

Globaalanalüüs

I kodutöö

30. oktoober 2025

- Kolmemõõtmelises ruumis $\mathbb{R}^3$ on antud vektorväli

$$X = (y+z)\frac{\partial}{\partial x} + (z+x)\frac{\partial}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Leida vektorvälja X ruumi $\mathbb{R}^3$ difeomorfismide üheparameetriline rühm.

- Olgu M sile m -mõõtmeline muutkond, $p \leq m$ ja $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ lineaarselt sõltumatud 1-diferentsiaalvormid muutkonnal M . Olgu $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ 1-diferentsiaalvormid muutkonnal M , mis rahuldavad võrrandit

$$\sum_{\mu=1}^p \theta_{\mu} \wedge \omega_{\mu} = 0.$$

Tõestada, et leiduvad siledad funktsioonid $A_{\mu\nu} : M \rightarrow \mathbb{R}$ sellised, et

$$\theta_{\mu} = \sum_{\nu=1}^p A_{\mu\nu} \omega_{\nu}, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

- Olgu S^n n -mõõtmeline ühiksfäär, st $x = (x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \in S^n$, kui $\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1$. Olgu $x, y \in S^n$, Defineerime ekvivalentsiseose $x \sim y$ parajasti siis, kui $x = \pm y$. Faktorruumi $S^n / \sim$ nimetatakse reaalseks *projektiivseks ruumiks* $\mathbb{R}P^n$. Defineerime kujutuse $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ valemiga

$$\pi(x) = \{\pm x\},$$

kus $\{\pm x\}$ on ühikvektori x ekvivalentsiklass. Olgu

$$U_i = \{\pi(x) : x \in S^n, x^i \neq 0\}.$$

Tõestada, et

1. iga U_i on $\mathbb{R}P^n$ lahtine alamhulk;
2. $\mathbb{R}P^n$ on alamhulkade U_i ühend;
3. iga i korral leidub homöomorfism $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$;
4. $\mathbb{R}P^n$ on sile kompaktne muutkond dimensiooniga n .