

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

V. Altleis      T. Täht

ÜLESANDEID ÜLELIIDULISTELT  
MATEMAATIKA  
OLÜMPIAADIDELT

Tallinn  
1979



# Eessõna

Käesolev ülesannetekogu sisaldab kolme üleliidulise kooliõpilaste matemaatikaolümpiaadi (1976, 1977, 1978. a.) ülesanded ning rida ülesandeid žürii materjalidest, kokku 115 ülesannet. Ülesannetele 1–95 on antud lahendused. Ülesannete 96–115 lahenduskäike pole esitatud osaliselt sellepärast, et kogumiku maht on piiratud, aga ka seetõttu, et kõikide ülesannete lahendused pole ülesannetekogu autoritele teada.

Ülesanded 112, 113, 114, 115, 96 a), 96 c) on suhteliselt lihtsad. Ülesannete 96 b), 101 b), 103, 107, 108, 109, 110, 111 lahenduse idee ei ole aga autoritele teada. Autorid on tänulikud, kui keegi lugejatest saadab mõne märgitud ülesande lahenduse või mõnele ülesandele lihtsama lahenduse aadressil: Tartu, 202400, TRÜ, matemaatilise statistika ja programmeerimise kateeder, V. Altleis. Ülejäänud lahendusteta ülesanded on keskmise raskusastmega.

Igal olümpiaadil lahendati ülesandeid kahel päeval, kusjuures kummalgi päeval oli lahendamiseks 4–5 tundi aega. X olümpiaadi teisel päeval esitati kõikidele osavõtjatele ja XI olümpiaadil 10. klassi õpilastele 3 rasket ülesannet arvestusega, et iga osavõtja lahendab keskmiselt ühe ülesande. Erinevalt X olümpiaadist hinnati XI olümpiaadil rohkem edasijõudmist ühes ülesandes kui mitme ülesande lihtsate alapunktide lahendamist.

Käesolev ülesannetekogu on mõeldud esmajoones matemaatikahuvilistele keskkooliõpilastele ja sobib seega kasutamiseks kooli matemaatikaringides.

Täname dotsent E. Mitti hinnaliste nõuannete ja märkuste eest. Samuti täname S. Härmi, kes osutas suurt abi käsikirja tehnilisel vormistamisel.

Autorid

1. mail 1978. a.



# Ülesanded

## X üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad

### 8. klass. Esimene päev

1. Oletame, et lauale on asetatud 50 kella. On teada, et kõik kellad käivad täpselt. Näidata, et leidub selline moment, millal kõikide kellade minutiosutite otspunktide kauguste summa laua keskpunktis on suurem kui kõikide kellade keskpunktide kauguste summa laua keskpunktist.

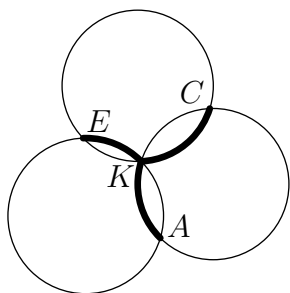
2. Ritta on kirjutatud järjest 1000 reaalarvu. Selle rea alla kirjutatakse uus rida järgmise reegli põhjal: *iga arvu  $A$  alla kirjutatakse selline naturaalarv, mis näitab, mitu korda arv  $A$  esineb esimeses reas*. Teisest reast saadakse analoogiliselt viisil kolmas rida: teise rea iga arvu  $B$  alla kirjutatakse selline naturaalarv, mis näitab, mitu korda arv  $B$  esineb teises reas. Seejärel konstrueeritakse analoogiliselt kolmandast reast neljas rida, neljandast viies jne.

- a) Näidata, et leidub rida, mis langeb kokku talle järgneva reaga.
- b) Näidata, et 11. ja 12. rida ühtivad.
- c) Tuua sellise esialgse rea näide, mille korral kümnes rida ei võrdu üheistkümnendaga.

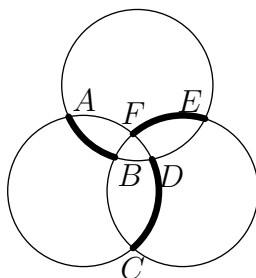
3. Tasandil on antud 3 võrdse raadiusega ringjoont.

- a) Näidata, et kui kõik ringjooned lõikuvad ühes punktis (vt. joon.1), siis kaarte  $AK$ ,  $CK$  ja  $LK$  summa on  $180^\circ$ .
- b) Näidata, et kui ringjooned asetsevad nii, nagu joonisel 2, siis kaarte  $AB$ ,  $CD$  ja  $EF$  summa on  $180^\circ$ .

4. Naturaalarvud  $x_1$  ja  $x_2$  on väiksemad kui 10 000. Lähtudes antud arvudest konstrueeritakse jada  $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ , kus arv  $x_3$  on võrdne  $|x_1 - x_2|$ , arv  $x_4$  on võrdne minimaalsega arvudest  $|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_2 - x_3|$ , arv  $x_5$  on minimaalne arvudest  $|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_4|, |x_3 - x_4|$  jne. (iga järgmine arv võrdub minimaalsega kõikide eelnevate arvude vahede absoluutväärtustest). Näidata, et  $x_{21} = 0$ .



Joonis 1



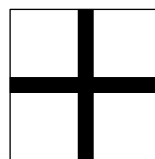
Joonis 2

## 8. klass. Teine päev

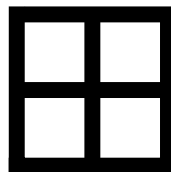
5. Malelaul, millel on  $99 \times 99$  ruutu, on märgitud mingi kujund  $\phi$ , mille igas ruudus istub kärbes. Teatud ajamomendil tõusevad kõik kärbsed lendu ja maanduvad uuesti antud kujundi  $\Phi$  ruutudele, kusjuures ühte ruutu võib sattuda mitu kärbest.

On teada, et iga kaks kärbest naaberruutudes asuvad pärast maandumist jälle naaberruutudes või siis ühes jasamas ruudus (naaberruutudeks nimetatakse ruute, millel on ühine kas serv või tipp).

- Olgu kujund  $\Phi$  - „tsentraalne rist“ (vt. joon. 3), s.t. keskmise horisontaali ja keskmise veritkaali ühend. Näidata, et sellisel juhul leidub kärbes, kes lendav kas samasse ruutut või naaberruutut.
- Kas punkti  $a$  väide kehtib, kui kujund  $\Phi$  on „akna raam“ (vt. joon. 4), s.t. „tsentraalse risti“ ja kõikide malelaua äärruutude ühend?
- Kas punkti  $a$  väide kehtib, kui kujund  $\Phi$  on kogu malelaud?



Joonis 3



Joonis 4

6. Nimetame kolmnurka „suureks“, kui tema kõik küljed on pikemad kui 1. Olgu antud võrdkülgne kolmnurk  $ABC$ , mille külje pikkus on 5.

- Näidata, et kolmnurgast  $ABC$  saab välja lõigata 1000 „suurt“ kolmnurka.
- Näidata, et kolmurka  $ABC$  saab tervenisti lõigata 1000 „suureks“ kolmnurgaks.
- Näidata, et kolmnurka  $ABC$  saab tervenisti lõigata 1000 „suureks“ kolmnurgaks nii, et igal kahel kolmnurgal kas ei ole ühiseid punkte, või on ühine tipp, või on ühine külg.
- Tõestada väited  $b$  ja  $c$  juhul, kui  $ABC$  on korrapärane kolmnurk küljepikkusega 3.

7. Nimetame naturaalarvu „universaalseks“, kui teatud numbrite mahatõmbamisega on võimalik temast saada mistahes etteantud üheksakohalist arvu, mille kõik numbrid on erinevad ja ei võrdu nulliga.

- a) Tuua näide „universaalsest“ arvust, milles on  $9^2 = 81$  numbrit.
- b) Tuua näide sellisest „universaalsest“ arvust, milles on  $9^2 - 9 + 1 = 73$  numbrit.
- c) Näidata, et iga „universaalse arvu korral leidub selline number, mis esineb temas vähemalt üheksa korda.
- d) Proovige konstrueerida „universaalne“ arv, milles oleks võimalikult vähe numbreid. (On teada, kuidas konstrueerida sellist arvu, milles on  $9^2 - 2 \cdot 9 + 4 = 67$  numbrit.)

## 9. klass. Esimene päev

8. Vt. ül. 3.

9. Kas on võimalik nummerdada kõik kuubi tipud numbritest 1 ja 2 moodustatud erinevate kolmekohaliste arvudega nii, et iga kahe naabertipu juurde kirjutatud arvud erineksid vähemalt kahes numbrijärgus?

10. Vt. ül. 4.

11. Tasandil on antud vektorid  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ja  $\vec{d}$ , millede summa on  $\vec{0}$ . Tõestada, et

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|$$

## 9. klass. Teine päev

12. Vt. ül. 6.

13. Ringjoonele on paigutatud  $n$  reaalarvu ( $n \geq 3$ ), millede summa on null. Üks neist arvudes on 1.

- a) Näidata, et leiduvad kaks naaberarvu, mis erinevad vähemalt  $4/n$  võrra.
- b) Näidata, et leidub selline arv, mis erineb oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest vähemalt  $8/n^2$  võrra.
- c) Hinnangut, mis on antud eelmises punktis, saab parandada. Püüdke asendada arv 8 mingi suurema arvuga nii, et väide  $b$  kehtiks endiselt kõigi naturaalarvuliste  $n$  korral.
- d) Näidata, et kui  $n = 30$ , siis leidub ringjoonel arv, mis erineb oma naaberarvude aritmeetiliste keskmiste mitte vähem kui  $2/113$  võrra. Tuua näide kolmekümnest arvust ringjoonel, kus iga arv ei erine oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest mitte rohkem kui  $2/113$  võrra.

14. Olgu antud naturaalarv  $N$ . Naturaalarvude jada  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$  nimetatakse „ $N$ -universaalseteks“, kui sellest jadast on võimalik teatud liikmete mahatõmbamisega saada arvude  $1, 2, \dots, N$  kõik permutatsioonid (s.t. sellised jaded  $N$  elemendist, millesse iga arv  $1, 2, \dots, N$  kuulub täpselt ühe korra). Näiteks jadas  $1, 2, 3, 1, 2, 1, 3$  on „3-universaalne“, aga jada  $1, 2, 3, 2, 1, 3, 1$  pole „3-universaalne“, sest tema liikmete mahatõmbamisel ei ole võimalik saada permutatsiooni  $3, 1, 2$ . Käesoleva ülesande eesmärgiks on saada antud  $N$  jaoks kõige lühema „ $N$ -universaalse“ jada liikmete arvu hinnang.

- Tuua näide „ $N$ -universaalsest“ jadast, milles on  $N^2$  liiget.
- Tuua näide sellisest „ $N$ -universaalsest“ jadast, milles on  $N^2 - N + 1$  liiget.
- Tõestada, et iga „ $N$ -universaalne“ jada sisaldab vähemalt  $N(N + 1)/2$  liiget.
- Näidata, et kõige lühem „4-universaalne“ jada koosneb 12 elemendist.
- Püüdkle leida antud  $N$  jaoks võimalikult lühike „ $N$ -universaalne“ jada. (On teada, et saab konstrueerida sellise „ $N$ -universaalne“ jada, milles on  $N^2 - 2N + 4$  liiget.)

## 10. klass. Esimene päev

15. Olgu  $x_0$  ja  $x_1$  naturaalarvud, mis on väiksemad kui 1000,

$$x_2 = |x_0 - x_1|, \quad x_3 = |x_1 - x_2|, \quad x_4 = |x_2 - x_3|$$

jne. Näidata, et vähemalt üks arvudest  $x_2, x_3, \dots, x_{1500}$  on võrdne nulliga.

16. Korrapärasel 1976-nurgas on tähistatud kõikide külgede keskpunktid ja kõikide diagonaalide keskpunktid. Milline on tähistatud punktide maksimumarv ühel ringjoonel?

17. Ruudukujulisele paberilehele on joonistatud  $n$  ristkülikut (*ristkülikute küljed on paralleelsed paberilehe servadega*), kusjuures iga kaks ristkülikut ei oma ühiseid sisepunkte. Tõestada, et kõikide nende ristkülikute väljalõikamisel ruudust jääb järele mitte rohkem kui  $n + 1$  tükki.

18. Kolm jalakäijat liiguvad tasandil sirgjooneliselt ja konstantsete kiirustega. Algmomendil ei asu nad ühel sirgel. Tõestada, et nad saavad asetseda ühel sirgile mitte rohkem kui kahel korral.

19. Vt. ül. 11.

## 10. klass. Teine päev

20. Korrapärase  $n$ -nurga keskpunkt on punktis  $O$ . Selle hulknurga tippudesse on kirjutatud arvud  $+1$  ja  $-1$ . Ühel käigul lubatakse muuta märki

kõikidel neil arvudel, mis asetsevad mingil korrapärase  $k$ -nurga (keskpunkti-ga punktis  $O$ ) tippudes (sealjuures on lubatud ka 2-nurgad, kusjuures 2-nurga all mõistetakse lõiku keskpunktiga punktis  $O$ ). Tõestada, et juhtudel  $a$ ,  $b$  ja  $c$  eksisteerib niisugune  $+1$  ja  $-1$  paigutus, et mitte ühegi arvu käikudega pole võimalik saada paigutust, kus kõik arvud on  $+1$ .

- a)  $n = 15$ .
- b)  $n = 30$ .
- c)  $n$  on suvaline kahest suurem naturaalarv.
- d) Püüdke leida suvalise  $n$  korral kõikvõimalike erinevate  $+1$  ja  $-1$  paigutuse arv, kus mitte ühestki paigutusest pole võimalik saada ühtegi teist paigutust ülaltoodud reeglit rakendades. Näidata, et kui  $n = 2100$ , siis selliseid paigutusi on  $2^{480}$ .

21. Sfääril raadiusega 1 on fikseeritud suurring, mida nimetame ekvaatoriks. Kasutame ka teisi geograafilisi mõisteid nagu poolus, meridiaan, paralleel.

- a) Defineerime sfääril funktsiooni  $f$ , mis seab igale sfääri punktile vastavusse selle punkti kauguse ruudu ekvatoriaaltasandist. Kontrollida, et funktsioonil  $f$  on järgmine omadus: kui  $M_1$ ,  $M_2$  ja  $M_3$  on kolme omavahel ristuva raadiuse otspunktid sfääril, siis

$$f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1. \quad (1)$$

Edaspidi (punktid  $b$ ,  $c$ ,  $d$  ja  $e$ ) olgu  $f$  suvaline mittenegatiivne funktsioon sfääril, mis võrdub nulliga kõikides ekvaatori punktides ja mis rahuldab tingimust (1).

- b) Olgu  $M$  ja  $N$  ühe meridiaani punktid, mis asetsevad põhjapooluse ja ekvaatori vahel. Tõestada, et kui punkt  $M$  on ekvatoriaaltasandist kaugemal kui punkt  $N$ , siis  $f(M) \geq f(N)$ .
- c) Olgu  $M$  ja  $N$  suvalised sfääri punktid. Tõestada, et kui  $M$  on ekvatoriaaltasandist kaugemal kui  $N$ , siis  $f(M) \geq f(N)$ .
- d) Tõestada, et kui  $M$  ja  $N$  asetsevad ühel paralleelil, siis  $f(M) = f(N)$ .
- e) Tõestada, et funktsioon  $f$  langeb kokku punktis a) kirjeldatud funktsiooniga.

22. Vt. ül. 14.

## XI üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad

### 8. klass. Esimene päev

23. Tasandil on antud iseenast mittelõikav kinnine murdjoon, mille üksi 3 tippu ei asetse ühel sirgel. Murdjoone kaks lüli moodustavad „erilise“ paari, kui nendest ühe pikendus lõikab teist, kusjuures nad ei tohi olla naaberlülid. Tõestada, et „erilisi“ paare on paarisarv.

24. Tasandil on antud  $n$  punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Iga punkti juurde on kirjutatud mingi reaalarv. On teada, et kui sirge läbib kahte või enam antud punktidest, siis kõikide sellele sirgele jäävate punktide juurde kirjutatud arvude summa on võrdne nulliga. Näidata, et kõik arvud on võrdsed nulliga.

25. Olgu antud kolmnurk  $ABC$ , mille ümber on joonestatud ringjoon. Lõik, mis ühendab kaarte  $AB$  ja  $AC$  keskpunkte, lõikab kolmnurga külgi  $AB$  ja  $AC$  punktides  $K$  ja  $L$ . Olgu kolmnurga siseringjoone keskpunkt punktis  $O$ . Näidata, et punktid  $A$ ,  $K$ ,  $L$  ja  $O$  asetsevad rombi tippudes.

26. Ringjoonele on asetatud musti ja valgeid nuppe. Esimesel käigul võetakse ringjoonelt ära kõik need mustad nupud, millel on valge naaber (kas või ainult ühel pool). Teisel käigul võetakse ära valged nupud, millel on must naaber, kolmandal käigul võetakse jälle ära need valged nupud, millel on must naaber jne. Nii käiakse senikaua, kuni ringjoonele jäävad ainult ühte värvi nupud.

- Oletame, et algul oli ringjoonel 40 nuppu. Kas on võimalik, et pärast neljandat käiku jääb ringjoonele ainult üks nupp?
- Oletame, et algul oli ringjoonel 1000 nuppu. Mitu käiku on vaja sooritada minimaalselt, et ringjoonele jääks ainult üks nupp?

### 8. klass. Teine päev

27. Ümmarguse laua taga istuvad 7 päkapikku. Igaühel on kruus. Kruusidesse on valatud kokku 3 liitrit piima. Üks päkapikkudest valab oma piima võrdselt ülejäänud 6 kruusi. Seejärel teeb tema parempoolne naaber sedasama jne. Pärast seda, kui viimane, seitsmes päkapikk on oma piima ära jaotanud, on kõikides kruusides samapalju piima kui algul. Kui palju piima oli algul igas kruusis?

28. Nimetame  $2n$ -kohalist arvu „eriliseks“, kui ta on täisruut ja tema  $n$  esimesest numbrist ja  $n$  viimasest numbrist moodustatud arvud on täisruu-

dud, kusjuures teine arv võib alata numbriga null, kuid ei tohi olla samaselt null.

- a) Leida kõik 2- ja 4-kohalised „erilised“ arvud.
- b) Kas leidub 6-kohalisi „erilisi“ arve? (Näidata, et neid kas ei leidu, või siis tuua sellise arvu näide.)

29. On antud positiivsete reaalarvude hulk  $a_1; a_2; \dots; a_n$ . Selle hulga iga osahulga jaoks kirjutatakse välja temasse kuuluvate elementide summa (vaadeldakse summasid ühest, kahest,  $\dots$ ,  $n$  liidetavatest). Näidata, et kõik väljakirjutatud arvud saab jaotada  $n$  rühma nii, et igas rühmas suurima arvu suhe vähimasse ei ületa 2.

30. On antud 1000 piletit järjekorranumbritega 000, 001,  $\dots$ , 999 ja 100 urni numbrit 00, 01,  $\dots$ , 99. Piletit lubatakse lasta urni, kui urni numbrit on võimalik saada pileti järjekorranumbrist selle mingi numbri mahatõmbamisel. Tõestada, et

- a) kõik piletid saab paigutada 50 urni,
- b) kõiki pileteid ei saa paigutada vähem kui 40 urni,
- c) kõikide piletite paigutamiseks läheb vaja vähemalt 50 urni.

## 9. klass. Esimene päev

31. Kolmnurkadel  $T_1$  ja  $T_2$  on ühine välisringjoon, kusjuures kolmnurga  $T_2$  tipud asetsevad kolmnurga  $T_1$  tippude vaheliste kaarte keskpunktides. Tõestada, et kuusnurga  $T_1 \cap T_2$  vastastippe ühendavad diagonaalid on paralleelsed kolmnurga  $T_1$  külgedega ja lõikuvad ühes punktis.

32. On antud lõpmatu jada  $a_1, a_2, \dots$ . On teada, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_{n+1} - a_n)/2 = 0$ . Näidata, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

33. Vt. ül. 23.

34. Teataval maal on igast linnast igasse linna võimalik sõita teisi linnu läbimata. On teada iga sellise sõidu maksumus. Koostati kaks marsruuti läbi kõikide linnade. Esimest tüüpi marsruudil esimene linn valitakse suvaliselt, seejärel sõidetakse sellesse linna, kuhu sõit on kõige odavam. Edasi valitakse läbimata linnade hulgast jällegi see, kuhu sõit on kõige odavam (kui mingil sammul on mitu sellist linna, siis valitakse suvaliselt üks neist) jne. Teist tüüpi marsruudi korral valitakse esimene linn samuti suvaliselt, järgmiseks linnaks valitakse aga veel läbimata linnade hulgast see, kuhu sõit on kõige kallim. Tõestada, et esimest tüüpi marsruudi läbimine ei ole kallim kui teist tüüpi marsruudi läbimine.

