_x \cap \mathcal{T}_\sigma$ teatavad kõverjoonelised koordinaadid, millega on määratud ühtlasi orientatsioon selles ümbruses.

Integraali aditiivsuse tõttu valemi (80.1) vasak pool laguneb integraalide $\int_{D'_\sigma} \omega|_{\mathcal{T}_\sigma}$ summaks, kusjuures iga sellise integraali arvutamisel tuleb nüüd nõuda, et parameetrid $u^1, u^2, \dots, u^{n-1}$ oleksid nummerdatud nii, et $V_x \cap \mathcal{T}_\sigma$ ulatuses oleks $\det \left| \frac{\partial u^\beta}{\partial v_\alpha} \right| > 0$; $\alpha, \beta = 1, \dots, n-1$. Sellega on fikseeritud orientatsioon igal lihtpinnal $\mathcal{T}_\sigma$.

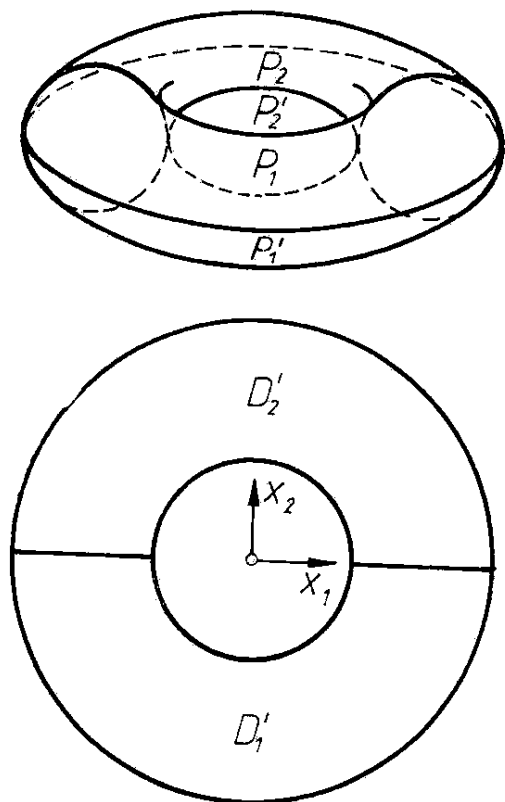
Edasiseks täpsustamiseks moodustame piirkonna D raja Γ silindrilise laiendi x_j -teljega paralleelsete moodustajatega. Selliselt nimetame raja Γ kõiki punkte läbivate ja x_j -teljega paralleelsete sirgete ühendit $c_j(\Gamma)$.

Järgnevalt piirdume vaid sellise juhuga, kus Γ on j iga väärtuse $1, 2, \dots, n$ korral esitatav paarikaupa ühisosata lihthüperpindade sulundite (raja Γ osade) ühendina nirmoodi, et igaüks neist lihthüperpindadest $\mathcal{T}_\sigma$ kas 1) koosneb $c_j(\Gamma)$ sirgete osadest või 2) kujutub $c_j(\Gamma)$ sirgetega projekteerimisel üksüheselt mõnele teisele raja Γ neist osadest $\mathcal{T}'_\sigma$. Et igal niisugusel sirgel on määratud x_j -telje suund, siis saab teisel juhul $\mathcal{T}'_\sigma$ ja $\mathcal{T}_\sigma$ valida niimoodi, et nende vastavad punktid on piirkonnas D sisalduva vahemiku algus- ja lõpp-punkt. Kõik seda laadi vahemikud moodustavad silindrilise piirkonna $\Pi_\sigma \subset D$ otsmiste lihthüperpindadega $\mathcal{T}'_\sigma$ ja $\mathcal{T}_\sigma$, kusjuures kogu $D \setminus \Gamma$ on selliste silindriliste piirkondade ühend. Näiteks on joonisel 82 näha ruumis E_3 võetud toori niisugune esitus $j=2$ ja joonisel 83 $j=3$ puhul. Joonisel 84 kujutatud tetraeedri korral leiab aset ka võimalus 1), kui $j=1$ või $j=2$. Üldise hulktahuka korral võib osutuda vajalikuks tahkude tükeldamine väiksemateks hulknurkadeks, et nõue 2) oleks täidetud.

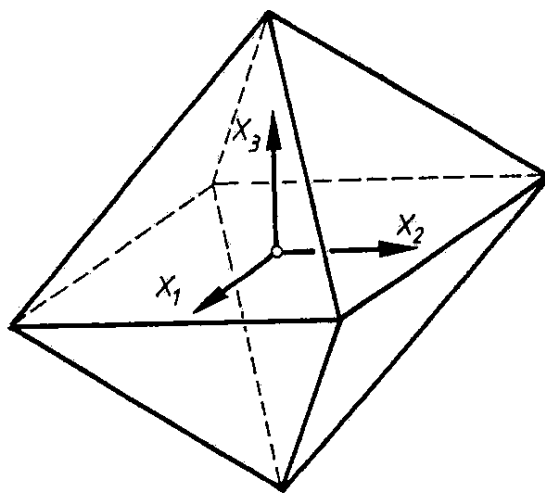
Järgnevas arutluses vaatleme konkreetsemalt juhtu, mil $j=n$, arvestades, et j suvalise väärtuse korral võib jõuda selleni $x_1, \dots, x_n$ kohtade tsüklilise ümberpaigutusega. Iga piirkonna Π_σ ots-



Joonis 82



Joonis 83



Joonis 84

mised hüperpinnad $\mathcal{T}'_{\sigma}$ ja $\mathcal{T}_{\sigma}$ saab sel juhul esitada vastavalt võr-
randitega

$$x_n = \varphi'_{\sigma}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad x_n = \varphi_{\sigma}(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D'_{\sigma},$$

kus parameetrite $v_1, \dots, v_{n-1}$ osas on $x_1, \dots, x_{n-1}$.

Seejuures $\mathcal{T}_{\sigma}$ puhul Π_{σ} punktides $x_n < \varphi_{\sigma}(x_1, \dots, x_{n-1})$ ning kui
nüüd tähistada

$$v_n = x_n - \varphi_{\sigma}(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

siis $x_n = v_n + \varphi_\sigma(v_1, \dots, v_{n-1})$ ning

$$\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial v_i} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial v_1} & \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial v_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$\mathcal{F}_\sigma$ on määratud võrrandiga $v_n = 0$ ja Π_σ punktides $v_n < 0$. Seega $x_1, \dots, x_{n-1}$ annavad hüperpinnal $\mathcal{F}_\sigma$ vajaliku orientatsiooni.

Seevastu $\mathcal{F}'_\sigma$ puhul on Π_σ punktides $x_n > \varphi'_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1})$, mistõttu siin tuleb võtta $v_n = \varphi'_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}) - x_n$, et saavutada nõude 3° täidetud, s.t. et Π_σ punktides oleks $v_n < 0$. Nõue 2° on endiselt rahuldatud, kuid 1° osas tuleb nüüd $\det \left| \frac{\partial x_j}{\partial v_i} \right| = -1$, sest

peadiagonaali viimane element $\frac{\partial x_n}{\partial v} = -1$. Järelikult $x_1, \dots, x_{n-1}$ ei määra hüperpinnal $\mathcal{F}'_\sigma$ vajalikku orientatsiooni. Integreerimisel on vaja $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ asemel võtta seega $-dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$, et orientatsioon oleks õige.

Pärast neid ettevalmistavaid märkusi asume Stokesi valemi (80.1) tõesuse kindlakstegemisele eespool seatud eeldustel.

Olgu ruumi E_n mingis piirkonnas, mis sisaldab nii piirkonna D kui selle raja Γ , antud $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm (80.6). Sellele on otstarbekas anda kuju

$$\omega = \sum_{j=1}^n a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (80.8)$$

kus on arvestatud, et (80.6) kordaja $a_{h_1 \dots h_{n-1}}$ indekseiks on naturaalarvude $1, 2, \dots, n$ seast loomulikus suurusjärjestuses võetud $n-1$ arvu ning et teda saab seetõttu täpselt ära näidata üheainsa indeksiväärtusega, nimelt selle arvuga j , mis on jäänud kasutamata. Nii näiteks juhul $n=4$

$$a_{123} = a_4, \quad a_{124} = a_3, \quad a_{134} = a_2, \quad a_{234} = a_1.$$

Vastava väliskorrutise $dx_{h_1} \wedge \dots \wedge dx_{h_{n-1}}$ saame, kui kõikide diferentsiaalide väliskorrutises $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ jätame diferentsiaali dx_j lihtsalt vahele. Seda olemegi näidanud märgiga $\wedge$ diferentsiaali dx_j kohal; niisiis, see märk on vahelt väljajätmise märk.

Välisdiferentsiaali definitsiooni (79.5) kohaselt

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{j=1}^n da_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j + \dots + \frac{\partial a_j}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_1 \wedge \dots \\ &\dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_n, \end{aligned} \quad (80.9)$$

sest sulgude avamisel need väliskorrutised, milles mingid kaks tegurit on ühesugused, on võrdsed nulliga. Integraali lineaarsuse tõttu $\int_D d\omega$ on integraalide

$$\int_D \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n; \quad j=1, \dots, n$$

summa, integraali aditiivsuse tõttu iga viimane aga on integraalide

$$\int_{\Pi_\sigma} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

summa.

Vaatleme nüüd konkreetsemalt jälle juhtu, mil $j=n$ ja millele saab taandada üldjuhu. Sel korral integraali taandamisvalemi kohaselt ([3], lk. 277, 312; üldistus lk. 321)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\sigma} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} &= \\ &= \int_{D'_\sigma} \left(\int_{\varphi'_\sigma}^{\varphi_\sigma} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_n \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}. \end{aligned}$$

Sulgudes Newtoni—Leibnizi valemi järgi

$$\begin{aligned} \int_{\varphi'_\sigma}^{\varphi_\sigma} \frac{\partial a_n}{\partial x_n} dx_n &= a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \Big|_{x_n=\varphi'_\sigma}^{x_n=\varphi_\sigma} = \\ &= a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1})) - \\ &\quad - a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi'_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1})). \end{aligned}$$

Seega üksliikme $\omega_n = a_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ korral

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\sigma} d\omega_n &= \int_{D'_\sigma} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1})) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} + \\ &\quad + \int_{D'_\sigma} a_n(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi'_\sigma(x_1, \dots, x_{n-1})) (-dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}) = \\ &= \int_{\mathcal{F}_\sigma} \omega_n + \int_{\mathcal{F}'_\sigma} \omega_n. \end{aligned}$$

Liites tulemused üle kõikide piirkondade Π_σ , millest koosneb $D \setminus \Gamma$, ning arvestades, et integraal üle D on sama mis integraal üle $D \setminus \Gamma$ ([3], lk. 308, 321), saame

$$\int_D d\omega_n = \int_\Gamma \omega_n.$$

Täpselt samuti on lugu iga üksliikme $\omega_j = a_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$ korral:

$$\int_D d\omega_j = \int_\Gamma \omega_j;$$

pärast liitmist $j=1, 2, \dots, n$ järgi saamegi siit valemi (80.1).

Sellela on valem (80.1) tõestatud juhul $D \subset E_n$. Kuid näiteks klassikaline Stokesi valem (art. 44), mil D on piirkond Ω teataval pinnal $\mathcal{F} \subset E_3$ ja Γ selle rajajoon L , ei ole praegu otseselt haaratud. Vajaliku üldistust on aga kerge teha.

Lihtpinnaks ruumis E_n , täpsemalt, *m-mõõtmeliseks lihtpinnaks* ($m \leq n$) nimetatakse punktihulka

$$\Omega = \{x : x_i = x_i(u^1, \dots, u^m), (u^1, \dots, u^m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m\},$$

kus 1) funktsioonid $x_i(u^1, \dots, u^m)$ on piirkonnas Ω diferentseeruvad ja 2) maatriks $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha} \right\|$; $i=1, \dots, n$; $\alpha=1, \dots, m$ on maksimaalse võimaliku astakuga m piirkonna Ω igas punktis (vrd. art. 73).

Olgu lihtpinda Ω sisaldavas ruumi E_n piirkonnas antud p -nda astme välisdiferentsiaalvorm

$$\omega = \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 \dots k_p}(x_1, \dots, x_n) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p}.$$

Asendusega $x_i = x_i(u^1, \dots, u^m)$ saame ω kitsendi $\omega|_\Omega$ vaadeldaval lihtpinnal:

$$\begin{aligned} \omega|_\Omega &= \sum_{k_1 < \dots < k_p} a_{k_1 \dots k_p}(x_1(u^1, \dots, u^m), \dots, x_n(u^1, \dots, u^m)) \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\partial x_{k_1}}{\partial u^{\alpha_1}} du^{\alpha_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial x_{k_p}}{\partial u^{\alpha_p}} du^{\alpha_p} \right). \end{aligned}$$

Osutub, et välisdiferentsiaalil on järgmine omadus:

$$(d\omega)|_\Omega = d(\omega|_\Omega). \quad (80.10)$$

Tõestuses võime tänu d ja $|_\Omega$ lineaarsusele piirduda üksliikmega $\omega = adx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p}$. Juhul $p=0$ on põhjendus lihtne, sest $d(a|_\Omega) = da(x_1(u^1, \dots, u^m), \dots, x_n(u^1, \dots, u^m)) = \frac{\partial a}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha} du^\alpha = \frac{\partial a}{\partial x_i} (dx_i|_\Omega) = da|_\Omega$. Edasi jätkame matemaatilise induktsiooniga.

Eeldame, et (80.10) on kindlaks tehtud ω astmete $q < p$ puhul. Sel korral

$$\begin{aligned} d(\omega|_\Omega) &= d[adx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p}|_\Omega] = \\ &= d[(adx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{p-1}})|_\Omega \wedge (dx_{k_p})|_\Omega] = \\ &= d[(adx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{p-1}})|_\Omega] \wedge (dx_{k_p})|_\Omega + \\ &+ (-1)^{p-1} (adx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{p-1}})|_\Omega \wedge d[(dx_{k_p})|_\Omega]. \end{aligned}$$

Siin $d[(dx_{k_p})|_\Omega] = [d(dx_{k_p})]|_\Omega = 0$, mistõttu tõesti

$$\begin{aligned} d(\omega|_\Omega) &= (da \wedge dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_{p-1}})|_\Omega \wedge (dx_{k_p})|_\Omega = \\ &= (da \wedge dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_p})|_\Omega = (d\omega)|_\Omega. \end{aligned}$$

Olgu piirkonnas Ω antud mingi osapiirkond D' tükiti sileda rajaga Γ' , mis rahuldagu valemi (80.1) tõestuses seatud eeldusi. Sellele vastava piirkonna lihtpinnal Ω tähistame D , viimase raja — Γ' kujutise — tähistame Γ .

Ruumi E_n vaadeldavas piirkonnas antud m -nda astme ja $(m-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvormide ϑ ja ω puhul defineerime:

$$\int_D \vartheta = \int_{D'} \vartheta|_{\omega}; \quad \int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma'} \omega|_{\Omega}.$$

Teise võrduse paremale poolele võime rakendada valemit (80.1) eespool tõestatud ulatuses:

$$\int_{\Gamma'} \omega|_{\Omega} = \int_{D'} d(\omega|_{\Omega}) = \int_{D'} (d\omega)|_{\Omega},$$

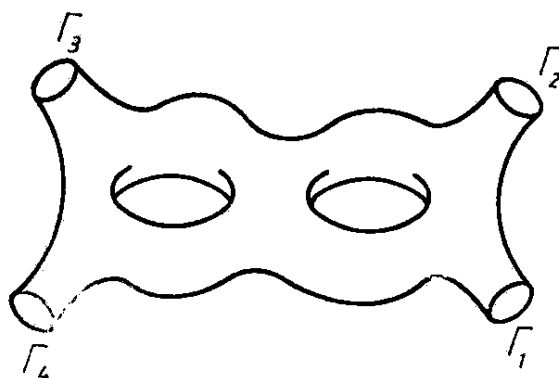
kus kasutasime ka valemit (80.10). Järelikult

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_D d\omega$$

ning (80.1) on kindlaks tehtud ka kõnesoleval juhul (vrd. [3], lk. 369—371, kus $n=3$, $m=2$).

Et mõõtme m osas pole seatud mingit muud kitsendust peale $m \leq n$, siis kehtib (80.10) ka juhul, mil $m=n$, s. t. kui tegemist on kõverjoonelistel koordinaatidega ruumi E_n mingis piirkonnas. Sellest järeldub, et Stokesi valem (80.1) kehtib sõltumatult koordinaatide valikust. See võimaldab konkreetsete piirkondade D puhul valida koordinaadid nii, et D ja tema raja Γ esitus oleks võimalikult lihtne. Näiteks toori ruumis E_3 ei pruugi käsitleda ristkoordinaatide abil nii, nagu näidatud joonistel 82 ja 83, vaid võib arvestada, et silinderkoordinaatides ϱ, θ, z ([3], lk. 316) saab teda anda võrranditega $\varrho = a + b \cos t$, $z = b \sin t$; $t \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, mistõttu temaga saab töötada just samuti nagu pöörsilindriga ristkoordinaatides.

Lõpuks märgime, et üldine Stokesi valem (80.1) kehtib tegelikult veelgi üldisematel eeldustel. Piirkond D ei tarvitse paikneda ühel lihtpinnal, vaid võib olla ka lihtpindade teataval ühendamisel. Näiteks joonisel 85 on kujutatud üks niisugune üldine D ruumis E_3 — nelja ära lõigatud «sarvega» kringli pind, mille puhul $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Endiselt kehtib (80.1), kuid põhjendused, mis nõuavad nn. diferentseeruvate muutkondade (vt. art. 83) teooria arendamist, lähevad paraku käesoleva kursuse raamidest välja.



Joonis 85

81. Välisdiferentsiaalvormid ja väljateooria. Klassikaline väljateooria tegeleb lihtsaimate tensorväljadega — skalaar- ja vektorväljadega eukleidilise ruumi E_3 piirkondades ([3], § 24). Sellisena rahuldab ta füüsika mitmeid väljakujunenud valdkondi. Kaasaja teoreetilises füüsikas on aga tekkinud vajadus üldistada seda teooriat nii mõõtme suurendamisega kui ka üleminekuga ruumist E_n (ristkoordinaatidelt) üldisele Riemanni muutkonnale (meetrilisele tensorile). Sellistel üldistustel ilmneb selgesti väljateooria seos välisdiferentsiaalvormidega. Juba lähteobjekte on kasulik vaadelda niisuguste vormidena — skalaarvälja 0-ndat järku ja vektorvälja 1-st järku vormina. Võimaluse selleks annab meetriline tensor g , mille abil saab vormist $\omega = a_i du^i$ moodustada vektorvälja $a = a^i x_i$, kus $a^i = g^{ij} a_j$, ja vastupidi, vektorväljast $b = b^i x_i$ 1-se astme diferentsiaalvormi $\theta = b_i du^i$, kus $b_i = g_{ij} b^j$.

Alustame skalaarväljast, piirdudes väljaga F eukleidilise ruumi E_n piirkonnas D (kuid pidades silmas, et käsitus on soovi korral ülekantav ka Riemanni geomeetriasse). Diferentsiaalvormist $dF = \frac{\partial F}{\partial u^i} du^i$ moodustatud vektorvälja nimetatakse skalaarvälja F gradiendiks ja tähistatakse $\text{grad } F$; seega

$$(\text{grad } F)^i = g^{ij} \frac{\partial F}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial F}{\partial u^i} = g_{ij} (\text{grad } F)^j$$

ning

$$dF = g_{ij} (\text{grad } F)^j du^i = \text{grad } F \cdot dx.$$

Kui $\mathcal{F}$ on skalaarvälja tasemepind (art. 33), mis teatavas ümbruses määratakse võrranditega $u^i = u^i(v^1, \dots, v^{n-1})$, siis $dF|_{\mathcal{F}} = 0$, mistõttu

$$(\text{grad } F)|_{\mathcal{F}} \cdot dx|_{\mathcal{F}} = 0.$$

Siin $dx|_{\mathcal{F}}$ on hüperpinna $\mathcal{F}$ suvaline puutujavektor, ning seega $(\text{grad } F)|_{\mathcal{F}}$ on skalaarvälja F tasemepinna $\mathcal{F}$ normaalvektor.

Ristkoordinaatide puhul $g_{ij} = \delta_{ij}$ ning

$$\text{grad } F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right);$$

juhul $n=3$ saame siit klassikalise väljateooria tuntud tulemused ([3], lk. 379—382).

Järgnevalt vaatleme vektorvälja a koos vastava lineaarse diferentsiaalvormiga $\omega = a_i du^i$, kus $a_i = g_{ij} a^j$. Viimase välisdiferentsiaali $d\omega$ — kaldsümmeetrilist (2,0)-tensorvälja — nimetatakse vektorvälja a rootoriks ja tähistatakse $\text{rot } a$. Et $\omega = g_{ij} a^j du^i = a \cdot dx$, siis

$$\text{rot } a = d(a \cdot dx).$$

Üldise Stokesi valemi (80.1) põhjal

$$\int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} = \int_D \operatorname{rot} \mathbf{a},$$

kus D on piirkond teataval kahemõõtmelisel pinnal ja Γ selle piirkonna rajajoon (vrd. [3], lk. 379). Et välisdiferentsiaal täisdiferentsiaal dF on null, siis

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} F) = 0.$$

Tensorvälja $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ koordinaatide leidmiseks arvutame

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = d(g_{ij}a^j) \wedge du^i = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} du^k a^j + g_{ij} \frac{\partial a^j}{\partial u^k} du^k \right) \wedge du^i.$$

Tehes siia asenduse valemist (71.11), saame

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = (g_{jl}\Gamma_{ik}^l + g_{il}\Gamma_{jk}^l) du^k \wedge du^i a^j + g_{ij} \frac{\partial a^j}{\partial u^k} du^k \wedge du^i,$$

kus $\Gamma_{ik}^l du^k \wedge du^i = 0$, sest $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$. Kui tähistada (vrd. harjutus-ülesandega 126)

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial u^k} + \Gamma_{kl}^j a^l, \quad (81.1)$$

siis

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= g_{ji} \nabla_k a^j du^k \wedge du^i = g_{j[i} \nabla_{k]} a^j du^k \wedge du^i = \\ &= 2 \sum_{k_1 < k_2} g_{j[k_2} \nabla_{k_1]} a^j du^{k_1} \wedge du^{k_2}, \end{aligned} \quad (81.2)$$

seega

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_{k_1 k_2} = g_{jk_2} \nabla_{k_1} a^j - g_{jk_1} \nabla_{k_2} a^j; \quad k_1 < k_2.$$

Ristkoordinaatide puhul $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\Gamma_{ik}^j = 0$, $\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x_k}$ ning

$$(\operatorname{rot} \mathbf{a})_{k_1 k_2} = \nabla_{k_1} a^{k_2} - \nabla_{k_2} a^{k_1} = \frac{\partial a^{k_2}}{\partial x_{k_1}} - \frac{\partial a^{k_1}}{\partial x_{k_2}}; \quad k_1 < k_2.$$

Vektorväljaga $\mathbf{a}$ seotakse ka teatav $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm. Selleks kasutatakse erilist kaldsümmeetrilist $(n, 0)$ -tensorvälja, nn. *elementaaruumala*, mis art-te 78 ja 79 mõttes vastab n -nda astme välisvormile

$$\sqrt{\det |g_{ij}|} du^1 \wedge \dots \wedge du^n. \quad (81.3)$$

Viimasel on ristkoordinaatides, kus $g_{ij} = \delta_{ij}$, kuju $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, mis ühtib integreerimisel kasutatava ruumalaelemendiga dV .

