

Peakihtkond, vektorikihtkond, seostus

1. Lie rühma mõiste. Lie rühm G on

- a) side n -mõõtmeline muutkond, $\dim G = n$,
- b) algebraline rühm, st on antud korrutamisteha
 $(g, h) \in G \times G \rightarrow g \cdot h \in G$,
kattuvad i) assotiativsus, ii) pöördelomendi olemasolu,
iii) ühikelement $e \cdot g = g \cdot e = g$.
- c) korrutamisteha $G \times G \rightarrow G$ ja pöördelomendi kujutus
 $g \in G \rightarrow g^{-1} \in G$ on rühmad kujutused.

Näide. $G = GL(n; \mathbb{R})$, $G = GL(n; \mathbb{C})$, kus

$$GL(n; \mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\},$$

$\mathbb{K}$ on korpus kas $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$, $M_n(\mathbb{K})$ on $n \times n$ -maatriksid.

Näitame, et $GL(n; \mathbb{R})$ on Lie rühm. Olgu $A, B \in GL(n; \mathbb{R})$,
kus $A = (A_{ij}^1)$, $B = (B_{kl}^2)$. Kattub $GL(n; \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

$M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, seega $M_n(\mathbb{R})$ on triviaalne muutkond.

Funktsioon $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. $\det$ on pidev funktsioon

$$\det A = \sum_{\sigma} (-1)^{p(\sigma)} A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \dots A_{n\sigma(n)},$$

kus σ on arvude $1, 2, \dots, n$ permutatsioon. Järelikult
kõik $n \times n$ -maatriksid determinandiga 0 (kidevad maatriksid) moodustavad kinnise hulga $\mathbb{R}^{n^2}$, st $f = \det$

$f^{-1}(0) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 0\}$ on kinnine alam-
 hulk $\mathbb{R}^n$, f on pidev $\Rightarrow f^{-1}(0)$ on kinnine $\mathbb{R}^n$.
 Seega $GL(n; \mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R}) - f^{-1}(0)$ on lahtine $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ side muutkond, $\dim GL(n; \mathbb{R}) = n^2$. Analogiliselt
 $GL(n; \mathbb{C})$.

Näide $SU(2) \subset GL(2; \mathbb{C})$. Kui $A \in SU(2)$, siis
 ta rahuldab

$$\begin{cases} \underbrace{A \bar{A}^T = \bar{A}^T A = I}_{\text{unitaarsus}} \\ \det A = 1. \end{cases} \quad (\text{speetriaalsed maatriksid})$$

Olgu $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{z} \\ \bar{y} & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Peab kehtima $\begin{cases} xu - yz = 1, \\ |x|^2 + |y|^2 = 1, \\ x\bar{z} + y\bar{u} = 0, \\ |z|^2 + |u|^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow u = \bar{x}, z = -\bar{y}$

$x \neq 0$, $x\bar{z} = -y\bar{u}$, $\bar{z} = -\frac{y\bar{u}}{x}$, $z = -\frac{u\bar{y}}{\bar{x}}$, $xu + y \cdot \frac{u\bar{y}}{\bar{x}} = 1$
 $u(|x|^2 + |y|^2) = \bar{x} \Rightarrow u = \bar{x}$. Kolmas võrand $\Rightarrow x\bar{z} + y\bar{x} = 0$

$\Rightarrow z = -\bar{y}$.
 $x = 0$, siis $y \neq 0$. Esimene võrand $\Rightarrow z = -\frac{1}{y} = -\frac{\bar{y}}{|y|^2} = -\bar{y}$, seega $z = -\bar{y}$. Järelikult

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$, $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

Kui $z = x_1 + ix_2, y = x_3 + ix_4$, siis $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$.
 Järelikult $SU(2) \cong S^3$. Seega $\dim SU(2) = 3$.

Kehtib väide: Lie rühma $GL(n; \mathbb{C})$ kinnine alamrühm on Lie rühm, mida nimetatakse Lie maatriksrühmaks.

Näide: $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det A = 1\}$,
 $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$.

Lie rühma Lie algebra. Olgu G Lie rühm ja $T_e G$ punktijameen punktis e (Lie rühma ihikelement).
 Kui $X \in T_e G$ on punktijavektor punktis e , siis ta tekitab Lie rühma G iihetäparameetrilise alamrühma

$g_t = \exp(tX), -\delta < t < \delta$,
 kus $\forall t$ korral $g_t \in G, g_0 = e, g_{t+s} = g_t \cdot g_s$. Kui Lie rühm on Lie maatriksrühm, siis X on maatriks ja
 $g_t = e^{tX} = I + tX + \frac{1}{2!} t^2 X^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k X^k$.