## 9. klass. Teine päev

35. On antud ruuduline paberileht mõõtmetega  $100 \times 100$  ruutu. Paberile on joonestatud teatav hulk iseennast mitte-lõikavaid murdjooni, mis kulgevad mööda ruutude külgesid. On teada, et mistahes kaks murdjoont ei oma ühiseid punkte. Murdjooned asuvad paberilehe sisemuses, kuid nende alg- ja lõpp-punktid paberilehe serval. Näidata, et peale antud ruudukujulise paberilehe tippude leidub veel sõlmpunkt (kas ruudu sisemuses või serval), mis ei kuulu ühelegi murdjoonele.

36. On antud naturaalarvud  $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n$ . Summad  $x_1 + x_2 + \dots + x_m$  ja  $y_1 + y_2 + \dots + y_n$  on omavahel võrdsed ja väiksemad kui  $mn$ . Näidata, et võrduses

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

saab osa liidetavaid maha tõmmata nii, et võrdus jääb kehtima.

37. Tasandil on antud 1000 ruutu, kusjuures kõikide ruutude küljed on parallelsed koordinaattelgedega. Olgu  $M$  nende ruutude keskpunktide hulk. Näidata, et on võimalik ära märgistada osa ruute nii, et hulga  $M$  iga element satub mitte vähem kui ühte ja mitte rohkem kui nelja märgistatud ruutu.

38. Laual on kangkaal ja  $n$  erinevat kaaluvihti. Vihte asetatakse järjest kaalukaussidele, s.t. igal sammul võetakse laualt üks viht ja asetatakse ta ühele või teisele kaalukaussile (mitte tingimata vaheldumisi).

- a) Tõestada, et vihte saab asetada sellises järjekorras, et algul vajub alla vasakpoolne kauss, seejärel parempoolne, siis jälle vasakpoolne jne. Sellisele kaalumiste seeriale seame vastavusse  $n$ -tähelise sõna VPVPVP..., kus V tähendab vasakpoolse, P – parempoolse kaalukaussi allavajumist.
- b) Tõestada, et tähtedest V ja P moodustatud mistahes  $n$ -tähelise sõna jaoks võib leida sellise kaalumiste seeria, mis vastaks antud sõnale.

## 10. klass. Esimene päev

39. Vt. ül. 31.

40. Vt. ül. 32.

41. Kumera hulktahuka  $M$  igast tipust väljub 3 serva. On teada, et hulktahuka iga tahu ümber saab joonestada ringjoone. Näidata, et kõik hulktahuka tipud asetsevad mingil sfääril.

42. On antud hulkliige  $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x + 1$ . Isikud  $A$  ja  $B$  mängivad järgmist mängu. Algul asendab  $A$  mingi tärnikese reaalarvuga, seejärel asendab  $B$  mingi järelejäänud tärnikese reaalarvuga, siis asendab jälle

$A$  jne. (kokku 9 käiku). Kui saadud hulkliikmel puuduvad reaalsed nullkohad, siis loetakse võitjaks mängija  $A$ , kui aga sellel hulkliikmel on kasvõi üksainus reaalne nullkoht, siis loetakse võitjaks  $B$ . Kas  $B$  saab võita  $A$  igasuguse mängu korral?

43. Vt. ül. 23.

## 10. klass. Teine päev

44. Vaatleme hulkliikmeid  $P(x) = x^i + a_1x^{i-1} + \dots + a_i$  ja  $Q(x) = x^k + b_1x^{k-1} + \dots + b_k$ . Ütleme, et need hulkliikmed kommuteeruvad, kui iga  $x$  korral kehtib võrdus  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ .

- Leida iga arvu  $\alpha$  jaoks kõik hulkliikmed, mille aste ei ületa kolme ja mis kommuteeruvad hulkliikmega  $x^2 - \alpha$ .
- Olgu  $P(x)$  ruutkolmliige ja  $k$  naturaalarv. Tõestada, et leidub mitte rohkem kui üks  $k$ -astme hulkliige, mis kommuteerub hulkliikmega  $P(x)$ .
- Leida kõik 4-nda ja 8-nda astme hulkliikmed, mis kommuteeruvad antud ruutkolmliikmega  $P(x)$ .
- Hulkliikmed  $Q(x)$  ja  $R(x)$  kommuteeruvad ühe ja sama ruutkolmliikmega  $P(x)$ . Tõestada, et nad kommuteeruvad ka omavahel.
- Tõestada, et leidub lõpmatu jada hulkliikmeid  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $\dots$ , kus  $P_k(x)$  on  $k$ -astme hulkliige ja  $P_2(x) = x^2 - 2$ , nii et iga kaks hulkliiget selles jadas kommuteeruvad.

45. Olgu  $A$   $2n$ -kohaline naturaalarv (esimene number ei ole null). Arvu  $A$  nimetatakse „eriliseks“, kui ta on täisruut ja tema  $n$  esimesest ja  $n$  viimasest numbrist moodustatud arvud on samuti täisruudud. Sealjuures teine arv võib alata numbriga null, kuid ei tohi olla samaselt null.

- Leida kõik kahe- ja neljakohalised „erilised“ arvud.
- Näidata, et leidub vähemalt üks 20-kohaline „eriline“ arv.
- Näidata, et 100-kohaliste „eriliste“ arvude arv ei ületa kümmet.
- Näidata, et leidub vähemalt üks 30-kohaline „eriline“ arv.

46. Marslaste tähestik koosneb 10 tähest ja iga kolmetäheline sõna moodustab perekonnanime (s.t. et Marsil on täpselt 1000 erinevat perekonnanime). Marsil kehtivate seaduste põhjal peab marslase eesnimi olema kahetäheline ning ta peab olema saadav tema perekonnanimest ühe tähe mahatõmbamisel.

- Näidata, et saab moodustada nimekirja 50 eesnimest, et iga võimaliku perekonnanimega marslane võib valida endale ühe neist eesnimedest.
- Näidata, et sellises nimekirjas ei saa olla vähem kui 40 eesnime.
- Näidata, et selles nimekirjas on vähemalt 50 eesnime.

- d) Möödunud sajandil olid marslaste perekonnanimed neljatähelised ja kahetäheline eesnimi saadi sellest mingi kahe tähe mahatõmbamisel. Näidata, et möödunud sajandil sai läbi ajada 34 eesnimega.
- e) Leida minimaalne kahetäheliste eesnimede arv, mis kõlbaks juhul, kui marslaste perekonnanimi koosneb  $k$  tähest. Lahendada ülesanne juhul kui  $k = 4, 5, 6$  jne.

## XII üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad

### 8. klass. Esimene päev

47. Tähistame sümboliga  $a_n$  täisarvu, mis on lähim arvule  $\sqrt{n}$ . Leida summa

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{1980}}.$$

48. Nelinurga  $ABCD$  sees on valitud punkt  $M$  nii, et kujund  $ABMD$  on rööpkülik. Näidata, et kui  $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$ , siis  $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$ .

49. Näidata, et mitte ühegi naturaalarvulise  $m$  korral arv  $1978^m - 1$  ei jagu arvuga  $1000^m - 1$ .

50. Tasandil on antud lõplik punktide hulk  $K_0$ . Sellele lisatakse kõik punktid, mis on saadud kõikide antud hulga punktide ühekordsel peegeldamisel üksteise suhtes. Tähistame saadud hulga sümboliga  $K_1$ . Analoogiliselt saadakse hulgast  $K_1$  hulk  $K_2$ , hulgast  $K_2$  hulk  $K_3$  jne.

- a) Olgu  $K_0$  kahepunktiline hulk (punktid  $A$  ja  $B$ ), kusjuures punktide vaheline kaugus on 1. Millise vähima  $n$  korral leidub hulgast  $K_n$  punkt, mille kaugus punktist  $A$  on 1000?
- b) Olgu  $K_0$  ühikulise pindalaga võrdkülgse kolmnurga tippude hulk. Leida vähima kumera hulknurga pindala, mis sisaldab hulga  $K_n$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$  korral).

### 8. klass. Teine päev

51. Kolm automaati trükivad kaartidele naturaalarvude paare. Automaadid töötavad järgmiselt. Esimene automaat, lugenud kaardi  $(a, b)$ , väljastab kaardi  $(a + 1, b + 1)$ . Teine automaat annab kaardi  $(a, b)$  põhjal välja kaardi  $(a/2, b/2)$  (ta töötab ainult siis, kui  $a$  ja  $b$  on paarisarvud). Kolmas automaat annab kaartide  $(a, b)$  ja  $(b, c)$  põhjal välja kaardi  $(a, c)$ . Peale selle on teada,

et kõik automaadid tagastavad läbiloetud kaardid. Olgu algul antud kaart  $(5, 19)$ . Kas on võimalik, kasutades suvalises järjekorras, saada kaarti

- a)  $(1, 50)$ ,
- b)  $(1, 100)$ ?
- c) Olgu antud kaart  $(a, b)$ , kusjuures  $a < b$ , aga tarvis on saada kaart  $(1, n)$ . Milliste  $n$  väärtuste korral on see võimalik?

52. Ringi raadius  $R$  on sisse joonestatud  $n$ -nurk, mille pindla on  $S$ . Igal  $n$ -nurga küljel on ära märgitud punkt. Näidata, et sellise hulknurga ümbermõõt, mille tippudeks on märgitud punktid, ei ole väiksem kui  $2S/R$ .

53. Malelaua (mõõtmatega  $n \times n$  ruutu) nurka on asetatud nupp. Kaks mängijat nihutavad vaheldumisi seda nuppu mööda malelauda, kusjuures ühel käigul nihutatakse nupp lähteväljalt tema naaberväljale (s.t väljale, millel on lähteväljaga ühine külg). Kui nupp on mingil väljal juba viibinud, siis teistkordselt käia sellele väljale pole lubatud. Võitjaks loetakse see mängija, kes käib viimasena.

- a) Näidata, et kui  $n$  on paarisarv, siis alustaja saab alati võita, aga kui  $n$  on paaritu, siis saab võita tema partner.
- b) Kes võidab, kui mängi algul nupp ei asetse malelaua nurgas, vaid tema naaberväljal?

54. Tasandil on antud lõplik hulk mittelõikuvaid lõike, kusjuures ükski lõikude paar ei asetse ühel sirgel. Kas on võimalik ühendada antud lõikude otspunktid omavahel sirglõikudega nii, et tekib iseendaga mittelõikuv murdjoon?

## 9.klass. Esimene päev

55. Vt. ül. 47.

56. Vt. ül. 48.

57. Laua on kaks kuhja tikke. Esimeses kuhjas on  $m$ , teises  $n$  tikku, kusjuures  $m > n$ . Kaks mängijat võtavad vaheldumisi kuhjadest tikke. Ühe käigu jooksul võtab mängija ühest kuhjast suvalise (nullist erineva) arvu tikke, kuid nii, et tema poolt võetud tikkude arv on teise kuhja tikkude arvu kordne. Võitjaks loetakse see mängija, kes võtab mingist kuhjast viimase tikku.

- a) Näidata, et kui  $m > 2n$ , siis alustaja saab alati võita.
- b) Milliste reaalarvu  $\alpha$  väärtuste korral kehtib järgmine väide: kui  $m > \alpha n$ , siis alustaja saab alati võita?

58. Näidata, et leidub selline lõpmatu tõkestatud jada  $x_n$ , et iga  $m$  ja  $k$  korral ( $m \neq k$ ) kehtib võrratus

$$|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|m - k|}$$

## 9. klass. Teine päev

59. Vt. ül. 51.

60. Vt. ül. 52.

61. Reaalarvud  $x_1, x_2, \dots, x_n$  asetsevad lõigul  $[a, b]$ , kus  $0 < a < b$ . Tõestada võrratus

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

62. On antud algarv  $p > 3$ . Vaatleme koordinaattasandil hulka  $M$ , mis koosneb sellistest täisarvuliste koordinaatidega punktidest  $(x, y)$ , kus  $0 \leq x$  ja  $0 \leq y < p$ . Näidata, et hulgas  $M$  on võimalik ära märkida  $p$  erinevat punkti nii, et ükski nelik märgitud punktide hulgast ei ole rööpküliliku tippudeks ja ükski kolmik ei asetse ühel sirgel.

## 10. klass. Esimene päev

63. Olgu  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Näidata, et kõikide naturaalarvuliste  $m$  korral ( $m > 1$ ) arvud  $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$  on paarikaupa ühisteguriteta.

64. Näidata, et saab leida sellise reaalarvu  $A$ , et funktsiooni  $y = A \cdot \sin x$  graafikusse saab sisse joonestada vähemalt 1978 paarikaupa mittekongruentset ruutu. (Ruutu nimetatakse sissejoonestatuks, kui kõik tema tipud kuuluvad graafikule.)

65. Olgu  $K_0$  ühikulise ruumalaga korrapärase tetraeedri tippude hulk. Hulgale  $K_0$  lisatakse kõik need punktid, mis saadakse kõikide antud hulga punktide ühekordsel peegeldamisel üksteise suhtes. Tähistame saadud hulga sümboliga  $K_1$ . Analoogiliselt saadakse hulgast  $K_1$  hulk  $K_2$ , hulgast  $K_2$  hulk  $K_3$  jne.

- a) Vaatleme vähimat kumerat hulktahukat, mis hõlmab hulga  $K_1$  kõik punktid. Mitu tahku on vaadeldaval hulktahukal? Millised on need tahud?
- b) Milline on selle hulktahuka ruumala?

- c) Leida vähima kumera hulktahuka ruumala, mis sisaldab hulga  $K_n$  kõik punktid ( $n = 2, 3, 4, \dots$  korral).

66. Vt. ül. 58.

## 10. klass. Teine päev

67. Vt. ül. 51.

68. Näidata, et iga tetraeedri jaoks võib leida kaks sellist tasandit, et tetraeedri ristprojeksioonide pindalade suhe nendel tasanditele ei ole väiksem kui  $\sqrt{2}$ .

69. Olgu antud reaalarvud  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Defineerime

$$\begin{aligned} b_k &= (a_1, a_2, \dots, a_n)/k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \\ C &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2, \\ D &= (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + (a_n - b_n)^2. \end{aligned}$$

Näidata, et kehtib ahelvõrratus  $C \leq D \leq 2C$ .

70. Olgu  $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$ . Jada  $x_n$  iga liiget saab esitada kujul  $x_n = r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6} + q_n$ , kus  $q_n, r_n, s_n$  ja  $t_n$  on täisarvud. Leida järgmised piirväärtused:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

71. Vt. ül. 62.

## Ülesandeid žürii materjalidest

72. Leida kõik naturaalarvud, mida ei saa esitada järjestikuste naturaalarvude summana.

73. Leida võrrandi  $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$  kõik täisarvulised lahendid.

74. Nimetame naturaalarvu „tasakaalustatuks“, kui tema mingi „algus“ ühtib tema mingi „lõpuga“ (näiteks 1971, 20320).

- Näidata, et „tasakaalustatud“ arvude osa kõikide  $n$ -kohaliste arvude hulgas ei ületa  $1/9$ .
- Näidata, et võib leida sellise naturaalarvu, mis muutub „tasakaalustatuks“, kui talle lõppu kirjutada suvaline numbritest  $0, 1, 2, \dots, 9$ .

75. Näidata, et kui  $n$  on naturaalarv, siis

- a)  $[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{4n+2}]$ ,  
 b)  $0 < \sqrt{4n+2} - \sqrt{n} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{16\sqrt{n^3}}$

76. Olgu  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$  ning  $m$  ja  $M$  vastavalt vähim ja suurim arvude  $x_1, x_2, \dots, x_k$  hulgas. Tõestada, et

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq -kmM.$$

77. On antud jada  $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ , kus  $a_k \geq (a_{k-1} + a_{k+1})/2$   $k = 1, 2, \dots, 2n-1$  korral. Tõestada, et

$$\frac{1}{n+1}(a_0 + a_1 + \dots + a_{2n}) \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})$$

ning leida milliste jadade  $a_k$  korral kehtib võrdus.

78. Olgu  $p$  algarv, kusjuures  $p > 5$ . Esitame murru  $1/p$  lõpmatu perioodilise kümnendmurruna ja vaatleme selle perioodi.

- a) Näidata, et perioodi kõigi numbrite summa jagub 9-ga.  
 b) Näidata, et kui perioodil saab jaotada  $m$  „tükiks“ nii, et igas „tükis“ on  $k$  numbrit, siis saadud „tükide“ summa („tükke“ vaadeldakse kümnend-süsteemi arvudena) jagub arvuga  $99 \dots 9$  ( $k$  üheksast).

79. Kas saab leida sellised arvud  $a$  ja  $b$ , et  $|a - b| \geq 1978$  ning võrrandil  $ax^2 + bx + ax + b = x$  puuduvad reaalsed lahendid?

80. Näidata, et kui  $x > 0$ , siis  $e^x \geq x^e$ .

81. Milline on võrrandi  $e^x = ax^2 + bx + c$  maksimaalne lahendite arv ( $a, b, c$  - reaalarvud)?

82. Jada  $x_n$  on antud järgmiste rekurrentsete seostega:  $x_{n+1} = x_n + (x_n - c)^2$ , kui  $n \geq 1$ , ning  $x_1 = 0$ . Milliste  $c$  väärtuste korral kehtib jada  $x_n$  koondub?

83. Jadad  $a_n$  ja  $b_n$  on antud järgmiste seostega:  $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$ ,  $a_1 = 1$ ;  $b_n = a_n/2^n$ ,  $n \geq 1$ . Näidata, et jada  $b_n$  koondub.

84. 12% sfääri pinnast on värvitud mustaks. Näidata, et sellesse sfääri saab sisse kujundada risttahuka nii, et ükski tema tipp ei asu sfääri värvitud osal.

85. Malelaua ruutudele on kirjutatud  $1, 2, 3, \dots, 64$  suvalises järjekorras. Näidata, et saab leida kolm  $2 \times 2$  ruutu nii et nendes ruutudes olevate arvude summa on suurem kui sada.

86. Näidata, et kui  $x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ , kus mitte kõik suurused  $x_1$  ja  $y_1$  ei ole nullid, siis

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = \frac{2}{3}.$$

87. Milliseid kuuekohalisi arve on rohkem: kas selliseid, mida saab esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, või selliseid, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena?

88. Lõpmatu suure ruudulise paberi igasse ruutu on kirjutatud musta värviga  $+1$  või  $-1$ . Näidata, et kõikide ruutude külgedele saab kirjutada punase värviga  $+1$  või  $-1$  nii, et punaste arvude korrutis mööda suvalist kinnist kontuuri on võrdne kõikide selle kontuuri sees asuvate mustade arvude korrutisega.

89. On antud hulkiige  $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x + 1$ . Isikud  $A$  ja  $B$  mängivad järgmist mängu. Algul asendab  $A$  mingi tärnikese reaalarvuga, seejärel asendab  $B$  mingi järelejäänud tärnikese reaalarvuga, siis asendab jälle  $A$  jne (kokku 9 käiku). Kui saadud hulkiikme kõik nullkohad on reaalsed, siis loetakse võitjaks  $B$ , kui aga sellel hulkiikmel on kasvõi üksainus kompleksne nullkoht, siis loetakse  $A$  võitjaks. Kas  $B$  saab võita  $A$  igasuguse mängu korral?

90. Nimetame arvu „täiuslikuks“, kui tema kõikide tegurite summa on võrdne selle arvu kahekordsega. (Näiteks 6 ja 28 on „täiuslikud“, sest  $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$  ja  $2 \cdot 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28$ ). Näidata, et arv kujul  $4n - 1$  ei ole „täiuslik“.

91. Ringi raadiusega 4 on joonestatud kolmnurk (tipud asetsevad ringjoonel). Kolmnuka ja igasse segmenti on joonestatud siseringjooned. Näidata, et nende nelja ringjoone raadiuste summa ei ole suurem kui 5.