Et välisvormil (81.3) on üldkuju

$$\begin{aligned} &\sqrt{\det |g_{ij}|} (\delta_{i_1}^1 du^{i_1}) \wedge \dots \wedge (\delta_{i_n}^n du^{i_n}) = \\ &= \sqrt{\det |g_{ij}|} \delta_{i_1}^1 \dots \delta_{i_n}^n du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_n}, \end{aligned}$$

siis elementaarruumala koordinaatideks on

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \sqrt{\det |g_{ij}|} \delta_{[i_1}^1 \dots \delta_{i_n]}^n; \quad (81.4)$$

ainus oluline koordinaat on siin $\varepsilon_{1 \dots n} = \frac{1}{n!} \sqrt{\det |g_{ij}|}$, iga teine koordinaat on kas null või $\pm \varepsilon_{1 \dots n}$.

Vektorvälja $\mathbf{a}$ puhul defineeritakse nüüd temale vastav $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm $\theta_{\mathbf{a}}$ valemiga

$$\theta_{\mathbf{a}} = n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} a^{i_1} du^{i_2} \wedge \dots \wedge du^{i_n}. \quad (81.5)$$

Näiteks $n=3$ puhul ristkoordinaatides, kus $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = \frac{1}{6}$, $\varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = -\frac{1}{6}$, saame, et

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbf{a}} &= 3 \left[2 \cdot \frac{1}{6} a^1 dx_2 \wedge dx_3 + 2 \cdot \frac{1}{6} a^2 dx_3 \wedge dx_1 + 2 \cdot \frac{1}{6} a^3 dx_1 \wedge dx_2 \right] = \\ &= a^1 dx_2 \wedge dx_3 + a^2 dx_3 \wedge dx_1 + a^3 dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Kitsendame seda vormi $\theta_{\mathbf{a}}$ mingile lihtpinna $\mathcal{T} \subset E_3$ mis olgu määratud võrranditega $x_i = x_i(u^1, u^2)$, $(u^1, u^2) \in D$. Sel korral

$$\begin{aligned} dx_i \wedge dx_j &= (x_{i1} du^1 + x_{i2} du^2) \wedge (x_{j1} du^1 + x_{j2} du^2) = \\ &= (x_{i1} x_{j2} - x_{i2} x_{j1}) du^1 \wedge du^2, \end{aligned}$$

kus viimastes suluavaldistes tunneme ära pinna $\mathcal{T}$ normaalvektori $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = m \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}$ koordinaadid. Seega

$$\theta_{\mathbf{a}}|_{\mathcal{T}} = (am) \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} du^1 \wedge du^2 = (am) dS,$$

mistõttu pindintegraal

$$\int_{\mathcal{T}} \theta_{\mathbf{a}} = \int_{\mathcal{T}} (am) dS = \int_D \theta_{\mathbf{a}}|_{\mathcal{T}}$$

osutub vektorvälja $\mathbf{a}$ vooks läbi pinna $\mathcal{T}$ ([3], lk. 374–376).

Analoogilise tõlgenduse saab $\theta_{\mathbf{a}}$ jaoks anda ka ruumi E_n puhul, kus $g_{ij} = \delta_{ij}$ ja (81.3) põhjal $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \pm 1/n!$ või 0. Pinna asemele tuleb siin hüperpind $\mathcal{T}$, kuid välisvormi

$$\begin{aligned} n \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} &= n(n-1)! \sum_{k_2 < \dots < k_n} \varepsilon_{i_1 k_2 \dots k_n} dx_{k_2} \wedge \dots \wedge dx_{k_n} = \\ &= (-1)^{i_1-1} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_1}} \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

kordaja $du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}$ ees tuleb samuti hüperpinna normaalvektori $m \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|}$ i_1 -ne koordinaat, mistõttu

$$\theta_{\mathbf{a}}|_{\mathcal{T}} = (am) \sqrt{\det |g_{\alpha\beta}|} du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}.$$

Üldiselt $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvormi (81.5) nimetatakse vektorvälja a *voovormiks*. Tema välisdiferentsiaali $d\theta_a$ nimetatakse vektorvälja a *divergentsiks*. Et viimane on n -nda astme välisdiferentsiaalvorm, siis ta on vormi (81.3) ehk dV kordne. Vastav kordaja tähistatakse $\text{div } a$. Leiame $\text{div } a$ avaldise üldjuhul, kui

$$\theta_a = n! \sum_{k_2 < \dots < k_n} \varepsilon_{i_1 k_2 \dots k_n} a^{i_1} du^{k_2} \wedge \dots \wedge du^{k_n}$$

ja eelneva põhjal

$$\theta_a = \sum_{i_1=1}^n (-1)^{i_1-1} \sqrt{\det |g_{ij}|} a^{i_1} du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^{i_1}} \wedge \dots \wedge du^n.$$

Välisdiferentsiaali arvutamisel tuleb siin tegemist osatuletisega $\frac{\partial}{\partial u^k} (\det |g_{ij}|)$, mis sellekohase reegli ([3], lk. 183) järgi on summa $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \cdot G^{ij}$, kus G^{ij} on elemendi g_{ij} alamdeterminant vaa-
deldavas determinandis $\det |g_{ij}|$. Tema jagamisel selle determi-
nandiga tekib pöördmaatriksi $\|g^{ij}\|$ vastav element g^{ij} ([1], lk. 92),
mistõttu kõnesolev osatuletis on $(\det |g_{ij}|) \cdot \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g^{ij}$. Niisiis,

$$\begin{aligned} d\theta_a &= \sum_{i_1=1}^n (-1)^{i_1-1} d(\sqrt{\det |g_{ij}|} a^{i_1}) \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^{i_1}} \wedge \dots \wedge du^n = \\ &= \sum_{i_1=1}^n (-1)^{i_1-1} \left(\frac{1}{2 \sqrt{\det |g_{ij}|}} \cdot \det |g_{ij}| \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g^{ij} a^{i_1} + \sqrt{\det |g_{ij}|} \frac{\partial a^{i_1}}{\partial u^k} \right) \cdot \\ &\quad \cdot du^k \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^{i_1}} \wedge \dots \wedge du^n. \end{aligned}$$

Asendusega valemist (71.11) leiame, et

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} g^{ij} = (g_{jl} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l) g^{ij} = (\delta_l^i \Gamma_{ik}^l + \delta_l^j \Gamma_{jk}^l) = 2\Gamma_{ik}^i$$

ning seega

$$\begin{aligned} d\theta_a &= \sum_{i_1=1}^n (-1)^{i_1-1} \sqrt{\det |g_{ij}|} \left(\Gamma_{ik}^i a^{i_1} + \frac{\partial a^{i_1}}{\partial u^k} \right) \cdot \\ &\quad \cdot du^k \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^{i_1}} \wedge \dots \wedge du^n. \end{aligned}$$

Selles avaldises toimub summeerimine $k=1, \dots, n$ järgi. Summeerimisindeksi kõigi väärtuste puhul, mis erinevad arvust i_1 , tekivad väliskorrutised kahe võrdse teguriga ja need on teatavasti nullid. Väärtuse i_1 puhul on loomulik viia du^{i_1} esikohalt oma õigele kohale, kasutades ära teguri $(-1)^{i_1-1}$. Kokkuvõttes, ka tähistust (81.1) ja vormi (81.3) sümbolit dV kasutades, saame:

$$d\theta_a = \sqrt{\det |g_{ij}|} \left(\Gamma_{ii_1}^i a^{i_1} + \frac{\partial a^{i_1}}{\partial u^{i_1}} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^n = (\nabla_k a^k) dV,$$

seega

$$\operatorname{div} a = \nabla_k a^k. \quad (81.6)$$

Märgime, et üldise Stokesi valemi (80.1) põhjal

$$\int_{\Gamma} \theta_a = \int_D \operatorname{div} a dV,$$

kus D on piirkond tükiti sileda rajaga Γ vaadeldavas n -mõõtmelises ruumis (vrd. [3], lk. 377).

Ristkoordinaatides, kus, nagu eespool selgus, $\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x_k}$, kehtib valem

$$\operatorname{div} a = \frac{\partial a^k}{\partial x_k} = \frac{\partial a^1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial a^n}{\partial x_n},$$

mis juhul $n=3$ ühtib klassikalise väljateooria vastava avaldisega ([3], lk. 377).

Erijuhul, mil $a = \operatorname{grad} F$, tekib avaldis $\operatorname{div} (\operatorname{grad} F) = \nabla_k \left(g^{kl} \frac{\partial F}{\partial u^l} \right)$. Siin esinevat operaatorit $\operatorname{divgrad} = g^{kl} \nabla_k \frac{\partial}{\partial u^l}$, mis seab skalaarväljale F vastavusse skalaarvälja $\operatorname{divgrad} F$, nimetatakse *Laplace'i operaatoriks* ja tähistatakse Δ . Siin laiendatakse tähistust (81.1) ka skalaarväljale F , lugedes lihtsalt $\nabla_k F = \frac{\partial F}{\partial x^k}$; sel puhul

$$\Delta = g^{kl} \nabla_k \nabla_l \quad (81.7)$$

(kusjuures niisugusena on Laplace'i operaator rakendatav ka vektorväljale). Ristkoordinaatides, kus $g^{kl} = \delta^{kl}$, $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, leiame, et

$$\Delta = \delta^{kl} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2};$$

erijuhul $n=3$ on tegemist klassikalise väljateooria vastava avaldisega ([3], lk. 383).

Ka üldises käsitluses väärib erijuht $n=3$ lähemat uurimist. Sel korral nimelt $n-1=2$, s.t. $\operatorname{rot} a$ on $(n-1)$ -se astme välisdiferentsiaalvorm ning seega leidub vektorväli b , millega ta on seotud:

$$\theta_b = \operatorname{rot} a.$$

Valemite (81.5) ja (81.2) põhjal siit

$$3 \cdot 2 \sum_{k_1 < k_2} \varepsilon_{ik_1 k_2} b^i du^{k_1} \wedge du^{k_2} = 2 \sum_{k_1 < k_2} g_{j[k_2} \nabla_{k_1]} a^j du^{k_1} \wedge du^{k_2},$$

s. t.

$$3 \varepsilon_{ik_1 k_2} b^i = g_{j[k_2} \nabla_{k_1]} a^j$$

ehk

$$\begin{aligned}\sqrt{g} b^1 &= g_{j3} \nabla_2 a^j - g_{j2} \nabla_3 a^j, & \sqrt{g} b^2 &= g_{j1} \nabla_3 a^j - g_{j3} \nabla_1 a^j, \\ \sqrt{g} b^3 &= g_{j2} \nabla_1 a^j - g_{j1} \nabla_2 a^j, & g &= \det |g_{ij}|.\end{aligned}\quad (81.8)$$

Ristkoordinaatide puhul ruumis E_3 , mil $g_{ij} = \delta_{ij}$, saame siit

$$b^1 = \frac{\partial a^3}{\partial x_2} - \frac{\partial a^2}{\partial x_3}, \quad b^2 = \frac{\partial a^1}{\partial x_3} - \frac{\partial a^3}{\partial x_1}, \quad b^3 = \frac{\partial a^2}{\partial x_1} - \frac{\partial a^1}{\partial x_2}.$$

Seega b on vektorväli, mida klassikalises väljateoorias nimetatakse vektorvälja a *rootoriks* ([3], lk. 378) ja tähistatakse sama tähisega $\text{rot } a$, mis eespool oli kasutusel $d(a dx)$ puhul. Märgime, et valemid (81.8) võimaldavad arvutada tema koordinaate suvaliste kõverjooneliste koordinaatide puhul ruumi E_3 piirkonnas, kuid ühtlasi ka Riemanni geomeetrias (samuti nagu (81.6) ja (81.7) lubavad arvutada $\text{div } a$ ja ΔF üldise mõõtmega n korral).

82. Välisdiferentsiaalvormid Riemanni geomeetrias. Cartani välisdiferentsiaalarvutust on otstarbekas rakendada ka Riemanni geomeetria (sealhulgas pindade või hüperpindade sisegeomeetria¹) kõverusnähtuste käsitlemisel, kus ta lubab üsna keerukaid valemeid panna kirja lihtsamalt ja ülevaatlikumalt. Selleks tuleb kõigepealt võtta kasutusse vektori rööpülekanne valemeis (73.7) esinevad lineaarsed diferentsiaalvormid

$$\omega_i^j = \Gamma_{ik}^j du^k, \quad (82.1)$$

mis võimaldavad valemeid (73.7) kirjutada kujul

$$dz^j + z^i \omega_i^j = 0. \quad (82.2)$$

Meenutame, et kordajad Γ_{ik}^j — Christoffeli sümbolid — on määratud täielikult Riemanni meetrilise tensori g_{ij} poolt kui lineaarvõrrandisüsteemi (71.11) lahendid. Selle süsteemi võrrandid saab samuti lühemalt kirja panna vormide (82.1) abil; selleks tuleb (71.11) pooli ahendada suurustega du^l , tulemusena tekib tingimus

$$dg_{ik} = g_{jk} \omega_i^j + g_{ij} \omega_k^j. \quad (82.3)$$

Vorme (82.1) nimetatakse Riemanni geomeetrias *seostusvormideks*. Arvutame nüüd seostusvormi (82.1) välisdiferentsiaali:

$$d\omega_i^j = d\Gamma_{ik}^j \wedge du^k = \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} du^l \wedge du^k = - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} du^k \wedge du^l$$

ja liidame sellele väliskorrutise

$$\omega_h^j \wedge \omega_i^h = \Gamma_{hk}^j du^k \wedge \Gamma_{il}^h du^l.$$

¹ Hüperpinna (art. 72) sisegeomeetria on määratud, täpselt samuti nagu pinna sisegeomeetria (art. 48), esimese ruutvormiga ja ta kujutab endast Riemanni geomeetria meetrilise tensoriga (72.3).

$$d\omega_i^j + \omega_h^j \wedge \omega_i^h = \left(-\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{hk}^j \Gamma_{il}^h \right) du^k \wedge du^l, \quad (82.4)$$

kus sulgudes tunneme ära avaldiste (74.2) vastandväärtused. Seega paremal saame teatava teise astme välisdiferentsiaalvormi

$$\Omega_i^j = -Q_{ikl}^j du^k \wedge du^l.$$

Iga välisvormiga on teatavasti seotud kaldsümmeetriline tensor (art. 78), mille koordinaadid saadakse välisvormi kordajate süsteemi alterneerimisel (vrd. (78.6)). Praegu tähendab see summeerimisindeksite k ja l sümboolite vahetamist:

$$\Omega_i^j = -Q_{ilk}^j du^l \wedge du^k = Q_{ilk}^j du^k \wedge du^l,$$

saadud võrduste poolte liitmist:

$$2\Omega_i^j = -(Q_{ikl}^j - Q_{ilk}^j) du^k \wedge du^l$$

ja seejärel 2-ga jagamist.

Sulgudesse on (74.14) põhjal tekkinud kõverustensori koordinaadid $R_{i,kl}^j$. Selle asjaolu väljendusena nimetatakse teise astme välisdiferentsiaalvorme

$$\Omega_i^j = -\frac{1}{2} R_{i,kl}^j du^k \wedge du^l \quad (82.5)$$

Riemanni muutkonna *kõverusvormideks*. Seostest (82.4) järelduvaid võrdusi

$$d\omega_i^j + \omega_h^j \wedge \omega_i^h = \Omega_i^j \quad (82.6)$$

nimetatakse *Cartani struktuurivõrrandeks* (Riemanni geomeetrias).

Indeksi j langetamisega (art. 69) saadakse seostusvormidest (82.1) nn. *Christoffeli vormid*

$$\omega_{ij} = g_{jh} \omega_i^h \quad (82.7)$$

ja kõverusvormidest (82.5) nn. *Riemanni—Christoffeli vormid*

$$\Omega_{ij} = g_{jh} \Omega_i^h = -\frac{1}{2} R_{ij,kl} du^k \wedge du^l \quad (82.8)$$

(art. 75). Nende abil omandab (82.3) kuju

$$dg_{ik} = \omega_{ik} + \omega_{ki}, \quad (82.9)$$

(82.6) aga kuju

$$d\omega_{ij} + g^{kl} \omega_{ik} \wedge \omega_{jl} = \Omega_{ij}, \quad (82.10)$$

nagu kerge vahetu arvutusega kontrollida.

Saadud valemid võtavad kompaktsemalt kokku mitmeid eespool art-tes 74 ja 75 tuletatud seoseid. Näiteks seose (82.9) poolte välisdiferentseerimisel tekib (79.8) põhjal samasus

$$0 = d\omega_{ik} + d\omega_{ki},$$

mis näitab, et Christoffeli vormi välisdiferentsiaal on kaldsümmeetriline. Koos sellega järeldub nüüd seosest (82.10), et ka Riemanni—Christoffeli vorm on kaldsümmeetriline; selle arvestamine seoses (82.8) annab uuesti Riemanni—Christoffeli tensori juba eespool saadud omaduse $R_{ij,kl} = -R_{ji,kl}$.

Välisdiferentsiaalarvutus võimaldab suhteliselt kergesti saada uusi seoseid, mille vahetu tuletamine on üpris komplitseeritud. Rakendame välisdiferentseerimist struktuurivõrrandite (82.6) pooltele, kasutades valemeid (79.8), (79.11) ja (79.9), kus viimases praegu $q=1$. Tulemuseks saame

$$d\omega_h^j \wedge \omega_i^h - \omega_h^j \wedge d\omega_i^h = d\Omega_i^j.$$

Asendades siin (82.6) järgi

$$d\omega_h^j = -\omega_k^j \wedge \omega_h^k + \Omega_h^j, \quad d\omega_i^h = -\omega_k^h \wedge \omega_i^k + \Omega_i^h$$

ning arvestades, et liikmed $-\omega_k^j \wedge \omega_h^k \wedge \omega_i^h$ ja $-\omega_h^j \wedge (-\omega_k^h \wedge \omega_i^k)$ koonduvad, jõuame seoseni

$$\Omega_h^j \wedge \omega_i^h - \omega_h^j \wedge \Omega_i^h = d\Omega_i^j, \quad (82.11)$$

mida tuntakse *Bianchi*¹ samasuse nime all. Tegemist on kõverusvormide ja -tensori teatava sügava struktuuriomadusega.

Bianchi samasus võimaldab muu hulgas tõestada eespool formuleeritud Schuri teoreemi: *kui lõikekõverus $K(\tau)$ on konstantne igas punktis $x \in M_n$ ja $n \geq 3$, siis $K(\tau)$ on punktist x sõltumatu konstant*. Tõepoolest, $K(\tau)$ võrdumisest konstandiga K alamvektorruumi τ muutumisel järeldub seos (77.2), mistõttu (82.8) põhjal

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2} K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) du^k \wedge du^l = -Kg_{ik}g_{jl} du^k \wedge du^l.$$

Indeksi j tõstmisega saame siit

$$\Omega_i^j = -Kg_{ik} du^k \wedge du^j.$$

Asendus Bianchi samasusse (82.11) viib seoseni

$$\begin{aligned} -Kg_{hk} du^k \wedge du^j \wedge \omega_i^h + \omega_h^j \wedge Kg_{ik} du^k \wedge du^h = \\ = -(dKg_{ik} + Kdg_{ik}) \wedge du^k \wedge du^j. \end{aligned}$$

Siin tuleb arvestada, et (82.1) põhjal

$$\omega_h^j \wedge du^h = \Gamma_{hh}^j du^h \wedge du^h$$

ning et (73.6) järgi Christoffeli sümboolid Γ_{hh}^j on sümmeetrilised indeksite h ja k järgi, siis tulemuseks on 0. Edasi tuleb dg_{ik} asendada tema avaldisega $g_{hk}\omega_i^h + g_{ih}\omega_k^h$ valemist (82.3), arvestada veel kord, et

$$\omega_h^h \wedge du^h = 0, \quad (82.12)$$

ning seda, et tekivad sarnased liikmed, mis koonduvad. Kokkuvõttes saame seose

$$g_{ik} dK \wedge du^k \wedge du^j = 0,$$

¹ Luigi Bianchi (1856—1928), itaalia matemaatik.

millest järeldub, et

$$\frac{\partial K}{\partial u^i} du^i \wedge du^j \wedge du^k = 0.$$

Kui $n=2$, siis on vasakul tegureiks vaid du^1 ja du^2 , väliskorrutis $du^i \wedge du^j \wedge du^k$ on paratamatult 0 ning saadud seos samaselt rahuldatud. Kui $n \geq 3$, siis i iga väärtuse korral leiduvad j ja k sellised väärtused, et $du^i \wedge du^j \wedge du^k \neq 0$, mistõttu kõik osatuletised $\frac{\partial K}{\partial u^i}$ on nullid, s. t. $K = \text{const}$. Teoreem on tõestatud.

Kõverjoonelised koordinaadid $u^1, \dots, u^n$ Riemanni lihtruumis M_n ei ole teatavasti üheselt määratud; nendelt võib teha ülemineku uutele kõverjooneliste koordinaatidele $u^{i'}, \dots, u^{n'}$ valemitega (73.1) (kus nüüd $m=n$), selliselt et $\det |u_{i'}^i| \neq 0$. Siin $u_{i'}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$, kusjuures maatriksi $\|u_{i'}^i\|$ pöördmaatriksi $\|u_i^{i'}\|$ moodustavad $u_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ (art. 70 ja 73). Iga kõverjooneliste koordinaatide valikuga on igas punktis $x \in M_n$ seotud teatavad n puutujavektorit koordinaatidega $\delta_1^i, \dots, \delta_n^i$; $i=1, \dots, n$. Need vektorid on puutujavektorruumi $T_x(M_n)$ elemendid (art. 74) ja me tähistame nad vastavalt $x_1, \dots, x_n$. Nendest moodustub ruumi $T_x(M_n)$ teatav baas, mida nimetatakse *koordinaadibaasiks*. Iga puutujavektor $z \in T_x(M_n)$ koordinaatidega z^i (kõverjooneliste koordinaatide u^i suhtes) on vektorruumi $T_x(M_n)$ tehete abil avaldatav kujul $z = x_j z^j$.

