

Vektorväljad ja vormid.

Olgu M nile m -mõõtmeline muutkond, TM puutujakihtkond, $\pi: TM \rightarrow M$ projektsioon kujutist $X: M \rightarrow TM$ nimetatakse vektorväljaks muutkonnal M , kui X on nile kujutus ja $\pi \circ X = \text{id}_M$. Kui (φ, U) on muutkonnal M lokaalne kaart koordinaatidega $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, siis vektorvälja X lokaalne kuju on

$$X|_U = \sum_{i=1}^m X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kus $X^i \in \tilde{C}(U)$ on siledad funktsioonid. Kui lokaalsed kaardid kattuvad $(\varphi, U), (\psi, V), U \cap V \neq \emptyset$, koordinaadid teises kaardis on $(y^1, y^2, \dots, y^m)$ ning ülemineku-funktsioonid on $x^i = x^i(y)$, $y^j = y^j(x)$, siis kehtivad valemid

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$$X^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tilde{X}^j, \quad \tilde{X}^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} X^i.$$

Kus X^i on vektorvälja komponendid kaardis (φ, U) ja $\tilde{X}^j$ kaardis (ψ, V) . Vektorväli X on invariantne, st

$$X|_{U \cap V} = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X|_{U \cap V} = \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial y^j},$$

$$X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \tilde{X}^j \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^k} = \tilde{X}^j \underbrace{\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}}_{\text{matrikskomutamine}} \frac{\partial}{\partial y^k}$$

$$= \tilde{X}^j \delta_j^k \frac{\partial}{\partial y^k} = \tilde{X}^j \frac{\partial}{\partial y^j}, \text{ seega nad on vöõrded.}$$

Vektorvõli on kujutus $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ omadusega

$$X(f \cdot g) = X(f)g + fX(g).$$

Seega vektorvõli on siledate funktsioonide algebra derivatsioon. Lokaalselt

$$X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \text{ kus } (x^1, x^2, \dots, x^n) \text{ on lokaalsed koordinaadid.}$$

Olgu $p \in M$ muutkonna punkt. $T_p M$ on muutkonna punktijaruum. Olgu $T_p^* M$ muutkonna kaaspunktijaruum. Moodustame üheidi $T^* M = \bigcup_p T_p^* M$. $T^* M$ nimeprojektsioon $\pi: T^* M \rightarrow M$, $p \in M$ tatakse kaaspunktijakihtkonnaks. $T^* M$ on $2n$ -mõõtmeline sile muutkond. Sileda muutkonna struktuur:

$T_p^* M$ baas on $\{dx^1/p, dx^2/p, \dots, dx^n/p\}$, kus $dx^i/p \left(\frac{\partial}{\partial x^j/p} \right) = \delta_j^i$, st lokaalne kaart (φ, U) koordinaatidega

$(x^1, x^2, \dots, x^n)$, $\pi^{-1}(U) \subset T^* M$, lokaalsed koordinaadid defineerime jõõgniselt: kui $p \in U$, $\omega_p \in \pi^{-1}(p) = T_p^* M$, siis $\omega_p \rightarrow (x^1(p), \dots, x^n(p), (\omega_p)_1, \dots, (\omega_p)_n)$, kus

$$\omega_p = (\omega_p)_i dx^i/p.$$

Kuidas teisenduvad koordinaadid? leiame

$$dx^i/p = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k/p, \quad (\omega_p)_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \cdot (\tilde{\omega}_p)_k$$

Järelkult, kui kaardid kattuvad, siis kehtib

$$\omega_p \begin{cases} \rightarrow (x^1|_p, \dots, x^m|_p, (\omega_p)_1, \dots, (\omega_p)_m), \quad \omega_p = (\omega_p)_i \cdot dx^i|_p, \\ \rightarrow (y^1|_p, \dots, y^m|_p, (\tilde{\omega}_p)_1, \dots, (\tilde{\omega}_p)_m), \quad \omega_p = (\tilde{\omega}_p)_i \cdot dy^i|_p, \end{cases}$$

ja $x^k = x^k(y^1, y^2, \dots, y^m), \quad \omega_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \tilde{\omega}_k$

kaas muutkonna M atlaste
üleminekufunktsioonid
(siledad!)

siledad
funktsioonid

sõltuvus
rendest on
lineaarne, seega
sile!

Seega kaaspunkti ja kihtkond T^*M on $2m$ -mõõtmeline
sile muutkond, $\dim T^*M = 2m$.

Def. Differentsiaalvormis (1-vormis) muutkonnal M
nimetatuse siledat kujutust $\omega: M \rightarrow T^*M$, mis
rahuldab $\pi \circ \omega = \text{id}_M$. Seega 1-vorm ω muut-
konnal M on kaaspunkti ja kihtkonna T^*M koige.