92. Näidata, et võrrandil  $x!y! = z!$  on lõpmata palju lahendeid tingimusel, et  $x > 1$  ja  $y > 1$ .

93. Milline peab olema seos kolmnurga külgede vahel, et nurkade jaoks kehtiks võrdus  $\alpha = 2(\beta - \gamma)$ ?

94. Milliste naturaalarvuliste  $N$  väärtuste jaoks leidub täisarvuliste korrajatega hulkiige  $P_N(x)$ , mis  $N$  erinevas täisarvulises punktis on võrdne  $N$  ja punktis  $x = 0$  on võrdne nulliga?

95. a) Leida summa

$$U_N = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{c_n^k}.$$

b) Näidata, et

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_n^k} = \frac{n+1}{2^n+1} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

c) Näidata, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

96. Olgu  $c$  ja  $d$  reaalarvud.

- a) Näidata, et kui jada  $a_n$  korral  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ca_{n-1}) = 0$  ja  $|c| < 1$ , siis  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .
- b) Olgu  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-k+1} + ca_{n-k}) = 0$ . Milliste  $c$  väärtuste korral on  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ?
- c) Analoogiline küsimus juhul, kui  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + ca_{n-1} + da_{n-2}) = 0$  (leida kõikvõimalikud  $c$  ja  $d$  väärtused).

97. Korrapärase 1000-nurga tipudesse on kirjutatud täisarvud, kusjuures on teada, et naaberarvud erinevad ühe võrra. Oletame, et algul on mingi tipu juurde asetatud 2 nuppu. Käik seisneb selles, et mõlemat nuppu nihutatakse üheaegselt ja teineteisest sõltumatult nende naabertippudele (mööda ringjoont). Näidata, et nuppe saab nihutada niimoodi, et pärast igat käiku on nad võrdsete arvudega tippudes ja pärast viimast käiku diameetri otspunktid.

98. Olgu antud tabel  $n \times n$ , mille igasse lahtrisse on kirjutatud arv 0 või 1. Ühel sammul muudetakse ühtedeks kõik need nullid, millised asuvad mingi sellise ristküliku neljandas tipus, mille kolmes ülejäänud tipud on ühed (vaadeldakse selliseid ristkülikuid, mille küljed on paralleelsed antud tabeli servadega). Maksimaalselt mitme sammu jooksul saab antud tabel muutuda?

99. Ringjoonel asetseb  $n$  numbrit (nullid ja ühed). Paarissammudel lühendatakse ühe võrra iga nullide seeriat, paaritutel sammudel - iga ühtede seeriat. Mitu käiku kulub minimaalselt, et ringjoonele ei jääks enam ühtegi numbrit?

100. Kas saab mingi puukujulise graafi iga lüli juurde kirjutada naturaalarvu („kauguse“) nii, et iga naturaalarvulise  $M$  korral, kus  $1 \leq M \leq N$ , leiduks parajasti üks paar graafi tippe, millede vaheline „kaugus“ on  $M$ ?

101. a) Näidata, et valem  $10k - 14 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 6 \left\lfloor \frac{k}{8} \right\rfloor + 1$ , kus  $k$  on täisarv, esitab kõik täisarvud, mis on ühisteguriteta arvuga 30.

b) Kas iga perioodilise täisarvude hulga korral eksisteerib teatavas mõttes analoogiline valem?

102. Mitmel erineval viisil saab 13 rohelisest ja 14 punasest kuubist (mõõtmega  $1 \times 1 \times 1$ ) kokku panna kuubi (mõõtmega  $3 \times 3 \times 3$ ), mille igas reas oleks paaritu arv rohelisi?

103. Lõpmatu suures ruudukujuliste kvartalitega linnas on sisse viidud ühesuunaline liiklus. On teada, et igale ristmikule saab sõita kahes suunas ja et igalt ristmikult saab ära sõita kahes suunas. Samuti on teada, et igalt ristmikult saab sõita mööda kinnist marsruuti. Näidata, et iga kahe ristmik vahel saab sõitsa vähemalt ühes suunas.

104. Tetraeedri, mille külje pikkus on  $a$ , tasapinnaline lõige on nelinurk. Näidata, et selle nelinurga ümbermõõt on vähemalt  $2a$  ning et see ei ületa  $3a$ .

105. Millisteks osadeks (mitu kaksnurka, kolmnurka, nelinurka, ...) jaotavad sfääri a) 4 ja b) 5 üldasendis ringjoont?

106. Mööda sfääri 3 suurringjoont liiguvad ühtlaselt kolm punkti. Millistel algtingimustel (kiirustel, algfaasidel) ei osutu nad kunagi ühel sirgel olevaiks?

107. Kolnurga  $ABC$  küljel  $AB$  on valitud punkt  $K$  ja küljel  $BC$  punkt  $L$  nii, et kolnurga siseringjoone keskpunkt asub lõigul  $KL$ . Punktidest  $K$  ja  $L$  on kontrueeritud küljega  $AC$  paraleelsed sirged, mis lõikavad külgi  $BC$  ja  $BA$  vastvalt punktides  $M$  ja  $N$ . Olgu nurkade  $BAC$  ja  $ACB$  nurgapoolitajate lõikepunktid lõikudega  $LN$  ja  $KM$  vastavlt  $B_1$  ja  $B_2$ . Näidata, et punktid  $B$ ,  $B_1$  ja  $B_2$  asuvad ühel sirgel.

108. Näidata, et kui  $a, b, c$  ja  $d$  on positiivsed reaalarvud, siis  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \geq a^2b^2 + a^2c^2 + \dots + c^2d^2$ .

109. Tasandile on paigutatud lõplik hulk lõike, mis on paraleelsed  $y$ -teljega. Näidata, et kui

- a) iga kolme neist saan lõigata sirgega, siis saab kõiki lõike lõigata mingi sirgega;
- b) iga nelja neist saab lõigata parabooliga, mille telg on paralleelne  $y$ -teljega, siis saab kõiki lõike lõigata mingi parabooliga.

110. Ruumis on antud 4 sirget, milledel asuvad kuubi neli omavahel paarikaupa kiivset diagonaali. Näidata, et kui mingi sirge lõikab kolme nendest sirgetest, siis lõikab ta ka neljandat.

111. Näidata, et iga kumera hulktahuka jaoks saab leida sellise sidusa pinnalaotuse, mille suvalised 2 tahku ei kattu.

112. Paralleelsed lõigud  $AA_1$ ,  $BB_1$  ja  $CC_1$  ei asu ühel tasandil. Olgu tasandite  $A_1B_1C$ ,  $B_1C_1A$  ja  $C_1A_1B$  lõikepunkt  $M_1$  ja tasandite  $ABC_1$ ,  $BCA_1$  ja  $CAB_1$  lõikepunkt  $M$ . Näidata, et lõik  $MM_1$  on paralleelne lähtelõikudega.

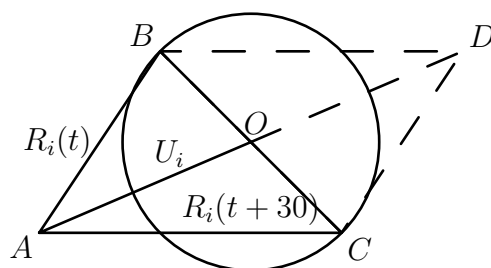
113. Ruudu  $ABCD$  küljel  $AD$  on fikseeritud punkt  $E$ . Leida külgedel  $AB$  ja  $BC$  punktid  $M$  ja  $K$  nii, et  $MK \parallel CE$  ja nelinurga  $CEMK$  pindala oleks maksimaalne.

114. Punktidest  $A$  ja  $B$  alustasid sõitu (mitte üheaegselt) teineteisele vastu jalgrattur ja mootorrattur. Pärast kohtumist punktis  $C$  pöördusid nad kohe ümber ja sõitsid tulnud teed tagasi. Lähtepunktidesse jõudes pöördusid nad uuesti ümber ja sõitsid tagasi. Kohtudes punktis  $D$ , sõitsid nad jälle tagasi jne. Millises lõigu  $AB$  punktis toimub nende 1978. kohtumine?

115. Ruudulisele paberile on joonestatud ringjoon (ruudu külje pikkus 1), mille raadius on suurem kui 2. On teada, et see ringjoon ei läbi ühtegi sõlmpunkti, s.t. ruudu tippu. Nimetame sõlmpunkti rajapunktiks, kui kasvõi üks tema naabruses olevatest (s.t. kaugusel 1) sõlmpunktidest asub teisel pool ringjoont. Leida kõikide ringjoonest väljaspool olevate rajapunktide arvude vahe.

# Lahendused

1. Olgu  $t$  aeg minutites. Tähistame sümboliga  $R(t)$  kõikide minutiosutite otspunktide kauguste summa laua keskpunktist ajamomendil  $t$ . Olgu  $U$  kõikide kellade keskpunktide kauguste summa laua keskpunktist  $A$ . Tähistame sümbolitega  $R_i(t)$  ja  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, 50$ ) vastavalt  $i$ -nda kella minutiosuti otspunkti ja selle kella keskpunkti kauguse laua keskpunktist ajamomendil  $t$ . Kuna kellad käivad täpselt, siis ajamomentidel  $t$  ja  $t + 30$  on  $i$ -nda kella minutiosuti suund diametraalselt vastupidine (vt. joon. 5).



Joonis 5

Täiendades kolmnurga  $ABC$  rööpkülilikuks, saame kolmnurgast  $ACD$  seose

$$R_i(t + 30) + R_i(t) > 2U_i.$$

Summeerides selle võrratuse vasakud ja paremad pooled  $i$  väärtuste  $1, 2, 3, \dots, 50$  korral, saame tulemuseks:

$$R(t + 30) + R(t) > 2U \quad \text{ehk} \quad [R(t + 30) - U] + [R(t) - U] > 0.$$

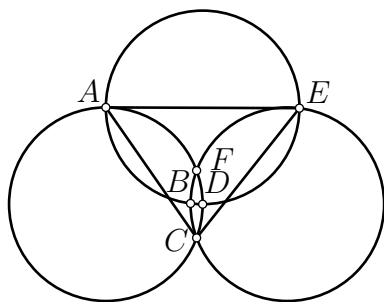
Saadud võrratusest on näha, et iga  $t$  korral kas  $R(t) > U$  või  $R(t + 30) > U$ , mida oligi tarvis tõestada.

2. a) On ilmne, et teisest reast alates ükski arv ei ületa 1000 ja et ükski arv ei ületa tema alla kirjutatud arvu. Järelikult kolmanda rea arvude summa ei ole väiksem kui teise rea arvude summa jne., kusjuures iga summa ei ületa miljonit. Järelikult peab leiduma kaks järjestikust rida, kus arvude summa

on võrdne, sest summad ei saa kogu aeg kasvada. Järelikult langevad need kaks järjestikust rida kokku.

b) Näitame, et kui  $m$ -ndas reas ( $m \geq 2$ ) arv ja tema kohale kirjutatud arv on erinevad, siis see arv ei ole väiksem kui  $2^{m-2}$ . Kui  $m = 2$ , siis on see väide ilmne, kuna teises reas esinevad ainult naturaalarvud. Olgu see väide kontrollitud kõikide ridade korral, millede järjekorranumber on väiksem kui  $m$ . Olgu  $(m-1)$ -es reas kirjutatud arv  $a$  ja tema alla kirjutatud arv  $b$ , kus  $b > a$ . Sel juhul on  $(m-2)$ -es reas teatav arv ühesugustest arvudest rühmi, kusjuures igas rühmas on  $a$  arvu ja arvud erinevates rühmades on erinevad. Siit järeldub, et  $b$  jagub arvuga  $a$ , s.t  $b \geq 2a$ . Peale selle vähemalt üks nendes rühmades sisalduvatest arvudest erineb arvust  $a$  ning järelikult induktsiooni eelduse põhjal on  $a \geq 2^{(m-1)-2}$ . Siis  $b \geq 2a \geq 2^{m-2}$ . Seega on meie väide tõestatud matemaatilise induktsiooni põhjal kõikide  $m \geq 2$  korral. Kui oletada, et 11. ja 12. rida on erinevad, siis eelneva põhjal peab leiduma 12. reas arv, mis on suurem kui  $2^{12-2} = 1024$ . Kuid see on võimatu. Järelikult langevad üheteistkümnnes ja kaheteistkümnnes rida kokku.

c) Arvestades eelnevat, võib konstrueerida rea:  $0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, \dots, 256, \dots, 256, 488, \dots, 488$ . Siin arv 0 ja arv 1 esineb ühe korra, arv 2 kaks korda, arv 4 neli korda,  $\dots$ , arv 256 esineb 256 korda, arv 488 esineb 488 korda. Kirjutades välja 2., 3., 4.,  $\dots$ , 11. rea, on lihtne näha, et 10. reas arv 256 esineb 512 korda ja arv 488 esineb 488 korda. 11. reas arv 512 esineb 512 korda ja arv 488 esineb 488 korda.



Joonis 6

3. Esitame lahenduse ainult ülesandele b), ülesanne a) lahendatakse analoogiliselt.

Et ringjoontel on võrdsed raadiused, siis kaared  $ABD$  ja  $AFD$  on kongruentsed.

Sama võib öelda ka kaarte  $EFB$  ja  $EDB$  ning  $CBF$  ja  $CDF$  kohta.

Järelikult  $\widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF} = (\widehat{ABD} - \widehat{BD}) + (\widehat{CDF} - \widehat{DF}) + (\widehat{EFB} - \widehat{BF}) = (\widehat{AFD} - \widehat{DF}) + (\widehat{CBF} - \widehat{BF}) + (\widehat{EDB} - \widehat{BD}) = \widehat{AF} + \widehat{BC} + \widehat{DE}$ .

Vaatleme nüüd kolmnurga  $AEC$  nurki.

Näeme, et  $\widehat{CAE} = \widehat{CAD} + \widehat{DAE} =$

$$(\widehat{CD} + \widehat{DE})/2, \widehat{ACE} = (\widehat{AF} + \widehat{EF})/2, \widehat{AEC} = (\widehat{BC} + \widehat{AB})/2.$$

Et kolmnurga sisenurkade summa on  $180^\circ$ , siis  $180^\circ = \widehat{CAE} + \widehat{ACE} + \widehat{AEC} = (\widehat{CD} + \widehat{DE} + \widehat{AF} + \widehat{EF} + \widehat{BC} + \widehat{AB})/2 = [(\widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF}) + (\widehat{AF} + \widehat{BC} + \widehat{DE})]/2 = \widehat{AB} + \widehat{CD} + \widehat{EF}$ .

4. Tõestame arvud  $x_1, x_2$  ja  $x_3$  ümber nii, et nad asetseksid kahanevas

järjekorras. Siis saadud jada võib erineda algjadast ainult kolme esimese liikme järjestuse poolest. On ilmne, et see jada on kahanev ( $x_k \geq x_{k+1}$ ), sest et  $x_{k+1}$  leidmisel me kasutame kõiki neid vahesid, mida me kasutame  $x_k$  leidmisel ja veel täiendavalt vahesid  $|x_k - x_i|$ , kus  $i = 1, 2, \dots, k-1$ . Ilmneb, et iga  $k > 1$  korral

$$x_k \geq x_{k+1} + x_{k+2},$$

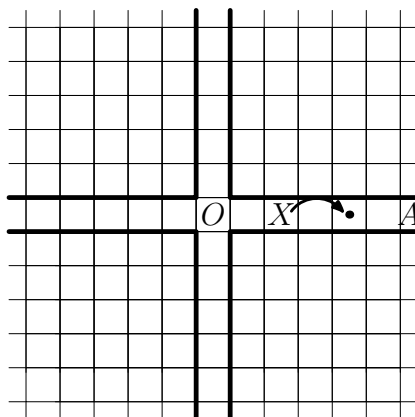
sest vastasel juhul

$$x_{k+2} < x_k - x_{k-1} = |x_k - x_{k+1}|,$$

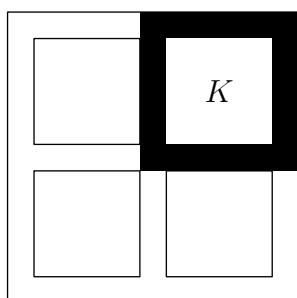
mis on aga võimatu. Oletame et  $x_{21} \geq 1$ . Siis loomulikult ka  $x_{20} \geq 1$ ,  $x_{19} \geq x_{20} + x_{21} \geq 2$ ,  $x_{18} \geq x_{19} + x_{20} \geq 3$ ,  $x_{17} \geq x_{18} + x_{19} \geq 5$ ,  $x_{16} \geq 5 + 3 = 8$ ,  $x_{15} \geq 8 + 5 = 13$ ,  $x_{14} \geq 13 + 8 = 21$ ,  $x_{13} \geq 21 + 13 = 34$ ,  $x_{12} \geq 34 + 21 = 55$ ,  $x_{11} \geq 55 + 34 = 89$ ,  $x_{10} \geq 89 + 55 = 144$ ,  $x_9 \geq 233$ ,  $x_8 \geq 377$ ,  $x_7 \geq 610$ ,  $x_6 \geq 987$ ,  $x_5 \geq 1597$ ,  $x_4 \geq 2584$ ,  $x_3 \geq 4181$ ,  $x_2 \geq 6765$  ja  $x_1 \geq 10947$ .

See on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult  $x_{21} = 0$ .

5. a) Vaatleme kärbest, kes istus malelaua keskpunktis  $O$ . Kui ta laskus samasse ruutu, siis on ülesanne lahendatud. Oletame, et ta lendas paremale (ülejäänud juhud on analoogilised), s.t. suunas  $OA$  (vt. joon. 7). Valime nende kärbeste hulgast, kes istusid algul kujundi  $OA$  ruutudel ja lendasid paremale, kärbsse  $X$ , kes asus algul kõige kaugemal punktist  $O$ . Kui kärbes  $X$  lendas edasi ainult ühe ruudu võrra, siis on ülesanne lahendatud. Kui ta lendas edasi rohkem kui ühe ruudu võrra, siis tema parempoolne naaber ei saanud lennata vasakule, sest siis nad poleks enam naabrid. Samuti ei saanud ta parempoolne naaber lennata paremale, sest et  $X$  oli kõige parempoolsem kärbes, kes lendas suunas  $OA$ . Järelikult kärbes  $X$  parempoolne naaber jäi paigale.



Joonis 7

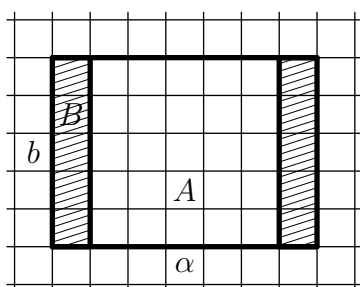


Joonis 8

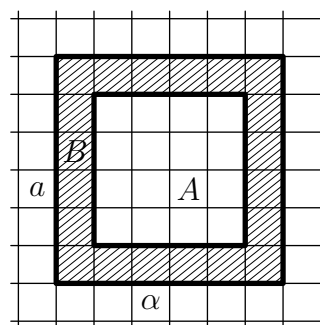
b) Kui kujund  $\Phi$  on „akna raam“, siis punkti  $a$  väide ei kehti. Et seda näidata, „organiseerime“ kärbeste lennu kahes etapis. Esimesel etapil lendavad kõik kärbsed ruudukese  $K$  (vt. joon. 8) äärtele, kusjuures

naabrid jäävad naabriteks või satuvad ühele ruudule. Seda on võimalik saavutada, kui iga kärbes lendab näiteks talle lähimasse ruudukese  $K$  äärruutu, ruudukese  $K$  äärruutudel paiknevad kärbsed jäävad aga paigale. Teisel etapil lendab iga kärbes ruudukese  $K$  vastaspunkti (ruudukese  $K$  keskpunkti suhtes). On ilmne, et ka sellisel juhul naabrid jäävad naabriteks. Näitame, et nende kahe

lennu tulemusena ükski kärbes ei jää paigale ega lenda naaberruutu. Tõepoolest, oletame et esimesel etapil lendab kärbes ruudust  $A$  ruutu  $B$  ja teisel etapil ruudust  $B$  ruutu  $C$ . Et ruut  $C$  asub  $K$  rajajoonel, siis paigale saavad jääda ainult need kärbsed, kes asuvad  $K$  rajajoonel. Kuid see on võimatu, sest need kärbsed lendavad teisel etapil  $K$  rajajoonelt vastavasse sümmeetrilistesse punktidesse. Järelikult ei jää ükski kärbes paigale. Kui oletada, et  $A$  ja  $C$  on naaberruudud, siis need kärbsed, kes on ruutudes  $A$  ja  $C$ , lendavad esimesel etapil ruutudesse  $B$  ja  $C$ . Kuid  $B$  ja  $C$  on sümmeetrilised ruudud (ruudukese  $K$  keskpunkti suhtes) ja järelikult ei ole nad naaberruudud. Seega  $A$  ja  $C$  ei ole naaberruudud.