Uute kõverjooneliste koordinaatide $u^{i'}$ suhtes on sellel vektoril z koordinaadid $z^{i'}$, kusjuures teisenemise tensorseaduse (70.8) kohaselt (kus praegu $p=0, q=1$)

$$z^{j'} = u_{j'}^{j'} z^j$$

(art. 73). Siit $z^j = u_j^{j'} z^{j'}$, mistõttu $z = x_j u_j^{j'} z^{j'}$. Järelikult koordinaadibaas teiseneb eeskirja

$$x_{j'} = x_j u_j^{j'} \quad (82.13)$$

järgi. Siin näeme analoogiat kõverjooneliste koordinaatide käsitlusega ruumis E_n (art. 70, eriti (70.6)) ja ruumis E_{n+1} antud hüperpinnal (art. 72), ainult et nüüd ei ole x_j enam mingi kohavektori x osatuletisvektorid, vaid moodustavad lihtsalt teatava kõverjooneliste koordinaatidega u^i eriliselt seotud baasi vektorruumis $T_x(M_n)$ — koordinaadibaasi.

Osutub, et diferentsiaalid du^i teisenevad täpselt samuti nagu puutujavektori koordinaadid. Tõepoolest, teisendusvalemeist (73.1), kus olgu $m=n$, leiame täisdiferentsiaali arvutamise eeskirja järgi, et

$$du^i = u_{i'}^i du^{i'}. \quad (82.14)$$

Järelikult saab moodustada kõverjoonelistel koordinaatide valikust sõltumatu avaldise

$$x_i du^i = x_{i'} du^{i'}, \quad (82.15)$$

mis kujutab endast ühelt poolt iga punkti $x \in M_n$ korral puutuja-vektorruumi $T_x(M_n)$ elementi, teiselt poolt on aga lineaarne diferentsiaalvorm (vektorkordajatega). Seda avaldist nimetatakse *kanooniliseks vormiks* lihtmuutkonnal M_n . Märgime, et Riemanni meetrilise tensori olemasolu pole siin vaja üldse eeldada.

Miski ei keela üleminekut suvalisele baasile $e_{i'}, \dots, e_{n'}$ puutuja-vektorruumis $T_x(M_n)$, kus x võib olla lihtmuutkonna M_n ükskõik missugune punkt. Olgugi meil tegemist teisendusega

$$e_{i'} = x_i C_{i'}^i, \quad \det |C_{i'}^i| \neq 0, \quad (82.16)$$

ehk, vastupidi,

$$x_i = e_{i'} C_i^{i'}, \quad (82.17)$$

kus $\|C_i^{i'}\|$ on maatriksi $\|C_{i'}^i\|$ pöördmaatriks (vrd. (69.9)). Uus baas ei tarvitse enam olla koordinaadibaas, s.t. pole vaja, et leiduks selline koordinaaditeisendus, et $C_{i'}^i$ oleksid vastavad osatuletised $u_{i'}^i$. Veelgi enam, teisendusmaatriksi $\|C_{i'}^i\|$ elemente võib soovi korral käsitleda isegi uute parameetritena.

Kanoonilisele vormile (82.15) saame nüüd kuju

$$x_i du^i = e_{i'} C_i^{i'} du^{i'}.$$

Otstarbekas on tähistada

$$\omega^{i'} = C_i^{i'} du^i. \quad (82.18)$$

Kui $C_i^{i'}$ on argumentide $u^1, \dots, u^n$ diferentseeruvad funktsioonid, siis $\omega^{i'}, \dots, \omega^{n'}$ kujutavad endast lineaarseid diferentsiaalvorme, seejuures lineaarselt sõltumatuid, sest $\det |C_i^{i'}| \neq 0$. Järgnevas jääme põhiliselt selle vaatekoha juurde. (Tuletatav formaalne aparaat jääb kehtivaks ka uute parameetritena vaadeldavate $C_i^{i'}$ puhul, ainult et vajaliku sisu andmine nõuaks mõistarendusi, mis viiksid käesoleva kursuse raamidest välja.)

Edasi tuleb selgitada, mis saab teisenduses (82.16) Riemanni lihtruumi seostusvormidest ω_i^j . Nende vormide poolt on määratud vektori $z = x_i z^i$ rööpülekanne tingimuste (73.7) vasakud pooled $dz^j + z^i \omega_i^j$. Vaatleme viimaste teisenemist. Kui uues baasis $z = e_{i'} z^{i'}$, siis (82.16) järgi $z = x_i C_{i'}^i z^{i'}$, s.t. $z^i = C_{i'}^i z^{i'}$. Seega $dz^j = d(C_{i'}^j z^{i'}) = dC_{i'}^j z^{i'} + C_{i'}^j dz^{i'}$ ning järelikult

$$dz^j + z^i \omega_i^j = C_{i'}^j dz^{i'} + dC_{i'}^j z^{i'} + C_{i'}^j z^{i'} \omega_{i'}^j.$$

Ahendame siin maatriksi $\|C_{i'}^j\|$ elementidega, arvestades, et $C_{i'}^j C_{i'}^j = \delta_{i'}^{j'}$:

$$C_{i'}^j (dz^j + z^i \omega_i^j) = dz^{j'} + z^{i'} C_{i'}^{j'} (dC_{i'}^j + C_{i'}^i \omega_i^j).$$

Nii saame vektori rööpülekande tingimusele kuju

$$dz^{j'} + z^{i'} \omega_{i'}^{j'} = 0,$$

kus

$$\omega_{i'}^{j'} = C_j^{j'} (dC_{i'}^j + C_{i'}^i \omega_i^j) \quad (82.19)$$

ongi uuteks seostusvormideks.

Erijuhul, kui teisenduseks (82.16) on üleminek (82.13) ühelt koordinaadibaasilt teisele, tuleb valemis (82.19) lugeda, et $C_{i'}^{j'} = u_{i'}^{j'}$. Nii uute kui vanade kõverjoonelistel koordinaatide puhul kehtivad muidugi Cartani struktuurivõrrandid (82.6) ehk (82.10). Osutub aga, et need võrrandid säilitavad oma kuju ka üldisema teisenduse (82.16) korral. Tõepoolest, valemist (82.19) leiame, et

$$\begin{aligned} d\omega_{i'}^{j'} &= dC_j^{j'} \wedge (dC_{i'}^j + C_{i'}^i \omega_i^j) + C_j^{j'} (dC_{i'}^i \wedge \omega_i^j + C_{i'}^i d\omega_i^j) = \\ &= dC_j^{j'} \wedge dC_{i'}^j + C_{i'}^i dC_j^{j'} \wedge \omega_i^j + C_j^{j'} dC_{i'}^i \wedge \omega_i^j + C_{i'}^i C_j^{j'} d\omega_i^j. \end{aligned}$$

Edasi arvestame samades valemities, et samasuste $C_j^{j'} C_{i'}^j = \delta_{i'}^{j'}$ tõttu $dC_j^{j'} C_{i'}^j + C_j^{j'} dC_{i'}^j = 0$ ning järelikult

$$\omega_{i'}^{j'} = -C_{i'}^j dC_j^{j'} + C_{i'}^i C_j^{j'} \omega_i^j. \quad (82.20)$$

Seega

$$\begin{aligned} \omega_{h'}^{j'} \wedge \omega_{i'}^{h'} &= (-C_{h'}^j dC_j^{j'} + C_{h'}^i C_j^{j'} \omega_i^j) \wedge C_{i'}^{h'} (dC_{i'}^h + C_{i'}^i \omega_i^h) = \\ &= -dC_j^{j'} \wedge dC_{i'}^h - C_{i'}^i dC_j^{j'} \wedge \omega_i^h + C_j^{j'} \omega_h^j \wedge dC_{i'}^h + C_{i'}^i C_j^{j'} \omega_h^j \wedge \omega_i^h; \end{aligned}$$

viimases reas on kasutatud samasusi $C_{h'}^j C_h^{h'} = \delta_{h'}^j$, $C_{h'}^h C_h^{h'} = \delta_{h'}^h$. Siit

$$d\omega_{i'}^{j'} + \omega_{h'}^{j'} \wedge \omega_{i'}^{h'} = C_{i'}^i C_j^{j'} (d\omega_i^j + \omega_h^j \wedge \omega_i^h),$$

sest ülejäänud liikmed koonduvad vastastikku. Järelikult (82.6) põhjal

$$d\omega_{i'}^{j'} + \omega_{h'}^{j'} \wedge \omega_{i'}^{h'} = \Omega_{i'}^{j'}, \quad (82.21)$$

kus

$$\Omega_{i'}^{j'} = C_j^{j'} \Omega_i^j C_{i'}^i. \quad (82.22)$$

Niisiis, Cartani struktuurivõrrandid tulevad pärast teisendust (82.16) täpselt samasuguse kujuga nagu seosed (82.6). Ühtlasi on seostest (82.22) näha, et kõverusvormid teisenevad tensorseaduse (69.10) järgi (kus praegu $p=q=1$). Avaldiste (82.5) uus kuju on:

$$\Omega_{i'}^{j'} = -\frac{1}{2} R_{i',h'l}^{j'} \omega^{h'} \wedge \omega^l, \quad (82.23)$$

kus parema poole kordajad tekivad kõverustensori koordinaatidest nende teisenemisel tensorseaduse (69.10) järgi (kus $q=1$, $p=3$) ja kujutavad endast seega kõverustensori uusi koordinaate.

Märgime, et Cartani struktuurivõrranditele (82.19) lisanduvad nüüd veel võrrandid

$$d\omega^{j'} + \omega_{i'}^{j'} \wedge \omega^{i'} = 0, \quad (82.24)$$

mille kehtivust on lihtne vahetult kontrollida, lähtudes valemist (82.17) ja (82.20) ja rakendades eespool kasutatud samasusi, sealhulgas seost (82.12).

Kui minna kõverjoonelistel koordinaatide teisenduse poolt määratud koordinaadibaasi teisenduselt (82.13) üle üldisemale baasiteisendusele (82.16) puutujaruumis $T_x(M_n)$, tekib uusi võimalusi käsitlemise lihtsustamiseks. Lineaaralgebrast on teada, et iga reaalse ruutvormi saab sobiva baasiteisendusega viia normaalkujju ([1], lk. 449), s.t. kujju, kus esinevad ainult muutujate ruudud kordajatega 1, -1 või 0, kusjuures nullist erinevate kordajate arv on võrdne ruutvormi astakuga. Rakendades seda tulemust fikseeritud puutujaruumis $T_x(M_n)$ skalaarruudu $z^2 = g_{ij}z^iz^j$ avaldise kui ruutvormi puhul, kus $\det |g_{ij}| \neq 0$, võime öelda, et selles ruumis $T_x(M_n)$ leidub baase, milles $g_{i'j'} = 0$, kui $i' \neq j'$ ja $g_{i'i'}$ on 1 või -1 . Neid baase nimetatakse *ortonormaalseteks* (ehk ortogonaalseteks normeeritud) *baasideks* Riemanni meetrilise tensori g suhtes (vrd. [1], lk. 420). Kui g on Riemanni meetrika, s.t. $g_{ij}z^iz^j$ on positiivselt määratud, siis sellises baasis $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$ ja sel juhul kõneldakse ka ristbaasist (vrd. art. 9).

Kõverjoonelistel koordinaatidel ei saa üldiselt nii teisendada, et uus koordinaadibaas oleks Riemanni lihtruumi M_n igas punktis x ortonormaalne. Tõepoolest, oletame, et see on võimalik. Siis oleks $g_{i'j'} \equiv 0$, kui $i' \neq j'$ ja $g_{i'i'} \equiv 1$ või -1 . Valemist (73.6) järelduks, et uutes koordinaatides oleks $\Gamma_{i'h'}^{j'} \equiv 0$ ja valemi (75.1) põhjal oleks $R_{i'j',k'l'} \equiv 0$ — Riemanni—Christoffeli tensor oleks samaselt null. Näiteks positiivselt määratud g korral tähendaks see, et M_n on kas E_n või piirkond $D \subset E_n$ (art. 77). Seega ei ole isegi mitteeuclidilise ruumi puhul võimalik kõikjal üle minna ortonormaalsele koordinaadibaasile.

Koordinaadibaasidele üldisemat teisendust (82.16) rakendades on aga võimalik üle minna ortonormaalsele baasile isegi suvalise Riemanni muutkonna M_n igas punktis. Nii võib näiteks koordinaadibaasidele rakendada Grami—Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi (art. 2 ja 76). Sel teel saadakse nn. *ortonormaalne baasiväli*, millele üleminek toob kaasa mitmeid lihtsustusi. Seosest (82.9) järeldub näiteks, et iga baasivälja puhul, milles $g_{i'h'} = \text{const}$, sealhulgas ortonormaalse baasivälja korral, on Christoffeli vormid $\omega_{i'h'}$ kaldsümmeetrilised¹.

Kui tegemist on Riemanni meetrikaga, siis ristbaasivälja puhul $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$, $g^{k'l'} = \delta^{k'l'}$, järelikult (82.7) järgi $\omega_{i'h'} = \omega_{i'}^{h'}$ ning struktuurivõrrandid (82.24) ja (82.21) tulevad kujul

$$d\omega_{j'} = \sum_{i'=1}^n \omega_{i'} \wedge \omega_{i'j'}, \quad (82.25)$$

$$d\omega_{i'j'} = \sum_{h'=1}^n \omega_{i'h'} \wedge \omega_{h'j'} + \Omega_{i'j'}, \quad (82.26)$$

¹ Seos (82.9) jääb nimelt kehtima ka pärast teisendust (82.16), nagu kerge kontrollida (harjutusülesanne 137).

kus $\omega_{i'} = \omega^{i'}$, $\omega_{i'j'} = -\omega_{j'i'}$; siin $\Omega_{i'j'} = \Omega_{i'j'}^j$ on kõverusvormid (82.23).

Näiteks konstantse kõverusega ruumi (erijuhul mitteeukleidilise ruumi) korral, mil (77.2) põhjal

$$R_{i'j',k'l'} = K(\delta_{i'k'}\delta_{j'l'} - \delta_{i'l'}\delta_{j'k'}), \quad K = \text{const}$$

võtab seos (82.23) lihtsa kuju

$$\Omega_{i'j'} = -K\omega_{i'} \wedge \omega_{j'}.$$

Kahemõõtmelise Riemanni muutkonna puhul, mil $n=2$, struktuurivõrrandis (82.25) ja (82.26) $\omega_{1'1'} = \omega_{2'2'} = 0$, $\omega_{2'1'} = -\omega_{1'2'}$ ning need võrrandid tulevad järgmised:

$$\begin{aligned} d\omega_{1'} &= \omega_{2'} \wedge \omega_{2'1'}, \\ d\omega_{2'} &= \omega_{1'} \wedge \omega_{1'2'}, \\ d\omega_{1'2'} &= -R_{1'2', 1'2'}\omega_{1'} \wedge \omega_{2'}. \end{aligned}$$

Sellistena oli nendega tegemist art-s 45 pinna käsitlemisel ruumis E_3 (vrd. (45.2), (45.3), (45.5) ja (45.10)), kus neile lisandusid veel (45.6) ja (45.7). Analoogiliselt saaks ka eukleidilises ruumis E_{n+1} paikneva hüperpinna puhul kasutada liikuvat kanoonilist teljestikku, mis viiks samuti struktuurivõrranditeni (82.25) ja (82.26), kuid kõik see väljuks juba käesoleva raamatu raamidest.

Harjutusiülesanded

129. Tuletada väliskorrutise omadused:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_j \wedge \dots \wedge a_n &= -a_1 \wedge \dots \wedge a_j \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_n, \\ a_1 \wedge \dots \wedge (\lambda a_i) \wedge \dots \wedge a_n &= \lambda(a_1 \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_n), \\ a_1 \wedge \dots \wedge (a_i + b_i) \wedge \dots \wedge a_n &= a_1 \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_n + \\ &+ a_1 \wedge \dots \wedge b_i \wedge \dots \wedge a_n, \end{aligned}$$

kasutades valemit (78.12) ja determinandi vastavaid omadusi ([1], lk. 22–25).

130. Näidata, et Grassmanni algebras (üle reaalarvukorpuse $\mathbf{R}$) kehtib järgmine Cartani lemma: kui lineaarvormid $a_1, \dots, a_p$ on lineaarselt sõltumatud ja mingite lineaarvormide $b_1, \dots, b_p$ puhul

$$a_1 \wedge b_1 + \dots + a_p \wedge b_p = 0,$$

siis

$$b_i = \sum_{j=1}^p c_{ij}a_j,$$

kus $c_{ij} = c_{ji} \in \mathbf{R}$.

131. Teha kindlaks, et teise astme välisvorm $a_{ij}f^i \wedge f^j$, kus $a_{ij} = -a_{ji}$, on kahe lineaarvormi väliskorrutis siis ja ainult siis, kui

$$a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{lj} + a_{il}a_{jk} = 0$$

(Plückeri¹ tingimus; indeksid j, k, l tsükleeruvad).

132. Arvutada järgmiste diferentsiaalvormide välisdiferentsiaalid: a) $\omega = (u^3)^2 du^1 \wedge du^2 + [(u^3)^2 + 2u^2] du^1 \wedge du^3$, b) $\omega = 13u^1 du^1 + (u^2)^2 du^2 + u^1 u^2 u^3 du^3$,

c) $\omega = (x + 2y^3)(dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dx)$, d) $\omega = (x^2 + y^2)^{-1}(y dx - x dy)$.

¹ Julius Plücker (1801–1868), saksa matemaatik.

133. Näidata, et kui $\omega = \frac{1}{3}(x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy)$, siis $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$, s. t. $d\omega$ on ruumalaelement ruumis E_3 . Määrata Stokesi valemi abil kera ruumala V , leides selleks integraali 2-vormist ω üle sfääri $S_2(r) \subset E_3$.

134. Näidata, et kui $\omega = \frac{1}{4}(x_1 dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_4 + x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$, siis $d\omega = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, s. t. $d\omega$ on ruumalaelement ruumis E_4 . Määrata Stokesi valemi abil hüpersfääri $S_3(r)$ sisemuse (kera) ruumala V ruumis E_4 , leides selleks valemite (60.1) ja (60.2) abil integraali 3-vormist ω üle hüpersfääri $S_3(r)$.

135. Olgu ruumis E_3 määratud sfäärkoordinaadid $u^1 = R$, $u^2 = \theta$, $u^3 = \varphi$ (vt. allviide lk. 204; [6], lk. 287). Avaldada skalaarvälja $F(u^1, u^2, u^3)$ gradient (koordinaatjoonte sihivektorite $e_i = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} x_i$; $i=1, 2, 3$ kaudu) ning vektorvälja $a = a^i e_i$ divergents ja rootor.

136. Kuidas avaldub Laplace'i operaator ruumis E_3 sfäärkoordinaatides?

137. Kontrollida, et seos (82.9) jääb kehtima pärast teisendust (82.16), s. t. et $dg_{i'j'} = \omega_{i'j'} + \omega_{j'i'}$, kus $\omega_{i'j'} = g_{j'k'} \omega_{i'}^{k'}$.

§ 19. DIFERENTSEERUVAD MUUTKONNAD JA GLOBAALANALÜÜS

Eespool on korduvalt vihjatud sellele, et lihtmuutkonna mõiste ei ole küllaldane kõige vajaliku kirjeldamiseks. Juba ruumi E_3 pindade juures selgus, et lihtpind — ruumis E_3 teataval viisil paiknev kahe-mõõtmeline lihtmuutkond — on mõiste, mis ei haara mitmeid ter-vikpindu, näiteks kringli tüüpi pindu (art. 31). Seetõttu oli vajalik sisse tuua sileda kinnise pinna mõiste (art. 51). Järgnevalt näi-tame, kuidas tuleb analoogiliselt üldistada lihtmuutkonna mõistet. Ühtlasi saab täpsemalt käsitleda kinnist pinda ning laiendada seda käsitlust ka hüperpinna juhule (vrd. art. 72); samuti on võimalik kõnelda üldisest Riemanni muutkonnast. Matemaatiline analüüs, mis klassikalises käsitluses (vt. [2], [3]) opereerib piirkondades $A \subset \mathbb{R}^n$ antud funktsioonidega, laseb end üldistada diferentseeru-vatel muutkondadel antud funktsioonide globaalanalüüsiks. Viimase osas tuleb siinkohal piirduda küll vaid esmatutvusega.

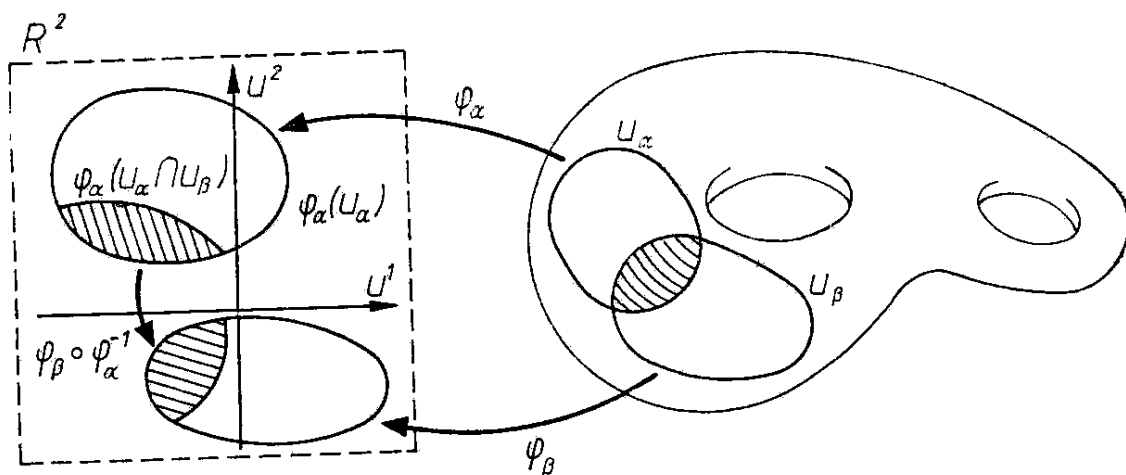
83. Diferentseeruva muutkonna mõiste. Hulga M katteks nime-tatakse iga niisugust süsteemi selle hulga osahulkadest, mille ühen-diks on kogu hulk M . Seega osahulgad $U_\alpha \subset M$ moodustavad hulga M katte, kui

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M.$$

Hulka M nimetatakse n -mõõtmeliseks *diferentseeruvaks muutkon-naks* M_n , kui

1° tal on olemas kate, mis koosneb n -mõõtmelistest lahtistest lihtmuutkondadest $U_\alpha = M_n^{(\alpha)}$ (art. 73),

2° viimaseid määravad bijektsioonid $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ on vali-tavad niimoodi, et iga mittetühja ühisosa $U_\alpha \cap U_\beta$ puhul bijektsioon



Joonis 86

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

($\mathbb{R}^n$ teatava lahtise piirkonna kujutus teiseks selliseks; joon. 86) on määratud diferentseeruvate funktsioonidega

$$u^{i'} = u^{i'}(u^1, \dots, u^n); \quad i' = 1, \dots, n, \quad (83.1)$$

s.t. sellistega, millel on olemas selles piirkonnas pidevad osatuletised

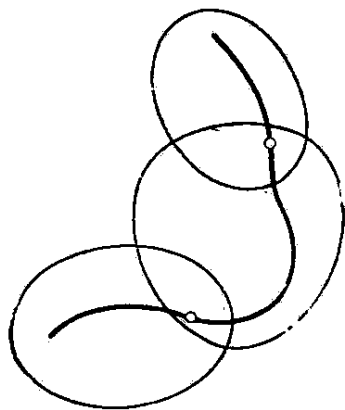
$$u^{i'}_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}, \quad u^{i'}_{ij} = \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^i \partial u^j}, \dots, u^{i'}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial^k u^{i'}}{\partial u^{i_1} \dots \partial u^{i_k}}, \dots$$

Alamhulka U_α koos bijektsiooniga $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$ nimetatakse siin diferentseeruva muutkonna M_n kaardiks ja tähistatakse $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$; kui $\varphi_\alpha(x) = (u^1, \dots, u^n)$, siis reaalarve $u^1, \dots, u^n$ nimetatakse punkti $x \in U_\alpha \subset M_n$ koordinaatideks selles kaardis. Kõigi kaartide kogumit $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ nimetatakse diferentseeruva muutkonna M_n atlaseks.

