

Olgu M, N siledad muutkonnad, $\dim M = m$, $\dim N = n$,
 $F: M \rightarrow N$ kujutus.

Definiatsioon. Kujutust $F: M \rightarrow N$ nimetatakse siledaks, kui ivalise punkti $p \in M$ korral leidub muutkonnas M lokaalne kaart (φ, U) , $p \in U$ koordinaatidega $(x^1, x^2, \dots, x^m)$ ja muutkonnas N lokaalne kaart (ψ, V) , $F(p) \in V$ koordinaatidega $(y^1, y^2, \dots, y^n)$ nii, et

1) $F(U) \subset V$,

2) kujutus $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$ on sile, st kui kirjutame koordinaatides $F = (f^1, f^2, \dots, f^n)$,
sile, st kui kirjutame koordinaatides $F = (f^1, f^2, \dots, f^n)$,
 $y^\mu = f^\mu(x^1, x^2, \dots, x^m)$, $\mu = 1, 2, \dots, n$, (1)

siis kõik koordinaatfunktsioonid f^μ on siledad. •
Kui $F: M \rightarrow N$ on sile kujutus, siis lokaalsetes koordinaatides x^i, y^μ kehtib valem (1). Defineerime kujutuse F Jacobi maatriksi

$$J_F = \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^2}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}}_m \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^2}{\partial x^m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1} & \frac{\partial y^n}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}} \right\} n \quad (2)$$

Kui osatuletised on arvutatud punktis $p \in U \subset M$, siis seda näitame järelikult $J_F|_p$. Seega Jacobi maatriks punktis p on arvmaatriks.

On ilmselge, et Jacobi maatriks sõltub lokaalsetest koordinaatidest, kuid tema astme nendest ei sõltu. Toepoolest olgu $\tilde{x}^i, \tilde{y}^\mu$ uued koordinaadid punktis p ümbruses.

Valemi (1) kuju uutes koordinaatides

$$\begin{aligned}\tilde{y}^M &= \tilde{y}^M(y^1, \dots, y^n) = \tilde{y}^M(f^1(x), f^2(x), \dots, f^n(x)) = \\ &= \tilde{y}^M(f^1(x(\tilde{x})), f^2(x(\tilde{x})), \dots, f^n(x(\tilde{x}))).\end{aligned}$$

Diferentseerime

$$\frac{\partial \tilde{y}^M}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial \tilde{y}^M}{\partial y^\nu} \cdot \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^i}.$$

Kui tähistame Jacobi matriksit uutes koordinaatides

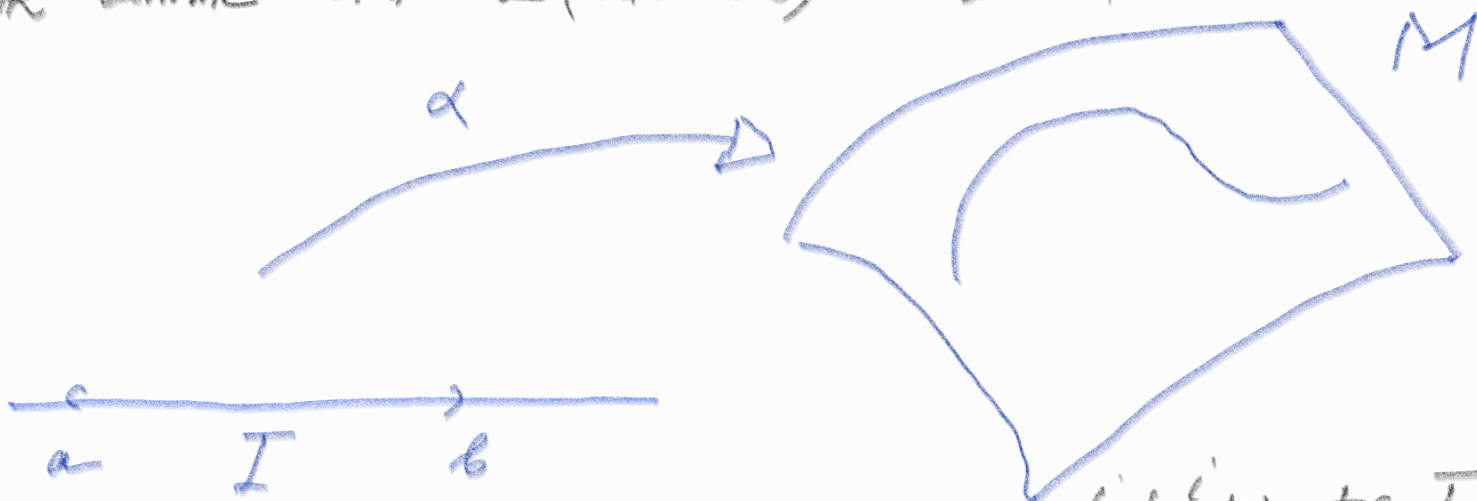
$\tilde{y}^M$, siis $\tilde{y}^M = A \cdot y^M B$, $A = \left(\frac{\partial \tilde{y}^M}{\partial y^\nu} \right)_{n \times n}$, $B = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^i} \right)_{m \times m}$