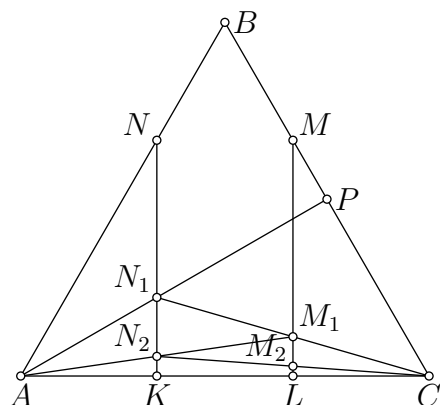
Joonis 9



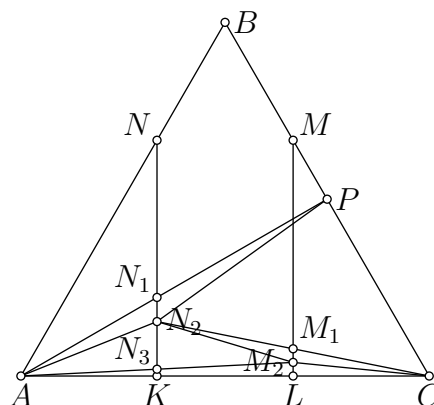
Joonis 10

c) Kui kujund  $\Phi$  on malelaud, siis punkti a) väide kehtib. Selle näitamiseks defineerime „kauguse“ järgmiselt: „kaugus“ ruutude  $A$  ja  $B$  vahel on minimaalne malekuninga käikude arv, mis on vajalik selleks, et jõuda ruudult  $A$  ruudule  $B$ . Ülesande tingimustest järeldeb, et „kaugus“ kärbeste vahel pärast lendu ei suurene. Malelaua ruutudest koosnevat ristkülikut nimetame invariantseks, kui iga kärbes sellest ristkülikust osutub pärast lendu jälle selles ristkülikus olevaks. Näiteks kogu malelaud on invariantne ristkülik. Vaatleme minimaalse ruutude arvuga invariantset ristkülikut ja näitame, et tema vertikaalse ja horisontaalse serva pikkus ei ületa kahte. Siis iga kärbes sellest ristkülikust on pärast lendu kas naaberruudus või esialgses. Oletame vastuväiteliselt, et minimaalse invariantse ristküliku  $R$  mõõtmed on  $a \times b$ , kus

$a \geq b$  ja  $a > 2$ . Näitame, et selle ristküliku sees saab valida veel väiksema invariantse ristküliku. Vaatleme algul juhtu, kus  $a > b$ . Nimetame ristküliku  $R$  rajaks tema kahe äärmise vertikaali ühendit (vt. joon. 9), ülejäänud osa nimetame sisemuseks. Märgime, et iga sisemise ruudu kaugus ristküliku  $R$  suvalisest punktist on väiksem kui  $a$ . Kui kõik kärbsed ristküliku  $R$  sisemusest lendavad uuesti  $R$  sisemusse, siis  $R$  sisemus moodustabki uue invariantse ristküliku. Oletame nüüd, et ristküliku  $R$  mingist siseruudust  $A$  lendab kärbes rajaruutu  $B$ . Vaatleme nüüd ristkülikut  $M$ , mis on koostatud neist ristküliku  $R$  ruutudest, millede „kaugus“ ruuduni  $B$  on väiksem kui  $a$ . Et kõik kärbsed olid enne lendu ruudust  $A$  mitte kaugemal kui  $a - 1$ , siis nad kõik lendasid ristkülikusse  $M$ . Järelikult on  $M$  invariantne ristkülik. Et temas on ruute vähem kui ristkülikus  $R$ , siis sellel juhul on tõestatud, et  $R$  ei saa olla minimaalne invariantne ristkülik. On jäänud vaadelda veel juhtu, kus  $a = b > 2$ . Sel juhul nimetame rajaks kõiki antud ruudu ääreruute (vt. joon. 10) ja sisemuseks ruudu ülejäänud osa. Ülesande lahendamiseks sellisel juhul sobivad samuti ülaltoodud arutlused.



Joonis 11



Joonis 12

**6.** Tõestame väited b) ja c) juhul, kui kolmnurga  $ABC$  külje pikkus on 3. See lahendus sobib ka juhul, kui külje pikkus on 5. Punktis a) esitatud väite kehtivus järeldub vahetult punkti b) väite kehtivusest.

b) Olgu  $K$  ja  $L$  punktid, mis jaotuvad külje  $AC$  kolmeks võrdseks osaks (joon. 11). Konstrueerime punktidest  $K$  ja  $L$  küljele  $AC$  ristsirged  $KN$  ja  $LM$ . Olgu

$$N_1 = [KN] \cap [AP], M_1 = [LM] \cap [CN_1],$$

$$N_2 = [AM_1] \cap [KN], M_2 = [CN_2] \cap [LM] \text{ jne.}$$

Lähtekolmnurk  $ABC$  jaguneb sel juhul kolmnurkadeks  $ABP$ ,  $CPN_1$ ,  $AN_1M_1$ ,  $CM_1N_2$ ,  $AN_2M_2$  jne. Kui valida punkt  $P$  nii, et  $BP = CP = 1,5$ , siis on

kõik konstrueeritud kolmnurgad „suured“, sest et kõikide kolmnurkade külgede projektsioonid küljele  $AC$  ei ole lühemad kui 1. Ülesande lahendusest ilmneb, et arvu 1000 asemele võib kirjutada suvalise naturaalarvu.

c) Antud väite tõestus on analoogiline punkti b väite tõestusega. Olgu punktid  $K$ ,  $L$  ja  $P$  samad, mis punkti b) tõestuses,  $KN$  ja  $LM$  külje  $AC$  ristsirged.  $N_1 = [AP] \cap [KN]$  (joon. 12). Valime lõigul  $KN_1$  punkti  $N_2$  ja ühendaame ta punktidega  $A$ ,  $P$  ja  $C$ . Olgu  $M_1 = [N_2C] \cap [ML]$ . Lõigul  $LM_1$  valime punkti  $M_2$  ja ühendame ta punktidega  $A$ ,  $N_2$  ja  $C$ . Olgu  $M_3 = [KN] \cap [AM_2]$ . Lõigul  $KM_3$  valime punkti  $M_4$  ja ühendame ta punktidega  $A$ ,  $M_2$  ja  $C$ , jne. Seda protsessi jätkates saamegi kolmnurga  $ABC$  jaotuse „suurteks“ kolmnurkadeks  $ABP$ ,  $APN_2$ ,  $CPN_2$ ,  $AN_2M_2$ ,  $CN_2M_2$ , ... ülesandes nõutud viisil. Ilmneb, et ka siin võib kolmnurkade arv olla suvaline.

**7.** Punktides a), b) ja d) püstitatud ülesannete lahendused on analoogilised ül.14 punktide a), b) ja e) lahendustega.

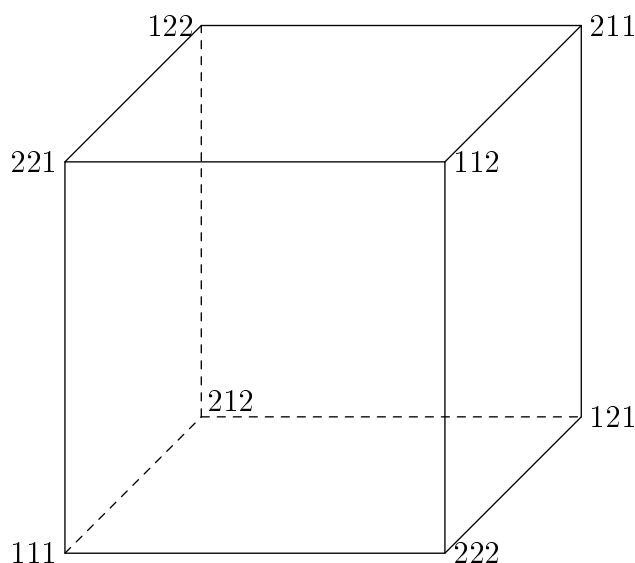
c) Näitame matemaatilise induktsiooni meetodiga, et iga „ $N$ - universaalse“ jada (vt. ül. 14 tekst) korral leidub selline jada liige, mis esineb selles jadas vähemalt  $N$  korda.

Tõepoolest, kui  $N = 2$ , siis väide kehtib. Oletame, et väide kehtib  $N = M$  korral, s.t. igas „ $M$ - universaalses“ jadas on selline element, mis esineb temas vähemalt  $M$  korda. Vaatleme suvalist „ $M + 1$  - universaalset“ jada  $a_1, a_2, \dots, a_L$ . Olgu  $n < L$  minimalne selline indeks, et jadas  $a_1, a_2, \dots, a_n$  esinevad kõik numbrid  $1, 2, 3, \dots, M + 1$ . Siis on ilmne, et element  $a_n$  esineb jadas  $a_1, a_2, \dots, a_n$  parajasti ühe korra. Vajaduse korral jada elemente ümber nummerdades on võimalik saavutada, et jada  $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_L$  on „ $M$ - universaalse“. Järelikult leidub selles jadas element  $q$ , mis esineb seal vähemalt  $M$  korda. Et jadas  $a_1, a_2, \dots, a_n$  esinevad kõik liikmed  $1, 2, \dots, M + 1$ , siis esineb seal ka element  $q$ . Järelikult jada  $a_1, a_2, \dots, a_L$  on „ $M + 1$  - universaalne“, sest element  $q$  esineb temas vähemalt  $M + 1$  korda.

Seega iga „ $N$ - universaalse“ jada korral leidub selline element, mis esineb temas vähemalt  $N$  korda.

**8** Vt. ül. 3 lahendus

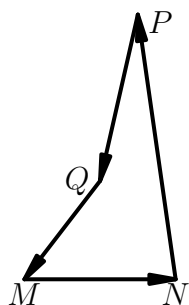
**9** On küll. Vt. joon. 13.



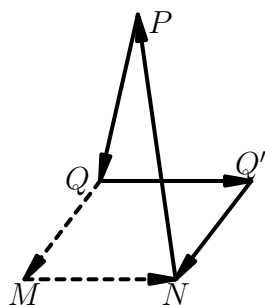
Joonis 13

10 Vt. ül. 4 lahendus.

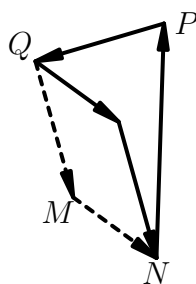
11. Valides tasandil järjestikku vektorid  $\vec{MN} = \vec{a}$ ,  $\vec{NP} = \vec{b}$ ,  $\vec{PQ} = \vec{c}$ ,  $\vec{QM} = \vec{d}$ , saame kinnise murdjoone, sest et  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$ . Muutes summas vektorite  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$  järjekorda on võimalik saada erinevaid murdjooni. Antud ülesande seisukohalt ei ole oluline, millist murdjoont vaadelda, sest et tõestatav võrratus ei muutu, kui vektoreid  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ja  $\vec{d}$  paarikaupa ümber vahetada. Näitame, et nende murdjoonte seas on selliseid, mis lõikavad iseennast.



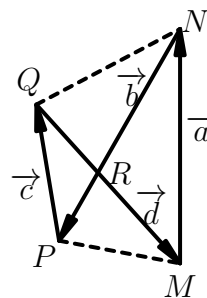
Joonis 14



Joonis 15



Joonis 16



Joonis 17

Tõepoolest, võtame vaatluse alla mingi murdjoone. Kui selle murdjoone teatud tipp (näiteks  $Q$ ) asub kolmnurga  $MNP$  sees (joon.14), siis leiame punkti  $Q'$  nii,  $\vec{QQ'} = \vec{MN}$ . Siis  $\vec{Q'N} = \vec{QM}$ . Järelikult murdjoone  $MNPQ$  võib asendada murdjoonega  $NPQQ'$  (joon.15). Kui  $MNPQ$  on kumer murdjoon, siis algul teeme sellise konstruktsiooni, nagu on näidatud joonisel 16.

Seega võib eeldada, et murdjoon  $MNPQ$  lõikab iseennast. Olgu  $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{NP} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{PQ} = \vec{c}$ ,  $\overrightarrow{QM} = \vec{d}$ . olgu  $R$  lõikude  $NP$  ja  $MQ$  ühine punkt (joon.17). Siis

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| \geq |\overrightarrow{PM}| \quad \text{ja} \quad |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| \geq |\overrightarrow{QN}|.$$

Järelikult

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| \geq |\overrightarrow{PM}| + |\overrightarrow{QN}|.$$

Et

$$|\overrightarrow{PM}| = |\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QM}| = |\vec{c} + \vec{d}|, |\overrightarrow{QN}| = |\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MN}| = |\vec{a} + \vec{d}|$$

ja

$$|\overrightarrow{MR}| + |\overrightarrow{PR}| + |\overrightarrow{NR}| + |\overrightarrow{QR}| = |\overrightarrow{QM}| + |\overrightarrow{NP}| = |\vec{b}| + |\vec{d}|,$$

siis

$$|\vec{b}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|. \quad (2)$$

Et  $|\vec{a}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{c}|$  ning  $|\vec{a} + \vec{c}| = |\vec{b} + \vec{d}|$ , siis

$$|\vec{a}| + |\vec{c}| \geq |\vec{b} + \vec{d}|. \quad (3)$$

Liites võrratused (2) ja (3), saame et

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}|.$$

**12** Vt. ül. 6 lahendus.

**13.** Vaatleme lihtsuse mõttes juhtu, kus  $n = 30$ . Ülejäänud  $n$  väärtuste korral on lahendus analoogiline. Tähistame antud arvud sümbolitega  $y_{-14}, y_{-13}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots, y_{15}$ , kus  $y_0 = 1$ .

- a) Tähistame  $\max_{-14 \leq k \leq 15} |y_{k+1} - y_k| = \alpha$ . Siis  $|y_{k+1} - y_k| \leq \alpha$ , kui  $k = -14, -13, \dots, 14, 15$  (siin  $y_{16} = y_{-14}$ ). Lähtudes arvust  $y_0$  saame, et

$$\alpha \geq |y_0| - |y_s|,$$

kui  $s = \pm 1$ . Seega  $y_{\pm 1} \geq 1 - \alpha$ . Lähtudes võrratustest  $|y_2 - y_1| \leq \alpha$  ja  $|y_{-2} - y_{-1}| \leq \alpha$ , saame, et  $y_{\pm 2} \geq 1 - 2\alpha$ . Analoogiliselt jätkates saame, et  $y_k \geq 1 - |k|\alpha$ , kui  $k = -14, -13, \dots, 14, 15$ . Et  $\sum y_k = 0$ , siis  $0 = \sum y_k \geq 30 - 2(1 + 2 + \dots + 14)\alpha - 15\alpha = 30 - 15\alpha^2$ . Järelikult  $\alpha \geq 30/15^2 = 2/15$ .

- b) Antud juhul on vaja hinnata suurust  $A = (y_{k+1} + y_{k-1})/2 - y_k$ . Kerge on märgata, et

$$A = (y_{k+1} - y_k)/2 - (y_k - y_{k-1})/2.$$

Rakendame suuruse  $A$  hindamiseks ülesande  $a$  osa lahendust. Tähistame  $y_{k+1} - y_k = y'_k$ ,  $\max_{-14 \leq k \leq 15} |y'_k| = \alpha$  (kui  $k = 15$ , siis  $y_{k+1} = y_{-14}$ ). Vaatleme jada  $z_k = y'_k/\alpha$ . Lihtne on veenduda, et  $\sum z_k = 0$  ning et maksimaalne arvudest  $z_k$  jaoks saame (rakendades punktis  $a$  saadud tulemust, et

$$\max_k |z_{k+1} - z_k| \geq 2/15.$$

Seega  $\max_k |y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}|/2 = \alpha/2 \cdot \max_k |z_k - z_{k-1}| \geq \alpha/15 \geq 2/225$ .  
Osutub, et see hinnang on umbes 2 korda halvem kui parim hinnang.

- c) Täpseima hinnangu saamise idee on lihtne: tuleb, lähtudes hinnangust  $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$ , täpsemalt hinnata suurusi  $|y_{k+1} - y_k|$  ja seejärel hinnata suurusi  $y_k$  (kasutades seda, et  $y_0 = 1$ ). Lõpuks tuleb saada võrdusest  $\sum y_k = 0$  hinnang suurusele  $\beta$ . Enne kui asuda selle plaani realiseerimisele, märgime, et võib piirduda ainult sümmeetriliste jadade vaatlemisega (s.t.  $y_k = y_{-k}$ ). Tõepoolest, jadast  $y_k$ , kus  $\sum y_k = 0$  ja  $y_0 = 1$  ning  $|y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}| \leq 2\beta$ , võib saada sümmeetrilise jada  $z_k$ , kus  $z_k = (y_k + y_{-k})/2$ , mis rahuldab samuti kõiki neid tingimusi. Seega saame

$$\begin{aligned} y_0 - y_1 &= (2y_0 - y_1 - y_{-1})/2 \leq \beta, \\ y_1 - y_2 &= (2y_1 - y_0 - y_2) + (y_0 - y_1) \leq 2\beta + \beta = 3\beta, \\ y_2 - y_3 &\leq 5\beta, \\ &\dots\dots\dots \\ y_6 - y_7 &\leq 13\beta, \\ y_7 - y_8 &\leq 15\beta, \\ y_8 - y_9 &\leq 13\beta, \\ &\dots\dots\dots \\ y_{13} - y_{14} &\leq 3\beta, \\ y_{14} - y_{15} &\leq \beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Seitsmest esimesest võrratusest saame, et

$$y_k \geq 1 - k^2\beta, \quad \text{kui } 0 \leq k \leq 7,$$

ja ülejäänutest saame, et

$$y_k \geq 1 - \beta(7^2 + 8^2) + \beta(15 - k)^2, \quad \text{kui } 7 \leq k \leq 15.$$

Summeerides saadud võrratused kõikide  $k$  väärtuste korral (arvestades, et  $y_k = y_{-k}$ ) saame, et  $0 \geq 30 - 15(7^2 + 8^2)\beta$ . Järelikult  $\beta \geq 2/113$ . Võib märkida, et punktide  $a$  ja  $b$  lahenduskäigud on lihtsalt üle kantavad juhule, kui  $n$  on suvaline kolmest suurem naturaalarv. Sellisel juhul on täpseimad hinnangud järgmised.

- 1) Naaberarvude maksimaalne vahe ei ole väiksem kui  $4/n$  paarisarvulise  $n$  korral ning ei ole väiksem kui  $4n/(n^2 - 1)$  paaritu arvulise  $n$  korral.
- 2) Arvu maksimaalne erinevus oma naaberarvude aritmeetilisest keskmisest ei ole väiksem kui  $16/n^2$ ,  $16n/(n^3 + n - 2)$ ,  $16/(n^2 + 4)$  või  $16/(n^3 + n + 2)$  vastavalt sellele, kas  $n$  annab neljaga jagades jäägi 0, 1, 2 või 3.
- d) Sellise jada võib valida näiteks järgmiselt:  $y_k = 1 - 2k^2/113$ , kui  $0 \leq k \leq 8$ ;  $y_k = -1 + 2(15 - k)^2/113$ , kui  $9 \leq k \leq 15$ ;  $y_k = y_{-k}$ , kui  $0 \leq k \leq 15$ ;  $y_{15} = y_{-15}$  (def. kohaselt). Lihtne on kontrollida, et  $|(y_{k+1} - y_{k-1})/2 - y_k| = 2/113$  iga kolme järjestikuse arvu korral. Märgime, et see jada on saadud mitterangetest võrratustest (1), vaadeldes seal võrdusi ning võttes  $\beta = 2/113$ .

#### 14.

a) Kirjutades järjestikku  $N$  ühesugust rühma  $(1, 2, \dots, N)$ , saame „ $N$ -universaalse“ jada, milles on  $N^2$  liiget.

b) Kirjutame järjestikku  $N - 1$  rühma  $(1, 2, \dots, N)$  ja lõppu kirjutame arvu 1. Selles jadas on  $N(N - 1) + 1 = N^2 - N + 1$  liiget. Näitame, et see jada on „ $N$ -universaalne“.

