

Globaalanalüüs

I kodutöö

30. oktoober 2025

- Kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ on antud vektorväli

$$X = (y+z)\frac{\partial}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Leida vektorvälja X ruumi $\mathbb{R}^3$ difeomorfismide üheparameetriline rühm.

- Olgu M sile m -mõõtmeline muutkond, $p \leq m$ ja $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ lineaarselt sõltumatud 1-diferentsiaalvormid muutkonnal M . Olgu $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 1-diferentsiaalvormid muutkonnal M , mis rahuldavad võrrandit

$$\sum_{\mu=1}^p \theta_{\mu} \wedge \omega_{\mu} = 0.$$

Tõestada, et leiduvad siledad funktsioonid $A_{\mu\nu} : M \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et

$$\theta_{\mu} = \sum_{\nu=1}^p A_{\mu\nu} \omega_{\nu}, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

- Olgu S^n n -mõõtmeline ühiksfäär, st $x = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in S^n$, kui $\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1$. Olgu $x, y \in S^n$, Defineerime ekvivalentsiseose $x \sim y$ parajasti siis, kui $x = \pm y$. Faktorruumi $S^n / \sim$ nimetatakse reaalseks *projektiivseks ruumiks* $\mathbb{R}P^n$. Defineerime kujutuse $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ valemiga

$$\pi(x) = \{\pm x\},$$

kus $\{\pm x\}$ on ühikvektori x ekvivalentsiklass. Olgu

$$U_i = \{\pi(x) : x \in S^n, x^i \neq 0\}.$$

Tõestada, et

1. iga U_i on $\mathbb{R}P^n$ lahtine alamhulk;
2. $\mathbb{R}P^n$ on alamhulkade U_i ühend;
3. iga i korral leidub homöomorfism $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$;
4. $\mathbb{R}P^n$ on sile kompaktne muutkond dimensiooniga n .

1 Teine kodutöö

1.1 Diferentsiaalvormid komplekses ruumis

Olgu $U \subset \mathbb{C}^n$ lahtine alamhulk koordinaatidega $z_1, z_2, \dots, z_n$. Vektorväljade baasi moodustavad vektorväljad

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{\partial}{\partial y^k} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{\partial}{\partial y^k} \right),$$

kus $z^k = x^k + i y^k$. Seega suvalisel vektorväljal X on kuju

$$X = \xi^k \frac{\partial}{\partial z^k} + \xi^{\bar{k}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

Duaalse baasi moodustavad 1-vormid

$$dz^k = dx^k + i dy^k, \quad d\bar{z}^k = dx^k - i dy^k.$$

(p, q) -diferentsiaalvorm on diferentsiaalvorm kujuga

$$\omega_{p,q} = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p; \bar{j}_1 \bar{j}_2 \dots \bar{j}_q} dz^{i_1} \wedge dz^{i_2} \dots dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge d\bar{z}^{j_2} \dots d\bar{z}^{j_q},$$

kus kordajad (need on koordinaatide funktsioonid) $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p; \bar{j}_1 \bar{j}_2 \dots \bar{j}_q}$ on kaldsümmeetrilised eraldi $i_1, i_2, \dots, i_p$ indeksite järgi ja $j_1, j_2, \dots, j_q$ indeksite järgi. k -diferentsiaalvorm ω on diferentsiaalvorm kujuga

$$\omega = \sum_{p+q=k} \omega_{p,q}.$$

Välisdiferentsiaal on kahe diferentsiaali summa

$$d = d' + d'',$$

kus

$$d' = dz^k \frac{\partial}{\partial z^k}, \quad d'' = d\bar{z}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

On ilmne, et $d' \omega_{p,q}$ on $(p+1, q)$ -diferentsiaalvorm ning $d'' \omega_{p,q}$ on $(p, q+1)$ -diferentsiaalvorm.

Ülesanne. Tõestage, et

$$(d')^2 = (d'')^2 = 0, \quad d' d'' = -d'' d'.$$

Nüüd E on holomorfnе vektorkihtkond, baasmuutkond on kompleksne n -mõõtmeline muutkond M , st M on lokaalselt homöomorfne $\mathbb{C}^n$ ja kõik üleminekufunktsioonid on holomorfsed. Kihtkonna E kõik üleminekufunktsioonid $g : U \cap V \rightarrow \mathbb{C}$ on ka holomorfsed, st

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}^k} = 0.$$

Seostus $D : \mathcal{E}(M, E) \rightarrow \mathcal{E}^1(M, E) = \mathcal{E}^{1,0}(M, E) \oplus \mathcal{E}^{0,1}(M, E)$, seega $D = D' + D''$, kus

$$D' : \mathcal{E}(M, E) \rightarrow \mathcal{E}^{1,0}(M, E), \quad D'' : \mathcal{E}(M, E) \rightarrow \mathcal{E}^{0,1}(M, E).$$

Ülesanne. Olgu h Hermite'i meetrika ja D seostus vektorkihtkonnal E , kusjuures D on kooskõlas meetrikaga h . Lisaks eeldame, et seostus rahuldab tingimust: kui $\xi : U \subset M \rightarrow \pi^{-1}(U) \subset E$ on vektorkihtkonna holomorfne lõige, siis $D''\xi = 0$. Näidake, et seostuse D maatriks θ avaldub järgmiselt

$$\theta = h^{-1}d'h.$$

Ülesanne. Näidake, et eelmises ülesandes seostuse D kõverus Θ avaldub järgmiselt:

$$\Theta = d''\theta,$$

ja kõverus on $(1, 1)$ -diferentsiaalvorm. Kõverus raguldab Bianchi samasust

$$d''\Theta = 0, \quad d'\Theta = [\Theta, \theta].$$