$\det A \neq 0$, $\det B \neq 0 \Rightarrow \text{rank } \tilde{y}^M = \text{rank } y^M$ suvalises punktis. Jacobi matriksi astakut nimetatakse kujutuse π astakuks ja tähistatakse $\text{rank } \pi$.

Definitsioon. Olgu $m \leq n$. Kujutust $\pi: M \rightarrow N$ nimetatakse immersioniks, kui kujutuse astak muutub M iga punktis on m , st $\text{rank } \pi = m$. Kui immersion π on injekttiivne, siis muutub M kujutist $\pi(M)$ nimetatakse N alammuutiks (immersed submanifold).

Definitsioon. Kui $\pi: M \rightarrow N$ on injekttiivne immersion ja $\pi: M \rightarrow \pi(M) \subset N$ on homeomorfism ($\pi(M)$ on topoloogilise ruumi N alamruum indutseeritud topoloogiaga), siis π nimetatakse sisestuseks (embedding). Sel juhul $\pi(M)$ on sisestatud alammuutik N (embedded submanifold).

Joone muutkonnal on rille kujutus $\alpha: I \rightarrow M$, kus I on $\mathbb{R}$ lühine alamhulk (valemik) või $I = \mathbb{R}$.



Lokaalses kaardis koordinaatidega $x^i = \xi^i(t)$, $t \in I$.
 Teame diferentsiaalgeomeetriast, et joone kiirusvektor (punktijavektor), kohal $t = t_0$ on vektor $(\xi^1(t)|_{t=t_0}, \dots, \xi^n(t)|_{t=t_0})$ kus $\xi^i(t) = \frac{d\xi^i(t)}{dt}$. Ik ei saa seda kasutada, sest kaardid tõikuvad ja nende ühisosal tekivad üleminekufunktsioonid. Punktijavektori käsitlus peab olema abstraktsion.

Olgu $\alpha: I \rightarrow M$, $\beta: J \rightarrow M$ jooned muutkonnal M kusjuures $\alpha(t_0) = p$, $\beta(\tau_0) = p$, $t_0 \in I$, $\tau_0 \in J$. Jooned läbivad muutkonnas punkti p . Olgu $\alpha: x^i = \xi^i(t)$, $\beta: x^i = \eta^i(\tau)$, kus (x^i) on lokaalsed koordinaadid punkti p ümbruses. Olgu $\text{Curves}_p M$ punkti p läbivate joonte hulk. Defineerime ekvivalentseid

$$\alpha \sim \beta \iff \left. \frac{d\xi^i(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\eta^i(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_0} \quad (\text{joonte 1. järku punktiting})$$

Ekvivalentses ei sõltu lokaalsetest koordinaatidest. Täpsemalt, olgu $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m)$ teine koordinaadisüsteem p ümbruses ja $\tilde{x}^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m)$ üleminekufunktsioonid.

Joone α parameetrisatsioon võnand teiste koordinaatides on
 $\alpha: \tilde{x}^i(t) = \xi^i(t) = f^i(\xi^1(t), \xi^2(t), \dots, \xi^m(t))$. Seega

$$\frac{d\tilde{x}^i}{dt} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f^i}{\partial x^k} \frac{d\xi^k}{dt} \cdot \frac{dx^i}{dt} \bigg|_{t_0} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k} \bigg|_p \right) \frac{d\xi^k}{dt} \bigg|_{t_0}.$$

Sit järeldub, et $\sim$ ei sõltu koordinaatidest.

Definiitsioon Muutkonna M punktiävennukis punktis $p \in M$ nimetatakse punkti p lähivate joonte ekvivalentsiklassi $[d]_p$, st $[d] \in \text{Curves}_p M / \sim$. Järgnevas tähistame $X_p = [d]_p$ ja punktiävennukite punktis p hulka $T_p M$, $T_p M$ nimetatakse muutkonna M punktiävennukis punktis p .