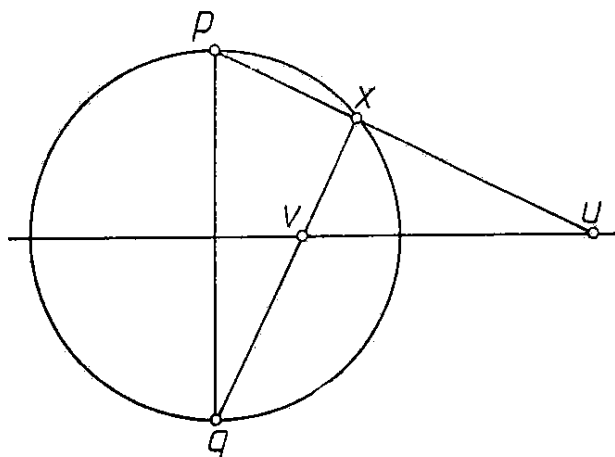
Kaht n -mõõtmelist diferentseeruvat muutkonda nimetatakse ekvivalentseteks, kui hulk M on neil sama ja nende atlase ühend (s.t. mõlema atlase kaardid üheskoos) moodustab samuti atlase, s.t. ka tema puhul on rahuldatud nõue 2°. Ekvivalentseid diferentseeruvaid muutkondi ei eristata; nende puhul kõneldakse, et antud diferentseeruv muutkonnal M_n on tehtud üleminek ühelt atlaselt teisele.

Diferentseeruv muutkond on, näitlikult kõneldes, kokku kleebitud lahtistest lihtmuutkondadest, kusjuures kleebitakse n.-õ. diferentseeruvalt — kooskõlas nõudega 2°. Valemid (83.1) määravad lihtmuutkonna $U_\alpha \cap U_\beta$ ulatuses ülemineku kaardi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinaatidelt kaardi (U_β, φ_β) koordinaatidele, mistõttu nende puhul kehtib kõik art-i 73 alguses öeldu. Kohe saab ka selgeks, mida mõista (p, q) -tensorväljana T diferentseeruv muutkonnal M_n : see on niisugune (p, q) -tensorväljade T_α kogum vastavalt lihtmuutkondadel U_α , nii et $T_\alpha = T_\beta$ igal lihtmuutkonnal $U_\alpha \cap U_\beta$.

Diferentseeruvat n -mõõtmelist muutkonda M_n , millel on antud sümmeetriline $(0, 2)$ -tensorväli g , nii et $\det |g_{ij}| \neq 0$ (igal kaardil



Joonis 87



Joonis 88

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ igas punktis $x \in U_\alpha$), nimetatakse n -mõõtmeliseks Riemanni muutkonnaks ehk Riemanni ruumiks. Jooneks temas nimetatakse teatavates lihtmuutkondades U_α antud joonte ühendit juhul, kui iga kahe mittetühja ühisosaga U_α ja U_β puhul $U_\alpha \cap U_\beta$ ulatuses need jooned ühtivad. Sellise joone saab jagada üksikutes Riemanni lihtmuutkondades U_α olevateks ja üksnes ühiseid otspunkte omavateks joonteks (joon. 87). Kogu joone pikkus defineeritakse nüüd kui nende osade pikkuste summa, kusjuures igaühe pikkus arvutatakse valemi (73.3) järgi.

Kui joone igas punktis on antud vektor z , s.t. teatav $(1,0)$ -tensor, nii et joonel tekib vektorväli ehk $(1,0)$ -tensorväli, siis öeldakse, et vektori rööpülekandega piki joont on tegemist juhul, kui toimub rööpülekanne piki selle joone iga kõnesolnud osa tingimuse (73.7) kohaselt.

Niiviisi saab Riemanni muutkonna juhule üldistada olulised mõisted, mis on eespool defineeritud Riemanni lihtmuutkonna jaoks.

Diferentseeruvat n -mõõtmelist muutkonda M_n nimetatakse *orienteeritavaks*, kui temal saab üle minna sellisele atlasele, et kõikide mittetühjade $U_\alpha \cap U_\beta$ puhul rahuldavad koordinaaditeisendusvalemid (83.1) tingimust $\det |u_i^j| > 0$ (vrd. art. 10). Kui diferentseeruva muutkonna M_n mingis atlases leidub teineteisega osaliselt kattuvate piirkondade tsükliline ahel $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_s}, U_{\alpha_{s+1}} = U_{\alpha_1}$ nii et iga $U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_{i+1}}$ ulatuses, $i = 1, \dots, s-1$, kehtib võrratus $\det |u_i^j| > 0$, kuid $U_{\alpha_s} \cap U_{\alpha_1} \neq \emptyset$ ulatuses on see võrratus rikutud, siis seda diferentseeruvat muutkonda M_n nimetatakse *mitteorienteeritavaks*. Allpool toome näiteid nii orienteeritavatest kui ka mitteorienteeritavatest diferentseeruvatest muutkondadest, ühtlasi ka vastavatest Riemanni ruumidest.

Iga lahtine lihtmuutkond on orienteeritav diferentseeruv muutkond, sest tema puhul saab üle minna ühestainsast kaardist koosnevale atlasele.

Kahekaardilise atlasega n -mõõtmelise diferentseeruva muutkonna näiteks on hüpersfäär $S(o, r)$ ruumis E_{n+1} (art. 7). Tõepoolest, võttes sellel poolused p ja q vastavalt kohavektoritega ri_{n+1} ja $-ri_{n+1}$, saame moodustada kaardid (U, φ) ja

(V, ψ) , kus $\varphi: U=S \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja $\psi: V=S \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ määratakse valemeid (59.2) üldistavate valemitega vastavalt

$$x_i = \frac{2r^2 u^i}{u^2 + r^2}; \quad i=1, \dots, n; \quad x_{n+1} = r \frac{u^2 - r^2}{u^2 + r^2}$$

ja

$$x_i = \frac{2r^2 v^i}{v^2 + r^2}; \quad i=1, \dots, n; \quad x_{n+1} = -r \frac{v^2 - r^2}{v^2 + r^2}.$$

Punkti $x \in S(o, r)$ esimeste koordinaatide $x_1, \dots, x_n$ avaldiste võrdlemisest selgub, et peab leiduma λ nii, et $v^i = \lambda u^i$ ehk $v = \lambda u$ (joon. 88). Võrdsustades ka viimase koordinaadi x_{n+1} avaldised ning tehes asenduse, saame λ^2 jaoks lihtsa võrrandi, millest $\lambda = \pm \frac{r^2}{u^2}$, kusjuures esimeste koordinaatide juures selgub, et võtta tuleb ülemine märk $+$. Seega

$$v^i = \frac{r^2 u^i}{(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2}.$$

Siin v^i on seostes (83.1) olevate suuruste $u^{i'}$ osas; tegemist on lõpmatult diferentseeruvate funktsioonidega. Seejuures U ja V koos ilmset katavad kogu sfääri $S(o, r)$. Järelikult $S(o, r) \subset E_{n+1}$ on n -mõõtmeline diferentseeruv muutkond.

$$\text{Siin } \frac{\partial v^i}{\partial u^j} = r^2 \left(\frac{\delta^{ij}}{u^2} - \frac{2u^i u^j}{(u^2)^2} \right) = \frac{r^2}{u^2} \left(\delta^{ij} - 2 \frac{u^i}{|u|} \frac{u^j}{|u|} \right).$$

Kui teha vastavad arvutused, siis leiaksime, et $\det \left| \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \right| = - \left(\frac{r^2}{u^2} \right)^n < 0$. Jääb vaid kaardi (V, ψ) puhul minna koordinaatidelt $v^1, \dots, v^n$ üle koordinaatidele $u^{1'} = v^2, u^{2'} = v^1, u^{3'} = v_3, \dots, u^{n'} = v^n$, s.t. vahetada esimese kahe koordinaadi numbrid, et saada $\det |u^{i'}| > 0$. Seega $S(o, r)$ on orienteeritav diferentseeruv muutkond.

Kummalgi lihthüperpinnal U ja V , millest ta praegu koosneb, on esimese ruutvormiga määratud Riemanni meetrika (art. 72), kusjuures $U \cap V$ ulatuses need meetrikad ühtivad. Nii selgub, et $S(o, r)$ on Riemanni muutkond.

Kolmanda, üldisema näitena vaatleme ruumis E_{n+1} antud diferentseeruva funktsiooni $F: E_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ tasemepinda $M = \{x: F(x) = C\}$ (vrd. art. 33) ja näitame, et kui

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n+1}} \right) \neq 0$$

tasemepinnal M , siis see M osutub orienteeritavaks n -mõõtmeliseks diferentseeruvaks muutkonnaks ning ühtlasi Riemanni muutkonnaks.

Tõepoolest, et $\nabla F \neq 0$ vabalt võetud punktis $a \in M$, siis mingi $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ on selles punktis nullist erinev. Täpselt samuti nagu art-s 33 järeldub siit, et a ümber on teatav $(n+1)$ -risttahukas, mille ulatuses M on võrrandi $F(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = C$ lahendamisel saadava funktsiooni $x_i = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$ graafik. Võttes U_α ossa selle risttahuka ja M ühisosa ning defineerides $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ nii, et $x_1 = u^1, \dots, x_{i-1} = u^{i-1}, x_{i+1} = u^i, \dots, x_{n+1} = u^n$, saame kaardi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ selliselt, et $a \in U_\alpha$. Et a on tasemepinna M suvaline punkt, siis saab selliste kaartidega katta kogu hulga M .

Kahe erineva seda laadi kaardi puhul, kui üks neist (U_β, φ_β) on selline, et U_β on funktsiooni $x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$ graafik, kus $i < j$, saame

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$		$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$	
$u^{1'} = u^1$	$(=x_1)$	$u^1 = u^{1'}$	$(=x_1)$
$u^{(i-1)'} = u^{i-1}$	$(=x_{i-1})$	$u^{i-1} = u^{(i-1)'}$	$(=x_{i-1})$
$u^{i'} = f(u^1, \dots, u^n)$	$(=x_i)$	$u^i = u^{(i+1)'}$	$(=x_{i+1})$
$u^{(i+1)'} = u^i$	$(=x_{i+1})$		
$u^{(j-1)'} = u^{j-2}$	$(=x_{j-1})$	$u^{j-2} = u^{(j-1)'}$	$(=x_{j-1})$
$u^{j'} = u^j$	$(=x_{j+1})$	$u^{j-1} = g(u^{1'}, \dots, u^{n'})$	$(=x_j)$
		$u^j = u^{j'}$	$(=x_{j+1})$
$u^{n'} = u^n$	$(=x_{n+1})$	$u^n = u^{n'}$	$(=x_{n+1})$

Kummaski tulbas näidatud teisendused on teineteise pöördteisendused ning määratud diferentseeruvate funktsioonidega. Järelikult tasemepind M on n -mõõtmeline diferentseeruv muutkond, mis samuti nagu hüpersfäär $S(o, r)$ on Riemanni ruum.

Tasemepinna M orienteeritavuse näitamisel piirdume juhuga, mil $n=2$; üldjuhu käsitus on analoogiline. Igallihtpinnal U_α on määratud normaalühikvektori

$m = \frac{1}{\sqrt{g}} (x_1 \times x_2)$ väli (vt. (36.6)). Üleminekul ühelt kaardilt $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ teisele kaardile (U_β, φ_β) , mil (83.1) järgi

$$x(u^1, u^2) = x(u^{1'}(u^1, u^2), u^{2'}(u^1, u^2)),$$

tekivad seosed

$$x_1 = x_{1'} u^{1'} + x_{2'} u^{2'},$$

$$x_2 = x_{1'} u^{1'} + x_{2'} u^{2'}$$

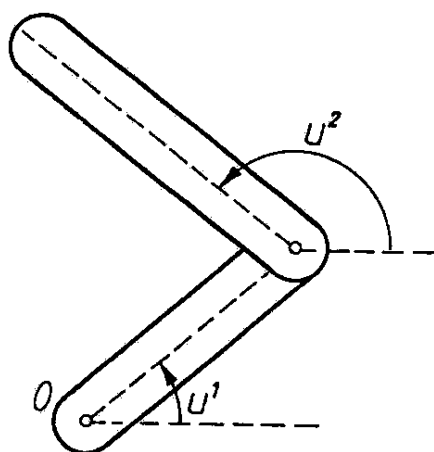
ja siit

$$\begin{aligned} x_1 \times x_2 &= (x_{1'} u^{1'} + x_{2'} u^{2'}) \times (x_{1'} u^{1'} + x_{2'} u^{2'}) = \\ &= (x_{1'} \times x_{2'}) (u^{1'} u^{2'} - u^{2'} u^{1'}) = (x_{1'} \times x_{2'}) \det |u^{i'}|. \end{aligned}$$

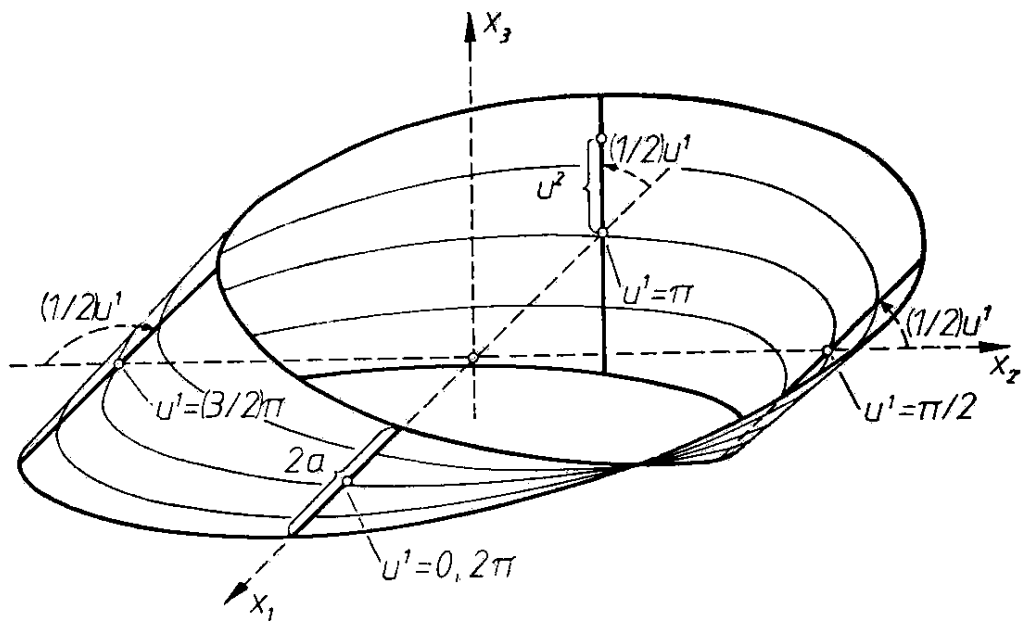
Järelikult normaalühikvektori väljad ühtivad (s. t. $x_1 \times x_2$ ja $x_{1'} \times x_{2'}$ on samasuunalised) mittetühja $U_\alpha \cap U_\beta$ ulatuses siis ja ainult siis, kui $\det |u^{i'}| > 0$. Niisiis,

pind ruumis E_3 on orienteeritav parajasti siis, kui tal on olemas pidev normaalühikvektori väli. Tasemepinnal M on selline väli $\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F$ näol olemas (art. 33), seega tasemepind on orienteeritav.

Tasemepinna M konkreetse näitena meenutame sfääri kõrval toori (ehk rõngaspinda; art. 33), mis on niisiis orienteeritav kahemõõtmeline diferentseeruv muutkond. Toori kui muutkonnaga on tegemist ka hoopis teistsugustes olukorras. Vaatleme näiteks tasandilist kaksikliigendit (joon. 89, kus o on fikseeritud



Joonis 89



Joonis 90

punkt), mille lülide asendid määratakse kahe lõigus $[0, 2\pi]$ muutuva reaalarvulise parameetri — nurkade u^1 ja u^2 abil. Sellise kaksikliigendi asendite hulgas on kergesti arusaadaval viisil määratav kahemõõtmelise diferentseeruva muutkonna struktuur, kusjuures saadav muutkond on samaväärne tooriga.

Mitteorienteeritava diferentseeruva muutkonna lihtne näide on Möbiuse¹ leht. Nii nimetatakse, näitlikult kõneldes, paberist lõigatud riba, mille otsad on pärast riba 180° -list väänet kokku kleebitud. Täpsemalt võib Möbiuse lehe anda võrrandiga

$$x = \left(r \cos u^1 + u^2 \cos \frac{1}{2} u^1 \cos u^1, r \sin u^1 + u^2 \cos \frac{1}{2} u^1 \sin u^1, u^2 \sin \frac{1}{2} u^1 \right),$$

$$0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad -a < u^2 < a < r;$$

siin vahemik pikkusega $2a$ liigub ruumis E_3 niimoodi, et tema keskpunkt pöörleb x_1x_2 -tasandil mööda ringjoont raadiusega $r > a$ ning vahemik ise pöörleb samaaegselt raadiuse ja x_3 -telje tasandil kaks korda aeglasemalt (joon. 90).

Atlase saab teha kahest kaardist U ja V , millest esimese määrab ülaltoodud võrrand, kui $0 < u^1 < 2\pi$, $-a < u^2 < a$, teise aga sama võrrand pärast asendamist

$$u^1 = u^1 + \pi, \quad u^2 = u^2,$$

kui $0 < u^1 < 2\pi$, $-a < u^2 < a$. Uhisosa $U \cap V$ koosneb kahest tükist, milles kaardiid on seotud järgmiste üleminekutega:

$$u^1 = u^1 + \pi, \quad u^2 = u^2, \quad \text{kui } 0 < u^1 < \pi, \quad -a < u^2 < a, \quad (83.2)$$

$$u^1 = u^1 - \pi, \quad u^2 = -u^2, \quad \text{kui } \pi < u^1 < 2\pi, \quad -a < u^2 < a. \quad (83.3)$$

Et see üleminek on määratud lihtsate diferentseeruvate funktsioonidega, siis Möbiuse leht on kahemõõtmeline diferentseeruv muutkond, ühtlasi muidugi pind ruumis E_3 . Lahtiste lihtpindade U ja V esimesed ruutvormid määravad temal Riemanni meetrika, muutes ta Riemanni ruumiks.

Möbiuse leht on mitteorienteeritav, sest vaadeldud kaks kaarti moodustavad ahela, milles $U \cap V$ teise tüki ulatuses on nõue $\det |u^{i'}| > 0$ rikutud, sest (83.3) puhul $\det |u^{i'}| = -1 < 0$. Samuti on selge, et pidevat normaalühikvektori välja

Möbiuse lehel ei leidu: pärast täispöört vahemiku keskpunktide ringjoonel normaalühikvektor pöörduv tagasi mitte iseendaks, vaid algväärtuse vastandvektoriks.

¹ August Ferdinand Möbius (1790—1868), saksa matemaatik.

Seda väljendatakse ütlusega: Möbiuse leht on ühe poolega pind vastandina tasemepindadele, mis on kahe poolega pinnad — neil igal juhul saab näidata F kasvamise poole ja F kahanemise poole.

Teise mitteorienteeritava diferentseeruva muutkonna näitena vaatleme elliptilist tasandit $S_2^*(r)$ (art. 55). See kujutab endast sfääri $S_2(r) \subset E_3$ diametraalsete punktide paaride hulka. Määrame siin kaardi (U_1, φ_1) järgmiselt. Jätame kõnesolevate punktipaaride hulgast välja need, mis asetsevad x_2x_3 -tasandil, ja tähistame ülejäänud hulga U_1 . Viimase iga punktipaar asetseb sfääri $S_2(r)$ keskpunkti o läbival sirgel, mis lõikab sellele sfäärile punktis $(r, 0, 0)$ võetud puutujatasandit mingis punktis (r, u^1, u^2) (joon. 91). Bijektsiooni $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ leiame nüüd selliselt, et vaadeldav punktipaar kujutuks punktiks $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Kui paar koosneb ruumi E_3 punktidest (x_1, x_2, x_3) ja $(-x_1, -x_2, -x_3)$, siis arusaadavalt

$$\frac{r}{x_1} = \frac{u^1}{x_2} = \frac{u^2}{x_3};$$

seega

$$u^1 = r \frac{x_2}{x_1}, \quad u^2 = r \frac{x_3}{x_1}, \quad x_1 \neq 0.$$

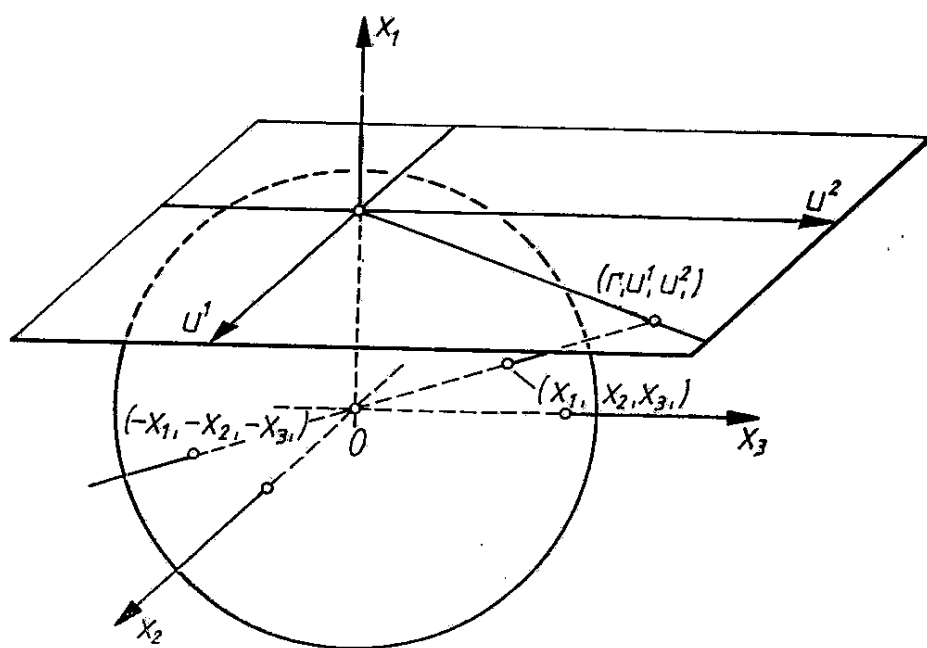
Analoogiliselt on võimalik näidata:

kaart (U_2, φ_2) , nii et $u^{1'} = r \frac{x_1}{x_2}$, $u^{2'} = r \frac{x_3}{x_2}$, $x_2 \neq 0$,

kaart (U_3, φ_3) , nii et $u^{1''} = r \frac{x_1}{x_3}$, $u^{2''} = r \frac{x_2}{x_3}$, $x_3 \neq 0$.