1-vormi lokaalne kuju $\omega|_U = \omega_i dx^i$, kus $\omega_i \in C^\infty(U)$.
 $x^1, \dots, x^m$ on lokaalsed koordinaadid. 1-vormide vektor-
ruumi tähistame $\Omega^1(M)$. See on moodel üle $C^\infty(M)$.

Järgmine samm on z -vormide vektorruum. Tehakse
analoogiliselt. Olgu $2 \leq z \leq m$.

$$T_p^*M \rightarrow \wedge^z T_p^*M, \quad \theta_p \in \wedge^z T_p^*M.$$

$\theta: \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_z \rightarrow \mathbb{R}$ + täielikult kaltsümmeetriline,
st

$$\theta_p(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = (-1)^{|\sigma|} \theta_p(v_1, \dots, v_r),$$

uno σ on arvude $1, 2, \dots, r$ permutatsioon ja $|\sigma|$ selle paarisus. Lokaalsetes koordinaatides $x^1, x^2, \dots, x^m$ vektorruumi $\wedge^r T_p^* M$ baas on $dx^i_1 \wedge dx^i_2 \wedge \dots \wedge dx^i_r$,

kus

$$dx^i_1 \wedge \dots \wedge dx^i_r(v_1, \dots, v_r) = \begin{vmatrix} dx^i_1(v_1) & \dots & dx^i_r(v_1) \\ dx^i_1(v_2) & \dots & dx^i_r(v_2) \\ \vdots & & \vdots \\ dx^i_1(v_r) & \dots & dx^i_r(v_r) \end{vmatrix}$$

Moodesteri ühend $\wedge^r T^* M = \bigcup_p \wedge^r T_p^* M$. See on rille muutkond, $\dim \wedge^r T^* M = \sum_{\text{st}} \binom{m}{r}$

$$\dim \wedge^r T^* M = \frac{m!}{(m-r)! r!}$$

Tal on vektorkihtkonna struktuur, igas punktis on kiht (vektorruum). Selle järest nim. r -vormide kihtkonnaks. Baasmuutkonna atlas $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ tekitab muutkonna $\wedge^r T^* M$ atlatse.

$$\theta_p \in \pi^{-1}(\phi) \longrightarrow (x^1(\phi), \dots, x^m(\phi), (\theta_p)_{i_1 \dots i_r}),$$

$$\theta_p = \frac{1}{r!} (\theta_p)_{i_1 i_2 \dots i_r} dx^i_1 \wedge \dots \wedge dx^i_r.$$

Siledus järeldeb valeonist

$$\theta_{i_1 \dots i_r} = \underbrace{\frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial y^{k_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}}}_{\text{siledate funktsioonide korrutis}} \underbrace{\theta_{k_1 k_2 \dots k_r}}_{\text{polinomiaalse sõltuvus} \Rightarrow \text{tile!}}$$

siledate funktsioonide korrutis

polinomialne sõltuvus $\Rightarrow$ tile!

k -vorm on $\wedge^k T^*M$ üle kõige ühe ridade korgete vektorruumi tähistame $E(\wedge^k T^*M)$, mis

$$\Omega^k(M) = E^\infty(\wedge^k T^*M)$$

on ridade k -järuu diferentsiaalvormide vektorruum. Silede muutonna diferentsiaalvormide algebra

$$\Omega(M) = \Omega^0(M) + \Omega^1(M) + \dots + \Omega^m(M),$$

kus $\Omega^0(M) \cong C^\infty(M)$ ja kommutisthe on $\wedge$ väliskommutis. Lokaalne struktuur (φ, U) koordinaadid $x^1, \dots, x^m$: kui ahendame $\Omega(M)|_U$, mis algebra lokaalsed moodustajad on $(dx^1, dx^2, \dots, dx^m)$, väliskommutise omadused:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m$$

$$dx^i \wedge dx^i = (dx^i)^2 = 0.$$

$$(dx^i \wedge dx^j) \wedge dx^k = dx^i \wedge (dx^j \wedge dx^k),$$

$$\omega|_U = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

1) kui $\omega \in \Omega^r(M)$, $\theta \in \Omega^s(M)$, mis $\omega \wedge \theta \in \Omega^{r+s}(M)$;

2) assotiativne $(\omega \wedge \theta) \wedge \rho = \omega \wedge (\theta \wedge \rho)$;

3) gradueritud kommutatiivne $\omega \wedge \theta = (-1)^{rs} \theta \wedge \omega$.

