

Seostus (connection)

$\pi: E \rightarrow M$ on vektorkihtkond (vector bundle), kus
 $\dim M = m$, kõik kihid on isomorfsed vektorruumiga V ,
 $\dim V = r$, seega $\dim E = m + r$. Vektorkihtkonna lõige
on kujutus $\xi: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ selline, et $\pi \circ \xi = \text{id}_U$, kus
 $U \subset M$. Lõigete vektorruumi tähistame järgmiselt:
 $\mathcal{E}^\infty(U, E)$. Vektorkihtkond on lokaalselt triviaalne,
seega $\forall p \in M$ korral leidub p ümbrus $U \subset M$
ja lõiked $e_1, e_2, \dots, e_r \in \mathcal{E}^\infty(U, E)$ sellised, et ümbruse
 U igas punktis x vektorid $e_1(x), e_2(x), \dots, e_r(x)$
moedustavad kihi $\pi^{-1}(x) = E_x$ baasi. Siis

$$\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^r$$

Tõepoolest, võtame U suvalise punkti x , siis
müü $v \in E_x$, kehtib

$$v = v^i e_i(x), \quad v \mapsto (\pi(v), v^1, v^2, \dots, v^r).$$

Lie rühma $G = GL(r, \mathbb{R})$ paremteime:

$$f = (e_1, e_2, \dots, e_r), \quad f \mapsto f \cdot g, \quad \text{kus}$$
$$(f \cdot g)_\mu = g_{\nu\mu} e_\nu, \quad g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \dots & g_{rr} \end{pmatrix}$$

$g: U \rightarrow GL(r, \mathbb{R})$ on rida kujutus,
 g on $GL(r, \mathbb{R})$ -väärtustega rida funktsioon.

Kui $\xi \in E^\infty(U, E)$ on tõige, st $\xi: U \rightarrow \pi^{-1}(U)$, siis kehtib

$$\xi(x) = \xi^\mu(x) e_\mu(x),$$

kus $\xi^\mu(x)$ on reaalväärt funktsioonid, $\xi^\mu \in C^\infty(U)$. Mõeldes

$$\xi(f) = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad \xi = f \cdot \xi(f).$$

Olgu $f \rightarrow \tilde{f} = f \cdot g$, siis kehtib $\xi = \tilde{f} \cdot \xi(\tilde{f}) = f \cdot g \cdot \xi(fg) = f \cdot \xi(f)$.

$$g \cdot \xi(fg) = \xi(f) \implies \xi(fg) = g^{-1} \xi(f).$$

Def. Olgu $\pi: E \rightarrow M$ vektorkihtkond. Kui igas kihis E_x on antud Hermite'i skalaarkorrutis

$$h_x: E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{C},$$

mis rahuldab tingimust: $\forall$ lahtise hulga $U \subset M$ korral ja $\forall \xi, \eta$ tõigete korral funktsioon $h_x(\xi(x), \eta(x))$ on reaalne, siis öeldakse, et vektorkihtkonnal E on antud Hermite'i meetrika, tähistame (E, h) . Sel juhul vektorkihtkonda E nim. Hermite'i vektorkihtkonnaks.

Lokaalselt: $U \subset M$,

$f = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $h_{\mu\nu}(f)|_x = h_x(e_\mu(x), e_\nu(x))$, $h_{\mu\nu}(f)$ on reaalväärt funktsioonide maatriks, tähistame $h(f)$.

Kui $\xi, \eta \in E^\infty(U, E)$, siis $h(\xi, \eta) = h(\xi^\mu e_\mu, \eta^\nu e_\nu) =$

$$= \xi^\mu \bar{\eta}^\nu h(e_\mu, e_\nu) = \xi^\mu \bar{\eta}^\nu h_{\mu\nu}(f) = \xi^\top(f) h(f) \bar{\eta}(f).$$

$$\text{Kui } f \rightarrow \tilde{f} = f \cdot g, \quad h_{\mu\nu}(f \cdot g) = h(e_\sigma g_{\sigma\mu}, e_\tau g_{\tau\nu}) = \\ = g_{\sigma\mu} \bar{g}_{\tau\nu} \cdot h(e_\sigma, e_\tau) = g_{\sigma\mu} \bar{g}_{\tau\nu} h_{\sigma\tau}(f) = g^\top \cdot h(f) \cdot \bar{g}$$

Diferentsiaalvormid väärtustega vektorkihtkonnas E .

Kui $E \xrightarrow{\pi} M$, $E' \xrightarrow{\pi'} M$ on vektorkihtkonnad, siis

E^* , $E \oplus E'$, $E \otimes E'$ on vektorkihtkonnad.
kiht E_x^* , $E_x \oplus E'_x$, $E_x \otimes E'_x$.