Järgnevas eeldame, et G on Lie maatriksrühm. Onalused:

- 1) $e^0 = I$
- 2) $e^{X^T} = (e^X)^T, (e^X)^T = e^{\overline{X}^T} = e^{-X^T}$
- 3) Kui A on pööratav, siis $A^{-1} e^X A = e^{A^{-1} X A}$
- 4) $\det(e^X) = e^{\text{tr} X}$
- 5) Kui $X \cdot Y = Y \cdot X$, siis $e^{X+Y} = e^X \cdot e^Y$
- 6) $(e^X)^{-1} = e^{-X}$, 7) $e^{X+Y} = \lim_{m \rightarrow \infty} (e^{\frac{1}{m} X} e^{\frac{1}{m} Y})^m$

Lie algebra L on vektorruum üle korpusse K (meie kursuses $K = \mathbb{R}, K = \mathbb{C}$) kommutatiivsestega

$$[x, y] \in L \times L \rightarrow [x, y] \in L, \text{ (Lie sulg)}$$

mis rahuldab

$$1) [x, y] = -[y, x], \quad 2) [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.$$

Jacobi samasus

Olgu G Lie maatriksrühm, $G \subset GL(n; \mathbb{C})$. G punktija-ruumi punktis $e = I$ defineerime järgneselt:

$$T_e G = \{ X \in M_n(\mathbb{C}) : e^{tX} \in G \text{ suvalise } t \in \mathbb{R} \text{ korral} \}.$$

$T_e G$ on vektorruum üle $\mathbb{R}$. Tõepoolest, kui $X \in T_e G$, siis võtame aX , kus $a \in \mathbb{R}$. Kehtib $\forall t \in \mathbb{R}$ korral

$$e^{t(aX)} = e^{atX} \in G, \quad at \in \mathbb{R}.$$

Kui $X, Y \in T_e G$, siis

$$e^{t(X+Y)} = e^{tX+tY} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{t}{n}X} e^{\frac{t}{n}Y} \right)^n \in G.$$

Defineerime

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} (e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX}) \right|_{t=0}.$$

Kui $X, Y \in T_e G$, siis $[X, Y] \in T_e G$. Tõepoolest,

$$e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX} \in T_e G, \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ (omadus 3). Kehtib}$$

$$e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX} = e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX} \in G.$$

Nüüd kasutame Leibnizi valemit.

Kehiti

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} (e^{tX}) \Big|_{t=0} Y \cdot e^0 + e^0 \cdot Y \frac{d}{dt} (e^{-tX}) \Big|_{t=0} = \\ = X \cdot Y - Y \cdot X.$$

Vektorruumi $T_e G$ on koos kommutatoriga $[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$ himetatuse Lie maatriksrühma G Lie algebraks.

Näide $G = SU(2)$. Olgu Lie algebra tähistatud $su(2)$. Siis, kui $X \in su(2)$, siis $e^{tX} \in SU(2)$, seega $e^{tX} (\overline{e^{tX}})^T = I$, $\det e^{tX} = 1$.

Kehiti

$$e^{t(X + \bar{X}^T)} = I \iff X + \bar{X}^T = 0, \text{ (anti-Hermiti mat.)}$$

$$\det e^{tX} = 1 \iff \text{Tr } X = 0.$$

Seega $su(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^T = 0, \text{Tr } X = 0\}$.

Kehiti

$$\forall X, Y \in su(2), [X, Y] \in su(2), [X, Y] + \overline{[X, Y]}^T = XY - YX + \\ + \overline{(XY - YX)}^T = XY - YX + Y^T \bar{X}^T - \bar{X}^T \bar{Y}^T = XY - YX + YX - \\ - XY = 0, \text{Tr } [X, Y] = 0.$$

Pauli maatriksid

$$\sigma_x = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_y = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$$

Pauli maatriksid on Hermiti maatriksid $\sigma_i = \bar{\sigma}_i^T$.

Kui korutada i , siis nad muutuvad anti-Hermite'i maatriksiteks. Seega $i\sigma_i$ on $su(2)$ generaatorid (baas).
 Tähistame $\tilde{\sigma}_i = i\sigma_i$. Siis

$$\tilde{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Kehitib

$$[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2] = 2\tilde{\sigma}_3, \quad [\tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3] = 2\tilde{\sigma}_1, \quad [\tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_1] = 2\tilde{\sigma}_2$$

Näide $so(3)$. Ogu Lie algebra tähistatud $so(3)$.