Olgu  $q$  suvaline arvude  $1, 2, \dots, N$  permutatsioon kujul  $(b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Kui  $q = (N, N - 1, N - 2, \dots, 1)$ , siis esimeses rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud  $N$ ; teises rühmas kõik arvud, välja arvatud  $N - 1$  jne. Kui  $q$  ei ole vaadeldud kujul, siis teatava  $k$  korral peab olema  $b_k < b_{k+1}$ . Kui  $i < k$ , siis tõmbame  $i$ -ndas rühmas maha kõik arvud peale  $b_i$ ;  $k$ -ndas rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud  $b_k$  ja  $b_{k+1}$ ; kui  $m > k$ , siis  $m$ -ndas rühmas tõmbame maha kõik arvud, välja arvatud  $b_{m+1}$ . Kõige lõpuks tõmbame maha kõige viimase arvu 1 ja saamegi permutatsiooni  $q$  kujul  $b_1, b_2, \dots, b_N$ .

c) Näitame, et kui  $N \geq 2$ , siis iga „ $N$ -universaalse“ jada pikkus ei ole väiksem kui  $(N^2 + 3N - 4)/2$ . On ilmne, et kui arv  $N$  esineb esimest korda „ $N$ -universaalses“ jadas  $k$ -nda liikmena, siis see osa „ $N$ -universaalsest“ jadast, mis jääb paremale arvust  $N$ , on „ $(N - 1)$ -universaalne“ jada. Tõepoolest, et saada suvaline arvuga  $N$  algav permutatsioon, tuleb maha kriipsutada kõik need jada elemendid, mis asetsevad arvust  $N$  vasakul.

Tõestame antud punktis püstitatud väite matemaatilise indukstiooni abil. Kui  $N = 2$ , siis väide on lihtsalt kontrollitav. Oletame, et väide kehtib  $N = M$  korral. Olgu  $P$  suvaline „ $(M + 1)$ -universaalne“ jada kujul  $a_1, a_2, \dots, a_L$ . Kui mingi arv esineb jadas  $P$  ainult ühe korra, siis võib vajaduse korral tähistusi muutes saavutada olukorra, et see arv on  $M + 1$ . Sellisel juhul arvust  $M + 1$

vasakule ja paremale jäävad osad moodustavad „ $M$ -universaalse“ jada, mille iga pikkus induktsiooni eelduse kohaselt ei ole väiksem kui  $(M^2 + 3M - 4)/2$ . Järelikult jada  $P$  pikkus ei ole väiksem kui

$$1 + 2 \cdot (M^2 + 3M - 4)/2 \geq [(M + 1)^2 + 3(M + 1) - 4]/2.$$

Seega esineb iga arv jadas  $P$  vähemalt kaks korda. Olgu  $k$  vähim selline indeks, et arvude  $a_1, a_2, \dots, a_k$  hulgas esinevad kõik arvud  $1, 2, \dots, M + 1$ . Muutes vajaduse korral tähistusi (s.t. nummerdades arve  $1, 2, \dots, M + 1$  ümber), võib eeldada, et  $a_k = M + 1$ . Siis on ilmne, et kui  $i < k$ , siis  $a_i \neq M + 1$ . Arvust  $M + 1$  vasakul esinevad kõik arvud  $1, 2, \dots, M$ , seega mitte vähem kui  $M$  arvu. Peale selle esineb jadas  $P$  vähemalt kaks arvu  $M + 1$ . Kui need maha kriipsutada, siis jääb arvust  $a_k$  paremale „ $M$ -universaalne“ jada. Siit tuleneb, et jada  $P$  pikkus ei ole väiksem kui

$$(M^2 + 3M - 4)/2 + M + 2 = [(M + 1)^2 + 3(M + 1) - 4]/2.$$

Järelikult on väide tõestatud.

d) Võttes eelmise punkti väites  $N = 4$ , saame, et „4-universaalne“ jada sisaldab vähemalt 12 liiget. Sellist näidet konstrueerida ei ole raske, „4-universaalne“ on näiteks jada  $1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3$ .

e) Oletame, et  $1 \leq k \leq N$ . Kirjutades jada  $1, 2, 3, \dots, N$  järjest  $k - 1$  korda ja sinna järele veel rühma kujul  $1, 2, 3, \dots, N - k + 1$ , saame jada pikkusega  $Nk - k + 1$ . Kui näiteks  $N = 5$  ja  $k = 3$ , siis saame jada  $1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3$ . Analoogiliselt punktiga  $b$  saab näidata, et sellest jadast võib teatavate liikmete mahatõmbamisega saada suvalise  $k$ -elemendilise jada arvudest  $1, 2, \dots, N$ , milles ükski liige ei esine rohkem kui üks kord. Sellist jada omadust nimetatakse „ $(N, k)$ -universaalsuseks“.

Konstrueerime nüüd „ $N$ -universaalse“ jada, mille pikkus on  $N^2 - 2N + 4$ . Selleks kirjutame jada  $1, 2, \dots, N - 1$  järjest  $N - 2$  korda ja sinna lõppu veel arvud  $1$  ja  $2$ . Peale selle kirjutame veel sellesse jadasse  $N$  korda arvu  $N$  järgmise reegli kohaselt: esimese arvu  $N$  kirjutame jada algusesse, teise arvu  $N$  kirjutame esimesse rühma pärast arvu  $N - 1$ , kolmanda arvu  $N$  kirjutame teise rühma pärast arvu  $N - 2$  jne. Viimase arvu  $N$  kirjutame viimasesse rühma, arvude  $1$  ja  $2$  vahele. Sellisel juhul saame jada, mille pikkus on  $(N - 1)(N - 2) + 2 + N = N^2 - 2N + 4$ . Tähistame selle jada tähega  $P$ . Näitame, et jada  $P$  on „ $N$ -universaalne“. Tõepoolest, olgu  $q$  suvaline arvude  $1, 2, \dots, N$  permutatsioon ning olgu arv  $N$  jadas  $q$   $k$ -ndal kohal. Arv  $N$  jaotab jada  $q$  kaheks osaks: vasakpoolseks (pikkusega  $k - 1$ ) ja parempoolseks (pikkusega  $N - k$ ). Meil on vaja jadast  $P$  maha tõmmata osa liikmeid nii, et saaksime jada

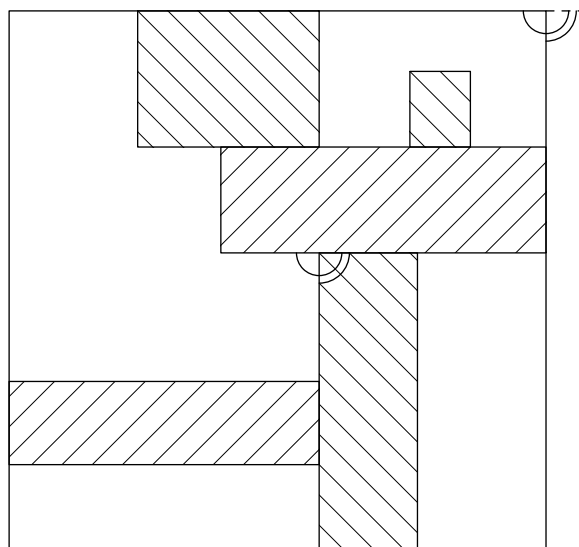
$q$ . Tõmbame kõigepealt maha kõik arvud  $N$ , välja arvatud see, mille indeks on  $k$ . Arvust  $N$  vasakule jääb sellisel juhul „ $(N-1, k-1)$ -universaalne“ jada. Sellest on võimalik saada iga jada arvudest  $1, 2, \dots, N-1$ , mille pikkus on  $k-1$  ja milles iga arv esineb maksimaalselt üks kord. Erijuhul on võimalik saada jadas  $q$  arvust  $N$  vasakul seisvat osa. Arvust  $N$  paremale jääb jada järgmisel kujul: algul on rühm arve  $N-k+2, N-k+3, \dots, N-1$ , siis  $N-k-1$  rühma kujul  $1, 2, \dots, N-1$  ning lõpuks arvud  $1$  ja  $2$ . Tähistades vajaduse korral arvud ümber, saab muuta seda jada „ $(N-1, N-k)$ -universaalseks“. Sellest jada  $P$  osast võib mahatõmbamisega saada jada  $q$  selle osa, mis asetseb arvust  $N$  paremal. Järelikult on konstrueeritud jada tõepoolest „ $N$ -universaalne“.

**15.** Näitame matemaatilise induktsiooni meetodiga, et kui sellises jadas  $x_0$  ja  $x_1$  on väiksemad kui  $2n$ , siis vähemalt üks arvudest  $x_1, x_2, \dots, x_{3n}$  võrdub nulliga (ülesandes  $n = 500$ ). Kui  $n = 1$ , siis on väide lihtsalt kontrollitav. Oletame, et  $k$  väärtuste  $1, 2, \dots, n-1$  korral on väide tõestatud. Et  $x_0 \leq 2n-1, x_1 \leq 2n-1, x_2 \geq 1$ , siis  $x_3 \leq 2n-2$  ja  $x_4 \leq 2n-3$ . Kui nüüd  $x_3 < 2n-2$  ja  $x_4 < 2n-2$ , siis induktsiooni eeldusest järeldub antud väite õigsus. Kui  $x_3 = 2n-2$ , siis  $x_2 = 1, x_1 = 2n-1$  ja  $x_0 = 2n-2$ . Jääb tõestada väite kehtivus ka sellel juhul. Tõepoolest,  $x_3 = 2n-2, x_4 = 2n-3, x_5 = 1, x_6 = 2n-4, x_7 = 2n-5, x_8 = 1, \dots, x_{3k} = 2n-2k, \dots, x_{3n} = 0$ .

**16.** Olgu  $n$  paarisarv. Fikseerime mingi kõõlu ja vaatleme kõiki kõõle, mis on sama pikkusega. Kui fikseeritud kõõl on ringi diameeter, siis sama pikkusega kõõle on antud korrapärase  $n$ -nurgas  $\frac{n}{2}$  ja nad lõikuvad ühes punktis. Kui fikseeritud kõõl ei ole ringi diameeter, siis sama pikkusega kõõle on  $n$  ja nende keskpunktid asuvad ringjoone keskpunktist võrdsel kaugusel. Järelikult saab kõik märgitud punktid, v.a. ringjoone keskpunkt, paigutada kontsentrilistele ringjoontele, kusjuures igal ringjoonel asetseb täpselt  $n$  punkti. Lihtne on näha, et selliseid ringjooni on  $\frac{n-2}{2}$ .

Näitame, et  $n$  on märgitud punktide maksimaalne arv ühel ringjoonel. Oletame, et on antud veel mingi ringjoon. Antud ringjooni lõikab ta maksimaalselt  $2 \cdot \frac{n-2}{2}$  punktis, sest iga ringjoonega saab tal olla maksimaalselt kaks ühist punkti. Kui see ringjoon läbib antud ringjoonte ühist keskpunkti, siis ei saa temal asetseda rohkem kui  $[2(n-2)] : 2 + 1 = n-1$  märgitud punkti. Järelikult ei ületa märgitud punktide maksimaalne arv mistahel ringjoonel arvu  $n$ .

**17.** Oletame, et pärast ristkülikute väljalõikamist jäävad järele tükid  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . On ilmne, et igal tükil  $A_i$  on vähemalt neli nurka, mille suurus on  $90^\circ$ . Järelikult tüki  $A_i$  kõikide  $180^\circ$  väiksemate sisenurkade juurde jäävate välisnurkade summa ei ole väiksem kui  $360^\circ$ . Teiselt poolt on ilmne, et need välisnurgad on kas väljalõigatud ristkülikute sisenurgad või antud paberilehe välisnurgad (vt. joon. 18). Järelikult nende välisnurkade summa



Joonis 18

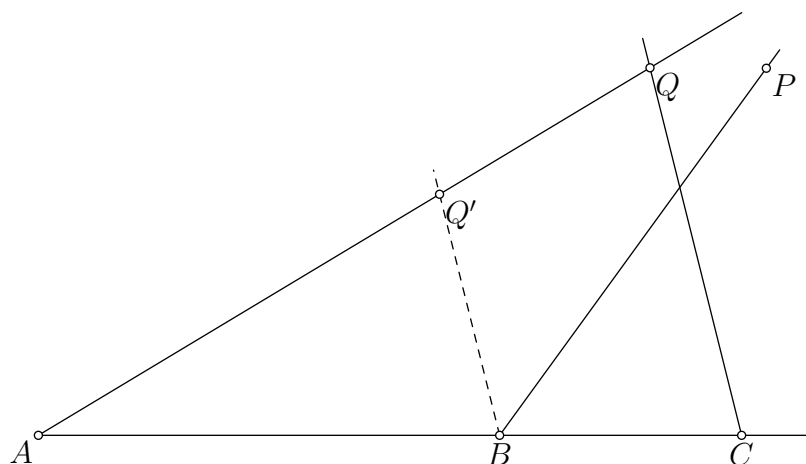
ei ületa  $(n + 1) \cdot 360^\circ$ . Et iga tüki  $A_i$  korral selliste välisnurkade summa on vähemalt  $360^\circ$ , siis järelikult  $k \leq n + 1$ . Tõestusest on näha, et kui kokku saadi  $n + 1$  tükki, siis kõik tükid on ristkülikud.

**18.** Lahendame ülesande geomeetriliselt. Läheme üle liikumatult koordinaatide süsteemilt liikuvale. Tingimust, et punktid  $P$ ,  $Q$  ja  $R$  asuvad ühel sirgel, tähistame kujul  $R \in PQ$  ( $P \neq Q$ ).

Läheme üle liikuvale koordinaatide süsteemile, mis on seotud ühega jalakäijatest. Siis taandub ülesanne järgmiseks: tasandil on antud liikumatu punkt  $A$ ; näidata, et kui punktid  $P$  ja  $Q$  liiguvad ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis sündmus  $A \in PQ$  saab toimuda maksimaalselt 2 korda, kui on teada, et algmomendil  $A \notin PQ$ .

Oletame, et mingil momendil  $t_1$  asuvad jalakäjad  $P$  ja  $Q$  punktides  $B$  ja  $C$  nii, et  $A \in BC$ . Võtame kasutusele ühe „fiktiivse“ jalakäija  $Q'$ , kes momendil  $t = t_1$  asub punktis  $B$  ja liigub paralleelselt jalakäijaga  $Q$  nii, et alati  $A \in QQ'$ . On ilmne, et tingimused  $A \in PQ$ ,  $A \in PQ'$  ja  $Q' \in AP$  on ekvivalentsed (vt. joon. 19). Samuti on ilmne, et punkt  $Q'$  liigub ühtlaselt. Järelikult sirge  $PQ'$  säilitab sihi, s.t. ta jääb liikudes iseendaga paralleelseks. Järelikult saab ta vaid ühel momendil  $t = t_2$  läbida punkti  $A$ . (Võimalus, et punktid  $P$  ja  $Q'$  ühtivad igal ajamomendil, välistatakse algtingimustega. Samuti järeldub algtingimustest, et punktid  $P$  ja  $Q'$  ei saa kogu aeg olla sirgel  $AB$ .)

**19.** Vt. ül. 11. lahendus.



Joonis 19

**20.** Märgime, et lõpp-paigutus sõltub altpaigutusest ja valitsevatest hulknurkadest, kuid ei sõltu käikude tegemise järjekorrast. Tõepoolest, pärast käikude tegemist lähtehulknurga tipus olev arv sõltub esialgsest arvust selles tipus ja sellest, kas see tipp satub paaris- või paaritusse arvu hulknurkadesse. Peale selle on ilmne, et ühes ja samas hulknurgas pole mõtet üle ühe korra muuta märke.

Nimetame kahte paigutust ekvivalentseteks, kui ühte neist on võimalik saada teisest (lõpliku arvu käikudega). Kõiki paigutusi, mis on ekvivalentsed mingi fikseeritud paigutusega, nimetame ekvivalentsiklassiks või lihtsalt klassiks, mis on tekitatud antud paigutuse poolt. On ilmne, et kõik paigutused ühest klassist on omavahel ekvivalentsed, aga paigutused erinevatest klassidest ei ole ekvivalentsed. Osutub, et kõikides ekvivalentsiklassides on ühepalju paigutusi. Tõepoolest, olgu esimene klass tekitatud paigutuse  $N$  poolt, teine paigutuse  $M$  poolt. Siis paigutusele esimesest klassist, mis on saadud paigutusest  $N$  märkide muutmisel teatavate hulknurkade tippudes, seame vastavusse sellise paigutuse teisest klassist, mis on saadud paigutusest  $M$  märkide muutmisel samade hulknurkade tippudes. Selline vastavuse korraldamise võimalikkus annabki aluse väita, et kõikides klassides on ühepalju paigutusi.

Ülesande punktides a), b) ja c) väidetakse, et mitte kõik paigutused ei satu ühte klassi, punktis d) aga tahetakse teada võimalike klasside arvu. Tähistame klasside arvu sümboliga  $F(n)$ , elementide arvu mingis klassis (ükskõik millises) aga sümboliga  $f(n)$ . Et paigutusi on üldse  $2^n$ , siis  $F(n) = \frac{2^n}{f(n)}$ . Järelikult tuleb  $F(n)$  leidmiseks leida  $f(n)$ . Leiame näiteks, kui palju on paigutusi

klassis, mis on tekitatud  $+1$  koosneva paigutuse poolt. On ilmne, et iga  $pq$ -nurka ( $p, q$  - naturaalarvud ja suuremad kui 1) saab jaotada  $q$ -nurkadeks nii, et nende arv on  $p$ . Me võime piirduda selliste jaotustega, kus  $q$  on algarv. Kui  $p$  on algarv, siis  $f(p) = 2$  ja järelikult

$$F(p) = 2^{p-1}. \quad (2)$$

Alustame punkti d) lahendamisest. Olgu  $n = bp$ , kus  $b$  on naturaalarv ja  $p$  algarv. Leiame suuruse  $f(n)$  suuruse  $f(b)$  kaudu, kasutades  $n$ -nurga jaotamist korrapärasteks  $b$ -nurkadeks. Fikseerime mingi korrapärase  $q$ -nurga. Kui  $b$  jagub arvuga  $q$ , siis on ilmne, et see  $q$ -nurk sisaldub täielikult mingis  $b$ -nurgas. Kui  $b$  ei jagu algarvuga  $q$ , siis on lihtne näidata, et sellel  $q$ -nurgal on iga  $b$ -nurgaga täpselt üks ühine tipp.

Oletame algul, et  $b : a$ . Siis  $b$  jagub arvu  $n$  kõikide algarvuliste teguritega ja iga valitav hulknurk sisaldab täielikult mingis  $p$ -nurgas. Sel juhul võib eeldada, et märgimuutused toimuvad üksteisest sõltumatult kõikides  $b$ -nurkades (neid on üldse  $p$  tükki). Seega

$$f(n) = [f(b)]^p. \quad (3)$$

Oletame nüüd, et  $b$  ei jagu arvuga  $p$ . Värvime kõik  $p$ -nurgad nii, et iga  $p$ -nurk on värvitud ühe värviga ja erinevad  $p$ -nurgad erinevate värvidega (kokku on vaja  $b$  värvi). Siis on suvalise  $b$ -nurga kõik tipud värvitud erinevate värvidega. Jaotame oma tegevuse (s.t. käikude tegemise) kaheks etapiks: esimesel etapil valime  $p$ -nurkasid, teisel etapil ülejäänud  $q$ -nurkasid ( $q$  on arvu  $n$  algtegur  $q \neq p$ ). Esimesel etapil toimub märgimuutus ainult sama värvi tippudes, järelikult pärast esimest etappi on kõikides  $b$ -nurkades üks ja seesama arvude  $+1$  ja  $-1$  paigutus, kusjuures see paigutus võib olla täiesti suvaline. (Meenutame, et me alustasime paigutusest, kus kõik arvud on  $+1$ .) Siin ja allpool me arvestame, et  $b$ -nurkades on üks ja seesama paigutus, kui neid ümber punkti 0 pöörates kõik sama värvi tipud ühtivad.