Olgu $E \xrightarrow{\pi} M$ vektorkihtkond moodustame uue vektorkihtkonna

$$E^p = \wedge^p T^*M \otimes E$$

kus T^*M on kaaspunktija kihtkond (dual tangent bundle),
 $\wedge^p T^*M$ on p -kovektorite vektorkihtkond. Vektor-
kihtkonna E^p lõige on E -väärtustega p -vorm
(E -valued p -form). Lokaalne struktuur: $U \subset M$,
 U on lokaalne kaart manifoldil M , koordinaadid
 (x^i) , $i=1, \dots, m$, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ vektorväljade moduli
lokaalne baas, $\{dx^1, \dots, dx^m\}$ hüper diferentsiaalvor-
mide moduli lokaalne baas, $f = (e_1, \dots, e_n)$ on E lokaal-
ne repper, vektorkihtkonna E lõike struktuur

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 \dots i_p}^\mu (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) \otimes e_\mu = \omega_{i_1 \dots i_p}^\mu \in C(U)$$

$$= \omega^{\mu} \otimes e_{\mu} = \frac{1}{p!} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \otimes \omega_{i_1 \dots i_p}$$

Def. Olgu $\Pi \xrightarrow{\pi} M$ vektorrahitruud. Seostureks
(connection) nim. $\mathbb{C}$ -lineaarvõrjutust

$$D: \mathcal{E}(M, E) \rightarrow \mathcal{E}(M, E^1),$$

mis rahuldab

$$D(\varphi \xi) = d\varphi \otimes \xi + \varphi D\xi, \text{ kus } \varphi \text{ on mille funktsioon, st } \varphi \in C(M).$$

Seostuse lokaalne struktuur: $U \subset M$, upeer $f = (e_{\mu})$,

toige $\xi \in \mathcal{E}(M, E)$, $\xi|_U = \xi^{\mu} e_{\mu}$,

$$D\xi = D(\xi^{\mu} e_{\mu}) = d\xi^{\mu} \otimes e_{\mu} + \xi^{\mu} D e_{\mu}.$$

Defineerime $D(e_{\mu}) = \theta_{\mu}^{\nu} \otimes e_{\nu}$, θ_{μ}^{ν} on 1-vorm, maatriks
 $\theta = (\theta_{\mu}^{\nu})$

Seega

$$D\xi = d\xi^{\mu} \otimes e_{\mu} + \xi^{\mu} \theta_{\mu}^{\nu} \otimes e_{\nu} = \\ = (d\xi^{\mu} + \theta_{\mu}^{\nu} \xi^{\mu}) \otimes e_{\nu}.$$

Maatrikskujul

$$D\xi(f) = d\xi(f) + \theta(f) \cdot \xi(f) = (d + \theta(f)) \cdot \xi(f),$$

kus

$d + \theta(f)$ on operaator.

Reiti' b

$$dg + \theta(f) \cdot g = g \theta(f \cdot g)$$

Olgu $E \xrightarrow{\pi} M$ Hermite'i vektorkihtkond meetri-
kaga h . Olgu D seostus vektorkihtkonnas E .
Võeldakse, et seostus D on kaaskõlas Hermite'i
meetrikaga h , kui kehtib

$$dh(\xi, \eta) = h(D\xi, \eta) + h(\xi, D\eta), \quad (*)$$

kus $\xi, \eta \in E(M, E)$ on vektorkihtkonna lõiked. Siin
valemi's peame silmas, et

$$h(\omega \otimes \xi, \omega' \otimes \xi') = \omega \wedge \omega' \underbrace{h(\xi, \xi')}_{\text{funktsioon}}.$$

Locaalselt

$$h \longrightarrow (h_{\mu\nu}), \quad D \longrightarrow (\theta_\nu^\mu)$$

$$\begin{aligned} d(h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu}) &= dh_{\mu\nu} \cdot \xi^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu} + \cancel{h_{\mu\nu} d\xi^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu}} + \cancel{h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} d\bar{\eta}^{\nu}} \\ h_{\mu\nu} (D\xi)^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu} &= h_{\mu\nu} (d\xi^\mu + \theta_\sigma^\mu \xi^\sigma) \bar{\eta}^{\nu} = \cancel{h_{\mu\nu} d\xi^\mu \bar{\eta}^{\nu}} + h_{\mu\nu} \theta_\sigma^\mu \xi^\sigma \bar{\eta}^{\nu} \\ h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} (D\eta)^\nu &= h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} (d\eta^\nu + \bar{\theta}_\sigma^\nu \bar{\eta}^\sigma) = \cancel{h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} d\eta^\nu} + h_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} \bar{\theta}_\sigma^\nu \bar{\eta}^\sigma \end{aligned}$$

Seega tingimuse (*) kujul on

$$dh_{\mu\nu} \xi^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu} = h_{\sigma\nu} \theta_\mu^\sigma \xi^{\mu-\nu} \bar{\eta}^{\nu} + h_{\mu\sigma} \xi^{\mu-\nu} \bar{\theta}_\nu^\sigma \bar{\eta}^{\nu}.$$

$$dh_{\mu\nu} = h_{\sigma\nu} \theta_\mu^\sigma + h_{\mu\sigma} \bar{\theta}_\nu^\sigma.$$

Kui locaalselt Hermite'i meetrika on kanooniline, st
 $h_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, siis tingimuse kujul on

$$\theta_\mu^\nu + \bar{\theta}_\nu^\mu = 0 \iff \theta + \bar{\theta}^T = 0,$$

sega seostuse maatriks on anti-Hermit'e'i maatriks.

Lie maatriksruhma $SU(n)$ Lie algebra

$$su(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \operatorname{Tr} A = 0, \underline{A + \bar{A}^T = 0}\}$$