Lokaalne kaart (φ, U) , $p \in U$ koordinaatidega $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ määrab kujutuse $T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ järjestiselt

$$X_p = [d]_p \longrightarrow \left(\frac{d\xi^1(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0}, \frac{d\xi^2(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0}, \dots, \frac{d\xi^m(t)}{dt} \bigg|_{t=t_0} \right).$$

On ilmselge, et antud kujutus on üks-üheine. Näitame, et t_0 on pealekujutus. Olgu $(v^1, v^2, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$. Määrame joone α parameetrisatsiooniga

$\xi^i(t) = p^i + v^i(t - t_0)$, kus p^i on punkti p koordinaadid antud kaardis $\alpha(p) = p$. Kehtib $\xi(t_0) = p$, seega joon läbib punkti p . Kehtib

$$\frac{d\xi^i}{dt} \bigg|_{t=t_0} = v^i.$$

Moodustame $[d]_p = X_p$. Vektorruumi struktuur $T_p M$ -l:

$$X_p \longrightarrow (v^1, v^2, \dots, v^m), \quad Y_p \longrightarrow (w^1, w^2, \dots, w^m),$$

$$(v^1 + w^1, v^2 + w^2, \dots, v^m + w^m) \xrightarrow{\text{pöördekujutus}} X_p + Y_p.$$

Analoogiliselt arvutamine reaalarvudega.

Vektorruum $T_p M$ on isomorfe vektorruumiga $\mathbb{R}^n$.

$$\dim T_p M = n = \dim M$$

Kui on antud joon $\alpha: I \rightarrow M$ ja lokaalne kaart (φ, U) , $\alpha(I) \subset U$ koordinaatidega $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, siis alati võime teisendada koordinaadid nii, et uutes koordinaatides punkti $p \in U$ koordinaadid on nullid. Koordinaatide süsteemi parallellism. Seda üldisest, kitvendamata

ueldame, et joon α läbib punkti p ja $\alpha^i(p) = 0, i = 1, \dots, n$.

Olgu $C^\infty(U)$ reaalväärtiste funktsioonide algebra ja $(C^\infty(U))^*$ selle kaaruum, st kõikvõimalikud lineaarfunktsionaalid $C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Defineerime kujutuse $T_p M \rightarrow (C^\infty(U))^*$

järgmiselt:

Võtame ühe punktija vektori $X_p = [\alpha]_p$, võtame ühe joone antud ekvivalentsiklassist α , f on mingi selle funktsioon $f \in C^\infty(U)$,

$$X_p \in T_p M \mapsto v \in (C^\infty(U))^*$$

$$v(f) = \frac{d}{dt} (f|_\alpha) \Big|_{t=t_0}, \alpha(t_0) = p.$$

See on tuttav numeraletit, v ei sõltu α valikust. Täpsemalt, kui $\alpha \sim_p \beta$, $\alpha: x^i = \xi^i(t)$, $\beta: x^i = \eta^i(\tau)$, siis

$$v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \frac{d\xi^i(t)}{dt} \Big|_{t=t_0}, \quad v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p \frac{d\eta^i(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}.$$

ekvivalentsikuse definitsiooni kohaselt need on võrdsed

Kehitib $v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) v(g)$, $\forall f, g \in C^\infty(U)$.

Toepfoelst

$$\begin{aligned} v(f \cdot g) &= \frac{d}{dt} \left((f \cdot g)|_\alpha \right) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} (f|_\alpha \cdot g|_\alpha) \Big|_{t=t_0} = \\ &= \frac{d(f|_\alpha)}{dt} \Big|_{t=t_0} \cdot g(p) + f(p) \frac{d(g|_\alpha)}{dt} \Big|_{t=t_0} = \\ &= v(f) \cdot g(p) + f(p) v(g). \end{aligned}$$

Näitame, et kujutus on pealekujutus. Olgu $v \in (C^\infty(U))^n$.

Näitame, et leidub $\chi_p: T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Kehitib enamuses:

kui a on konstantne funktsioon, siis $v(a) = 0$.

$$v(a) = v(a \cdot \bar{1}) = a v(\bar{1}),$$

$$v(\bar{1}) = v(\bar{1} \cdot \bar{1}) = v(\bar{1}) + v(\bar{1}) = 2v(\bar{1}) \Rightarrow v(\bar{1}) = 0.$$

Olgu $f \in C^\infty(U)$. Siis arendame vaks punkti p ümber:

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p x^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p x^i x^j + \dots$$

Nüüd arvestame

$$\begin{aligned} v(f(p)) &= 0, \quad v\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p x^i x^j\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_p \left(v(x^i) x^j(p) + \right. \\ &\quad \left. + x^i(p) v(x^j) \right). \end{aligned}$$

On ilmne, et kõrgemat järku liikmed on ka nullid.

Seega

$$v(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p v(x^i)$$

Olgu $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow U$, $\alpha(t) = \alpha(t - t_0)$. Siis $v(f) = \frac{d}{dt} (f|_\alpha) \Big|_{t=t_0}$.