Üleminekud määratakse siin valemitega

$$\begin{aligned} u^{1'} &= \frac{r^2}{u^1}, & u^{2'} &= r \frac{u^2}{u^1}; & \det |u^{i'}| &= -\frac{r^3}{(u^1)^3}, \\ u^{1''} &= r \frac{u^{1'}}{u^{2'}}, & u^{2''} &= \frac{r^2}{u^{2'}}; & \det |u^{i''}| &= -\frac{r^3}{(u^{2'})^3}, \\ u^1 &= r \frac{u^{2''}}{u^{1''}}, & u^2 &= \frac{r^2}{u^{1''}}; & \det |u^i| &= \frac{r^3}{(u^{1''})^3}. \end{aligned}$$



Joonis 91

Selleks et viimase veeru determinandid säilitaksid märgi u^1 , $u^{2'}$ või $u^{1''}$ muutumisel, tuleb kaarte peenendada, jagades

$$U_1 \text{ osadeks } U_1^+, \text{ kus } u^1 > 0, \text{ ja } U_1^-, \text{ kus } u^1 < 0,$$

$$U_2 \text{ osadeks } U_2^+, \text{ kus } u^{2'} > 0, \text{ ja } U_2^-, \text{ kus } u^{2'} < 0,$$

$$U_3 \text{ osadeks } U_3^+, \text{ kus } u^{1''} > 0, \text{ ja } U_3^-, \text{ kus } u^{1''} < 0.$$

Nummerdades sfääri $S_2(r)$ oktandid vastavalt tabelile

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x_1	+	—	—	+	+	—	—	+
x_2	+	+	—	—	+	+	—	—
x_3	+	+	+	+	—	—	—	—

leiame, et

paarid (I, VII) ja (IV, VI) moodustavad U_3^+ , kus $\det |u_{i''}^i| > 0$,

paarid (IV, VI) ja (III, V) moodustavad U_2^- , kus $\det |u_{i'}^{i''}| > 0$,

paarid (III, V) ja (I, VII) moodustavad U_1^+ , kus $\det |u_i^{i'}| < 0$.

Saab koostada tsüklilise ahela U_3^+ , U_2^- , U_1^+ selliselt, et $U_3^+ \cap U_2^-$ ja $U_2^- \cap U_1^+$ ulatuses vastavalt $\det |u_{i''}^i| > 0$ ja $\det |u_{i'}^{i''}| > 0$, kuid $U_1^+ \cap U_3^+$ ulatuses, vastupidi, $\det |u_i^{i'}| < 0$. Järelikult *elliptiline tasand* $S_2^*(r)$ on *mitteorienteeritav*. Märkime, et sfääri $S_2(r)$ esimene ruutvorm määrab temal Riemanni meetrika, muutes ta kahemõõtmeliseks mitteorienteeritavaks Riemanni muutkonnaks.

Elliptilist ruumi $S_3^*(r)$ kui hüpersfääri $S_3(r) \subset E_4$ diametraalsete punktide paaride hulka saab käsitleda samamoodi. Erinevus on selles, et lisanduvad $u^3 =$

$$= r \frac{x_4}{x_1}, u^{3'} = r \frac{x_4}{x_2}, u^{3''} = r \frac{x_4}{x_3} \text{ ja uus kaart } (U_4, \Phi_4) \text{ nii, et}$$

$$u^{1'''} = r \frac{x_1}{x_4}, u^{2'''} = r \frac{x_2}{x_4}, u^{3'''} = r \frac{x_3}{x_4}.$$

Üleminekul tuleb

$$\det |u_i^{i'}| = -\frac{r^4}{(u^1)^4} < 0, \quad \det |u_{i'}^{i''}| = -\frac{r^4}{(u^{2'})^4} < 0,$$

$$\det |u_{i''}^{i'''}| = -\frac{r^4}{(u^{3''})^4} < 0, \quad \det |u_{i'''}^i| = -\frac{r^4}{(u^{1'''})^4} < 0.$$

Jääb vaid vahetada näiteks $u^{1'}$ ja $u^{2'}$ osad ning $u^{1''}$ ja $u^{2''}$ osad, et kõik üleminekudeterminandid muutuksid positiivseteks. Tekib selline neljakaardiline atlas, millest nähtub, et *elliptiline ruum* $S_3^*(r)$ on *orienteeritav diferentseeruv muutkond*.

Üldiselt elliptiline ruum $S_{n-1}^*(r)$ on diferentseeruv muutkond, seejuures orienteeritav, kui $n-1$ on paaritu arv, ja mitteorienteeritav, kui $n-1$ on paarisarv. Selle väite üldine tõestus väljub käesoleva kursuse raamidest.

84. Globaalanalüüs. Klassikaline matemaatiline analüüs käsitleb ruumi $\mathbf{R}^n$ piirkondades antud funktsioone, nende diferentseerimist, integreerimist jms. Teda saab nüüd laiendada terviklikel diferentseeruvatel muutkondadel määratud funktsioonide analüüsiks — nn. globaalanalüüsiks. Vajadus selle järgi on ilmne. On ju näiteks Maa pinnal (ligikaudu sfääril) antud skalaarväli (temperatuuri-, rõhu- jms. väli) sfääril antud funktsioon. Teine sama tüüpi funktsioon on näiteks suunast sõltuv kiirguse intensiivsus maapinna kohal olevas punktis. Kaksikliigendi asendiga seostuv reaalarvuline suurus (näiteks potentsiaalne energia) kujutab endast tooril antud funktsiooni jne.

Et diferentseeruv muutkond on «kokku kleebitud» lihtmuutkondadest, iga viimane on aga bijektsioonis ruumi $\mathbf{R}^n$ mingi piirkonnaga, siis saab globaalanalüüs muidugi ära kasutada kõik klassikalise analüüsi tulemused. Lisanduvad uued, nn. globaalefektid. Mõnevõrra täiustub ka sümboolika ja terminoloogia.

Olgu antud n -mõõtmeline diferentseeruv muutkond M_n . Funktsiooniks sellel nimetatakse kujutust $f: M_n \rightarrow \mathbf{R}$. Kaardi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ bijektsiooni φ_α abil saab moodustada kujutuse $f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbf{R}$, kus $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ on ruumi $\mathbf{R}^n$ teatav piirkond (joon. 86). See viimane kujutus on seega klassikaline n muutuja funktsioon; teda tähistatakse $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ja nimetatakse funktsiooni f kaardiesituseks.

Funktsiooni f nimetatakse diferentseeruvaks, kui tema igal kaardiesitustel f_α on olemas piirkonnas $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ kuitahes kõrget järku osatuletised kõigi argumentide järgi. Kerge on kindlaks teha, et funktsiooni f diferentseeruvus ei sõltu atlase valikust ekvivalentsete atlase hulgas.

Iga kaardi $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ korral on osahulk U_α samuti diferentseeruv muutkond, seejuures lihtmuutkond. Tema puhul on eriline osa nn. koordinaatfunktsioonidel. Selliselt nimetatakse funktsiooni $x^i: U_\alpha \rightarrow \mathbf{R}$, mis igale punktile $x \in U_\alpha$ seab vastavusse punkti $\varphi_\alpha(x) = (u^1, \dots, u^i, \dots, u^n) \in \mathbf{R}^n$ i -nda koordinaadi, s.t. $x^i(x) = u^i \in \mathbf{R}$. Siin $x^i_\alpha(u^1, \dots, u^i, \dots, u^n) = u^i$; seega koordinaatfunktsioon x^i on diferentseeruv funktsioon lihtmuutkonnal U_α .

Kui $f: M_n \rightarrow \mathbf{R}$ korral $f(M_n) = \{c\}$, kus c on konstantne reaalarv, siis kõneldakse konstantsest funktsioonist c . Sel juhul ka $f_\alpha = c$; järelikult konstantne funktsioon on diferentseeruv. Diferentseeruv muutkonnal M_n antud diferentseeruvate funktsioonide hulka tähistatakse $\mathcal{F}(M_n)$. See hulk on kinnine funktsioonide liitmise ja korutamise suhtes, sest kui $f \in \mathcal{F}(M_n)$ ja $g \in \mathcal{F}(M_n)$, siis ka $f+g \in \mathcal{F}(M_n)$ ja $fg \in \mathcal{F}(M_n)$, kuna diferentseeruvate f_α ja g_α korral ka $(f+g)_\alpha = f_\alpha + g_\alpha$ ja $(fg)_\alpha = f_\alpha g_\alpha$ on teatavasti diferentseeruvad. Tekib diferentseeruvate funktsioonide ring $\mathcal{F}(M_n)$ (vt. [1], § 13).

Funktsiooni $f \in \mathcal{F}(M_n)$ diferentseerimine, nagu järgnevast selgub, on tihedalt seotud vektorväljaga diferentseeruv muutkonnal M_n . Igas kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ saab nimelt indeksi i iga väärtuse korral

arvutada osatuletise $\frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$; $i=1, \dots, n$, seega määrata operaatori $\frac{\partial}{\partial u^i}$, mis viib funktsiooni f funktsiooniks $\frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}$. Seejuures üleminekul mõnele teisele kaardile (U_β, φ_β) on mittetühja $U_\alpha \cap U_\beta$ ulatuses

$f_\beta(u^{1'}, \dots, u^{n'}) = f_\alpha(u^1(u^{1'}, \dots, u^{n'}), \dots, u^n(u^{1'}, \dots, u^{n'}))$.
Järelikult

$$\frac{\partial}{\partial u^{i'}} f = \frac{\partial f_\beta}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i} u_{i'}^i = u_{i'}^i \frac{\partial}{\partial u^i} f$$

ja siit

$$\frac{\partial}{\partial u^{i'}} = u_{i'}^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

Sellisel teisenevad osatuletisoperaatorid üleminekul ühelt kaardilt teisele. Nad ei ole invariantseid. Invariantse operaatori saamiseks vaatleme mingit vektorvälja koordinaatidega z^i kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ja koordinaatidega $z^{i'}$ kaardis (U_β, φ_β) . Sel korral

$$z^{i'} = z^i u_{i'}^i$$

ja järelikult

$$z^{i'} \frac{\partial}{\partial u^{i'}} = (z^i u_{i'}^i) \left(u_{i'}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right) = z^i (u_{i'}^i u_{i'}^k) \frac{\partial}{\partial u^k} = z^i \delta_i^k \frac{\partial}{\partial u^k} = z^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

kujutab endast kaardist sõltumatut diferentseerimisoperaatorit. See operaator tähistatakse Z ja samastatakse vektorväljaga. Ta viib funktsiooni $f \in \mathcal{F}(M_n)$ funktsiooniks Zf selliselt, et

$$(Zf)_\alpha = z^i \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i}. \quad (84.1)$$

Siin kõik $(Zf)_\alpha$ on antud vektorvälja Z (s.t. antud funktsioonide $z_i \in \mathcal{F}(U_\alpha)$) korral diferentseeruvad funktsioonid piirkonnas $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, seega Zf on diferentseeruv funktsioon muutkonnal M_n . Nii selgub, et Z on kujutus $Z: \mathcal{F}(M_n) \rightarrow \mathcal{F}(M_n)$, seejuures järgmiste omadustega:

$$Z(f+g) = Zf + Zg, \quad (84.2)$$

$$Z(fg) = (Zf)g + f(Zg), \quad (84.3)$$

mis on kergesti kontrollitavad valemid (84.1) kasutades.

Globaalanalüüsis defineeritaksegi vektorväli Z diferentseerual muutkonnal M_n kui operaator $Z: \mathcal{F}(M_n) \rightarrow \mathcal{F}(M_n)$, mis rahuldab tingimusi (84.2) ja (84.3).

Kõigi vektorväljade hulk diferentseerual muutkonnal M_n tähistatakse $\mathcal{Z}(M_n)$. Temas defineeritakse liitmine ja funktsiooniga $\lambda \in \mathcal{F}(M_n)$ korrutamine valemitega

$$(Z+W)f = Zf + Wf,$$

$$(\lambda Z)f = \lambda Zf.$$

Nende tehetege on vektorväljade hulgal $\mathfrak{Z}(M_n)$ määratud teatav struktuur, mis üldistab vektorruumi struktuuri¹.

Kahe vektorvälja Z ja W järjest rakendamise tulemus WZ ei ole enam vektorväli: omadus (84.2) kehtib küll ka sel puhul, kuid (84.3) on rikutud, sest

$$\begin{aligned}(WZ)(fg) &= W(Z(fg)) = W((Zf)g) + W(f(Zg)) = \\ &= (W(Zf))g + (Zf)(Wg) + (Wf)(Zg) + f(W(Zg)),\end{aligned}$$

paremal kaks keskmist liidetavat on «ülearused». Küll aga nähtub siit, et kui võtta ka $Z(W(fg))$, mille puhul need liidetavad tulevad samasugused (ainult teises järjekorras), ja moodustada operaator $ZW - WZ = [Z, W]$, siis

$$\begin{aligned}[Z, W](fg) &= (ZW - WZ)(fg) = (Z(Wf) - W(Zf))g + \\ &+ f(Z(Wg) - W(Zg)) = ([Z, W]f)g + f([Z, W]g).\end{aligned}$$

Seega operaatoril $[Z, W]$ on omadus (84.3). Vahetult on näha, et tal on ka omadus (84.2), mistõttu ta on vektorväli, s.t. $[Z, W] \in \mathfrak{Z}(M_n)$. Teda nimetatakse vektorväljade Z ja W kommutaatoriks.

Vektorvälja $[Z, W]$ võib siin käsitleda Z ja W omalaadse korruptisena (nn. *Lie² korruptisena*). Sel teel saab hulgas $\mathfrak{Z}(M_n)$ määrata teatava algebra struktuuri. Definitsioonist

$$[Z, W] = ZW - WZ \quad (84.4)$$

järelduvad vahetult Lie korruptamise järgmised omadused:

$$[W, Z] = -[Z, W], \quad (84.5)$$

$$[Y, [Z, W]] + [Z, [W, Y]] + [W, [Y, Z]] = 0. \quad (84.6)$$

Viimast omadust nimetatakse *Jacobi³ samasuseks*; paneme tähele, et kaks viimast liidetavat vasakul on saadud esimesest Y, Z, W tsükleerimisel. Algebrat, milles on rahuldatud omadused (84.5) ja (84.6), nimetatakse *Lie algebraks* ([1], lk. 540). Antud juhul on tegemist diferentseeruva muutkonnal M antud vektorväljade Lie algebraga $\mathfrak{Z}(M_n)$.

Ülaltoodust on näha globaalanalüüsi iseloomulikud jooned: objektide vaatlemine terviklikel diferentseeruvatel muutkondadel, seejuures mõisted ja sümboolika arendatakse välja selliselt, et kaob vajadus otseselt kasutada koordinaate, mille valikus on alati ebasoovitav suvalisuse moment. Laialdaselt kasutatakse kaasaegse algebra mõisteid.

Välisdiferentsiaalvormide sümboolikas on neid põhimõtteid osaliselt juba rakendatud. Kuigi eespool (art. 79) on välisdiferent-

¹ Erinevus vektorruumist seisneb selles, et $\mathfrak{F}(M_n)$ ei osutu korpuseks, sest temas on olemas nullitegurid, näiteks funktsioonid, mis on nullid muutkonna M_n teineteist täiendavatel osadel (vt. art. 79). Kui aga kitsendada λ valiku vabadust, lubades ainult konstantseid funktsioone, s.t. korpuse $\mathbf{R}$ elemente, siis hulgas $\mathfrak{Z}(M_n)$ tekib vektorruumi (seejuures lõpmatumõõtmelise) struktuur üle $\mathbf{R}$.

² Marius Sophus Lie (1842—1899), norra matemaatik.

³ Carl Gustav Jacob Jacobi (1804—1851), saksa matemaatik.

siaalvorme käsitletud piirkonnas $D \subset E_n$, mis on tegelikult sama-väärne käsitlesega lihtmuutkonnal, on avaldise (79.3) tähistus ω juba koordinaadivaba. Jääb veel ka välisdiferentsiaalvormi definitsioon ning väliskorrutamise ja välisdiferentseerimise tehete definitsioonid muuta koordinaadivabaks. Kuidas see on võimalik, seda näitame siinkohal üksnes lineaarsete diferentsiaalvormide puhul.

Olgu kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ antud vektorväli $Z = z^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ja lineaarne diferentsiaalvorm $\omega = a_i du^i$. Üleminekul mõnele teisele kaardile (U_β, φ_β) on mittetühja $U_\beta \cap U_\alpha$ ulatuses

$$z^{i'} = u^{i'}_i z^i, \quad a_{i'} = a_i u^i_{i'}.$$

Järelikult $a_i z^i = a_{i'} z^{i'}$ on kaardist sõltumatu invariantne funktsioon, mida tähistatakse $\omega(Z)$ ja nimetatakse ω väärtuseks vektorväljal Z . Nii tekib kujutus

$$\omega : \mathfrak{Z}(M_n) \rightarrow \mathfrak{F}(M_n), \quad (84.7)$$

millel on järgmised kergesti kontrollitavad omadused:

$$\omega(Z+W) = \omega(Z) + \omega(W), \quad (84.8)$$

$$\omega(fZ) = f\omega(Z). \quad (84.9)$$

Lineaarse diferentsiaalvormi võibki defineerida kui kujutuse (84.7) omadustega (84.8) ja (84.9).

Kaardivabalt defineeritud lineaarset diferentsiaalvormi nimetatakse enamasti 1-vormiks. Kahe 1-vormi ω ja θ ning funktsiooni $f \in \mathfrak{F}(M_n)$ puhul defineeritakse

$$(\omega + \theta)(Z) = \omega(Z) + \theta(Z), \quad (84.10)$$

$$(f\omega)(Z) = f\omega(Z); \quad (84.11)$$

sellega muudetakse kõikide muutkonnal M_n määratud 1-vormide hulk vektorruumi üldistavaks struktuuriks üle $\mathfrak{F}(M_n)$ (vt. allviide lk. 369). Esitus $\omega = a_i du^i$ kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ on siit tuletatav järgmiselt.

Funktsiooni $f \in \mathfrak{F}(M_n)$ puhul tuleb defineerida 1-vorm df , selle funktsiooni täisdiferentsiaal. Kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ muidugi $df = \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i} du^i$;

seega $(df)(Z) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial u^i} z^i = (Zf)_\alpha$ (vt. 84.1). Niisiis, kaardist sõltumatult

$$(df)(Z) = Zf. \quad (84.12)$$

Nüüd kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$

$$\omega(Z) = \omega\left(z^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right) = a_i z^i,$$

kus $a_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)$, samal ajal aga

$$du^i(Z) = du^i\left(z^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = z^j du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = z^j \frac{\partial}{\partial u^j} u^i = z^j \delta_j^i = z^i$$

(siin on kasutatud valemeid (84.8), (84.9) ja (84.12)). Kokkuvõttes, (84.10) ja (84.11) põhjal

$$\omega(Z) = a_i z^i = a_i (du^i(Z)) = (a_i du^i)(Z),$$

s. t. $\omega = a_i du^i$.

Kui lisaks on antud veel teine 1-vorm θ , mis kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ avaldub kujul $\theta = b_j du^j$, siis selles kaardis on defineeritud väliskorrutis

$$\omega \wedge \theta = a_i b_j du^i \wedge du^j.$$

Siin $du^1, \dots, du^n$ on baasidelemendid, nii nagu $f^1, \dots, f^n$ art-s 78. Seetõttu (78.4) põhjal

$$(du^i \wedge du^j)(Z, W) = du^i(Z) du^j(W) - du^j(Z) du^i(W)$$

ning järelikult

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \theta)(Z, W) &= a_i b_j [du^i(Z) du^j(W) - du^i(W) du^j(Z)] = \\ &= (a_i du^i)(Z) (b_j du^j)(W) - (a_i du^i)(W) (b_j du^j)(Z) \end{aligned}$$

ehk

$$(\omega \wedge \theta)(Z, W) = \omega(Z)\theta(W) - \omega(W)\theta(Z) \quad (84.13)$$

— see ongi väliskorrutise koordinaativaba definitsioon. Nii defineerituna kuulub väliskorrutis $\omega \wedge \theta$ nn. 2-vormide hulka.

Välisdiferentsiaaliga on lugu pisut keerulisem. Kaardis $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ valemi (79.5) kohaselt

$$d\omega = da_i \wedge du^i.$$

Siit (84.13) ja (84.12) järgi

$$\begin{aligned} d\omega(Z, W) &= da_i(Z) du^i(W) - da_i(W) du^i(Z) = \\ &= (Za_i)(Wu^i) - (Wa_i)(Zu^i). \end{aligned}$$

Lisame sobivad liikmed, lahutades nad kohe seejärel:

$$\begin{aligned} d\omega(Z, W) &= [(Za_i)(Wu^i) + a_i(ZWu^i)] - \\ &\quad - [(Wa_i)(Zu^i) + a_i(WZu^i)] - \\ &\quad - [a_i(ZWu^i) - a_i(WZu^i)]. \end{aligned}$$

Esimestes nurksulgudes on tegelikult

$$Z(a_i(Wu^i)) = Z((a_i du^i)(W)) = Z\omega(W),$$

teistes analoogiliselt $W\omega(Z)$, kolmandates aga $a_i((ZW - WZ)u^i) = a_i du^i([Z, W]) = \omega([Z, W])$. Seega

$$d\omega(Z, W) = Z\omega(W) - W\omega(Z) - \omega([Z, W]). \quad (84.14)$$

See kirjutus on koordinaativaba, kusjuures paremal on juba koordinaativabalt defineeritud suurused. Järelikult saab valemit (84.14) kasutada 1-vormi ω välisdiferentsiaali koordinaativabaks defineerimiseks. Tuleb aga kohe öelda, et praktilisteks arvutusteks on valem (84.14) liialt keerukas; tegelik töö käib ikkagi valemi (79.6) kohaselt. Nüüd on selge, et tulemus ei saa sõltuda kaardi valikust — fakt, mis on muidugi kontrollitav ka koordinaaditeisenduse valemeist (83.1) lähtudes.

Märgime lõpetuseks, et valemiga (84.14) defineeritud välisdiferentsiaal $d\omega$ 1-vormist ω kujutab endast, samuti nagu eespool vaadeldud väliskorrutis $\omega \wedge \theta$, teatavat 2-vormi. Kuidas käsitletakse 2-vorme (ja veelgi üldisemaid p -vorme) globaalanalüüsis, kuidas neid korrutatakse ja välisdiferentseeritakse, see saaks selgeks art-i 79 sisu ülekandmisel siia, kuid kõnesolevad arutlused väljuksid käesoleva kursuse raamidest.

