

U on ruumi $\mathbb{R}^n$ lahiline alamhulk, st $U \subset \mathbb{R}^n$.
 Siledade funktsioonide hulka tähistame $C^\infty(U)$, st
 $f \in C^\infty(U)$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, f on lõpmata diferentseeruv
 funktsioon. Kui $x^1, x^2, \dots, x^n$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ koordinaadid,
 siis $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ on n -muutuja funktsioon.

Algebra definitsioon. Olgu A vektorruum üle $\mathbb{R}$
 (või $\mathbb{C}$). Vektorruumi A nimetatakse algebraks,
 kui on antud bilineaar korrutis $(u, v) \in A \times A \rightarrow u \cdot v \in A$,
 mis rahuldab tingimust $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$, $\forall u, v, w \in A$.
 Tingimust nimetatakse assotsiatiivsuseks, st algebra
 korrutamistele $(u, v) \mapsto u \cdot v$ on assotsiatiivne. Kui
 leidub algebra element $e \in A$ omadustega $u \cdot e = e \cdot u = u$,
 $\forall u \in A$, siis algebrat nimetatakse ühikuga algebraks
 ja e on ühikelement. Kui $u \cdot v = v \cdot u$, $\forall u, v \in A$,
 siis algebrat A nimetatakse kommutatiivseks algebraks.

Defineerime $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, (funktsioonide summa)
 $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, (korrutamine skalaaridega)
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, (funktsioonide korrutis)
 kus $f, g \in C^\infty(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$C^\infty(U)$ on kommutatiivne ühikuga algebra, kus ühik-
 element $\mathbb{I}$ on konstantne funktsioon $\mathbb{I}(x) = 1$, $x \in U$.

Algebra derivatsioon mõiste. Algebra A lineaarkujutust $\delta: A \rightarrow A$ nimetatakse algebra derivatsiooniks, kui ta rahuldab Leibnizi valemit $\delta(u \cdot v) = \delta(u) \cdot v + u \cdot \delta(v)$, $u, v \in A$.

Siledate funktsioonide algebra $C^\infty(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ derivatsioonid. Vektorväljak nimetatuse diferentsiaaloperatoorit (1. järku diferentsiaaloperatoor)

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathcal{X}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \mathcal{X}^n \frac{\partial}{\partial x^n} = \mathcal{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \infty$$

kus $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n \in C^\infty(U)$. Vektorväli $\mathcal{X}$ on algebra $C^\infty(U)$ derivatsioon. Tõepoolest, $\mathcal{X}: f \in C^\infty(U) \rightarrow \mathcal{X}(f) \in C^\infty(U)$

$$\mathcal{X}(f \cdot g) = \mathcal{X}^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f \cdot g) = \mathcal{X}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} g + f \mathcal{X}^i \frac{\partial g}{\partial x^i} = \mathcal{X}(f)g + f \cdot \mathcal{X}(g).$$

Saab tõestada teoremi, et funktsioonide algebra $C^\infty(U)$ iga derivatsioon on üheselt määratud vektorväli, st, kui δ on $C^\infty(U)$, siis leidub vektorväli

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \mathcal{X}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \mathcal{X}^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

selline, et $\delta = \mathcal{X}$ ning $\mathcal{X}$ on üheselt määratud. Vektorväljade hulka tähistame $D(U)$. See on vektorruum üle $\mathbb{R}$, kus $(\mathcal{X} + \mathcal{Y})(f) = \mathcal{X}(f) + \mathcal{Y}(f)$ (summa), $(\lambda \cdot \mathcal{X})(f) = \lambda \cdot \mathcal{X}(f)$, $\forall f \in C^\infty(U)$, $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in D(U)$. Lisaks defineerime korrutamist funktsioonidega

$$(f \cdot \mathcal{X})(g) = f \cdot \mathcal{X}(g), \quad f, g \in C^\infty(U), \mathcal{X} \in D(U).$$

