Cherni klassid

Olgu $M_r(\mathbb{C})$ r-järku ruutmaatriksite vektorruum. Olgu $\varphi : M_r(\mathbb{C}) \times \ldots \times M_r(\mathbb{C})$ (k korda) $\longrightarrow \mathbb{C}$ polülineaarne $\mathbb{C}$-väärtustega vorm. Vormi φ nimetatakse invariantseks kui $\forall g \in GL_r(\mathbb{C})$ korral kehtib

$$\varphi(g^{-1}A_1 g, g^{-1}A_2 g, \ldots, g^{-1}A_k g) = \varphi(A_1, A_2, \ldots, A_k),$$

kus $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_r(\mathbb{C})$. Erijuhul, kui $A_1 = \ldots = A_k = A$ saame

$$\varphi(A) = \varphi(A, A, \ldots, A).$$

On ilmne, et $\varphi(A)$ on maatriksi A elementide k-astme polünoom, mis rahuldab

$$\varphi(g^{-1}A g) = \varphi(A), \quad g \in GL_r(\mathbb{C}).$$

Sel juhul φ nim. invariantseks polünoomiks. Olgu $A \in M_r(\mathbb{C})$. Moodustame maatriksi $I + A$, kus I on $r \times r$-ühikmaatriks. Maatriksi $I + A$ determinandi kirjutame kujul

$$\operatorname{Det}(I + A) = \sum_{k=0}^{r} \Phi_k(A),$$

kus $\Phi_k(A)$ on maatriksi A elementide k-astme polünoom. Siis $\Phi_k(A)$, $k = 0, 1, \ldots, r$ on invariantsed polünoomid.

Tõepoolest, $A \to g^{-1}Ag$, siis

$$\mathrm{Det}(I + g^{-1}Ag) = \sum_{k=0}^{r} \Phi_k(g^{-1}Ag)$$

$$\| $$

$$\mathrm{Det}(g^{-1}(I + A)g) = \mathrm{Det}(g^{-1})\, \mathrm{Det}(I+A)\cdot \mathrm{Det}(g) =$$

$$= 1$$

$$= \mathrm{Det}(I + A) = \sum_{k=0}^{r} \Phi_k(A).$$

Järelikult

$$\Phi_k(g^{-1}Ag) = \Phi_k(A)$$

Arvutame juhul, kui $r = 3$

$$\mathrm{Det}(I + A) = \begin{vmatrix} 1 + a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & 1 + a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & 1 + a^3_3 \end{vmatrix} = (1 + a^1_1)(1 + a^2_2)(1 + a^3_3) +$$

$$+ a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 - a^1_3(1 + a^2_2)a^3_1 - a^1_2 a^2_1 (1 + a^3_3) -$$

$$- (1 + a^1_1) a^2_3 a^3_2 = 1 + (a^1_1 + a^2_2 + a^3_3) + a^1_1 a^2_2 + a^1_1 a^3_3 + a^2_2 a^3_3 -$$

$$- a^1_3 a^3_1 - a^1_2 a^2_1 - a^2_3 a^3_2 + a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2 -$$

$$- a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_2 a^2_1 a^3_3 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 = \underbrace{1}_{\Phi_0(A)} + \underbrace{\mathrm{Tr}\, A}_{\Phi_1(A)} + \underbrace{\frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}\, A)^2 - \mathrm{Tr}(A^2)\right)}_{\Phi_2(A)}$$

$$\mathrm{Tr}(A^2) - (\mathrm{Tr}\, A)^2 = \cancel{a^1_1 a^1_1} + a^1_2 a^2_1 + a^1_3 a^3_1 + a^2_1 a^1_2 + \cancel{(a^2_2)^2} + a^2_3 a^3_2 +$$

$$+ a^3_1 a^1_3 + a^3_2 a^2_3 + \cancel{(a^3_3)^2} - \cancel{(a^1_1)^2} - \cancel{(a^2_2)^2} - \cancel{(a^3_3)^2} -$$

$$- 2a^1_1 a^2_2 - 2a^1_1 a^3_3 - 2a^2_2 a^3_3 = 2(a^1_2 a^2_1 + a^2_3 a^3_2 + a^1_3 a^3_1 -$$

$- a^1_1 a^2_2 - a^1_1 a^3_3 - a^2_2 a^3_3)$

$+ \operatorname{Det} A.$ Segga

$$\Phi_0(A) = 1,$$

$$\Phi_1(A) = \operatorname{Tr} A$$

$$\Phi_2(A) = \frac{1}{2}\left[(\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr}(A^2)\right]$$

$$\Phi_3(A) = \operatorname{Det} A.$$