Teisel etapil toimuvad märgimuutused  $b$ -nurkade sees, sest arvu  $n$  algtegurid, mis ei võrdu arvuga  $p$ , on arvu  $b$  teguriteks. Järelikult iga paigutus, mille korral paigutused kõikide  $b$ -nurkade sees on ekvivalentsed, on saadav esialgsest paigutusest. Leiame kõikide selliste paigutuste arvu  $f(n)$ . Esimese  $b$ -nurga jaoks eksisteerib  $2^b$  sellist arvude  $+1$  ja  $-1$  paigutust. Ülejäänud  $b$ -nurkades võib paigutust muuta  $f(b)$  viisil. Et ülejäänud  $b$ -nurki on  $p - 1$  tükki, siis

$$f(n) = 2^b [f(b)]^{p-1}. \quad (4)$$

Kasutades valemeid (2), (3) ja (4) võib leida  $f(n)$  suvalise  $n$  jaoks. Lihtne on näidata, et  $F(n) = 2^{\varphi(n)}$ , kus  $\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$  ning

$p_1, p_2, \dots, p_k$  on arvu  $n$  kõik erinevad algarvulised tegurid. Edasi kasutame valemeid 2, 3 ja 4.

$$\text{a) } f(15) = f(3 \cdot 5) = 2^5 \cdot [f(5)]^2 = 2^7, F(15) = 2^8.$$

$$\text{b) } f(30) = f(2 \cdot 15) = 2^{15} \cdot f(15) = 2^{22}, F(30) = 2^8.$$

$$\text{c) } f(25) = f(5^2) = 2^5, f(50) = 2^{25} \cdot 2^5 = 2^{30}, f(100) = f(2 \cdot 50) = 2^{30 \cdot 2} = 2^{60}, f(300) = 2^{100} \cdot (2^{60})^2 = 2^{220}, f(2100) = 2^{300} \cdot (2^{220})^6 = 2^{1620}.$$

$$\text{Järelikult } F(2100) = \frac{2^{2100}}{2^{1620}} = 2^{480}.$$

**21.** a) Olgu antud ristreeper  $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$ . Vaatleme vektorit  $\overrightarrow{OP}$ , kus  $P$  on sfääri poolus. Kui tähistda  $F(M) = (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP})^2$  (skalaarkorrutis), siis on ilmne, et  $F(M)$  on punkti  $M$  kauguse ruut ekvatoriaaltasandist. Vektori  $\overrightarrow{OP}$  koordinaadid baasil  $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3}$  on punktide  $M_1, M_2$ , ja  $M_3$  kaugused ekvatoriaaltasandist. Et  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP} = 1$ , siis  $F(M_1) + F(M_2) + F(M_3) = 1$ .

b) On ilmne, et antud punkti lahendus järeldeb punkti c lahendusest. Seeärest tõestame kohe punktis c esitatud väite. Et  $f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1$ , kui  $M_1, M_2$ , ja  $M_3$  on kolme omavahel ristuva raadiuse otsepunktid sfääril, siis funktsioon  $f$  omab ühesuguseid väärtusi diametraalselt vastupidistes punktides. Järelikult piisab ainult põhjapoolkera vaatlemisest. Seepärast oletame, et  $M$  ja  $N$  asuvad põhjapoolkeral. Vaatleme suurringjoont, mille jaoks punkt  $M$  on kõige põhjapoolsem. Olgu  $\Gamma_M$  suurringjoone see osa, mis asetseb põhjapoolkeral. Oletame algul, et punkt  $N$  asub samuti kaarel  $\Gamma_M$ . Olgu  $N'$  selline  $\Gamma_M$  punkt, et  $[ON'] \perp [ON]$  ja  $M'$  olgu üks  $\Gamma_M$  ja ekvaatori lõikepunktidest. Siis  $f(M) + f(M') = f(N) + f(N')$ , sest  $[OM] \perp [OM']$  ning punktid  $N, N', M$  ja  $M'$  asuvad ühel ja samal tasandil. Et  $f(M') = 0$ , siis  $f(M) \geq f(N)$ . Oletame nüüd, et punkt  $N$  asub põhjapoolkera selles osas, mis jääb kaarest  $\Gamma_M$  lõunasse. Siis leidub kaarel  $\Gamma_M$  punkt  $Q$  nii, et suurringjoone kaar  $\Gamma_Q$  läbib punkti  $N$ . Eelneva mõttekäigu põhjal saame, et  $F(M) \geq f(Q) \geq f(N)$ . Kui punkt  $N$  asub kaarest  $\Gamma_M$  põhja pool, siis punktist  $M$  punkti  $N$  jõudmiseks võib vaja minna rohkem kui kaks sammu. Olgu  $m$  ja  $n$  punktidele  $M$  ja  $N$  vastavad meridiaanitasandid ja  $\alpha$  nende tasandite vaheline nurk. Jaotame nurga  $\alpha$  meridiaanitasanditega  $m_1, m_2, \dots, m_{k-1}$   $k$  võrdseks osaks. Nüüd võib punktist  $M$  punktini  $N$  liikuda järgmisel viisil: algul liigume mööda kaart  $\Gamma_M$  lõikumiseni meridiaanitasandiga  $m_1$  (toimugu see lõikumine punktis  $M_1$ ), siis liigume mööda kaart  $\Gamma_{M_1}$  lõikumiseni tasandiga  $m_2$  (punktis  $M_2$ ), seejärel liigume mööda kaart  $\Gamma_{M_2}$  lõikumiseni tasandiga  $m_3$  jne. On ilmne, et mida suurem on  $k$ , seda vähem me läheneme ekvatoriaaltasandile  $k$  sammu vältel. Lihtne on näidata, et arvu  $k$  saab valida nii suure, et punkt  $\Gamma_{M_k}$  asub punktist  $N$  põhja pool (s.t. et punkt  $N$  asetseb piirkonnas, mis asub kaarest  $\Gamma_{M_k}$  lõuna pool). Järelikult kehtib ahelvõrratus

$$f(M) \geq f(M_1) \geq f(M_2) \geq \dots \geq f(M_k) \geq f(N).$$

d) Olgu  $\Pi_X$  paralleel, mille kaugus ekvatoriaaltasandist on  $x$ . Tõestame algul järgmise lemma. Lemma. Kui  $x + y + z = 1$ , siis võib konstrueerida ristreeperi otspunktidega paralleelidel  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$  ja  $\Pi_z$ .

Tõestus. Fikseerime punkti  $X$  paralleelil  $\Pi_x$  ja konstrueerime punkti  $Y$  nii, et  $[OY] \perp [OX]$ , kusjuures  $Y \in \Pi_y$ . Selleks vaatleme suurringjoont, mille tasand on risti raadiusega  $OX$ . Kui  $y = 1 - x$ , siis reeper konstrueeritakse lihtsalt. Üks reeperi tipp on punkt  $X$ , teine tipp on antud suurringjoone ja ekvaatori lõikepunkt ning kolmas tipp on selle suurringjoone kaugeim punkt ekvaatorist. Kui  $y < 1 - x$ , siis võiv teiseks tipuks võtta ühe kahest suurringjoone ja  $\Pi_y$  lõikepunktist. Saame raadiuse  $OY$ . Kolmanda raadiuse saame, kui konstrueerime raadiustega  $OX$  ja  $OY$  ristuva raadiuse. Olgu kolmanda raadiuse otspunkt paralleelil  $\Pi_v$ . Siis punktist  $a$  järeldub, et

$$F(X) + F(Y) + F(V) = x + y + v = 1.$$

Et aga  $x + y + z = 1$ , siis järelikult  $z = v$ , s.t et paralleelid  $\Pi_z$  ja  $\Pi_v$  ühtivad. Seega on lemma tõestatud.

Näitame nüüd, et funktsioon  $f$  on konstantne igal paralleelil.

Ütleme, et funktsioonil  $f$  on paralleelil  $\Pi_x$  hüpe mitte väiksem kui  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), kui paralleelil  $\Pi_x$  leiduvad sellised punktid  $X$  ja  $X'$ , et  $|f(X) - f(X')| \geq \varepsilon$ . Vaatleme paralleelina  $\Pi_x$  sellist paralleeli, millel funktsioonil  $f$  on hüpe mitte väiksem kui  $\varepsilon$ . Olgu paralleelid  $\Pi_y$  ja  $\Pi_z$  sellised, et paralleelidel  $\Pi_x$ ,  $\Pi_y$  ja  $\Pi_z$  asetsevad kolme omavahel ristuva raadiuse otspunktid. Punktis  $a$  näitasime, et  $F(X) + F(Y) + F(Z) = 1$  alati, kui  $X \in \Pi_x$ ,  $Y \in \Pi_y$  ja  $Z \in \Pi_z$ . Pöörates seda ristreeperit ümber lõuna- ja põhjapoolust läbiva telje liiguvad raadiuste otspunktid igaüks oma paralleelil. Näitame, et ühel pralleelidest  $\Pi_z$  või  $\Pi_y$  on funktsioonil  $f$  hüpe mitte väiksem kui  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Oletame vastuväiteliselt, et see ei ole nii, s.t et iga  $Y$  ja  $Y'$  korral paralleelilt  $\Pi_y$  ja iga  $Z$  ja  $Z'$  korral pralleelilt  $\Pi_z$

$$|F(Y) - f(Y')| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |f(Z) - f(Z')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

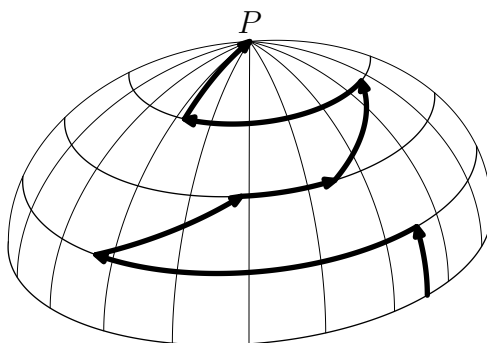
Kui punktid  $Y'$  ja  $Z'$  valida nii, et  $X'$ ,  $Y'$  ja  $Z'$  moodustavad ristreeperi otspunktid, siis

$$f(X) + f(Y) + f(Z) = f(X') + f(Y') + f(Z') = 1.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq |f(X) - f(X')| = |f(Y') - f(Y) + f(Z') - f(Z)| \leq \\ &\leq |f(Y) - f(Y')| + |f(Z) - f(Z')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Saime vastuolu.



Joonis 20

Valime arvu  $N$  nii, et  $N > \frac{2}{\varepsilon}$  ja vaatleme  $2N$  paralleeli  $\Pi_{y_1}, \Pi_{y_2}, \dots, \Pi_{y_N}, \Pi_{z_1}, \Pi_{z_2}, \dots, \Pi_{z_N}$ , mis vastavad arvudele  $y_1 < y_2 < \dots < y_N < \frac{1-x}{2}$ ,  $z_1 > z_2 > \dots > z_N$ ,  $z_i = 1 - x - y_i$  ( $x$  on fikseeritud). Üaltõestatu põhjal on funktsioonil  $f$  hüpe mitte väiksem kui  $\frac{\varepsilon}{2}$  kas paralleelil  $\Pi_{y_1}$  või  $\Pi_{z_1}$ . Liikudes mööda funktsiooni  $f$  hüppepunkte ekvaatorilt põhjapoolusele (joon. 20), saame et  $f(P) > (\frac{2}{\varepsilon}) \cdot (\frac{\varepsilon}{2}) = 1$ . Saime jälle vastuolu. Seega on funktsioon  $f$  konstantne igal paralleelil.

Järelikult sõltub funktsioon  $f$  ainult muutujast  $x$ , kus  $0 \leq x \leq 1$ . Defineerime  $g(x) = f(X)$ , kus  $x \in \Pi_x$ . Kui  $x + y + z = 1$ , siis  $g(x) + g(y) + g(z) = 1$ . Kui  $z = 0$ , siis  $g(x) + g(1 - x) = 1$  ning järelikult

$$1 - g[1 - (x + y)] = g(x + y)$$

ehk

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \text{ kui } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1. \quad (1)$$

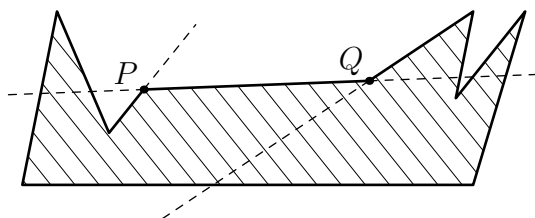
e) Punkti c) lahendamisel näitasime, et  $g(x) \leq g(y)$ , kui vaid  $x \leq y$ . Peale selle  $g(1) = 1$ . Omadusest (1) tuleneb, et  $g(nx) = ng(x)$ , kui  $nx \leq 1$ . Järelikult  $g(1/n) = 1/n$  ning  $g(m/n) = m/n$ , kui  $m \leq n$ , s.t  $g(x) = x$ , kui  $x$  on ratsionaalarv. Oletame nüüd, et  $x$  on irratsionaalarv. Valime ratsionaalarvud  $r_1$  ja  $r_2$  nii, et  $r_1 < x < r_2$ . Siis

$$r_1 = g(r_1) \leq g(x) \leq g(r_2) = r_2$$

ehk  $|g(x) - x| \leq |r_2 - r_1|$ . Et vahe  $|r_2 - r_1|$  saab muuta kuitahes väikeseks, siis peab ka irratsionaalsete väärtuste korral kehtima võrdus  $g(x) = x$ .

**22.** Vt. ül.11 lahendus.

**23.** On teada, et iga kinni-  
ne iseendaga mittelõikuv murdjoon



Joonis 21

jaotab tasandi kaheks osaks: seesmiseks ja välimiseks. Vaatleme kõigepealt neid murdjoone tippe  $P$ , kus murdjoon moodustab seesmise osa suhtes nurga, mis on väiksem kui sirgnurk (joon. 21). Selliste nurkade mõlema haara pikendus lõikab antud murdjoont paarisarv kordi. Seega igale sellisele tipule  $P$  vastab paarisarv „erilisi“ paare. Paneme veel tähele, et erinevatele tippudele vastavad alati erinevad paarid. Kõigis antud murdjoone ülejäänud tippudes  $Q$  moodustub nurk, mis on suurem sirgnurgast seesmise osa suhtes. Selliste nurkade mõlema haara pikendus lõikab murdjoont paaritu arv kordi, kokku saame seega paarisarvu lõikumisi. Järelikult vastab igale tipule  $Q$  samuti paarisarv „erilisi“ paare, kusjuures erinevatele tippudele vastavad erinevad paarid.

Kokkuvõttes saamegi, et „erilisi“ paare on paarisarv.

**24.** Tähistame antud punktid arvudega  $1, 2, 3, \dots, n$  ning nende punktide juurde kirjutatud arvud sümbolitega  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ . Olgu  $S$  kõikide nende arvude summa, s.t  $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Ühendame punkti  $k$  kõikide ülejäänud punktidega. Olgu tekkinud surgete arv  $\beta_k$ . Ülesande tingimuste kohaselt  $\beta_k \geq 2$ , kui  $k = 1, 2, \dots, n$ . Leiame kõikide arvude summa lähtudes punktist  $k$ . Et igal sirgel on kõikide arvude summa null (siin vaatleme kõiki sirgeid, mis läbivad punkti  $k$ ), siis kõikide antud sirge punktist  $k$  erinevate punktide juurde kirjutatud arvude summa on  $-\alpha_k$  (iga sirge korral, mis läbib punkti  $k$ ). Järelikult kõikide arvude summa  $S = -\alpha_k \beta_k + \alpha_k$ , millest  $\alpha_k = -S/(\beta_k - 1)$ , kui  $k = 1, 2, \dots, n$ . Summeerides saadud võrdust üle kõikide  $k$  väärtuste, saame

$$\sum_{k=1}^n \left( -\frac{S}{\beta_k - 1} \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k = S \quad \text{ehk} \quad S \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\beta_k - 1} \right) = 0.$$

Et sulgudes olev avaldis on positiivne, siis peab  $S = 0$ . Aga  $\alpha_k = -S/(\beta_k - 1)$ . Järelikult kõik arvud  $\alpha_k = 0$ .

**25.** Vt. ül.30 lahendus.

**26.** Alustame ülesande lahendamist lõpust. Nummerdame ka käigud vastupidises järjekorras. Sellisel juhul seisneb käik teatavate nuppude lisamises ringjoonele. Tähistame sümbolitega  $V_n$  ja  $M_n$  vastavalt valgete ja mustade nuppude arvu  $n$  käigu järel. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $M_0 = 1$ . Siis esimesel käigul lisatakse valgeid nuppe, teisel käigul lisatakse musti, kolmandal jälle valgeid jne. Tähistame sümboliga  $S_n$  kõikide nuppude arvu  $n$  käigu järel, s.t  $S_n = M_n + V_n$ . On ilmne, et kui  $n$  käigu järel on ringjoonel  $S_n$  nuppu ja järgmisel käigul tuleb lisada valgeid nuppe, siis  $S_{n+1} \leq S_n + 2M_n$ ,

sest iga musta nupu juurde saab asetada maksimaalselt 2 valget. Juhul kui  $(n + 1)$ . käigul lisatakse musti nuppe, siis analoogiliselt  $S_{n+1} \leq S_n + 2V_n$ .

a) Et  $M_0 = 1$ , siis  $V_1 \leq 2$ .  $M_0 = 2$  ja  $M_1 = 1$ ,  $S_1 \leq 3$ ,  $S_2 \leq S_1 + 2V_1 \leq 7$ ,  $M_2 \leq 5$ ,  $V_2 \leq 2$ ,  $S_3 \leq 7 + 2 \cdot 5 = 17$ ,  $V_3 \leq 12$ ,  $M_3 \leq 5$ ,  $S_4 \leq 17 + 2 \cdot 12 = 41$ . Järelikult ei tohi algul ringjoonel olla rohkem kui 41 nuppu. Lähtudes sellest printsiibist, on lihtne konstrueerida selline 40 nupu paigutus, et pärast neljandat käiku jääb ringjoonele üks nupp. Näiteks

MVMMMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVMVM.

b) Oletame, et igal käigul lisatakse ringjoonele masimaalne arv nuppe, s.t esimesel käigul asetatakse iga musta nupu juurde kaks valget, teisel käigul asetatakse iga valge nupu juurde kaks musta jne. Näitame, et sel juhul  $S_{n+2} = 2S_{n+1} + S_n$ . Oletame lihtsuse mõttes, et  $n$  on paarisarv (juhtu, kui  $n$  on paaritu, vaadeldakse analoogiliselt). Siis

$$S_{n+1} = S_n + 2M_n \quad \text{ja} \quad S_{n+2} = S_{n+1} + 2V_{n+1}.$$

Et  $V_{n+1} = 2M_n + V_n$ , siis

$$\begin{aligned} S_{n+2} - S_{n+1} &= (S_{n+1} - S_n) + 2(V_{n+1} - M_n) = \\ &= S_{n+1} - S_n + 2(M_n + V_n) = S_{n+1} + S_n. \end{aligned}$$

Järelikult

$$S_{n+2} = S_n + 2S_{n+1}.$$

Et  $S_0 = 1$  ja  $S_1 = 3$ , siis  $S_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ ,  $S_3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17$ ,  $S_4 = 2 \cdot 17 + 7 = 41$ ,  $S_5 = 2 \cdot 41 + 17 = 99$ ,  $S_6 = 2 \cdot 99 + 41 = 239$ ,  $S_7 = 2 \cdot 239 + 99 = 577$ ,  $S_8 = 2 \cdot 577 + 239 = 1493$ . Seega kui ringjoonel on 1000 nuppu, on vaja teha vähemalt 8 käiku. Niisiis, kui algul oleks ringjoonel asunud 1493 nuppu, oleks ülesanne lahendatud. Näitame, et ringjoonele on võimalik asetada 1000 nuppu nii, et pärast kaheksandat käiku jääb sinna 1 nupp.

Nimetame kahte kõrvuti olevat sama värvi nuppu paariks, kui mõlemal nupul on tema värvist erineva värviga naabernupp. On ilmne, et kui igal käigul lisada ringjoonele maksimaalne arv nuppe, siis pärast iga käiku võivad tekkida ainult ühte ja sama värvi paarid. Olgu  $P_n$  paaride arv  $n$  käigu järel. Näitame, et  $P_{n+2} = S_n$ .

Seame igale nuppude paigutusele ringjoonel vastavusse jada  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ , kus  $a_i$  ja  $b_i$  tähistavad vastavalt mustade ja valgete nuppude seeria pikkusi. Näiteks paigutusele MMMVVMVMVVV seame vastavusse jada 3, 2, 1, 1, 1, 3.