Välis diferentsiaal $d: \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r+1}(M)$ on lineaarkujutus, mis rahuldab

$$1) d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta, \quad \omega \in \Omega^r(M),$$

gradueritud Leibnizi valeom (graded Leibniz rule),

$$2) d^2 = 0.$$

Lokaalsetes koordinaatides: kui f on funktsioon, siis

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (\text{langeb kokku täisdiferentiaal-}$$

mei $\omega = \omega_i dx^i$, siis $d\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$

kui $\omega = \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$, siis

$$d\omega = d\omega_{i_1 \dots i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} =$$

$$= \frac{1}{(r+1)!} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_{i_1 \dots i_r} \right] dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \text{ kus } [\] \text{ on}$$

indekseite altereerimine

Näiteks, $\omega = \omega_i dx^i$, siis

$$d\omega = \frac{1}{2} d\omega_i \wedge dx^i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i dx^j \wedge dx^i =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i - \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_j \right) dx^j \wedge dx^i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \omega_i - \frac{\partial}{\partial x^i} \omega_j \right) dx^i \wedge dx^j$$

Üldine struktuur on tensorite vektorruumide

$T^{(r,s)}M$. Alustame ühest punktist $p \in M$. Moodusta-

me vektorruumide tensorikorrutise

$$T_p^{(r,s)}M = \underbrace{T_p M \otimes \dots \otimes T_p M}_r \otimes \underbrace{T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_s$$

Moodustame ühendi

$$T^{(r,s)}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{(r,s)}M$$

(r,s) -tensorite kühikond

Selle kühikonna loiget $t: M \rightarrow T^{(r,s)}M$ nim.

(r, s) -tensorväljak. Lokaalses koordinaatides x^i

$$t_p = (t_p)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \Big|_p$$

Kõik mõisted on ühe struktuuri raames.

Erijuhul, kui $r=1, s=0$, st $T^{(1,0)}M \equiv TM$,
 $T^{(0,0)}M$ on punktjakkidevõrg. Kui $r=0, s=1$, siis
 $T^{(0,1)}M \equiv T^*M$ (kaaspunktjakkidevõrg).

Riemanni struktuur muutkonnal.

Vaatleme $(0,2)$ -tensorite kihtkonda $T^{(0,2)}M$. Selle kihtkonna element muutkonna punktis $p \in M$ on bilineaarvorm, tähistame $g_p: T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Lokaalses kaardis (φ, U) koordinaatidega tema kujul on

$$g = g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \quad \rightarrow \text{punktis } p$$

g on positiivselt määratud, kui $\forall v \in T_p M$, kehtib
 $g_p(v, v) \geq 0$, kusjuures $g_p(v, v) = 0 \iff v = 0$.

Def. $(0,2)$ -tensorite kihtkonna $T^{(0,2)}M$ siledat toiget

$g: M \rightarrow T^{(0,2)}M$ nimetatakse Riemanni meetrikaks.

Kui muutkonna igas punktis p bilineaarvorm g_p on positiivselt määratud. Paari (M, g) nimetatakse

Riemanni muutkonnaks.

Kujutuse diferentiaal ja pull-back

Ogu $\varphi: M \rightarrow N$ side kujutus, M, N siledad muut-
konnad. Ogu $p \in M$ muutkonna M punkt. Kujutus
 φ tekitab uue kujutuse $\varphi_*: TM \rightarrow TN$ järgmiselt:
ogu $v \in T_p M$ muutkonna M punktijavektori punktis
 p , ogu f side funktsioon muutkonna N punktis
 $\varphi(p)$ ümbruses, defineerime $\varphi_*(v) \in T_{\varphi(p)} N$ valemiga
 $\varphi_*(v)(f) = v(f \circ \varphi)$.

See on kujutuse φ_* definitsioon muutkonna M punktis p .
Seega $\varphi_*: T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$. Nüüd defineerime $\tilde{\varphi}_*: TM \rightarrow TN$
valemiga $\tilde{\varphi}_*(p, v) = (\varphi(p), \varphi_*(v))$.

1) φ_* on lineaarkujutus muutkonna M suvalises punktis,
 $\varphi_*(v + \lambda w)(f) = (v + \lambda w)(f \circ \varphi) = v(f \circ \varphi) + \lambda w(f \circ \varphi) =$
 $= \varphi_*(v)(f) + \lambda \varphi_*(w)(f), \quad \lambda \in \mathbb{R},$

2) lokaalsetes koordinaatides: (x^i) on lokaalsed koor-
dinaadid punktis p ümbruses, (y^μ) on lokaalsed koor-
dinaadid punktis $\varphi(p)$ ümbruses, $i = 1, 2, \dots, m, \mu = 1, 2, \dots, n$.