Siis

$$so(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : e^{tX} \in SO(3), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Seega

$$e^{tX} (e^{tX})^T = I, \quad e^{tX} e^{tX^T} = I, \quad X + X^T = 0,$$

$$\det(e^{tX}) = 1, \Rightarrow \text{Tr } X = 0,$$

$$so(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X = -X^T, \text{Tr } X = 0\}$$

Teoreem. Lie algebrad $su(2)$ ja $so(3)$ on isomorfsed, st
 $su(2) \cong so(3)$.

Tõestus. Ogu $X \in su(2)$. $X \rightarrow \text{ad } X$, kus $\text{ad } X(Y) = [X, Y]$

Seega meil on kujutus $X \in su(2) \rightarrow \text{ad } X \in \text{Lin}(su(2))$.

Kehitib

$$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y].$$

Seega $\text{ad}: su(2) \rightarrow \text{Lin}(su(2))$ on Lie algebrate homo-
 morfism. Tõestuse põhimoment: $su(2)$ on Euklidiline
 ruum meetrikaga $\det X$. Tõepoolest, ogu $X = x\tilde{\sigma}_1 + y\tilde{\sigma}_2 +$
 $+ z\tilde{\sigma}_3$, siis

$$X = \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}, \text{Det } X = x^2 + y^2 + z^2.$$

Rühma $SU(2)$ adjungeeritud esitus: olgu $A \in SU(2)$,
 $A \rightarrow \text{Ad}(A)X = AXA^{-1} \in \mathfrak{su}(2)$. Seega meil on
 rühma esitus $\text{Ad}: SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{su}(2))$. Kettib
 $\text{Ad}(A \cdot B) = \text{Ad}(A) \cdot \text{Ad}(B)$.

Kettib

$$\text{Det}(\text{Ad}(A)X) = \text{Det } X,$$

seega $\text{Ad}: SU(2) \rightarrow O(3)$, $\text{ad}: \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{so}(3)$.
 Kui $[X, Y] = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{su}(2)$, siis $X = 0$. Seega

$$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$$

Lie rühma G paremtoime muutkonnal M . Parem-
toime on kujutus $M \times G \rightarrow M$, $(x, g) \rightarrow x \cdot g = R_g(x)$,

- 1) kujutus $M \times G \rightarrow M$ on pide;
- 2) $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$, $R_{g_2}(R_{g_1}(x)) = R_{g_1 g_2}(x)$,
- 3) $x \cdot e = x$, $R_e = \text{id}_M$

Paremtoime on transitiivne, kui $\forall x, y \in M$, $\exists g \in G$
 nii, et $x \cdot g = y$, $R_g(x) = y$. Paremtoime orbit p-s x
 $x \cdot G = \{x \cdot g : g \in G\}$.

$G_x \subset G$, $G_x = \{g \in G : x \cdot g = x\}$ stabilisator

Kui $G_x = \{e\}$ realise muutkonna M punkt x korral,
 siis paremtoimet nim. vabaus (free).

Peakihtkonna mõiste: peakihtrond P on röö muutkond järgmise struktuuriga:

- 1) on antud Lie rühma G parendaine muutkonnal P , st $P \times G \rightarrow P$, $(x, g) \rightarrow R_g(x)$ ja G toimib vabalt,
- 2) $M = P/G$ on röö muutkond ja projektsioon $\pi: P \rightarrow M$ on röö kujutus,
- 3) P on lokaalselt triviale, st $\forall x \in M$ leidub selle punkti ümbrus $U \subset M$ selline, et $\pi^{-1}(U) \subset P$ on difeomorfne korrutisega $U \times G$, st

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G, \text{ kus } \varphi(p) = (\pi(p), \varphi(p)),$$

$$\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow G, \varphi(p \cdot g) = \varphi(p) \cdot g.$$

P nim peakihtkonnaks, G nim struktuurirühmaks,
 M nim baasmuutkonnaks, π nim projektsiooniks, φ nim lokaalseks trivialisatsiooniks. Kui $\dim M = m$, $\dim G = r$, siis $\dim P = m + r$. Kui $x \in M$, siis $\pi^{-1}(x)$ nim peakihtkonna kihtiks. Iga kiht on difeomorfne G . Kui $p \in \pi^{-1}(x)$, siis $\pi^{-1}(x) = \{p \cdot g : g \in G\}$.

Ogu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ baasmuutkonna M laktine kate selline, et $\varphi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times G$, $\varphi_\alpha(p) = (\pi(p), \varphi_\alpha(p))$.