Olgu  $n$  paarisarv. Kui  $n$  käigu järel saadud paigutusele vastab jada  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ , siis järgmisel käigul saadud paigutusele vastab jada  $1, 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, b_1 + 2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1, b_2 + 2, \dots, b_k + 2$ . Lihtne on näha, et pärast  $(n + 2)$ . käiku saadud paigutusele vastab jada, milles mustade paaride arv on

$$(a_1 - 1) + (b_1 + 1) + (a_2 - 1) + (b_2 + 1) + \dots + (a_k - 1) + (b_k + 1) = S_n,$$

sest paaride arv on arvu 2 esinemise kordsus selles jadas. Järelikult  $P_{n+2} = S_n$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et viimasel käigul lisatakse musta värvi nuppe. Lisame igal käigul ringjoonele maksimaalse arvu nuppe ja viimasel käigul lisame mõningatesse paaridesse kahe nupu asemel ühe. Nüüd on lihtne näha, et kui saadud paigutusest võtta ära kõik mustad nupud, millel on valge naabernupp, siis saame sama nuppude paigutuse, mis oli pärast eelviimast käiku.

Kui  $S_8 = 1493$ , siis  $P_8 = S_6 = 239$ . Seega on sel juhul pärast kaheksandat käiku võimalik saada kõik paigutused, mille nuppude arv  $m$  rahuldab ahelvõrratust

$$1493 - 239 \leq m \leq 1493,$$

kusjuures kõikidest neist paigutustest on 8 käiguga võimalik saada algaigutust (s.t paigutust, kus  $M_0 = 1$  ja  $V_0 = 0$ ).

Ülesande lahendamiseks võtame algaigutuseks MMMVMV ja lisame igal käigul maksimaalse arvu nuppe. Et  $S_0 = 6$  ja  $S_1 = 14$ , siis  $S_2 = 2 \cdot 14 + 6 = 34$ ,  $S_3 = 2 \cdot 34 + 14 = 82$ ,  $S_4 = 2 \cdot 82 + 34 = 198$ ,  $S_5 = 2 \cdot 198 + 82 = 478$ ,  $S_6 = 2 \cdot 478 + 198 = 1154$ . Seega pärast 6. käiku ringjoonel  $P_6 = S_4 = 198$  mustade nuppude paari. Et  $1154 - 198 < 1000$ , siis on võimalik saada pärast 6. käiku ka paigutust, milles on 1000 nuppu. Toimides nüüd vastupidiselt (s.t võttes nuppe ringjoonelt ära), saame kahe käigu järel paigutuse MMMVMV ja viimasest omakorda kahe käigu järel paigutuse, milles on üks nupp. Järelikult läheb vaja täpselt 8 käiku.

**27.** On selge, et pärast piima jaotamist oli seitsmenda päkapiku kruus tühi, s.t seitsmes kruus oli ka algul tühi. Kui tähistada piima esialgsed kogused kruusides sümbolitega  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ), siis suuruste  $y_i$  leidmiseks tuleks kirja panna ja lahendada küllaltki keerukas võrrandisüsteem. Ülesanne lahendub aga palju lihtsamalt, kui vaadelda igal valamisel ümbervalatud piima koguseid. Olgu need suurused tähistatud sümbolitega  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ). Esimesel valamisel lisandub igasse kruusi, välja arvatud esimene,  $\frac{x_1}{6}$  liitrit piima. Teisel ümbervalamisel lisandub kõikidesse kruusidesse, välja arvatud teine,  $\frac{x_2}{6}$  liitrit piima jne. Kuna pärast seitsmendat valamist saabub jälle algseis, siis peab igasse kruusi kuue valamisega lisandunud kogus olema võrdne sellest kruusist väljavalatud piima kogusega. Seega esimese kruusi korral  $x_1 =$

$\frac{1}{6}(x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)$ , teie kruusi korral  $x_2 = \frac{1}{6}(x_1+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)$  jne. Liites  $i$ -nda võrrandi mõlemale poole suuruse  $\frac{1}{6}x_i$ , saame võrrandid

$$x_2 = \frac{1}{6}(x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) = \frac{7}{6}x_1 = \frac{7}{6}x_2 = \dots = \frac{7}{6}x_7$$

ehk  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7$ . Tähistades selle ümbervalatava koguse tähega  $x$ , saame, et esimeses kruusis oli algul  $x$  liitrit piima. Et teises kruusis oli enne teist valamist  $x$  liitrit, siis algul oli  $x - \frac{x}{6} = \frac{5}{6}x$  liitrit piima jne.

Seega  $x + \frac{5}{6}x + \frac{4}{6}x + \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}x = 3$ , kust  $x = \frac{6}{7}$ . Järelikult oli algul esimeses kruusis  $\frac{6}{7}$ , teises  $\frac{5}{7}$ , kolmandas  $\frac{4}{7}$ , neljandas  $\frac{3}{7}$ , viiendas  $\frac{2}{7}$ , kuuendas  $\frac{1}{7}$  liitrit piima, seitsmes kruus oli tühi.

**28.** Vt. ül. 44 punkti a) lahendus.

b) Oletame, et leidub kuuekohaline „eriline arv“  $A$ . Tähistame arvu  $A$  sümboliga  $z^2$ , selle kolmest esimesest numbrist moodustatud arvu sümboliga  $x^2$ , kolmest viimasest numbrist moodustatud arvu sümboliga  $y^2$ . Sellisel juhul saame võrrandi

$$1000x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{kus} \quad 100 \leq x^2 < 1000, \quad 0 < y^2 < 1000.$$

Teisendades seda võrrandit, saame

$$(z - y)(z + y) = 1000x^2.$$

Püüame lahendada saadud võrrandit proovimise teel. Kui võtta näitels  $x + y = 1000$  ning  $z - y = x^2$ , siis  $1000 - x^2 = 2y$ . Et  $y^2 < 1000$ , siis  $y < 32$ . Seega  $0 < 1000 - x^2 < 64$ . Saadud võrratuse lahendiks sobib ainult  $x = 31$ , kuid sesosest  $1000 - 31^2 = 2y$  ei saa siis leida täisarvulist väärtust muutujale  $y$ .

Proovime  $1000x^2$  lahutada teguriteks teisiti. Oletame, et

$$\begin{cases} z - y = 500 \\ z + y = 2x^2. \end{cases}$$

Siis  $2x^2 - 500 = 2y$  ehk  $x^2 - y = 250$ . Et  $0 < y < 32$ , siis  $250 < x^2 < 282$ . Saadud võrratuse lahendiks sobib ainult  $x^2 = 256$ . Siis  $y = x^2 - 250 = 6$ . Järelikult saame „erilise“ arvu  $256036 = 506^2$ .

Otsides lahendit, kui

$$\begin{cases} z + y = 500 \\ z - y = 2x^2, \end{cases}$$

saame võrratuse  $218 < x^2 < 250$ , millest  $x^2 = 225$ . Sel juhul  $y = 25$  ja  $A = 225625 = 475^2$ . Märgime, et üldse on kuuekohalisi „erilisi“ arve viis. Lisaks ülaltoodutele on „erilised“ arvud veel 144400, 32400, 576081.

**29.** Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ . Olgu  $S_k = \sum_{i=1}^k a_i$  ( $S_0 = 0$ ). Konstrueerime otsitavad  $n$  rühma järgmiselt. Olgu  $A_k$  nende väljakirjutatud arvude hulk, mis asetsevad poollõigul  $]S_{k-1}, S_k]$ . Näitame, et hulgad  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) rahuldavad antud ülesande tingimusi. Hulga  $A_k$  maksimaalne element on  $S_k$ . Kui  $\frac{S_k}{S_{k-1}} \leq 2$ , siis on ilmne, et hulga  $A_k$  maksimaalse ja minimaalse elemendi suhe ei ületa 2. Seega jääb üle vaadelda vaid juhtu, kui  $\frac{S_k}{S_{k-1}} > 2$ . Siis

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k > 2(a_k + a_2 + \dots + a_{k-1})$$

ehk

$$a_k > a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = S_{k-1}. \quad (2)$$

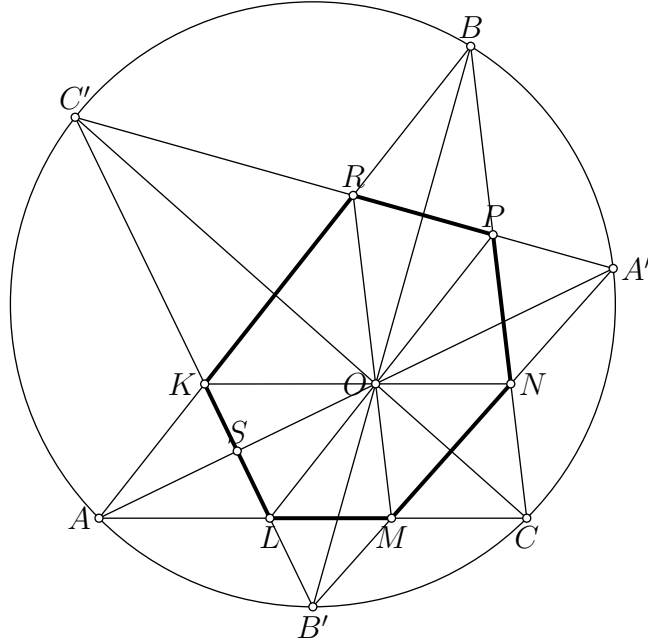
Et  $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k > a_k$ , siis järelikult  $a_k \in A_k$ . Teiselt poolt on aga ilmne, et arvude  $S_{k-1}$  ja  $a_k$  vahel ei asetse ühtegi hulga  $A_k$  elementi. Tõepoolest, kui nende vahel oleks veel mingi element hulgast  $A_k$  (näiteks element  $t$ ), siis  $t < a_k \leq a_{k+1} \leq a_{k+2} \leq \dots \leq a_n$  ning seega summa  $t$  liidetavate hulka ei kuulu arvud  $s_k, a_k + 1, \dots, a_n$ . Järelikult saab  $t$  maksimaalne väärtus olla vaid  $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} = S_{k-1}$ , mis on aga võimatu, sest eelduste kohaselt  $t \in ]s_{k-1}, a_k]$ . Järelikult hulgas  $A_k$  element on  $a_k$ . Siis tingimuse (2) põhjal

$$\frac{S_k}{a_k} = \frac{a_k + \dots + a_k}{a_k} = 1 + \frac{a_k + \dots + a_k}{a_k} < 2.$$

**30. a)** Vaatleme kõiki neid urne, mis on nummerdatud arvuega  $\overline{km}$ , kus  $k - m$  on paarisarv. Selliseid urne on 50 (02, 04, 06, 08, 11, 13, ..., 97, 99). Osutub, et need 50 urni annavadki meile ülesande lahenduse. Tõepoolest, oletame, et on antud mingi kolmekohaline arv  $\overline{ijk}$ . Ilmselt on selles arvus kas vähemalt kaks paarisnumbrit või vähemalt kaks paaritut numbrit. Kriipsutades maha ülejäänud kolmanda numbri saame selle järjekorranumbriga piletit lasta mingisse ülalkirjeldatud urni.

**b)** Piletit  $\overline{kkk}$  saab paigutada ainult urni  $\overline{kk}$ . Selliseid urne on 10. Piletid numbritega  $\overline{xyz}$ , kus  $x, y$  ja  $z$  on paarikaupa erinevad, on kokku  $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ . Urni  $\overline{ab}$  ( $a \neq b$ ) saab maksimaalselt paigutada 24 piletit, mille kõik numbrid on erinevad (need on piletid  $\overline{uab}, \overline{aub}, \overline{abu}$ , kus  $u \neq a$  ja  $u \neq b$ ). Järelikult on 720 pileti jaoks vaja vähemalt  $720 \div 24 = 30$  urni. Seega on kokku vaja vähemalt  $30 + 10 = 40$  urni.

**c)** Olgu  $a_k$  selliste urnide arv, mille järjekorranumber algab arvuga  $k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ . (s.t. me vaatleme urne, mille järjekorranumber on kujul



Joonis 22

$\overline{kx}$ .) Olgu  $a = \min \{a_0; a_1; \dots; a_9\}$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et urne kujul  $\overline{0x}$  on  $a$  tükki. Nummerdades vajaduse korral urnid ümber, võib eeldada, et meil on välja valitud urnid ümber, võib eeldada, et meil on välja valitud urnid  $00, 01, \dots, 0(a-1)$ . Vaatleme nüüd piletit numbriga  $\overline{0xy}$ , kus  $x \geq a$  ja  $y \geq a$ . Seda piletit saab lasta urni  $\overline{xy}$ , sest urnid  $\overline{0x}$  ja  $\overline{0y}$  ei kuulu eelduste kohaselt väljavalitute hulka. Suurused  $x$  ja  $y$  saavad teineteist sõltumatult omada väärtusi  $a, a+1, \dots, 9$ . Seega pileтите  $\overline{0xy} (x \geq a, y \geq a)$  jaoks on vaja vähemalt  $(10-a)(10-a)$  urni kujul  $\overline{xy}$ , kus  $x \geq a$  ja  $y \geq a$ . Urne kujul  $\overline{0x}$  on eelduste kohaselt  $a$ . Urne kujul  $\overline{1x}$  on mitte vähem kui  $a$ . Sama võib väita urnide  $\overline{2x}, \overline{3x}, \dots, \overline{(a-1)x}$  kohta. Seega on kokku urne vähemalt  $(10-a)(10-a) + a \cdot a = (10-a)^2 + a^2 \geq 50$ .

**31.** Olgu  $\triangle T_1$  tipud  $A, B$  ja  $C$  ja  $\triangle T_2$  tipud  $A', B'$  ja  $C'$ . Vaatleme lõike  $AA', BB'$  ja  $CC'$ . Need lõigud on  $\triangle T_1$  nurgapoolitajad. Tõepoolest,  $\widehat{BAA'} = \frac{1}{2}\widehat{BA'} = \frac{1}{2}\widehat{A'C} = \widehat{A'AC}$ . Järelikult lõik  $AA'$  poolita nurga  $BAC$ . Nurkade  $ABC$  ja  $ACB$  korral on tõestus analoogiline. Järelikult lõigud  $AA', BB'$  ja  $CC'$  lõikuvad ühes punktis  $O$ , mis on  $\triangle T_1$  siseringjoone keskpunktiks.

Tõestuseks piisab, kui näidata, et kujund  $AKOL$  on romb. Analoogia põhjal on siis rombid ka nelinurgad  $BPOR$  ja  $CMON$ . Siit järeldub kuusnurga  $KLMPNR$  diagonaalide paralleelsus kolmnurga  $ABC$  külgedega. Samuti järeldub sellest, et murdjooned  $LOP, ROM$  ja  $KOM$  on sirglõigud.

Näitame, et kujund  $AKOL$  on romb. Kõigepealt näitame, et kõõl  $AA'$  on risti kõõluga  $B'C'$ . Tõepoolest

$$\begin{aligned}\widehat{A'SB'} &= \frac{1}{2}(\widehat{B'CA'} + \widehat{AC'}) = \frac{1}{2}(\widehat{AC'} + \widehat{B'C} + \widehat{CA'}) = \\ &= \frac{1}{4}(\widehat{AC'B} + \widehat{AB'C} + \widehat{CA'B}) = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ\end{aligned}$$

Järelikult on lõik  $AA'$  risti kõõluga  $C'B'$ . Näitame nüüd, et lõik  $C'B'$  poolitab lõigu  $AO$ . Et

$$\widehat{AC'B'} = \frac{1}{2}\widehat{AB'} = \frac{1}{2}\widehat{B'C} = \widehat{B'C'C}$$

ja  $AO \perp B'C'$ , siis  $AS = SO$ . Nüüd on lihtne näha, et

$$\widehat{CAA'} = \frac{1}{2}\widehat{CA'} = \widehat{A'B} = \widehat{A'AB}$$

Järelikult  $KS = SL$ . Seega nelinurk  $AKOL$  on romb.

**32.** Et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n) = 0$ , siis fikseerides  $\varepsilon > 0$ , võib leida sellise indeksi  $N$ , et kui  $n > N$ , siis

$$|a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n| \leq \varepsilon$$

Siis ka  $|a_{n+1}| - \frac{1}{2}|a_n| \leq \varepsilon$  ehk

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &\leq \varepsilon + \frac{1}{2}|a_n| \leq \varepsilon + \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{|a_{n-1}|}{2}\right) \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{|a_{n-2}|}{8} \leq \\ &\leq \dots \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{n-M}} + \frac{|a_M|}{2^{n-M+1}} \leq 2\varepsilon + \frac{|a_M|}{2^{n-M+1}},\end{aligned}$$

kus  $M \geq N$ . Kui valida  $M_1$  nii, et  $M_1 > M$  ja  $\frac{|a_M|}{2^{n-M+1}} < \varepsilon$   $n > M_1$  korral, siis saame, et

$$|a_{n+1}| \leq 3\varepsilon, \quad (1)$$

kui  $n > M_1$ . Et  $\varepsilon$  on suvaline etteantud positiivne reaalarv, siis võrratusest (1) järeldub, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**33.** Vt. ül. 23 lahendus.

**34.** Olgu linnade arv  $n$ . Nummerdame linnad esimese marsruudi läbimise järjekorras  $1, 2, 3, \dots, n$ . Teisel marsruudil läbitakse linnad mingis teises järjestuses  $i_1, i_2, \dots, i_n$ . Tähistame  $i$ -ndast linnast  $k$ -ndasse linna sõidu maksimuse sümboliga  $(i, k) = (k, i)$ . Ülesande tingimuse põhjal kehtivad järgmised võrratused:

$$(k, k+1) \leq (k, k+r), \quad (2)$$

$$(i_k, i_{k+1}) \leq (i_k, i_{k+r}), \quad (3)$$

kus  $r = 1, 2, \dots, n - k$  ja  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ . Kui  $i_p$  ei ole suurim hulgas  $\{i_p; i_{p+1}; i_{p+k}; \dots; i_n\}$ , siis leidub selles hulgas element  $i_{p+r}$ , et  $i_{p+r} > i_p$  ja võrratuste (2) ja (3) põhjal

$$(i_p, i_{p+1}) \geq (i_p, i_{p+r}) \geq (i_p, i_p + 1). \quad (4)$$

Kui  $i_n = n$ , siis ahelvõrratus (4) kehtib  $p$  väärtustele  $1, 2, \dots, n - 1$  korral, ja liites saadud võrratused, ongi ülesanne lahendatud. Järelikult võib eeldada, et  $i_n \neq n$ . Olgu teisel marsruudil linna  $n$  number  $q$ , s.t. et  $i_q$  on suurim hulgas  $\{i_q; i_{q+1}; \dots; i_n\}$ . Olgu  $i_s = \max\{i_{q+1}; i_{q+2}; \dots; i_n\}$ . Edasi olgu  $i_t = \max\{i_{s+1}; i_{s+2}; \dots; i_n\}$  jne., kuni saame, et  $i_n = \max\{i_{u+1}; i_{u+2}; \dots; i_n\}$ . Selliselt olem välja eraldanud kõik linnad  $i_q, i_s, i_t, \dots, i_u, i_n$ , millede numbrid on suuremad kõigist neile teistel marsruudil järgnevate linnade numbritest. Nende linnade korral ei kehti ahelvõrratus (4), kuid võrratuste (2) ja (3) põhjal

$$(i_q, i_{q+1}) \geq (i_q, i_s) \geq (i_s, i_s + 1),$$

sest  $i_s < i_q$  ja linn  $i_s$  järgneb teisel marsruudil linnale  $i_q$ . Analoogiliselt saame, et

$$(i_s, i_{s+1}) \geq (i_s, i_t) \geq (i_t, i_t + 1) \text{ jne,}$$

kuni  $(i_u, i_{u+1}) \geq (i_u, i_n) \geq (i_n, i_n + 1)$ . Kokkuvõttes oleme nende linnade jaoks, mille numbrid on suuremad kõigi neile järgnevate linnade numbritest, saanud võrratused:

$$\begin{aligned} (i_q, i_{q+1}) &\geq (i_s, i_s + 1), \\ (i_q, i_{q+1}) &\geq (i_s, i_s + 1), \\ &\dots\dots\dots, \\ (i_q, i_{q+1}) &\geq (i_s, i_s + 1). \end{aligned}$$

Ülejäänud linnade  $i_p$  korral kehtivad võrratused

$$(i_p, i_{p+1}) \geq (i_p, i_p + 1).$$

Liites saadud võrratused, näeme et

$$\sum_{k=1}^{n-1} (i_k, i_{k+1}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} (k, k + 1).$$

s.t. et sõit teisel marsruudil ei ole odavam kui sõit esimesel marsruudil.