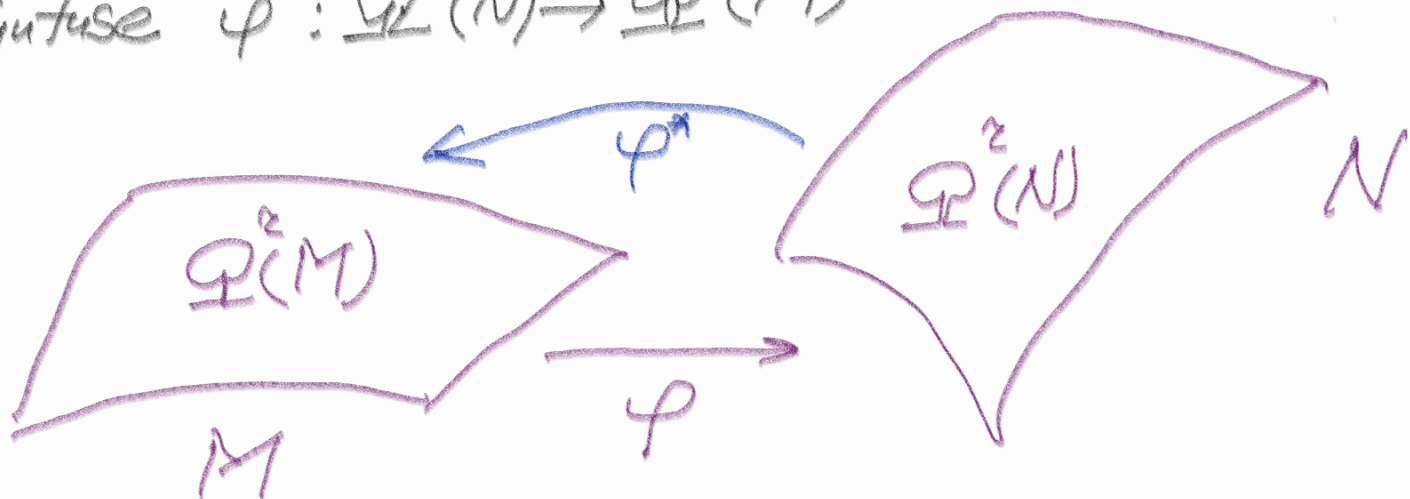
Keei
 $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad \varphi_*(v) = w^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Big|_{\varphi(p)},$ siis

$$w^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^i} \Big|_p v^i, \quad \text{kus } \varphi: y^\mu = y^\mu(x^1, x^2, \dots, x^m)$$

Maatriksit $(\frac{\partial y^M}{\partial x^i})$ nim kujutuse φ Jacobi maatriksiks.

Kujutus φ_* nim. kujutuse φ diferentiaalsiks või puntuukujutuseks (tangent mapping).

Pull-back Sile kujutus $\varphi: M \rightarrow N$ tekitab veel ühe kujutuse $\varphi^*: \Omega^r(N) \rightarrow \Omega^r(M)$



Definitsiooni valemiga

$$(\varphi^* \omega)(v_1, v_2, \dots, v_r) = \omega(\varphi_*(v_1), \varphi_*(v_2), \dots, \varphi_*(v_r))$$

kus $\omega \in \Omega^r(N)$, $v_1, v_2, \dots, v_r \in T_p M$, $\varphi^* \omega \in \Omega^r(M)$.

Lokaalsetes koordinaatides:

$$(x^i), (y^M), \varphi: y^M = y^M(x), \omega = \sum_{i_1, \dots, i_r} \omega_{i_1, \dots, i_r} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_r}$$

$$\varphi^*(\omega) = \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r} \omega_{i_1, \dots, i_r}(x) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{j_r}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_r}$$

Näiteks, $\gamma: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$



Tasandil on antud 1-vorm $\omega = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$. leiame

$$\gamma^* \omega = \frac{-\sin t (-\sin t) dt + \cos t \cdot \cos t dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = dt$$

Kui on antud suvaline rööp $\gamma: (a, b) \rightarrow M$, siis defineerime

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \gamma^* \omega, \quad \omega \in \Omega^1(M).$$

Defineerime $\partial \gamma = \gamma(b) - \gamma(a)$. Kui γ on kinnine, siis $\gamma(b) = \gamma(a)$, siis $\partial \gamma = 0$, γ on triinkel. Kui $\omega = df$, siis

$$\int df = f(B) - f(A), \quad B = \gamma(b), \quad A = \gamma(a).$$

Seega, kui γ on triinkel, siis $\int_{\gamma} df = 0$. Arvutame

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Seega, ω ei ole täpne !!! Aga kinnine. $[\omega]$ on muutkonna $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ kohomoloogiate moodustaja.

φ^* omadused:

- 1) $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = \varphi^*(\omega) \wedge \varphi^*(\theta)$,
- 2) $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$,
- 3) $\varphi^*(\omega + f\theta) = \varphi^*(\omega) + f \cdot \varphi^*(\theta)$