Harjutusülesanded

138. Sfääri $S(o, r) = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ jaoks saab näidata kaks atlast:

1) kahekaardiline $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$, kus $U_\alpha = S(o, r) \setminus \{p_\alpha\}$ ja φ_α on stereograafiline projektsioon ekvaatoritasandile poolusest p_α koordinaatidega $(0, 0, (-1)^\alpha r)$, $\alpha = 1, 2$; 2) kuuekaardiline $\{(V_i^+, \psi_i^+), (V_i^-, \psi_i^-)\}_{i=1,2,3}$, kus V_i^+ ja V_i^- on lahtised poolsfäärid võrratuste $x_i > 0$ ja $x_i < 0$ poolt määratud poolruumides ning ψ_i^+ ja ψ_i^- on projekteerimised paralleelselt x_i -teljega ülejäänud kahe koordinaadi tasandile. Kontrollida, et kumbki atlas muudab sfääri diferentseeruvaks muutkonnaks ning et need diferentseeruvad muutkonnad on ekvivalentsed.

139. Vaatleme tasandi E_2 sirgete hulga kaht kaarti: esimeses võtame võrrandiga $y = x \tan \alpha + b$ antud sirge koordinaatideks $v^1 = \alpha$ ja $v^2 = b$; $-\frac{\pi}{2} < v^1 < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < b < \infty$; teises võrrandiga $x = y \tan \alpha' + b'$ antud sirge koordinaatideks $v'^1 = \alpha'$ ja $v'^2 = b'$; $0 < v'^1 < \pi$, $-\infty < b' < \infty$. Kontrollida, et nendega muudetakse see hulk kahemõõtmeliseks diferentseeruvaks muutkonnaks, seejuures mitte-orienteeritavaks (sama ehitusega mis Möbiuse lehel).

140. Seades ruumis E_3 punkti o läbivatele tasanditele vastavusse nende normaalsirged, teha kindlaks, et nende tasandite hulgas (ehk elliptilise tasandi $S_3^*(r)$ sirgete hulgas) on olemas loomulik mitteorienteeritava diferentseeruva muutkonna (elliptilise tasandi) struktuur.

141. Seades ruumis E_3 punkti o läbivatele pseudoeukleidilistele tasanditele vastavusse nendega ortogonaalsed sirged läbi selle punkti o , näidata, et nende tasandite hulgas (ehk Lobatševski tasandi $L_2(q)$ sirgete hulgas) on sama orienteeritava diferentseeruva muutkonna struktuur mis ruumi E_3 tasemepinnal $\{x : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = q^2\}$ — ühekattelisel pöördhüperboloidil (või ka silindril $\{x : x_1^2 + x_2^2 = q^2\}$).

142. Vaatleme ruumis E_3 sfääri $S(o, r) = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$ punkti x kaugust tasandist võrrandiga $x_1 = r$ sfääril antud funktsioonina f . Sfääri punktide kiirusvektorite välja pöörlisel x_3 -telje ümber nurkkiirusega ω vaatleme kui sfääril antud vektorvälja X . Näidata, et $Xf = \omega x_2$.

143. Olgu X, Y ja Z sfääri punktide kiirusvektorite väljad pöörlisel nurkkiirusega 1 vastavalt x_3 -, x_2 - ja x_1 -telje ümber. Näidata, et $[X, Y] = \pm Z$ (märk sõltub pöörlissuundade valikust).

HARJUTUSÜLESANNETE VASTUSED JA SELGITUSED

1. a) $8x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 - 5 = 0$; b) $x_1 = -1 + 4t$, $x_2 = 1 - t$, $x_3 = t$, $x_4 = 2 - 3t$.

2. Esimesel tasandil on võrrandid $x_1 = 2u_2$, $x_2 = u_1$, $x_3 = 0$, $x_4 = -u_1 + 2u_2$, teisel $x_1 = 1 - 2v_1 - v_2$, $x_2 = 2v_1$, $x_3 = -1 + 3v_1 + v_2$, $x_4 = \lambda v_2$. Kui $\lambda \neq \frac{1}{3}$, siis 2-tasandid lõikuvad punktis $\left(\frac{\lambda}{3\lambda - 1}, \frac{2\lambda}{3\lambda - 1}, 0, -\frac{\lambda}{3\lambda - 1} \right)$; kui $\lambda = \frac{1}{3}$, siis nad ei lõiku, kuid on paralleelsed vektori $(1, 2, 0, -1)$ -sihiliste sirgetega.

3. Kaugus on $\frac{\sqrt{3}}{3} |\lambda|$.

13. Kõnesolev 2-tasand on eukleidiline, kui $\lambda^2 = < \frac{9}{17}$, pseudoeukleidiline, kui $\lambda^2 > \frac{9}{17}$, ja isotroopne, kui $\lambda^2 = \frac{9}{17}$.

15. $x = \frac{5}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 + \frac{1}{3}e_3$; $xe_1 = \frac{5}{3}$, $xe_2 = xe_3 = \frac{1}{3}$.

16. See isomeetria on liikumine; tegemist on pöördega alguspunkti $(0, 0, 0)$ vektori $(-1, -2, 0)$ sihis läbiva telje ümber nurga φ võrra, kus $\cos \varphi = \frac{2}{3}$, ning sellele järgneva lükkega vektori $(1, -1, 2)$ võrra.

17. $x = 3i'_1 + 3i'_2 + 3i'_3 - 5i'_4$.

19. $x_1 = a \cos \frac{x_3}{b}$, $x_2 = a \sin \frac{x_3}{b}$.

20. $x_1 = -a \cos 2\tau$, $x_3 = -a \tan \tau \cos 2\tau$; tähistuse $\tan \tau = t$ puhul $x_1 = a \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $x_2 = at \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$; siit $x_1^2 (x_1 + a) + x_2^2 (x_1 - a) = 0$. Väärtustele $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ vastab kahekordne punkt o .

21. Trohhoid: $x_1 = (R \pm r) \cos rt \mp \lambda r \cos(R \pm r)t$, $x_2 = \pm(R \pm r) \sin rt \mp \lambda r \sin(R \pm r)t$; siin «+» on epi- ja «-» hüpo- korral, t on läbiveeretud kaare pikkuse ja rR suhe ning λr on veereva ringjoone külge kinnitatud punkti kaugus selle ringjoone keskpunktist. Epi- ja hüpotsükloidi korral $\lambda = 1$. Tsükloid: $x_1 = r(t - \sin t)$, $x_2 = r(1 - \cos t)$ (vrd. [2], lk. 269); ringjoone evolvent: $x_1 = R(\cos t + t \sin t)$, $x_2 = R(\sin t - t \cos t)$ (vrd. 2, lk. 295); astroid: $x_1 = R \cos^3 \tau$, $x_2 = R \sin^3 \tau$; kardioid: $x_1 = 2r(1 - \cos \tau) \cos \tau$, $x_2 = 2r(1 - \cos \tau) \sin \tau$ (koordinaatide alguspunkt on lükkega nihutatud veereva ringjoone algasendi ja liikumatu ringjoone puutepunkti; vrd. [2], lk. 272). Kui $R = 2r$, siis hüpotrohhoid on ellips pooltelgedega $r(1 + \lambda)$ ja $r(1 - \lambda)$.

22. Astroid $x_1^{2/3} + x_2^{2/3} = R^{2/3}$ ehk $(x_1^2 + x_2^2 - R^2)^3 + 27R^2x_1^2x_2^2 = 0$; kardioid: $(x_1^2 + x_2^2 + 2rx_1)^2 = 4r^2(x_1^2 + x_2^2)$. Astroidil on neli iseärasest punkti $(\pm R, 0)$, $(0, \pm R)$; kardioidil on üks iseärane punkt $(0, 0)$.

23. $x_1 = \frac{a}{2}(1 + \cos 2t)$, $x_2 = \frac{a}{2} \sin 2t$, $x_3 = a \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Parameetri väärtustele $t_1 = 0$ ja $t_2 = \pi$ vastab kahekordne punkt $(a, 0, 0)$.

24. $x_1 = ae^{kt} \cos t$, $x_2 = ae^{kt} \sin t$, $x_3 = be^{kt}$; logaritmilise spiraali ($b=0$) polaarvõrrand: $\varrho = ae^{k\varphi}$.

25. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

28. Võrdhaarne hüperbool: $2x_1x_2 = S$, kus S on konstantne pindala.

29. Astroid: $x_1 = c \cos^3 \lambda$, $x_2 = c \sin^3 \lambda$, kus c on lõigu konstantne pikkus.

30. Parabool: $x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{g}{v_0^2} x_1^2 \right)$, kus g on raskuskiirendus.

31. Tsükloid (vt. harjutusülesanne 21).

32. Ruut tippudega diameetrite otspunktides.

33. Näpunäide: viia poolus mähisjoone iseärasesse punkti, minna üle polaarkoordinaatidele ja võrrelda harjutusülesande 21 vastusega.

35. Pikkus kahe järjestikuse iseärase punkti vahel on $\frac{5}{2}a$, kogupikkus $10a$.

36. $x = \left(\frac{1}{2} \sqrt{2(s^2 + 8)}, \frac{\sqrt{2}}{2} s, 2 \operatorname{Arsh} \frac{\sqrt{2}}{4} s \right)$.

37. $x_1 = at \cos t$, $x_2 = at \sin t$, $x_3 = ct$; siin $t = \omega\tau$, kus ω on konstantne pöörlemiskiirus ja τ aeg; $a = \omega^{-1}v_0 \sin \alpha$, $c = \omega^{-1}v_0 \cos \alpha$, kus v_0 on konstantne liikumiskiirus sirgel ob ja α on selle sirge nurk pöörlemisteljega.

40. $x'_1 = kx_2 - 1$, $x'_2 = \kappa x_3 - kx_1$, $x'_3 = -\kappa x_2$. 41. $k = \frac{2a}{a^2 + b^2}$.

42. $\tan \alpha = \frac{av^2}{g(a^2 + b^2)}$, kus g on raskuskiirendus.

45. $k = \kappa = \frac{a}{2a^2 + s}$.

46. $x_1 = \int_0^s \cos \frac{as^2}{2} ds$, $x_2 = \int_0^s \sin \frac{as^2}{2} ds$; võrrandite paremaid pooli, nn.

Fresneli integraale, ei ole võimalik avaldada elementaarfunktsioonide kaudu, nende praktilisel rakendamisel tuleb kasutada vastavaid tabeleid.

47. $\tau_{[0, \tau_0]} = \tau_0 \frac{\omega}{c} \sqrt{c^2 - v_0^2 - \tau_0^2 \omega^2 v_0^2 \sin^2 \alpha} + \frac{c^2 - v_0^2}{cv_0 \sin \alpha} \arcsin \frac{\tau_0 \omega v_0 \sin \alpha}{\sqrt{c^2 - v_0^2}}$;

vt. harjutusülesande 37 vastus.

48. $k_1 = \frac{2\omega v_0 \sin \alpha}{c^2 - v_0^2}$; üldiselt siin $v = v_0 \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2 \sin^2 \alpha}$ ja $w = v'_\tau$, seega het-

kel $\tau = 0$ on $v = v_0$ ja $w = 0$; edasi kasutada harjutusülesannete 37 ja 41 vastuseid.

49. Ellipsoid: $x = (a \cos u_1 \cos u_2, b \cos u_1 \sin u_2, c \sin u_1)$, ühekatteline hüperboloid: $x = (a \operatorname{ch} u_1 \cos u_2, b \operatorname{ch} u_1 \sin u_2, c \operatorname{sh} u_1)$, kahekatteline hüperboloid: $x =$

$= (a \operatorname{sh} u_1 \cos u_2, b \operatorname{sh} u_1 \sin u_2, \pm c \operatorname{ch} u_1)$, elliptiline paraboloid: $x = \left(u_1 \sqrt{p} \cos u_2, a_1 \sqrt{q} \sin u_2, \frac{1}{2} u_1 \right)$.

50. $x = (u_1 \cos u_2, u_1 \sin u_2, au_2)$; parameetrijoonteks on sirged (u_1 -jooned) ja krüvijooned (u_2 -jooned).

51. Ühekatteline hüperboloid: $x = \left(a \frac{1+u_1u_2}{u_1+u_2}, b \frac{u_2-u_1}{u_1+u_2}, c \frac{u_1u_2-1}{u_1+u_2} \right)$,

hüperboolne paraboloid: $x = ((u_1+u_2) \sqrt{p}, (u_2-u_1) \sqrt{q}, 2u_1u_2)$; näpunäide: esitada nende pindade üldvõrrandid võrretna, lahutades neis enne ruutude vahed tegureiks, ning seejärel tähistada võrrete poolte ühised väärtused kord u_1 , kord u_2 .

52. $p(u_1) = \left(u_1, 0, \frac{u_1^2}{2p} \right)$, $q(u_2) = \left(0, u_2, \pm \frac{u_2^2}{2q} \right)$; siin «+» on elliptilise ja «-» hüperboolse paraboloidi korral.

55. Mähispind on pöördellipsoid pooltelgedega r , r ja $r\sqrt{2}$; pöördeteljeks on antud ringjoone paralleelseid kõõle poolitav sirge, keskpunktiks selle ringjoone keskpunkt; seejuures mähispind puutub ainult neid parve sfääre, mille raadius ei ole väiksem kui $\frac{r}{\sqrt{2}}$.

56. Näpunäide: kui joonel on vektorvõrrand $x = x(s)$, siis normaaltasandi määrab võrrand $t(s)[y - x(s)] = 0$, kus s — joone loomulik parameeter — on parve parameetri osas; kõveruskeskpunkti ja kõverustelje kohta vt. [5], lk. 70, 93.

58. $ds^2 = du_1^2 + (u_1^2 + a^2) du_2^2$, teine ruutvorm: $-\frac{2a}{\sqrt{u_1^2 + a^2}} du_1 du_2$.

59. $A(0, 0)$, $B(a, 1)$, $C(-a, 1)$; $\widehat{AB} = \widehat{AC} = \frac{a}{2} [\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3})]$, $\widehat{BC} = 2a$; $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \angle C = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$; $S = a^2 \left[\frac{1}{3} (2 - \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2}) \right] \approx 0,74a^2$.

60. $ds^2 = b^2 du_1^2 + (a + b \cos u_1)^2 du_2^2$; $S = 4\pi^2 ab$.

61. Punktis A: $\frac{1}{a}$, punktis B: 0 ja $-\frac{2}{3\sqrt{2}a}$, punktis C: 0 ja $\frac{2}{3\sqrt{2}a}$.

64. Peasihid poolitavad parameetrijoonte vahelised nurgad; peakõverused: $k_1 = \frac{a}{a^2 + u_1^2}$, $k_2 = -\frac{a}{a^2 + u_1^2}$.

65. $\left(\pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, 0, \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \right)$; vrd. [6], lk. 382.

68. $H = \frac{(1+f'^2) - ff''}{2f(1+f'^2)^{3/2}}$. Minimaalpinna puhul $(1+f'^2)' = 2f'f'' = 2f' \frac{1+f'^2}{f}$

ehk $\frac{(1+f'^2)'}{1+f'^2} = 2 \frac{f'}{f}$ ehk $\ln a^2(1+f'^2) = \ln f^2$ ehk $f' = \pm \sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1}$ ehk

$ad\left(\frac{f}{a}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1}} = \pm dx_3$; siit integreerimisega, x_3 -telje suuna ja alguspunkti

$\sqrt{\left(\frac{f}{a}\right)^2 - 1}$

sobiva valikuga saame soovitud tulemuse.

70. Kõverusjooned: $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$, asümptootjooned: $u_2 = \pm u_1 + C$.

72. $y = C_1 x$, $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = C_2$.

73. $\omega_1 = 3(1 + u_1^2 + u_2^2) du_1$, $\omega_2 = 3(1 + u_1^2 + u_2^2) du_2$,
 $\omega_{12} = -\omega_{21} = 2(1 + u_1^2 + u_2^2)^{-1} (-u_2 du_1 + u_1 du_2)$.

74. $k_1 = -k_2 = \frac{2}{3(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}$.

75. $k_g = \frac{1}{R} \tan u_1 \sin \alpha$; loksodroomi korral $\varphi = \alpha = \text{const}$, $\Gamma_1 = 0$ kui meri-

diaani (suuringjoone) geodeetiline kõverus, $\Gamma_2 = \frac{1}{R} \tan u_1$ kui paralleeli geodeetiline kõverus, kus R on sfääri raadius ($r = R \cos u_1$ on paralleeli raadius ning $\frac{1}{r} \sin u_1$ — paralleeli kõverusvektori projektsioon puutujatasandil).

76. Arvestada, et k_g on joone normaalkõverus projekteerival silindril, joone ristprojektsioon aga on sel puhul normaallõige.

78. $\Gamma_1 = -\frac{2u_2}{3(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}$, $\Gamma_2 = \frac{2u_1}{3(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}$; $\partial_2 \Gamma_1 = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial u_2} \cdot \frac{1}{3(1 + u_1^2 + u_2^2)}$,
 $\partial_1 \Gamma_2 = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial u_1} \cdot \frac{1}{3(1 + u_1^2 + u_2^2)}$; $K = -\frac{4}{9(1 + u_1^2 + u_2^2)^4}$ ($= k_1 k_2$ kooskõlas harjutus-
 ülesandega 74).

79. Kaldhelikoid $\left(\alpha = \frac{\pi}{4} \right)$: $x = (u_1^* \cos u_2^*, u_1^* \sin u_2^*, u_1^* + a u_2^*)$, kõnesoleva pöördhüperboloidi korral tuleb vektorvõrrandis (31.7) võtta $\varphi(u_1) = u_1$, $\psi(u_1) = \sqrt{u_1^2 - a^2}$. Nende pindade esimesed ruutvormid lähevad ühtimisse pärast teisendust:

$u_1 = \sqrt{u_1^{*2} + a^2}$, $u_2 = u_2^* + \arctan \frac{u_1^*}{a}$. Pöördhüperboloidi saamiseks ühekordselt tuleb kaldhelikoidil võtta osa, kus $u_2^* \in [0, 2\pi)$.

80. Kruvipind: $x = (u_1^* \cos u_2^*, u_1^* \sin u_2^*, F(u_1^*) + a u_2^*)$, pöördpinna võrrandis (31.7) võtta $\varphi(u_1) = u_1$, $\psi(u_1) = f(u_1)$. Pärast teisendust $u_1 = \sqrt{u_1^{*2} + a^2}$, $u_2 =$

$= u_2^* + \int_0^{u_1^*} \frac{a F'(t)}{a^2 + t^2} dt$ tekib esimeste ruutvormide ühtimise nõudest lihtsat tüüpi diferentsiaalvõrrand funktsiooni $f(u_1)$ määramiseks. Kruvipinnal piirduda osaga, kus $u_2^* \in [0, 2\pi)$.

81. Asümptootjoone tunnus: $k_0 = 0$, seega $k = |k_g|$. Kõverusjooneks on geodeetiline joon parajasti siis, kui tema peanormaali moodustavad tasanduva pinna, see omadus on aga, nagu kerge näidata, ainult tasandilistel joontel.

82. Kasutada valemeid (50.7) ja (50.8).

83. Liouville'i pinna korral on eelmises harjutusülesandes näidatud süsteemil olemas esimene integraal $f(u_1) \sin^2 \varphi - g(u_2) \cos^2 \varphi = a$, millest asendamise teel saadakse lihtne diferentsiaalvõrrand.

84. Siin $ds^2 = u_1(du_1^2 + du_2^2)$ ja geodeetilised jooned määratakse võrrandiga $(u_2 + b)^2 = 4a(u_1 - a)$, kus a ja b on suvalised konstandid.

85. Joone peanormaal ühtib kõnesoleva mähispinna normaaliga, geodeetiline joon aga läheb painutamisel geodeetiliseks jooneks.

87. Koordinaadid ruumis E_3 võib valida nii, et c on poolus, kus $u_1 = \frac{\pi}{2}$;

meridiaanidel ($u_2 = \text{const}$) on siis (53.2) põhjal $R = \int_{\frac{\pi}{2}}^{u_1} r du_1 = r \left(\frac{\pi}{2} - u_1 \right)$, seega

$u_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{R}{r}$ ja $s = r \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{R}{r} \right) \int_0^{2\pi} du_2 = 2\pi r \sin \frac{R}{r}$. Sama tulemuseni võib jõuda ka elementaargeomeetriliste kaalutlustega.

88. Valemi (53.5) järgi $S = r^2 \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{R}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u_1 du_1 \int_0^{2\pi} du_2 = 2\pi r^2 \left(1 - \cos \frac{R}{r} \right)$; siit

saame $S_2(r)$ kogupindalaks $4\pi r^2$ ($R = \pi r$).

89. Valemi (53.10) järgi

$$V = r^3 \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{R}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u_1 du_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u_2 du_2 \int_0^{2\pi} du_3 = r^3 \left[\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \sin 2u_1 \right] \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{R}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \times \\ \times \sin u_2 \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} u_3 \Big|_0^{2\pi}.$$

90. Sisenurga α tippu läbivad külgsuurringjooned piiravad sfääriosa, mille pindala suhtub sfääri kogupindalasse $4\pi r^2$ nagu $\alpha : \pi$, s. t. on $4\alpha r^2$. Kõigi sisenurkade puhul saadavate selliste sfääriosade pindalade summa on ühelt poolt $4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4r^2(\alpha + \beta + \gamma)$, teiselt poolt aga $4\pi r^2 + 4S$ (sest kumbki kolmnurk lisandub veel kaks korda).

91. Kui antud punktid määratakse paaridega $(a, -a)$ ja $(b, -b)$ ning vaadeldava hulga punkt paariga $(x, -x)$, kus kõik vektorid on pikkusega r , siis hulka määrava tingimuse saab (53.3) põhjal väljendada järgmiselt: $\frac{x \cdot a}{r^2} = \frac{x \cdot b}{r^2}$

ehk $(a - b) \cdot x = 0$, viimane võrrand aga määrabki sfääri keskpunkti läbiva hüper-tasandi normaalvektoriga $a - b$.

92. Näiteks $S_2^*(r)$ puhul vastab sirgele sfääri $S_2(r)$ keskpunkti läbiv tasand, sellega ristuv diameeter aga määrabki soovitud punkti — antud sirge pooluse.

93. Tuleb võtta iga antud sirget läbiva tasandi poolus, nende hulk ongi antud sirge polaarsirge. Sfääri $S_3(r)$ keskpunkti läbiv 2-tasand ruumis E_4 , mis määrab selle polaarsirge, on täielikult ortogonaalne antud sirget määrava 2-tasandiga, seega isokliinne sellega. Seetõttu antud sirge ja tema polaarsirge on paralleelsed Cliffordi järgi.