Ogu $p \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$. Kehtib $\varphi_\beta(p \cdot g) (\varphi_\alpha(p \cdot g))^{-1} =$

$$= \varphi_\beta(\varphi) \cdot \underbrace{g \cdot g^{-1}}_e \cdot (\varphi_\alpha(\varphi))^{-1} = \varphi_\beta(\varphi) (\varphi_\alpha(\varphi))^{-1}. \text{ Näeme, et}$$

$\varphi_\beta(\varphi) \cdot (\varphi_\alpha(\varphi))^{-1}$ sõltub projektioonist $\pi(\varphi) = x$, mitte φ -st.

Definime $\varphi_{\beta\alpha}: \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightarrow G$ valemiga $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \varphi_\beta(\varphi) (\varphi_\alpha(\varphi))^{-1}$, kus $\pi(\varphi) = x$. Siis $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$ nim. peakihtkonna P üleminekufunktsioonideks. Kehtib cocycle condition

$$x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma, \quad \boxed{\varphi_{\beta\alpha}(x) \cdot \varphi_{\alpha\gamma}(x) \cdot \varphi_{\beta\gamma}(x) = e}$$

$$\underbrace{\varphi_\gamma(\varphi) (\varphi_\alpha(\varphi))^{-1}}_e \cdot \underbrace{\varphi_\alpha(\varphi) (\varphi_\beta(\varphi))^{-1}}_e \cdot \varphi_\beta(\varphi) (\varphi_\gamma(\varphi))^{-1} = e$$

Teoreem. Olgu M riie muutkond, G Lie rühm. Kui on antud muutkonna M laheline kate $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ja kujutused $\varphi_{\beta\alpha}: \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \rightarrow G$, mis rahuldavad kolmikli tingimust $\varphi_{\beta\alpha}(x) \cdot \varphi_{\alpha\gamma}(x) \cdot \varphi_{\beta\gamma}(x) = e$, siis saab konstrueerida peakihtkonna P nii, et M on baasmuutkond, G on struktuurirühm ja $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ on üleminekufunktsioonid.

Vektorkihtkonna mõiste (vector bundle). Vektorkihtkond on kolmik (E, π, M) , kus E on riiedad muutkonnad, $\pi: E \rightarrow M$ on riie pealekujutus (projektioon),
 2) $\forall x \in M, \pi^{-1}(x)$ on n -mõõtmeline vektorruum (üle $\mathbb{R}, \mathbb{C}$),
kiht punktis x
 3) ivalise punkti $x \in M$ korral leidub selle ümber

$U \subset M$ ja diffeomorfism $\varphi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}^n$ selline, et
 $\varphi(\pi^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{C}^n$ ja $\pi^{-1}(x) \xrightarrow{\varphi} \{x\} \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n$ on
 vektorruumide isomorfism.

Olgu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lahine kate $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$. Meodustame diffeo-
 morfismi $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{C}^n$.

$\forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$ kehtib $\varphi_\alpha^{-1}: \{x\} \times \mathbb{C}^n \rightarrow \pi^{-1}(x) = F_x$ ja
 $\varphi_\beta: \pi^{-1}(x) \rightarrow \{x\} \times \mathbb{C}^n$, seega igas punktis $x \in U_\alpha \cap U_\beta$
 kujutus $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ määrab kujutuse

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{C}).$$

Kogumit $\{g_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ nim. lahise kattega $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ assotseeri-
 tud üleminekufunktsioonideks, üleminekufunktsioonid
 rahuldavad kotrükle' tingimust

$$g_{\alpha\gamma} \cdot g_{\gamma\beta} \cdot g_{\beta\alpha} = I, \quad I \text{ on ühikmaatriks.}$$

Tõepoolest,

$$\varphi_\beta \circ \underbrace{\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha}_{id} \circ \underbrace{\varphi_\gamma^{-1} \circ \varphi_\gamma}_{id} \circ \varphi_\beta^{-1} = id_{\mathbb{C}^n} \rightarrow I.$$

Assotseeritud vektorkihtkond (associated vector bundle).

Olgu $P(M, G)$ peakiitkond ja $\rho: G \rightarrow GL(V)$ Lie
 rühma G esitus, st $\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)$. Meodustame
 korutise $P \times V$. Defineerime ekvivalentseose järgmi-
 selt $(p, v) \sim (p', v')$, kui leidub $g \in G$ nii, et

$p' = p \cdot g, v' = g(g^{-1})v$. Seega $(p, v) \sim (p \cdot g, g(g^{-1})v)$.
 Siis $\Gamma = P \times_G V$ on vektorikihtkond. Ekvivalentsi-
 klass $[p, v]$, projektsioon $\pi([p, v]) = \pi(p)$, kiht on
 isomorfe V .

