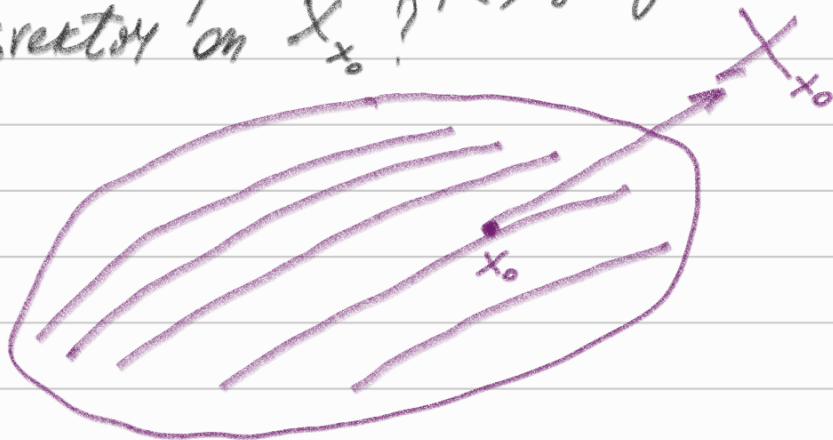


Lie tuletis (Lie derivative)

Alustame ruumist $\mathbb{R}^m$. Olgu $U \subset \mathbb{R}^m$ lühine alamhulk, X rde vektorväli alamhulgal U . Küsimus:

Kas leidub joonte paarv (voog) $\varphi(t, x)$, kus $x \in U$, t on parameeter, selline, et igit punkti $x_0 \in U$ läbib üks, ja ainult üks joon sellest paarvest $\varphi(t, x_0)$ ja selle joone kiirusvektor on X_{x_0} ?



Vastus on jaatav. Selliste joonte leidmiseks peame lahendama diferentsiaalvõrandisüsteemi:

$$\frac{d\varphi^i}{dt} = X^i(\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t)), \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

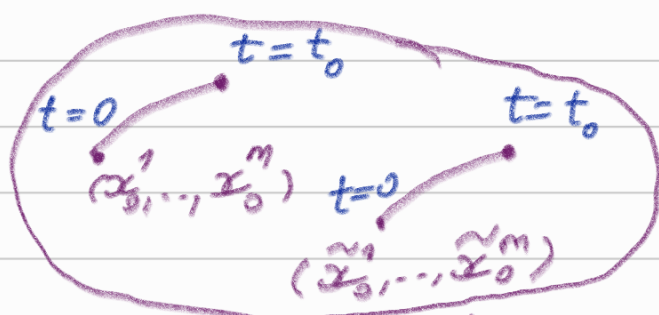
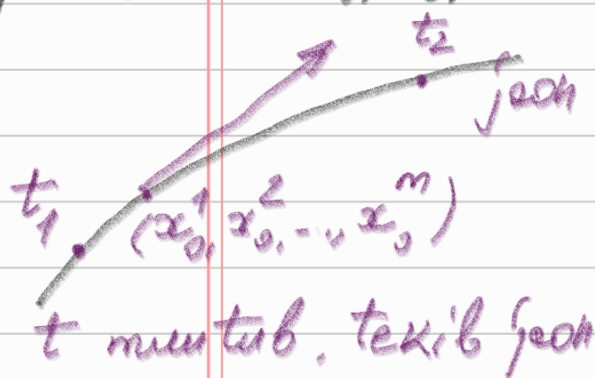
kus $x^i = \varphi^i(t)$, algtingimus on $\varphi^i(0) = x_0^i$, st joon läbib punkti x_0 . Siin on $\varphi^i(t)$ tundmatud funktsioonid, $X^i(x)$ on antud funktsioonid, sest vektorväli X eeldase kohaselt on antud. Diferentsiaalvõrandite teoorias tõestatakse teoremi, et

- 1) leidub võrandisüsteemi (1) lahend $\varphi^i(t, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$, kus funktsioon φ^i sõltub nii parameetrist t , kui ka algtingimustest sõltvalt, $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\varphi^i(0, x_0^1, \dots, x_0^m) = x_0^i$,
- 2) antud lahend on aenus $\iff$ kui $\varphi(t, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$ on mingi teine lahend, $t \in J \subset \mathbb{R}$, siis $J \subset I$ ning $\varphi|_J \equiv \varphi$,

3) kui $t, s, t+s \in I$, siis

$$\begin{aligned}\varphi^i(t+s, x_0^i) &= \varphi^i(s, \varphi^1(t, x_0^i), \dots, \varphi^m(t, x_0^i)) = \\ &= \varphi^i(t, \varphi^1(s, x_0^i), \dots, \varphi^m(s, x_0^i)).\end{aligned}$$

Parametriseeritud joont $x^i = \varphi^i(t, x_0^1, \dots, x_0^m)$ nim. vektorvälja X integraaljoones punktis $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$. Selle joone kiirusvektor on vektor X_{x_0} . Läheb rittub (riledata) algtingimusteks $(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m) \in \mathcal{U}$.



Seega, fikseeritud t korral tekib kujutus $(x_0^1, \dots, x_0^m) \rightarrow \varphi(t, x_0^1, \dots, x_0^m)$.

tähistame $\varphi_t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$, et $\varphi_t(x^1, \dots, x^m) = \varphi(t, x^1, \dots, x^m)$.

1) φ_t on ritle kujutus,
2) $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ on ritle kujutus } $\varphi_t: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ on diffeomorfism!

3) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$, $\varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{U}}$.

Järelikult φ_t on diffeomorfismide kommutatiivne üheparameetriline zühm (one parameter group of diffeomorphisms).

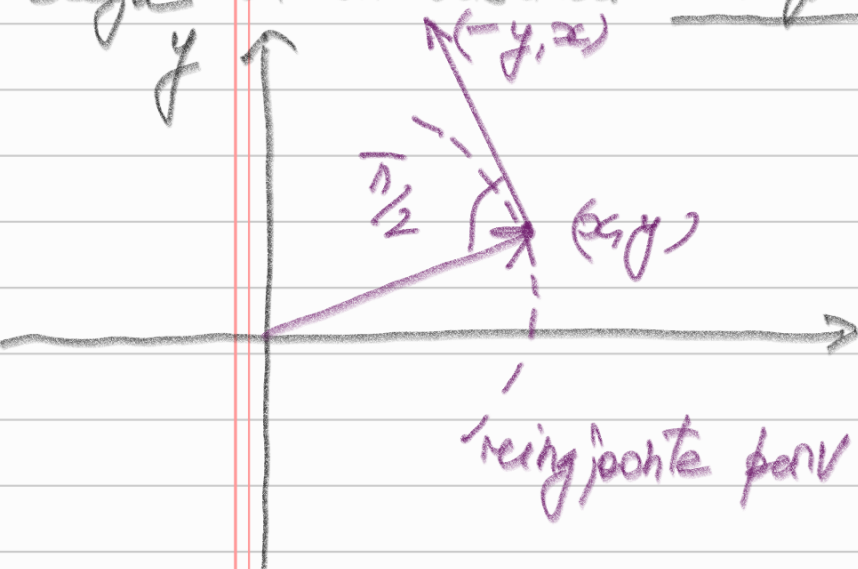
Näide. X on vektorväli tasandil $\mathbb{R}^2$ ($m=2$)

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y},$$

mis (x, y) on tasandi ristkoordinaadid. On ilmsel, et X on nile vektorväli. Kirjutame komponendid abil

$$X(x, y) = (-y, x).$$

Seega X on tasandi kompleksne struktuur.



Lahendame süsteemi

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Esimesest võrrandist

$$x'' = -y'.$$

Seega $x'' + x = 0$

Otsime kujul $x = A \cos t + B \sin t$ leiene

$$x' = -A \sin t + B \cos t, \quad x'' = -A \cos t - B \sin t \Rightarrow x'' + x = 0.$$

Algtingimused, kui $t=0$ läbib punkti (x_0, y_0) . Seega

$$x_0 = A, \quad y_0 = A \sin t - B \cos t, \quad y_0 = -B$$

Lahend

$$\begin{cases} x = x_0 \cos t - y_0 \sin t \\ y = x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{cases}$$

Matrikskuju

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

leidame, et antud juhul diffeomorfismide 1-paramet-

iline rühm on tasandi pöörete rühm. Vektorväli
 $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$ indutseerib tasandi pöörete rühma
 $SO(2)$

Def Siledat kujutust $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ nimetatakse
 muutkonna M diffeomorfismide 1-parametri-
 liseks rühmaks, kui $(t, x) \xrightarrow{\varphi} \varphi_t(x)$

- 1) $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_t: M \rightarrow M$ on muutkonna diffeomor-
 fism,
- 2) $\varphi_0 = \text{id}_M$ on muutkonna samasustisendev,
- 3) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{t+s}, \forall t, s \in \mathbb{R}.$

See on reaalarvude aditiivse rühma $(\mathbb{R}, +)$ nile toi-
me muutkonnal M , st homomorfism

$$\mathbb{R} \longrightarrow \text{Diff}(M)$$

kus $\text{Diff}(M)$ on muutkonna M diffeomorfismide rühm.
 Kui φ_t on muutkonna diffeomorfismide 1-parametri-
 line rühm, siis φ_t tekitab vektorvälja X muutkon-
 nal M , kus

$$X(f) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$$

Lokaalses koordinaatides $x^i = \varphi^i(t, p)$, $\varphi^i(0, p) = p^i$,
 arvestades ritta t järgi punktis $t=0$, saame

$$\varphi^i(t, p) = \varphi^i(0, p) + \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + O(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{O(t)}{t} = 0.$$

$$= p^i + \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + O(t),$$

$$f\left(p^i + \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + O(t)\right) = f(p) + \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \cdot \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0} \cdot t + O(t)$$

$$X_p(f) = \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \Rightarrow X_p^i = \left. \frac{d\varphi^i(t, p)}{dt} \right|_{t=0},$$

$$X_p = X_p^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

Difeomorfismide lokaalne 1-parametriline rühm φ_t :

olgu $I_\varepsilon = (-\varepsilon, +\varepsilon)$, $U \subset M$ lehtine alamdualk,

siis $\varphi: I_\varepsilon \times U \rightarrow M$, mis rahuldab:

$$1) \forall t \in I_\varepsilon, \text{ kaardutus } \varphi_t: p \in U \rightarrow \varphi_t(p) = \varphi(t, p) \in \varphi_t(U)$$

on diffeomorfism.

$$2) \text{ kui } t, s, t+s \in I_\varepsilon \text{ ja } p, \varphi_s(p) \in U, \varphi_t(p) \in U, \text{ «ehidib»}$$

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p)) = \varphi_s(\varphi_t(p)).$$