94. Oletame, et vajalik Cliffordi paralleel on olemas. Ristbaasi ruumis E_4 saab valida nii, et antud sirge määratakse vektorite e_1 ja e_2 rihiga, antud punkt vektori $k_1 = e_1 \cos \alpha + e_3 \sin \alpha$ sihiga ja seda punkti läbiv sirge, mis lõikab risti antud sirget ja selle Cliffordi paralleeli, vektorite e_1 ja e_3 rihiga. Polaarsirge, mille määrab vektorite e_2 ja e_4 riht, lõikab art. 5 tulemuste põhjal samuti risti antud sirget ja paralleeli, kusjuures punkt, milles toimub teine lõikumine, on teatava vektori $k_2 = e_2 \cos \beta + e_4 \sin \beta$ sihis. Et k_1, k_2 -riht ja e_1, e_2 -riht on isokliinsed, siis süsteem (5.5) on samasus t^i suhtes, seega

$$(k_1 e_1)^2 + (k_1 e_2)^2 = (k_2 e_1)^2 + (k_2 e_2)^2 = \cos^2 \varphi, \\ (k_1 e_1)(k_2 e_1) + (k_1 e_2)(k_2 e_2) = 0.$$

Esimesest tingimusest $\cos^2 \alpha = \cos^2 \beta = \cos^2 \varphi$, teine on praegu samaselt rahuldatud. Seega $\beta = \pm \alpha$; see tingimus määrab tõesti kaks Cliffordi paralleeli, sest (5.5) annab sel korral samasused.

95. $L_2(q)$ saab esitusest (56.2), võttes seal $u_3 = 0$. Ringjoone keskpunktiks võtame väärtusele $u_1 = 0$ vastava punkti. Seda läbivatel hüperboolsetel sirgetel, kus $u_2 = \text{const}$, on (56.4) põhjal $s = q \int_0^{u_1} du_1$, ning kui ringjoone raadius on R , siis

siit $R = qu_1$, s. t. ringjoonel $u_1 = \frac{R}{q} = \text{const}$. Ringjoone pikkus: $s = q \int_0^{2\pi} \frac{R}{q} du_2 = 2\pi q \frac{R}{q}$. Et $\text{sh} \frac{R}{q} > \frac{R}{q}$, kui $R \neq 0$, siis Lobatševski geomeetrias on ringjoone pikkus suurem kui $2\pi R$.

96. Reaksarendustest ([3], lk. 76):

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

järeldub, et $\sin \frac{x}{iq} = \sin \left(-\frac{ix}{q} \right) = -i \left(\frac{x}{q} + \frac{x^3}{3! q^3} + \frac{x^5}{5! q^5} + \dots \right) = -\frac{i}{2} \left(e^{\frac{x}{q}} - e^{-\frac{x}{q}} \right) = -i \text{sh} \frac{x}{q}$; $\cos \frac{x}{iq} = \cos \left(-\frac{ix}{q} \right) = 1 + \frac{x^2}{2! q^2} + \frac{x^4}{4! q^4} + \dots = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{q}} + e^{-\frac{x}{q}} \right) = \text{ch} \frac{x}{q}$. Jääb ainult teha vajalikud asendused.

97. Valemite (57.7) ja (57.8) poolte jagamisel võib saada $\cot \alpha$ avaldise, analoogiliselt $\cot \beta$ avaldise ja jääb need korrutada ning arvestada seost (57.6). Edasi tuleb kirjutada seos (57.7) $\sin \beta$ jaoks ja jagada selle pooled (57.8) pooltega. Võib kasutada ka hüperboolse koosinusteoreemi duaalset kuju (57.5).

98. Et $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ja $\text{sh} \frac{b}{q} \text{sh} \frac{c}{q} > 0$, siis

$$-\text{sh} \frac{b}{q} \text{sh} \frac{c}{q} \leq \text{sh} \frac{b}{q} \text{sh} \frac{c}{q} \cos \alpha \leq \text{sh} \frac{b}{q} \text{sh} \frac{c}{q};$$

muutes siin märgid ja liites $\text{ch} \frac{b}{q} \text{ch} \frac{c}{q}$, saame

$$\text{ch} \frac{b+c}{q} \geq \text{ch} \frac{c}{q} \geq \text{ch} \frac{b-c}{q}$$

ning seega

$$b+c \geq c \geq b-c.$$

99. Kirjutada hüperboolne koosinusteoreem (57.2) ka $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ puhul ja veenduda, et kui $a=b=c$, siis need avalduvad samuti nagu

$$\cos \alpha = \frac{\text{ch}^2 \frac{a}{q} - \text{ch} \frac{a}{q}}{\text{sh}^2 \frac{a}{q}} = \frac{\text{ch} \frac{a}{q} \left(\text{ch} \frac{a}{q} - 1 \right)}{\text{ch}^2 \frac{a}{q} - 1} = \frac{\text{ch} \frac{a}{q}}{1 + \text{ch} \frac{a}{q}}.$$

Jääb veel $\text{ch} \frac{a}{\varrho}$ avaldada $\text{th} \frac{a}{2\varrho}$ kaudu ja asendada.

Nelinurga korral arvestada, et diagonaalid jagavad korrapärase kolmnurga neljaks täisnurkseks võrdhaarseks kolmnurgaks hüpoteenuusiga a ja sisenurgaga $\frac{a}{2}$, seega $\cot^2 \frac{a}{2} = \text{ch} \frac{a}{\varrho}$. Jääb avaldada siit $\cos a$.

100. Hajuvad sirged saab hüperboolse liikumisega viia sellisesse asendisse, et ühe sirge kujutis on x_1^* -teljel, ristlõigu kujutis on x_2^* -teljel ja teise sirge kujutis määratakse võrrandiga $x_2^* = \sigma = \text{const} < \varrho$. Valemist (58.7) saame sel korral $\text{th}^2 \frac{a}{\varrho} = \frac{\sigma^2}{\varrho^2 - x_1^{*2}}$. Et $\text{th}^2 x$ on $x > 0$ korral kasvav funktsioon, siis a miinimum saavutatakse siin väärtusel $x_1^* = 0$, s. t. ristsirgel. Kui $x_1^{*2} \rightarrow \varrho^2 - \sigma^2$, siis $\text{th}^2 \frac{a}{\varrho} \rightarrow 1$, s. t. $a \rightarrow \infty$.

103. Valemite (58.5) erikuju on järgmine:

$$x_1^{*'} = \varrho \frac{\varrho^{-1}x_1^* + \lambda}{\varrho^{-1}\lambda x_1^* + 1}, \quad x_2^{*'} = \varrho \frac{\varrho^{-1}x_2^*}{\varrho^{-1}\lambda x_1^* + 1}, \quad x_3^{*'} = \varrho \frac{\varrho^{-1}x_3^*}{\varrho^{-1}\lambda x_1^* + 1}.$$

Iga sfääri saab pärast sobivat pööret ruumis $L_3(\varrho)$ viia nende valemitega määratud teisendusega sfääriks, mille kujutis Beltrami—Kleini mudelis on keskpunktiga o . Seega pärast pööret saadud sfääri esitab mudelis pind, mille võrrand tekib, kui teha vajalikud asendused võrrandis $x_1^{*2} + x_2^{*2} + x_3^{*2} = r^2 < \varrho^2$:

$$\varrho^2 \left(\frac{x_1^{*2} + \lambda \varrho}{\lambda x_1^* + \varrho} \right)^2 + \varrho^2 \frac{x_2^{*2}}{(\lambda x_1^* + \varrho)^2} + \varrho^2 \frac{x_3^{*2}}{(\lambda x_1^* + \varrho)^2} = r^2.$$

Siit

$$\varrho^2 (x_1^{*2} + 2\lambda \varrho x_1^* + \lambda^2 \varrho^2 + x_2^{*2} + x_3^{*2}) = r^2 (\lambda^2 x_1^{*2} + 2\lambda \varrho x_1^* + \varrho^2)$$

ja pärast vajalikke teisendusi

$$\frac{(x_1^* + \mu)^2}{a^2} + \frac{x_2^{*2}}{b^2} + \frac{x_3^{*2}}{b^2} = 1,$$

kus

$$\mu = \lambda \varrho \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2 - \lambda^2 r^2}, \quad b^2 = r^2 \varrho^2 (1 - \lambda^2)^2 = a^2 \left(1 - \lambda^2 \frac{r^2}{\varrho^2} \right).$$

Et siin $\lambda^2 < 1$, $\frac{r^2}{\varrho^2} < 1$, siis on tõesti tegemist lameda pöördellipsoidiga. Kõnesoleva sfääri keskpunkti kujutiseks on selle pöördellipsoidi sisepunkt $(-\lambda \varrho, 0, 0)$.

104. Sfääri esimene ruutvorm (vrd. 36.17):

$$dx^2 = ds^2 = r^2 (d\theta_1 + \cos^2 \theta_1 du_1^2).$$

Siin

$$d\theta_1 = \frac{2e^{u_1}}{1+e^{2u_1}} du_1, \quad \cos \theta_1 = \sin \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \tan \frac{1}{2} \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} \left(\theta_1 + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2e^{u_1}}{1+e^{2u_1}},$$

seega

$$f(u) = \left(\frac{2re^{u_1}}{1+e^{2u_1}} \right)^2.$$

105. Siin $p = \frac{1}{2}q$, $q = \frac{1}{2}(q-r)$, seega $d_L(o, x) = q \ln \frac{q+r}{q-r}$. Teiselt poolt (60.4) järgi

$$s = \int_r^0 \frac{2q^2 du_1}{q^2 - u_1^2} = 2q^2 \ln \frac{q-u_1}{q+u_1} \cdot \frac{1}{2q} \Big|_r^0 = q \ln \frac{q+r}{q-r}.$$

106. Sümmeetria järgi neljas tipp on mudelis ringjoonte $(x_1 - c)^2 + x_2^2 = c^2 - q^2$ ja $x_1^2 + (x_2 - c)^2 = c^2 - q^2$ lõikepunkt, seega teatav punkt (x, x) , nii et $x^2 - 2cx + c^2 + x^2 = c^2 - q^2$ ehk $x(x - c) = -\frac{q^2}{2}$. Seejuures $\pi - \alpha$ on nurk vektorite $(c - x, -x)$ ja $(-x, c - x)$ vahel, mistõttu

$$\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) = -\frac{x(x - c)}{(x - c)^2 + x^2} = -\frac{q^2}{2R^2},$$

kus $c - R = r$. Et samal ajal $c^2 - R^2 = q^2$ ehk $(c + R)(c - R) = q^2$ ehk $c + R = \frac{q^2}{2}$,

siis $2R = \frac{q^2}{r} - r = \frac{q^2 - r^2}{r}$ ja

$$\cos \alpha = \frac{2q^2 r^2}{(q^2 - r^2)^2}.$$

Jääb eelmises lahenduses saadud seosest $a = q \ln \frac{q+r}{q-r}$ avaldada $e^{\frac{a}{q}} = \frac{q+r}{q-r}$ ja

$e^{-\frac{a}{q}} = \frac{q-r}{q+r}$, et leida

$$\operatorname{sh} \frac{a}{q} = \frac{1}{2} \left(\frac{q+r}{q-r} - \frac{q-r}{q+r} \right) = \frac{1}{2} \frac{(q+r)^2 - (q-r)^2}{q^2 - r^2} = \frac{2qr}{q^2 - r^2}.$$

Lihtne võrdlus annab nüüd soovitud valemi (mida võib muide kontrollida ka harjutusülesande 97 teise seose järgi, kus α ossa tuleb praegu võtta $\frac{\alpha}{2}$ ja β ossa $\frac{\pi}{4}$).

107. Siit $x^2 = r^2$ ja $s = ct$, kus $c^2 = a^2 + \lambda^2 b^2$, $a = r \sin \frac{R}{r}$, $b = r \cos \frac{R}{r}$. Vastavatest arvutustest selgub, et

$$kn = t' + \frac{1}{r^2} \mathbf{x} = \left(A \cos \frac{s}{c}, A \sin \frac{s}{c}, B \cos \frac{\lambda s}{c}, B \sin \frac{\lambda s}{c} \right),$$

kus $A = \frac{(\lambda^2 - 1)ab^2}{r^2 c^2}$, $B = \frac{(1 - \lambda^2)a^2 b}{r^2 c^2}$. Skalaarruudu arvutamisega saame siit

k avaldise. Edasi $\mathbf{x}b = \mathbf{n}' + kt = \left(-C \sin \frac{s}{c}, C \cos \frac{s}{c}, -D \sin \frac{\lambda s}{c}, D \cos \frac{\lambda s}{c} \right)$,

kus $C = \frac{k ar + \varepsilon b}{rc}$, $D = \frac{\lambda(k br - \varepsilon a)}{rc}$, $\varepsilon = \frac{\lambda^2 - 1}{|\lambda^2 - 1|} = \pm 1$. Skalaarruudu arvutamisel ja k avaldise asendamisel saame siit $\mathbf{x}$ avaldise.

108. Kui $\lambda = 0$, siis

$$x = \left(r \sin \frac{R}{r} \cos t, r \sin \frac{R}{r} \sin t, r \cos \frac{R}{r}, 0 \right)$$

ning joon on $x_1 x_2 x_3$ -ruumis E_3 , kujutades endast sfääri $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ lõiget tasandiga $x_3 = r \cos \frac{R}{r}$. Lõikeringjoone raadius on $r \sin \frac{R}{r}$, kõverus seega $\left(r \sin \frac{R}{r} \right)^{-1}$ ning kõverusvektori projektsioon sfääri puutujatasandil $\left(r \sin \frac{R}{r} \right)^{-1} \cos \frac{R}{r}$.

109. Siin $x^2 = -q^2$; edasine kordab üle-eelmist lahendust väikeste modifikatsioonidega, näiteks $a = q \operatorname{sh} \frac{R}{q}$, $b = q \operatorname{ch} \frac{R}{q}$ korral $b^2 - a^2 = q^2$, edasi $A = \frac{(1+\lambda^2)ab^2}{qc^2}$, $B = -\frac{(1+\lambda^2)a^2b}{qc^2}$, kus $c^2 = a^2 + \lambda^2 b^2$; järgnevalt $k^2 = A^2 - B^2$ jne.

110. Kui $\lambda = 0$, siis

$$x = \left(q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \cos t, q \operatorname{sh} \frac{R}{q} \sin t, 0, q \operatorname{ch} \frac{R}{q} \right).$$

Valemi (56.7) kohaselt

$$\operatorname{ch} \frac{d_L(x, x_0)}{q} = -\frac{xx_0}{q^2} = -\frac{-q^2 \operatorname{ch} \frac{R}{q}}{q^2} = \operatorname{ch} \frac{R}{q},$$

seega

$$d_L(x, x_0) = R.$$

111. Kui koos joone punktiga x vaadelda kõnesoleva hüperboolse sirge punkti y kohavektoriga

$$y = (0, 0, q \operatorname{sh} \tau, q \operatorname{ch} \tau),$$

siis

$$\operatorname{ch} \frac{d_L(x, y)}{q} = -\frac{xy}{q^2} = -\operatorname{ch} \frac{R}{q} (\operatorname{sh} t \operatorname{sh} \tau - \operatorname{ch} t \operatorname{ch} \tau) = \operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{ch}(t - \tau).$$

Fikseeritud t väärtuse korral omandab see suurus minimaalse väärtuse parajasti siis, kui $\tau = t$, kusjuures konstantne miinimum R on siis ka kaugusel $d_L(x, y)$; seega vaadeldav joon on ekvidistant. Edasine toimub samuti nagu eelmistes lahendustes. Võib kasutada ka harjutusülesannet 109, kui tähistada selles $\lambda t = t^*$ ehk $t = t^* \lambda^{-1}$, asendada ning võtta seejärel $\lambda \rightarrow \infty$. Sel puhul saame praegu vaadeldava joone; tema kõverus ja vääne saadakse 109 omadest piirväärtustena samas protsessis $\lambda \rightarrow \infty$.

113. Siin $x^2 = -q^2$. Eelmise lahenduse eeskujul

$$\operatorname{ch} \frac{d_L(x, y)}{q} = -\operatorname{ch} \frac{R}{q} (\operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} \tau - \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} \tau) = -\operatorname{ch} \frac{R}{q} \operatorname{ch}(u_1 - \tau)$$

omandab koos kaugusega $d_L(x, y)$ minimaalse väärtuse $\tau = u_1$ puhul, kusjuures $d_L(x, y)$ minimaalseks väärtuseks on konstant R . Vaadeldava pinna puhul

$$ds^2 = dx^2 = q^2 \left(\operatorname{sh}^2 \frac{R}{q} du_1^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{R}{q} du_2^2 \right) = dv_1^2 + dv_2^2,$$

kus $v_1 = u_1 q \operatorname{sh} \frac{R}{q}$, $v_2 = u_2 q \operatorname{ch} \frac{R}{q}$. Nurk φ , mille moodustab joon $u_1 = t$, $u_2 = \lambda t$ joonega $u_1 = \text{const}$, määratakse seosest

$$\cos \varphi = \frac{Q^2 \operatorname{ch}^2 \frac{R}{Q} \lambda dt du_2}{\sqrt{Q^2 \left(\operatorname{sh}^2 \frac{R}{Q} dt^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{R}{Q} \lambda^2 dt^2 \right)} \sqrt{Q^2 \operatorname{ch}^2 \frac{R}{Q} du_2^2}} = \frac{\lambda \operatorname{ch} \frac{R}{Q}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{R}{Q} + \lambda^2 \operatorname{ch}^2 \frac{R}{Q}}} = \text{const.}$$

115. $T : (z_1, z_2, z_3) \mapsto \frac{1}{6} [f(z_1, z_2, z_3) + f(z_2, z_3, z_1) + f(z_3, z_1, z_2) - f(z_2, z_1, z_3) - f(z_1, z_3, z_2) - f(z_3, z_2, z_1)]$; $T_{i_1 i_2 i_3} = f_{[i_1 i_2 i_3]}$.

116. $\dim S^k = \frac{1}{k!} n(n+1) \dots (n+k-1)$, $\dim \Lambda^k = \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1)$.

117. Kumbki pole alamalgebra; kõnesolev korrutamine viib sellest välja!

120. Valemist (53.7) $g_{11}=1$, $g_{22}=(u^1)^2$, $g_{33}=(u^1)^2 \cos^2 u^2$, $g_{ij}=0$ ($i \neq j$).
Valemi (71.12) järgi

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -u^1, \quad \Gamma_{33}^1 = -u^1 \cos^2 u^2; \quad \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{23}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u^1}, \quad \Gamma_{33}^2 = \sin u^2 \cos u^2; \quad \Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = \Gamma_{33}^3 = \Gamma_{12}^3 = 0, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{u^1}, \quad \Gamma_{23}^3 = -\tan u^2.$$

Süsteemil (71.10) on kuju

$$dz^1 - u^1 (z^2 du^2 + \cos^2 u^2 \cdot z^3 du^3) = 0,$$

$$dz^2 + \frac{1}{u^1} (z^1 du^2 + z^2 du^1) + \sin u^2 \cos u^2 \cdot z^3 du^3 = 0,$$

$$dz^3 + \frac{1}{u^1} (z^1 du^3 + z^3 du^1) - \tan u^2 (z^2 du^3 + z^3 du^2) = 0.$$

122. Tuletada valemeist (73.6) lähtudes Christoffeli sümbolite teisenemisseadus (72.7).

124. $2\pi^2 r^3$. Tuleb arvutada integraal (53.10), kus $R = r \cos u_1$, ja (53.6) järgi tuleb võtta $u_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $u_3 \in [0, 2\pi]$.

128. Vaadelda seoseid (75.12) kuue lineaarvõrrandi süsteemina kuue tundmatu $R_{ij,k}$ määramiseks, kontrollida, et süsteemi determinant on nullist erinev ning et ülesandes näidatud avaldis rahuldab seda süsteemi.

130. Täiendada lineaarvormide $a_1, \dots, a_p$ süsteemi ruumi V^* täieliku baasi, lisades sobivad $a_{p+1}, \dots, a_n$, avaldada b_i sellel baasil, asendada need avaldised antud tingimusse ning arvestada seejärel väliskorruutiste $a_k \wedge a_l = -a_l \wedge a_k$, $1 \leq k \leq l \leq n$, lineaarset sõltumatust.

131. Kui $a_{ij} f^i \wedge f^j = (b_i f^i) \wedge (c_j f^j)$, siis $a_{ij} = b_{[i} c_{j]} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i)$; asendus Plückeri tingimusse annab samasuse. Vastupidi, kui kehtib see tingimus ja näiteks $a_{12} \neq 0$, siis antud $a_{ij} f^i \wedge f^j$ on $\frac{1}{a_{12}} (a_{12} f^1 + a_{32} f^3 + \dots + a_{n2} f^n)$ ja $a_{12} f^2 + a_{13} f^3 + \dots + a_{1n} f^n$ väliskorruutis; analoogiliselt, kui mõni teine $a_{ij} \neq 0$; kui aga kõik $a_{ij} = 0$, siis üheks teguriks võib võtta 0.

132. a) $d\omega = 2(u^3 - 1) du^1 \wedge du^2 \wedge du^3$; b) $d\omega = u^2 u^3 du^1 \wedge du^3 + u^1 u^3 du^2 \wedge du^3$; c) $d\omega = 6y^2 dx \wedge dy \wedge dz$; d) $d\omega = 2(x^2 + y^2)^{-1} dx \wedge dy$.

133. $V = \frac{4}{3} \pi r^3$. Lahenduskäiku vaata [3], lk. 364.

134. $V = \frac{1}{2} \pi^2 r^4$. Siin (60.1) ja (60.2) põhjal $\omega = 2r^7(u^2 + r^2)^{-3} du_1 \wedge du_2 \wedge du_3$; tuleb leida $\iiint_{R^3} \omega$, see on aga tehtav üleminekuga sfäärkoordinaatidele R, θ ja φ ruumis R^3 ning piirprotsessi $R \rightarrow \infty$ kasutamisega.

$$135. \operatorname{grad} F = e_1 \frac{\partial F}{\partial u^1} + e_2 \frac{1}{u^1} \frac{\partial F}{\partial u^2} + e_3 \frac{1}{u^1 \cos u^2} \frac{\partial F}{\partial u^3},$$

$$\operatorname{div} a = \frac{1}{(u^1)^2} \frac{\partial}{\partial u^1} [(u^1)^2 a^1] + \frac{1}{u^1 \cos u^2} \left[\frac{\partial a^3}{\partial u^3} + \frac{\partial (a^2 \cos u^2)}{\partial u^2} \right],$$

$$\operatorname{rot} a = \frac{1}{(u^1)^2 \cos u^2} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 u^1 & e_3 u^1 \cos u^2 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ a^1 & a^2 u^1 & a^3 u^1 \cos u^2 \end{vmatrix}.$$

$$136. \Delta = \frac{1}{(u^1)^2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left[(u^1)^2 \frac{\partial}{\partial u^1} \right] + \frac{1}{(u^1)^2 \cos u^2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\cos u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} \right) + \frac{1}{(u^1)^2 \cos^2 u^2} \frac{\partial^2}{\partial (u^3)^2}.$$

138. Näiteks kaardipiirkondade U_1 ja $V_1^\pm$ ühisosades üleminek esimese kaardi koordinaatidelt teise kaardi koordinaatidele määratakse (59.2) analoogide ja võrrandist $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ järelduvate seoste $x_1 = \pm \sqrt{r^2 - v_1^2 - v_2^2}$, $x_2 = v_1$, $x_3 = v_2$ põhjal järgmiste lõpmatult diferentseeruvate funktsioonidega:

$$v_1 = \frac{2r^2 u_2}{u_1^2 + u_2^2 + r^2}, \quad v_2 = \frac{u_1^2 + u_2^2 - r^2}{u_1^2 + u_2^2 + r^2}.$$

Analoogiliselt tulevad üleminekud teiste kaardipaaride $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ja $(V_i^\pm, \psi_i^\pm)$ puhul.