Näide M on dimensiooniga m riik muutkond. Kui
 $x \in M$, siis $T_x M$ on punktijaruum. Moodustame

$P = \{(x, e_x) : x \in M, e_x \text{ on punktijaruumi } T_x M \text{ reperi}\}$.

Struktuurirühm $G = GL(m, \mathbb{R})$. Rühma paremtoime

$P \times G \rightarrow P$ defineerime valeliga $(x, e_x) \cdot g = (x, e_x \cdot g)$, kus

$$e_x \cdot g = (e_1)_x (e_2)_x \dots (e_m)_x \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mm} \end{pmatrix}$$

G on maatriksrühm, triviaalne eksitus. Siis $P \times_G V$,
 kus V on m -mõõtmeline vektorruum, on punktijakihtkond.
 Ekvivalentsiis $(p, v) \sim (p \cdot g, g(g^{-1})v)$, v on punktijavektor.
 Kui baas kitsendub

$$e = e' \cdot g, \text{ siis } v' = g v, \Rightarrow v = g^{-1} v'.$$

$$((x, e_x), v) \sim ((x, e_x) \cdot g, g^{-1} v).$$

Kui M on Riemanni muutkond meetrilise meetriaga, siis võime
 kitsendada reperi klassi — ortonormeeritud reperiid.
 Kui lisaks M on orienteeritav, siis kitsendame veel —
 ortonormeeritud reperiid ühe ja sama orientatsiooniga.

Struktuurirühmeks on maatriksrühm $SO(n)$.

Fundamentaalsektorvälja mõiste (*fundamental vector field*)

Olgu $P(M, G)$ peakihtkond. Olgu $\mathfrak{g}$ Lie rühma G Lie algebra. Olgu $X \in \mathfrak{g}$ Lie algebra element. Ta tekitab üheparameetrilise alamrühma $g_t = \exp(tX) \in G$. Olgu p peakihtkonna mingi punkt. Alamrühm g_t tekitab joone peakihtkonnal P järjestiselt $\alpha(t) = p \cdot g_t$, jook läbib punkti p . Joone $\alpha(t)$ punktijavektor punktis p on vektor

$$X_p^* = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp(tX)) \Big|_{t=0}.$$

p di suvaline punkt, seega meil on vektorväli X^* peakihtkonnal P . X^* nim. fundamentaalsektorväljaväli. Kui $X \mapsto X^*$, $Y \mapsto Y^*$, siis kehtib $[X, Y] \mapsto [X^*, Y^*]$. Lie algebra homomorfism. X^* on peakihtkonna kehtide punktijavektorväli.

Seostus (*connection peakihtkonnal*)

Seostus peakihtkonnal $P(M, G)$ on $\mathfrak{g}$ -väärtustega 1-vorm ω (seostuse vorm), mis rahuldab

1) $\forall X \in \mathfrak{g}$ kehtib $\omega(X^*) = X$,

2) $\forall p \in P, \forall g \in G$ ja $\forall X \in T_p P$ kehtib

$$\omega_{p \cdot g}((R_g)_* X) = g^{-1} \omega_p(X) \cdot g.$$

$$R_g^*(\omega) = \text{Ad}_{g^{-1}}(\omega).$$

Kui $X \in T_p P$ on peakihtkonna puutejavektore punkti's p , siis defineerime alamruumi $T_p^h P \subset T_p P$ valemiga

$$T_p^h P = \{X \in T_p P : \omega(X) = 0\}.$$

$T_p^h P$ nim. **horisontaalseus** alamruumis punkti's p .
Vertikaalse alamruum $T_p^v P$, kus

$$T_p^v P = \{X \in T_p P : \pi_* X = 0\}.$$

Kehitib $T_p P = T_p^h P \oplus T_p^v P$. Seega $X = X^h + X^v$.

Kui θ on V -väärtustega k -vorm peakihtkonnal P , siis defineerime

$$\theta^h(X_1, \dots, X_k) = \theta(X_1^h, \dots, X_k^h).$$

Kovariantne tuleti's

$$D_\omega(\theta) = (d\theta)^h.$$

Seostuse kõverus

$$\mathcal{Q}_\omega = D_\omega(\omega).$$

Kehitavad Cartan'i võnandid

$$\mathcal{Q}_\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega],$$

kus

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)] - [\omega(Y), \omega(X)] = 2[\omega(X), \omega(Y)]$$