Seega, meil on kujutus $C^\infty(U) \times D(U) \rightarrow D(U)$. Määrab
 moduli struktuuri, st $D(U)$ on modul üle siledate
 funktsioonide algebra $C^\infty(U)$. $D(U)$ on topiline mõõt-
 meline modul, vektorväljad $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ moodusti-
 vad moduli moodustajate (baasi) süsteemi. Olgu $p \in U$ hulga U mingi punkt. Siis $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}^1(p) \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \mathcal{E}^2(p) \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p + \dots + \mathcal{E}^n(p) \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ ehk võime samastada vektoriga p

$$\mathcal{E}_p = (\mathcal{E}^1(p), \mathcal{E}^2(p), \dots, \mathcal{E}^n(p)) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Selles juhul $\mathcal{E}_p$ on funktsiooni nuurataktis, st

$$\mathcal{E}_p(f) = \mathcal{E}(f) \Big|_p = \mathcal{E}^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \mathcal{E}_p: C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2)$$

Valemis (1) $\mathcal{E}_p$ on ruumi $\mathbb{R}^n$ punktijavektor punktis p . Valemis (2) $\mathcal{E}_p$ on funktsiooni nuurataktis. Seega

punktijavektorid $\Leftrightarrow$ nuurataktised. (3)

Vastavust (3) kasutatakse muutkondade teoorias
 muutkonna punktijavektori ja punktijaruumi defineerimi-
 seks.

Olgu M^n n -mõõtmeline muutkond ja $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ funk-
 tsioon. Olgu $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ muutkonna atlas. Alenda-
 me $f|_{U_\alpha}: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$. Moodustame kompositsiooni $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Seega $f_\alpha = f \circ \varphi_\alpha: \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on n -muutuja
 funktsioon $f_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Järelikult $f \mapsto \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Funktsiooni f nimetatakse siledaks funktsiooniks muutkonnal M^n kui kõik $f_x, x \in A$ on siledad. Siledade funktsioonide algebrat tähistatakse $C^\infty(M^n)$. Analüütiliselt defineerime $C^\infty(U)$, kus $U \subset M^n$ on muutkonna lahtine alamhulk. Olgu $p \in M^n$ muutkonna punkt, f, g siledad funktsioonid punkti p ümbrustes, näiteks $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $g: V \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in U \cap V$. Ütleme, et $f \sim_p g$ funktsioonid on ekvivalentsed, kui leidub $W \subset U \cap V$ selline, et $f|_W = g|_W$. On lihtne veenduda, et $\sim_p$ on ekvivalentsisus. Funktsiooni f ekvivalentsiklassi tähistame $\bar{f}$.

Ekvivalentsiklassi $\bar{f}$ nimetatakse funktsiooni kasvaks (kasv) punktis p . Ekvivalentsiklasside hulka tähistame $\tilde{F}_p$. On ilmselge, et $\tilde{F}_p$ on kommutatiivne ühikuga algebra. $\bar{f} + \bar{g} = \overline{f+g}$, $\lambda \bar{f} = \overline{\lambda f}$, $\bar{f} \cdot \bar{g} = \overline{f \cdot g}$, ühikelement on $\bar{1}$. Kasvu väärtus punktis p on arv $f(p)$ ja see on suvalise funktsiooni $g \in \bar{f}$ väärtus punktis p . Olgu $\tilde{F}_p \subset \tilde{F}_p'$ null väärtusega kasvude hulk punktis p , st, kui $f \in \tilde{F}_p$, siis $f(p) = 0$. Siis $\tilde{F}_p$ on algebra $\tilde{F}_p'$ ideaal. Olgu $\bar{f} \in \tilde{F}_p$, $\bar{g} \in \tilde{F}_p'$. Peame näitama, et $\bar{f} \cdot \bar{g} \in \tilde{F}_p$. Tõepoolest, $f \cdot g(p) = \overline{f \cdot g}(p) = f(p) \cdot g(p) = 0 \cdot g(p) = 0$.

Definitsioon. Murtkonnal K T^n pürujuavertkruks punktis p nemeatause lineaarvuujust $v: \tilde{F}'_p \rightarrow R$, st $v(f) \in R$, kus $\bar{f} \in \tilde{F}'_p$, mis rahuldab Leibnizi valemit

$$v(\bar{f} \cdot \bar{g}) = \bar{f}(p) v(\bar{g}) + \bar{g}(p) v(\bar{f}).$$