139. Vabalt võetud kaldsirge korral $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ja $b' = -b \cot \alpha$, seega kaardipiirkondade ühisosas, mis koosneb kahest tükist: $-\frac{\pi}{2} < v^1 < 0$, $-\infty < b < \infty$ (langevad kaldsirged) ja $0 < v^1 < \frac{\pi}{2}$, $-\infty < b < \infty$ (tõusvad kaldsirged), on üleminekuvalemeiks

$$v^{1'} = \frac{\pi}{2} - v^1, \quad v^{2'} = -v^2 \cot v^1.$$

Paremad pooled on diferentseeruvad funktsioonid, kusjuures $\det \left| \frac{\partial v^{i'}}{\partial v^j} \right| = -\cot v^1$ on esimesel tükil negatiivne, teisel positiivne (vrd. Möbiuse lehe käsitlemisega art-s 83; märgime, et sama $v^{2'}$ saab $v^1 = \alpha$ ja $v^2 = b$ ning $v^1 = -\alpha$, $v^2 = -b$ korral, seega protsessis $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ saab samale püstsirgele läheneda kahelt poolt, mistõttu kõnesoleva ühisosa äärtel $v^1 = \frac{\pi}{2}$ ja $v^1 = -\frac{\pi}{2}$ toimub «väändega» samastamine nagu Möbiuse lehe puhul).

142. Sfääri esitust (53.1) kasutades leiame, et $f(x) = r - x_1 = r(1 - \cos u_1 \cos u_2)$ ning et $X = \omega \frac{\partial}{\partial u_2}$, seega

$$Xf = \omega \frac{\partial}{\partial u_2} [r(1 - \cos u_1 \cos u_2)] = \omega r \cos u_1 \sin u_2 = \omega x_2.$$

143. Vahetades esituses (53.1) vektori x kahe viimase koordinaadi osad ja tähistades parameetrid v_1 ja v_2 , saame samuti nagu eelmises lahenduses, kus nüüd $\omega = 1$, et $Y = \frac{\partial}{\partial v_2}$. Vahetades äärmiste koordinaatide osad ja kasutades

tähistusi w_1 ja w_2 , saame $Z = \frac{\partial}{\partial w_2}$. Seejuures sama punkti x korral $\cos u_1 \cos u_2 = \cos v_1 \cos v_2$, $\cos u_1 \sin u_2 = \sin v_1$, $\sin u_1 = \cos v_1 \sin v_2$, seega $u_1 = \arcsin(\cos v_1 \times \sin v_2)$, $u_2 = \arccot(\cot v_1 \cos v_2)$ ja siit $Y = \cos u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \tan u_1 \sin u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$.

Talitades analoogiliselt leiame, et $Z = -\sin u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \tan u_1 \cos u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}$. Nüüd

$$XY = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\cos u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \tan u_1 \sin u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right) = -\sin u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \cos u_2 \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} + \tan u_1 \cos u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \tan u_1 \sin u_2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2},$$

$$YX = \left(\cos u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \tan u_1 \times \sin u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \frac{\partial}{\partial u_2} = \cos u_2 \frac{\partial^2}{\partial u_2 \partial u_1} + \tan u_1 \sin u_2 \frac{\partial^2}{\partial u_2^2},$$

seega $[XY] = XY - YX = Z$.

KIRJANDUS

1. Kangro, G. Kõrgem algebra. — Tln., 1962. — 555 lk.
2. Kangro, G. Matemaatiline analüüs. I. — Tln., 1965. — 468 lk.
3. Kangro, G. Matemaatiline analüüs. II. — Tln., 1968. — 522 lk.
4. Lepik, Ü., Roots, L. Teoreetiline mehaanika. — Tln., 1971. — 483 lk.
5. Lumiste, Ü. Diferentsiaalgeomeetria. — Tln., 1963. — 255 lk.
6. Lumiste, Ü., Ariva, K. Analüütiline geomeetria. — Tln., 1973. — 646 lk.
7. Silde, O. Relatiivsusteooria põhiküsimusi geomeetria valguses. — Tln., 1974. — 190 lk.
8. Sõrmus, T., Vainikko, G. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. — Tln., 1972. — 348 lk.
9. Нут Ю. Ю.¹ Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. — М., 1961. — 310 с.

¹ Jüri Nut (1892—1952), eesti nõukogude matemaatik, kosmoloog ja ühiskonnategelane.

NIMEREGISTER

- d'Aiguillon, F. 234
 Archimedes 102
 Ariva, K. 215, 384
- Bartels, M. 84, 86, 89—91, 97, 98,
 100, 102, 103, 105, 106, 112, 152—
 154, 159, 160, 249—251
 Beltrami, E. 223—228, 232—234, 236,
 258, 280, 379
 Bianchi, L. 353
 Bolyai, J. 215
 Bonnet, P. O. 158, 163, 165, 166,
 171, 172, 177, 178, 188—190, 192
 Brown, R. 107
- Cartan, É. J. 152, 153, 156, 159—
 161, 163, 164, 170, 172, 249, 254,
 255, 326, 336, 351, 352, 356, 358
 Cauchy, A. 12, 13, 31, 37, 54, 183,
 301
 Christoffel, E. B. 291, 293, 296, 310,
 313, 314, 321, 323, 325, 326, 351—
 353, 357, 382
 Clairaut, A. C. 184, 187
 Clifford, W. K. 213, 214, 261, 262—
 264, 377, 378
 Codazzi, D. 297
 Cramer, G. 45
- Darboux, J. G. 102, 130, 152, 153,
 156, 159, 160, 163, 164, 170, 172,
 249, 254, 255
 Dupin, P. C. F. 136—143
- Einstein, A. 3, 274, 315, 326
 Enneper, A. 152, 172
 Eukleides 9
 Euler, L. 76, 136, 139, 143, 152, 158,
 191, 192, 295, 303, 338
- Frenet, J. E. 84, 86, 89—91, 97, 98,
 100, 102, 103, 105, 106, 112,
 152—154, 159, 160, 249—251
 Fresnel, A. J. 374
- Galilei, G. 28, 29, 38, 39, 73
 Galtšenkova, R. J. 176
- Gauss, C. Fr. 3, 134, 142, 158, 163,
 165, 166, 172, 177—180, 182, 186,
 188—190, 192, 193, 215, 217, 257,
 285, 297, 315, 322, 324, 325
 Gram, J. P. 17, 19, 21, 24, 26, 37,
 104, 357
 Grandi, L. G. 59
 Grassmann, H. G. 160, 285, 326,
 332—334, 336, 358
 Green, G. 155, 162, 188, 190, 336
- Hamilton, W. R. 122
 Helmholtz, H. L. F. 177
 Hilbert, D. 62, 199, 218, 247
- Jacobi, C. C. J. 369
 Jordan, C. 62, 65, 114
- Kangro, G. 384
 Keres, H. 4
 Kivistik, L. 303
 Klein, F. 3, 223—228, 232—234, 236,
 258, 280, 379
 Kolde, R. 4
- Lagrange, J. L. 12, 20—22, 24, 26,
 31, 75, 77, 132, 188
 Lambert, J. H. 248
 Laplace, P. S. 200, 350, 359
 Leibniz, G. W. 69, 336, 343
 Lepik, Ü. 384
 Levi—Civita, T. 305
 Lie, M. S. 369
 Liebmann, K. O. H. 176
 Liouville, J. 158, 172, 177, 178, 186,
 200, 203, 376
 Lobatševski, N. I. 3, 55, 195, 199,
 201, 214, 215, 218, 219, 223—228,
 230, 233, 234, 236, 238, 240—245,
 247—251, 254, 256, 257, 259—
 261, 264, 265, 280, 324, 325, 372,
 378
 Lorentz, H. A. 29, 38, 52—56, 226
 Lumiste, Ü. 86, 166, 176, 384
 Löhmus, M. 4
- Mainardi, G. 297
 Mercator 248

Minding, E. F. A. G. 158, 176—178,
 182, 199, 305
 Minkowski, H. 3, 27, 30, 31, 36, 39,
 48, 50, 51, 57, 103, 106—111, 215,
 224, 234, 250, 252, 254, 257, 299
 Monge, G. 3
 Möbius, A. F. 364, 365, 372, 383

 Newton, I. 89, 336, 343
 Nuut, J. 225, 385

 Ostrogradski, M. V. 162, 336
 Ožigova, J. P. 176

 Peano, G. 62, 65, 77, 107, 114
 Peterson, K. 4, 163, 166, 171, 172,
 297
 Pfaff, J. F. 334
 Plücker, J. 358, 382
 Pogorelov, A. V. 176
 Pogrebõsski, J. B. 176
 Poincaré, H. 52, 53, 107, 215, 234,
 240, 242—246, 248, 259, 260, 261
 Ptolemaios 234
 Pythagoras 209, 222

Raševski, P. K. 322, 325
 Ricci-Curbastro, G. 314, 315
 Riemann, G. F. B. 3, 177, 195, 285,
 299—302, 304, 305, 310, 312—315,
 320—326, 346, 351—355, 357—359,
 361—364, 369
 Rodrigues, O. 147, 150, 155, 156
 Roots, L. 384

 Schmidt, E. 17, 24, 26, 37, 104, 357
 Schur, F. 325, 353
 Senff, K. E. 86
 Silde, O. 384
 Stokes, G. G. 162, 336, 337, 342,
 344, 345, 350, 359
 Sõrmus, T. 384

 Taylor, B. 92, 93, 97, 302, 306, 307
 Torricelli, E. 73
 Tšebõšov, P. L. 181, 326

 Vainikko, G. 384
 Viète, F. 142
 Viviani, V. 73, 159

AINEREGISTER

- absoluut 225
- absoluutne diferentsiaal 325
 - tuletis 326
- aegruum 26—30
- afiinne geomeetria 46
 - ruum 46
 - teisendus 46, 47
- aheljoon 102, 174
- ahend 271, 274
- ahvisadul 145
- ajasarnane joon 110
 - vektor 31
- alammuutkond 298
- algaas 40
- algebraline pind 124
- algsuutkond 10
- algreeper 41
- alterneerimine 272—274
- Archimedese spiraal 102
- astroid 73, 374
- asümptootilised sihid 142
- asümptootjooned 147
- atlas 360

- baas 39, 268
- Bartelsi—Frenet' valemid 86, 105, 112, 250, 251
- Beltrami—Kleini mudel 225—228, 233
- Bianchi samasus 353
- bilineaarne meetrika 277
- bilineaarvorm 268
- binormaal 84, 105, 251
- bivektor 309

- Cartani lemma 358
 - struktuurivõrrandid 352
 - välisdiferentsiaalarvutus 160, 336
- Cauchy võrratus 12
- Christoffeli sümbolid 291, 293
- Clairaut' teoreem 184
- Cliffordi paralleel 213, 214
- Cliffordi pind 213, 261—264

- Darboux'—Cartani valemid 156, 255
- Darboux' vektor 102, 130
- distantis 211
- divergents 349, 359
- Dupini indikatriss 138

- Einsteini ruum 315, 326
- ekviaafiinsed teisendused 47
- ekvidistant 232, 244, 265
- ekvidistantpind 232, 244, 258
- elementaarsündmus 27
- elementaaruumala 347
- ellips 58, 73
- elliptiline geomeetria 212
 - planimeetria 195
 - punkt 142
 - ruum 212, 325, 366
 - tasand 212, 366
- Enneperi pind 152, 172
- epitsükloid 73
- esimene põhitensorväli 292
 - ruutvorm 131, 292
- eukleidiline ruum 10, 322, 323
 - tasand 34
- Euleri karakteristik 191
 - konstant 76
 - valem 139, 295
- evoluu 73
- evolvent 73

- Galilei teisendus 28, 29, 39
 - geomeetria 29, 39
- Gaussi—Bonnet' valem 189
 - — võrrand 165
- Gaussi kõverus 142, 179, 315, 322
 - teoreem 179
 - võrrand 180, 182, 297
- Gaussi—Liouville'i valem 158
- geenus 192
- geodeetiline joon 182—187, 301—303
 - kõverus 157, 177, 178
- geodeetilised koordinaadid 185
- gradient 346
- Grami determinant 19
- Grami—Schmidt'i ortogonaliseerimisprotsess 17, 26, 37, 104
- Grandi joon 59
- Grassmanni algebra 160, 285, 332

- hajuva sirged 228—230, 241
- Hamiltoni operaator 122
- helikoid 130, 199
- hüperbool 58
- hüperboolne geomeetria 218

- koosinusteoreem 221
- planimeetria 195
- punkt 142
- ruum 215
- rühm 55, 216
- siinusteoreem 221
- tasand 218
- hüperpind 229, 359
- hüpersfäär 32, 361
- hüpertasand 10, 18, 36, 288
- hüpertasandi normaalvõrrand 13, 288
- hüpotsükloid 73

- ilmutamata võrrand 61, 125
- ilmutatud võrrandid 61
- indeksi langetamine või tõstmine 278
- inertsiaalsüsteem 108
- intervall 30
- iseärane punkt 62, 68, 118, 123
- isokliinsed m -tasandid 25
- isomeetria 43, 44, 48, 50—52, 167, 216
- isomeetriline kujutus 42
 - teisendus 43, 227
- isomeetrilised pinnad 172
- isotroopne hüperkoonus 36
 - hüpertasand 37
 - joon 110
 - koonus 34
 - siht 31
 - tasand 35, 38
 - vektor 31

Jacobi samasus 369
 joon 58, 61, 298
 joonpind 127, 148, 149
 Jordani joon 65
 juhtrihid 25

- kaar 74
- kaare pikkus 75, 77, 299
- kaart 360
- kaasbaas 268
- kaasruum 267
- kaldhelikoid 199
- kaldsümmeetriline tensor 272, 327, 328
- kaldsümmetriseerimine 272
- kanalpind 129
- kanooniline baas 104, 111
 - teljestik 84, 153
 - vorm 355
- karakteristik 126
- kardioid 73
- katenuid 152, 174
- kaugus 18, 30, 202, 216
- kaustika 74
- keskmise kõverus 142
- kidunud meetrika 38
- kiirendusvektor 89
- kiirusvektor 28, 88, 107
- kinnine hulk 279

- kinnine lihtjoon 60
- kodistants 212
- kohavektor 11
- kolmnurga võrratused 13
- kooldumispooltasand 83
- kooldumistasand 82, 104
- kooniline pind 128
- koordinaadibaas 354
- koordinaatfunktsioon 367
- koordinaatjoon 283
- kommutaator 369
- konformne kujutus 240
- kongruentsed kujundid 226
- konstantse kõverusega ruumid 325
- korrapärane võrk 121
- kovariantne diferentsiaal 325
- kruvijoone 58, 68, 92, 99
- kruvipind 200
- kõverjoonelised koordinaadid 282
- kõverus 88, 113, 251
- kõverusjooned 146, 147
- kõveruskeskpunkt 130
- kõverusteisendus 310
- kõverustelg 130
- kõverustensor 313
- kõverusvektor 88
- kõverusvormid 352

- Lagrange'i samasus 12
- lahtine hulk 279
- Lamberti nelinurk 248
- Laplace'i operaator 200, 350, 359
- lihthüperpind 291
- lihtkaar 60
- lihtmuutkond 298
- lihtpind 115, 252
- liik 192
- liikumine 45, 213, 226
- liikuv kanooniline teljestik 84
- lineaarkujutus 267
- lineaarne diferentsiaalvorm 155, 334
- linearteisendus 268
- lineaarvorm 266, 267
- Lie algebra 369
- Lie korrutis 369
- Liouville'i pind 200
- Lobatševski geomeetria 218
 - planimeetria 195
 - ruum 215
- logaritmiline spiraal 73
- loksodroom 172
- loomulik parameeter 80, 301
- loomulikud võrrandid 99
- Lorentzi eriteisendus 29, 38
 - rühm 53
 - teisendus 53
 - üldrühm 53
- lõikekõverus 320

maailmajoon 107
 meetriline tensor 277

meetriline tensorväli 292, 298
 Mercatori projektsioon 248
 meridiaan 115
 Mindiugu teoreem 178
 minimaalpind 148
 Minkowski ruum 30
 mitteeukleidiline geomeetria 214
 mitteeukleidilised planimeetriad 195
 — ruumid 249, 322
 mitteorienteeritav muutkond 361
 ($m-1$)sfäär 32
 moodustajad 127
 ($m+1$)-paralleelpipeed 22
 ($m+1$)-risttahukas 26
 ($m+1$)-ruumala 23
 ($m+1$)-rööptahukas 22
 m -riht 15
 m -tasand 15—17
 mõõde 267
 mähisjoon 69
 mähispind 125
 Möbiuse leht 364

 nabla 68, 122
 normaal 84, 105, 120, 292
 normaalkõverus 133, 294
 normaallõige 136
 normaaltasand 84, 252
 normaalvektor 13, 68
 nurk 23, 24, 287, 300
 nurgadefekt 195
 nurgaekstsess 190, 211

 omaaeg 109, 110
 omakiirendus 113
 orienteeritav muutkond 361
 orientatsioon 45, 132
 orisfäär 233
 oritsükkel 233
 ortogonaalne baas 39, 48
 ortogonaalteisendused 47, 48
 ortonormaalne baasiväli 357
 otsesumma 270

 painutamine 173
 paraboolne punkt 143
 paralleel 115
 paralleelsed sirged (Lobatševski mõt-
 tes) 226, 228, 231, 241
 paralleelsus (Cliffordi järgi) 213
 paralleelsuselõik 230
 paralleelsusenurk 230
 parameeter 60
 parameetrijooned 121
 Peano joon 62
 peakõverused 139, 255, 295
 peanormaal 84, 105, 251
 peasihid 139, 295
 Petersoni—Mainardi—Codazzi võrran-
 did 297
 Petersoni võrrandid 166
 Pfaffi vorm 334

piirkond 58, 279, 281
 piirsfäär 233, 244, 259—261
 piirringjoon 233, 244
 pind 118, 119
 pindala 22, 132
 pinnaparv 125
 pinnateooria põhiteoreem 169
 Plückeri tingimus 358
 Poincaré mudel 140
 — rühm 52
 polaarpind 130
 polaarsirge 214
 poolus 214
 pseudoekleidiline ruum 30
 — hüpertasand 38
 pseudoortogonaalmaatriks 50
 pseudosfäär 199, 215, 244—247
 pseudosfääriline kujutis 251
 puutepunkt 69, 120
 puutuja 67
 puutujahüpertasand 292
 puutujatasand 120, 252
 puutujatepind 128
 puutujavektor 298, 300
 puutujavektorruum 304
 pöördpind 114
 pööre 48
 püstelikoid 130, 150—152
 püstkanoid 149—151

 radikaaltasand 242
 raja 279
 rajapunkt 279
 Ricci samasus 314
 — tensor 314
 Riemanni—Christoffeli tensor 313
 Riemanni geomeetria 299
 — lihtmuutkond 299
 — lihtruum 299
 — meetriline tensorväli 298
 — meetrika 299
 — muutkond 299, 361
 — planimeetria 195
 — ruum 361
 riht 15
 ristbaas 40, 48—50, 357
 ristreeper 41, 52
 Rodrigues'i valem 147
 rootor 346, 351
 ruumala 23, 287, 288, 300
 ruumisarnane joon 110
 — vektor 31
 rõngaspind 118
 rööpülekanne 289, 301, 304, 305

 Schuri teoreem 325, 353
 seostusvormid 351
 sfäärikimp 242
 sfääriline kolmnurk 206
 — koosinusteoreem 207
 — kujutis 249
 — siinusteoreem 208

sfäärkoordinaadid 204
 silindriline pind 128
 sirge 14, 15, 211, 219
 sirgesidum 228, 242
 sirgestuspunkt 82
 sirgestustasand 84
 sirgestuv kaar 75
 sisegeomeetria 177, 351
 sisemeetrika 133, 169, 300
 skalaarkorrutis 12, 31, 299
 skalaarkõverus 314
 skalaarväli 121, 346
 stereograafiline kujutus 240
 — projektsioon 234—236
 Stokesi valem 162, 337, 345
 strofoid 72
 sulund 279
 sümmeetriline algebra 285
 — tensor 272
 sümmetriseerimine 272

 tagasipöörde serv 128
 tasand 14, 16, 17, 218
 tasandumispunkt 141
 tasanduv npid 128, 149, 179
 tasemepind 121, 362
 teine põhitensorväli 294
 — ruutvorm 134, 254, 294
 teisendus 45
 teisenduste rühm 45
 teisenemise tensorseadus 276
 tensor 269
 tensoralgebra 270
 tensori koordinaadid 273
 tensorite korrutamine 270

tensorväli 280, 298
 toor 118, 123, 124, 129
 tors 128, 149, 151, 176, 179
 torupind 129
 totaalkõverus 191
 traktriss 199
 translatsioonpind 130
 trilineaarvorm 284
 trohhoid 72
 tsentroafiinsed teisendused 47
 tsükloid 73
 Tšebõšovi võrk 181, 326
 täielikult ristuvad rihid 25
 — — m -tasandid 25
 täiskõverus 142, 190
 tükiti sile raja 279

 vaba liikuvus 195
 vektor 11
 vektorkorrutis 14
 vektorruum 266
 vektorväli 325, 326, 346, 368
 Viviani joon 73, 159
 voovorm 349
 välisalgebra 285
 välisdiferentsiaal 161, 334
 välisdiferentsiaalvorm 333
 väliskorrutis 160, 327, 330, 331
 välisvorm 327, 329
 vääne 89, 251

 ühikbivektor 317
 1-vorm 370
 ümaruspind 166, 255, 259, 261
 ümaruspunkt 140, 166, 255

Юло Лумисте
Дифференциальная геометрия
2-е издание, переработанное и дополненное
На эстонском языке
Художник-оформитель В. Ершов
Таллин, «Валгус»

Toimetajad H. Heinoja ja L. Saks
Kunstiline toimetaja M. Henno
Tehniline toimetaja R. Nisametdinov
Korrektorid L. Kondraševa, M. Lillipuu
ИБ № 4730

Laduda antud 21. 08. 84
Trükkida antud 04. 02. 87

Formaat 60×90/16

Trükipaber nr. 1

Kiri Literaturnaja

Kõrgtrükk

Tingtrükipoognaid 24,5

Tingvärvitõmmiseid 24,56

Arvestuspoognaid 24,88

Trükiarv 2000

Tellimuse nr. 3141

Hind rbl. 1.30

Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10
H. Heidemanni nim. trükkikoda, 202400 Tartu, Ülikooli 17/19. II