**35.** Fikseerime selle ruudu jaoks koordinaatteljestiku nii, et ruudu üks tipp asuks koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed asuksid koordinaat-tegedel. Sellisel juhul on ruudu servadel asuvate sõlmpunktide koordinaadid

kujul  $(0, k), (k, 0), (100, k), (k, 100)$ , kus  $k = 1, 2, \dots, 99$ . Ruudu sisemuses on sõlmpunkte  $99^2$ , s.o. paaritu arv. Näitame, et kui kõikidest ruudu servadest asuvatest sõlmpunktidest algavad murdjooned, siis läbivad need kokku paarisarv ruudu sisemuses asuvaid sõlmpunkte. Vaatleme näiteks juhtu, kus murdjoon algab punktist  $(0, i)$  ja lõpeb punktis  $(k, 0)$ . Näitame, et selle murdjoone poolt läbitavate sõlmpunktide arv on sama paarsusega, mis arv  $i + k - 1$ . Tõepoolest, sisemiste sõlmpunktide arv murdjoonel on ühe võrra väiksem murdjoone lülide arvust. Järelikult tuleb näidata, et murdjoone lülide arv on sama paarsusega, kui  $i + k$ . Kuid see on ilme, sest murdjoone horisontaalsete lülide arv saab erineda arvust  $k$  vaid paarisarvu võrra ja vertikaalsete lülide arv saab erineda arvust  $i$  samuti paarisarvu võrra. Järelikult sõlmpunktide arv vaadeldaval murdjoonel on kujul  $i + k - 1 + 2m$ .

Ülejäänud juhul (s.t. juhul, kus murdjoone alg- ja lõpp-punkt asuvad mingitel teistel servadel) on analoogilised. Kõikidel juhtudel tuleb sõlmpunktide arvu paarsus samasugune kui arvul  $i + k - 1$ . Seega kõikide murdjoonte poolt läbitavate sõlmpunktide arvu paarsus on sama, mis arvul

$$\sum_{i,k} (i + k - 1) = 4 \cdot \sum_{i=1}^{99} i - 198.$$

Järelikult läbitakse paarisarv sõlmpunkte, seega leidub ruudu siseuses läbimata sõlmpunkt.

**36.** Kui  $m = n = 2$ , siis on ülesande väite kehtivuses lihtne veenduda proovimise abil. Oletame nüüd, et  $m > 2$  ja  $n > 2$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $x_m = \max(x_1, x_2, \dots, x_m)$  ja  $y_n = \max(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Kui  $x_m = y_n$ , siis võib võrduse mõlemalt poolt taandada suurusega  $x_m (= y_n)$ . Oletame, et  $x_m > y_n$  (juhtu, kus  $x_m < y_n$ , vaadeldakse analoogiliselt). Siis võib antud võrduse kirjutada kujul

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{m-1} + (x_m - y_n) = y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}. \quad (1)$$

Kui  $S = \sum_{i=1}^n y_i$  ja  $S' = \sum_{i=1}^{n-1} y_i$ , siis  $y \geq \frac{S}{n}$  ning  $S' = S - y_n \leq S - \frac{S}{n} < (n-1)m$ , sest  $S < mn$ . Seega rahuldab ka võrdus (1) ülesande tingimusi. Kui selle võrduse korral kehtib ülesande väide, siis kehtib see ka esialgse võrduse korral, sest esialgses võrduses võib maha kriipsutada needsamad liikmed, mis võrduses (1).

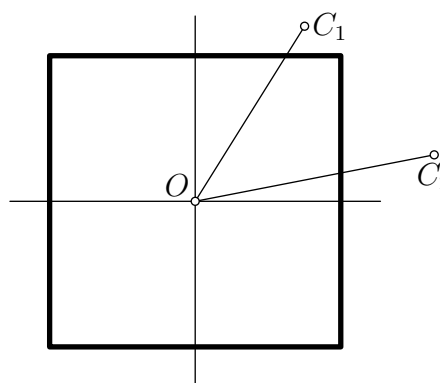
Korrates sama protseduuri, jõuame võrduseni, kus ühel pool on kindlasti kaks liidetavat. Vaatleme sellist võrdust

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2 + \dots + y_k < 2k. \quad (2)$$

Oletame, et  $x_1 \leq x_2$  ja et  $y_k = \max(y_1, y_2, \dots, y_k)$ . Tähistame  $x_1 + x_2 = S$ . Oletame nüüd, et võrduses (2) ei saa ülaltoodud lahutamise protseduuri jätkata, s.t et  $x_2 < y_k$ . Et  $x_2 \geq S/2$  ja  $S < 2k$ , siis  $y_k > S/2$  ja  $y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} < k$ . Viimase võrratuse kehtimiseks on vaid üks võimalus:  $y_1 = y_2 = \dots = y_{k-1} = 1$ . Et  $x_1 < S/2 < k$ , siis võime võrduses (2) vasakult maha tõmmata  $x_1$  ja paremalt poolt  $x_1$  ühte. Seega on ülesanne lahendatud.

**37.** Esmalt märgistame ära kõige suurema ruudu  $A_1$  ja vaatleme kõiki neid ruute, mille keskpunkt asub väljaspool ruutu  $A_1$ . Valime nende ruutude hulgast suurima, olgu see  $A_2$ , ja märgistame ta ära. Edasi vaatleme kõiki neid ruute, mille keskpunkt asub väljaspool hulka  $A_1 \cup A_2$  ja märgistame ära suurima nende hulgast, milleks olgu ruut  $A_3$  jne.

Nii satub iga ruudu keskpunkt mingisse märgistatud ruutu. Oletame nüüd vastuväiteliselt, et mingi ruudu  $B$  keskpunkt  $O$  sattus rohkem kui nelja märgistatud ruutu. Kui  $B$  on märgistatud ruut, siis see on võimatu, sest konstruktsiooni kohaselt märgistatud ruudu keskpunkt ei asetse kunagi mingis teises märgistatud ruudus.



Joonis 23

Järelikult ruut  $B$  saab olla ainult märgistamata. Tõmbame läbi ruudu  $B$  keskpunkti koordinaattelgedega paralleelsed sirged. Need jaotavad tasapinna neljaks osaks. Et ruut  $B$  on eelduste kohaselt kaetud vähemalt viie märgistatud ruuduga, siis peab tasandi mingil osal olema kahe märgistatud ruudu, näiteks  $A_1$  ja  $A_2$  keskpunktid  $C_1$  ja  $C_2$  (vt. joon. 23). Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $C_1O \leq C_2O$ . Sel juhul on ilmne, et  $C_1 \in A_2$ . Kuid ühe märgistatud ruudu keskpunkt ei saa olla teises märgistatud ruudus. Seega saime vastuolu. Järelikult ei asu ühegi ruudu keskpunkt mitte enam kui neljas

märgistatud ruudus.

**38. a)** Järjestame kaaluvihud raskuse järgi. Asetame vasakpoolsele kaalukaussile kõige kergema. Seejärel asetame parempoolsele kaalukaussile raskuselt järgmise kaaluvihhi. Edasi asetame vasakpoolsele raskuselt järgmise kaaluvihhi jne. Et iga järgnev viht on raskem eelmisest, siis vajub igaal kaalumisel alla see kauss, kuhu viimati asetati viht.

b) Vaatleme kõigepealt sõna VVV...VV. Vastava kaalumiste seeria saame, kui asetame vihte ainult vasakpoolsele kaalukaussile. See pole aga ainus võimalus. Näitame, et vihte saab kaalule asetada selliselt, et alati vajub alla vasakpoolne kaalukauss ja seejuures pärast viimase vihi asetamist erinevad kaalukaussidel olevad koormused teineteisest mitte rohkem kui kaalub kõige

raskem viht.

Olgu kaaluvihide raskused kasvavas järjekorras  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , s.t.  $m_1 < m_2 < \dots < m_n$ . Asetame vasakule kausile järjest vihid  $m_1, m_3, \dots, m_n$ , kui  $n$  on paaritu, või  $m_2, m_4, \dots, m_n$ , kui  $n$  on paarisarv. Seejärel asetame ülejäänud vihid paremale. Et  $m_1 > 0$ ,  $m_3 > m_2$ ,  $m_5 > m_4$ ,  $\dots$ ,  $m_n > m_{n-1}$ , siis paaritu  $n$  korral

$$m_1 + m_3 + \dots + m_n > m_2 + m_4 + \dots + m_{n-1}.$$

Seega on kogu aeg vasakpoolne kaalukauss raskem. Paarisarvulise  $n$  korral saame võrratustest

$$m_2 > m_1, m_4 > m_3, m_6 > m_5, \dots, m_n > m_{n-1}$$

samuti, et

$$m_2 + m_4 + \dots + m_n > m_1 + m_3 + \dots + m_{n-1},$$

mis ütleb, et vaskpoolne kaalukauss on kogu aeg raskem. Paneme nüüd tähele, et paaritu  $n$  korral on vihid lõpuks kaaludel täpselt samuti nagu sõnale VPV-PVP... V vastava kaalumise korral punktis a kirjeldatud meetodil. Järelikult, kui võtame vasakult ära vihi  $m_n$ , langeb alla parempoolne kaalukauss. Seega on kaalukaussidel olevate koormuste erinevus väiksem kui  $m_n$ . Paarisarvulise  $n$  korral on vihid lõpuks kaalul samuti nagu sõnale PVPV... V vastava kaalumise seeria korral, kui kasutada punktis a kirjeldatud meetodit. Kui nüüd võtame vasakult ära vihi  $m_n$ , langeb alla parempoolne kaalukauss, s.t. jälle on kaalukaussidel olevate koormuste erinevus väiksem kui  $m_n$ .

Olgu nüüd antud mingi  $n$ -tähele sõna tähtedest V ja P:

$$\underbrace{VV\dots V}_{k_1 \text{ tähte}} \underbrace{PP\dots P}_{k_2 \text{ tähte}} \underbrace{VV\dots V}_{k_3 \text{ tähte}} \underbrace{PP\dots P}_{k_4 \text{ tähte}} \dots,$$

kus  $k_1$  võib olla ka null. Jaotame vihid  $m_1, m_2, \dots, m_n$  gruppidesse

$$(m_1, m_2, \dots, m_{k_1}), (m_{k_1+1}, m_{k_1+2}, \dots, m_{k_1+k_2}), \dots$$

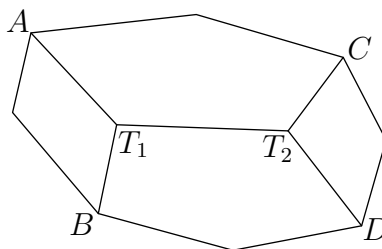
Nüüd asetame esimese grupi vihid järjest kaalule vastavalt  $k_1$ -tähelisele sõnale  $VV\dots V$  nii, et lõpuks kaalukaussidel oleva koormuse erinevus ei oleks suurem kui  $m_{k_1}$ . Seejärel asetame parempoolsele kaalukaussile vihi  $m_{k_1+1}$ . Et  $m_{k_1+2} > m_{k_1+1} > m_{k_1}$ , siis vihi  $m_{k_1+1}$  (või vihi  $m_{k_1+2}$ ) asetamisel parempoolsele kaalukaussile langeb see alla. Edasi asetamegi teise grupi vihid kaalule vastavalt  $k_2$ -tähelisele sõnale  $PP\dots P$  nii, et lõpuks kaalukaussidel oleva koormuse erinevus ei oleks suurem kui  $m_{k_1+k_2}$ . Analoogiliselt jätkates saamegi kaalumise seeria, mis vastab antud sõnale.

**39.** Vt. ül. 31 lahendus.

**40.** Vt. ül. 32 lahendus.

**41.** On teada, et kolm punkti, mis ei asu ühel sirgel, määravad ringjoone ning neli punkti, mis ei asu ühel tasandil, määravad sfääri. Niisiis, hulktahuka tipp  $T_1$  ja servade otspunktid  $T_2$ ,  $A$  ja  $B$  määravad sfääri  $S_1$  (joon. 24).

Lõigates seda sfääri tasandiga  $T_1AB$ , saame ringjoone, millel asuvad punktid  $T_1$ ,  $A$  ja  $B$ , järelikult ka tahu  $T_1AB$  kõik ülejäänud tipud. Seega asuvad tahu  $T_1AB$  kõik tipud sfääril  $S_1$ . Samal viisil arutledes saame, et sfääril  $S_1$  on ka tahkude  $BT_1T_2D$  ja  $AT_1T_2C$  kõik tipud. Analoogiline arutlus näitab, et  $T_2CD$ ,  $AT_1T_2C$  ja  $DT_2T_1B$  tipud asuvad ühisel sfääril  $S_2$ . Sfääridel  $S_1$  ja  $S_2$  on vähemalt neli ühist punkti ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $A$  ja  $B$ ). Seega need sfäärid ühtivad:  $S_1 = S_2 = S$ .



Joonis 24

Edasi vaatleme tippude  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ja  $D$  juures olevaid tahke. Ka nende tahkude kõik tipud asuvad sfääril  $S$ . Analoogiliselt arutlust jätkates saamegi, et antud hulktahuka kõik tipud asuvad sfääril  $S$ .

**42.** Saab küll. Vaatleme seda hulkliiget pärast seitsmendat käiku. Siis on käigul  $B$ . Esimese kuue käigu jooksul saab  $B$  mängida nii, et järele jääb mitte rohkem kui üks tärn muutuja  $x$  kõikide paarisarvuliste astmete ees. Seega on pärast 7. käiku kaks võimalust:

- 1) asendamata on üks paarisastme ja üks paarituastme kordaja,
- 2) asendamata on kaks paarituastme kordajat.

Esimesel juhul kirjutab  $B$  järelejäänud paarisastme kordajaks sellise arvu, et kõikide paarisastmete ees olevate kordajate summa oleks null (hulkliikme vabaliiget vaadeldakse kui  $x^0$  kordajat). Järelikult  $x = \pm 1$  korral sõltub hulkliikme väärtus ainult kordajatest muutuja  $x$  paaritute astmete ees. Sõltumata  $A$  viimasest käigust, on antud hulkliikmel  $x = 1$  ja  $x = -1$  korral vastandarvulised väärtused. (Paaritu funktsiooni omadus!)

Teisel juhul võib  $B$  toimida järgmiselt. Oletame, et kirjutamata on kordajad astmete  $x^{2n+1}$  ja  $x^{2m+1}$  ees. Siis leiab  $B$  süsteemist

$$\begin{cases} Q(-3) + a(-3)^{2m+1} + b(-3)^{2n+1} = 0 \\ Q(2) + a \cdot 2^{2m+1} + b \cdot 2^{2n+1} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

suurused  $a = a_0$ ,  $b = b_0$  ning kirjutab arvu  $a_0$  astme  $x^{2m+1}$  ette ( $Q(x)$  on hulkliikme  $P(x)$  see osa, kuhu kordajad on sisse kirjutatud. Lihtne on näha,

et süsteem (3) on tõepoolest lahenduv, sest determinant  $D = -(3^{2m+1}2^{2n+1} - 2^{2m+1}3^{2n+1} \neq 0)$ .

Näitame, et sõltuvalt  $A$  viimasest käigust on hulkliikmel  $P(x)$  kas erimärgilised väärtused kohal  $x = 2$  ja  $x = -3$ , või  $P(2) = P(-3) = 0$ . Tõepoolest, kui  $A$  kirjutab astme  $x^{2n+1}$  ette kordaja  $b_0$ , siis  $P(2) = P(-3) = 0$ . Kui viimase kordaja  $b > b_0$ , siis

$$\begin{aligned} P(2) &= Q(2) + a_0 2^{2m+1} + b \cdot 2^{2n+1} = \\ &= Q(2) + a_0 2^{2m+1} + b_0 2^{2n+1} + (b - b_0) 2^{2n+1} = \\ &= (b - b_0) 2^{2n+1} > 0 \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} P(-3) &= Q(-3) + a_0 (-3)^{2m+1} + b (-3)^{2n+1} = \\ &= Q(-3) + a_0 (-3)^{2m+1} + b_0 (-3)^{2n+1} + (b - b_0) (-3)^{2n+1} = \\ &= (b - b_0) (-3)^{2n+1} < 0. \end{aligned}$$

Kui viimane  $A$  poolt kirjutatud kordaja  $b < b_0$ , siis saab analoogiliselt näidata, et  $P(2) < 0$  ja  $P(-3) > 0$ . Järelikult peab võrrandil  $P(x) = 0$  olema lahend  $x_0$ , kus  $x_0 \in ]-3, 2[$ .

**43.** Vt. ül.23 lahendus.

**44.** Tähistame  $P(x) = x^2 - \alpha$ ,  $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ . Siis

$$\begin{aligned} P(Q(x)) &= (Q(x))^2 - \alpha = x^6 + 2px^5 + (2q + p^2)x^4 + \\ &\quad + 2(pq + r)x^3 + (q^2 + 2pr)x^2 + 2rqx + r^2 - \alpha \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Q(P(x)) &= (P(x))^3 + p(P(x))^2 + qP(x) + r = x^6 + (p - 3\alpha)x^4 + \\ &\quad + (3\alpha^2 + q - 2p\alpha)x^2 + p\alpha^2 - \alpha q + r - \alpha^3. \end{aligned}$$

Võrdusest  $P(Q(x)) = Q(P(x))$  järeldub vastavate samade astmete ees olevate kordajate võrdus, seega  $p = r = 0$ . Kui  $\alpha = 0$ , siis  $P(x) = x^2$ ,  $Q(x) = x^3$ . Kui  $\alpha \neq 0$ , siis peab  $\alpha = 2$  ja  $q = -3$ . Sel juhul  $P(x) = x^2 - 2$ ,  $Q(x) = x^3 - 3x$ . Viimane on ainus kolmanda astme hulkliige, mis kommuteerub hulkliikmega  $P(x) = x^2 - 2$ .

Kui analoogilisel viisil otsida esimese astme hulkliikmeid, siis selgub, et hulkliikmega  $P(x) = x^2 - \alpha$  kommuteerub ainult üks esimese astme hulkliige  $Q(x) = x$ . Teise astme hulkliikmeid, mis kommuteeruvad hulkliikmega  $P(x) = x^2 - \alpha$ , on samuti üks:  $Q(x) = x^2 - \alpha$ .

b) Olgu  $P(x) = x^2 + px + q$  ja  $Q(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k$ . Siis

$$Q(P(x)) = (P(x))^k + a_1 (P(x))^{k-1} + \dots + a_k$$

ja

$$P(Q(x)) = (Q(x))^2 + pQ(x) + q.$$

Arvud  $p, q, a_1, a_2, \dots, a_k$  määrame vastavate astmete ees olevate kordajate võrdlemisel hulkliikmetes  $Q(P(x))$  ja  $P(Q(x))$ . Need on  $2k$ -astme hulkliikmed. Astme  $x^{2k}$  kordaja on mõlemas 1. Aste  $x^{2k-1}$  esineb hulkliikmes  $Q(P(x))$  ainult avaldises  $(P(x))^k$ , sest  $(P(x))^{k-1}$  on juba  $(2k-2)$ -astme hulkliige. Tähistame astme  $x^{2k-1}$  kordaja hulkliikmes  $Q(P(x))$  sümboliga  $K(p, q)$ , sest ta sõltub ainult hulkliikme  $P(x)$  kordajatest. Hulkliikmes  $P(Q(x))$  tekib aste  $x^{2k-1}$  avaldises  $(Q(x))^2$  astmete  $x^k$  ja  $x^{k-1}$  korrutamisel, seega sõltub astme  $x^{2k-1}$  kordaja ainult suurusest  $a_1$ . Tähistame astme  $x^{2k-1}$  kordaja avaldises  $P(Q(x))$  sümboliga  $L(a_1)$ . Võrdusest  $L(a_1) = K(p, q)$  arvutame antud suuruste  $p$  ja  $q$  järgi kordaja  $a_1$ . See on võimalik, sest avaldises  $L(a_1)$  on  $a_1$  esimeses astmes (lihtne arvutus näitab, et  $L(a_1) = 2a_1$ ). Edasi, aste  $x^{2k-2}$  tekib hulkliikmes  $P(Q(x))$  astmete  $x^k$  ja  $x^{k-2}$  ning  $x^{k-1}$  ja  $x^{k-1}$  korrutamisel avaldises  $(Q(x))^2$ , seega tema kordaja  $L(a_1, a_2)$  sõltub ainult suurustest  $a_1$  ja  $a_2$ , kusjuures  $a_2$  on avaldises  $L(a_1, a_2)$  esimeses astmes. Hulkliikmes  $Q(P(x))$  esineb aste  $x^{2k-2}$  ainult avaldistes  $(P(x))^k$  ja  $(P(x))^{k-1}$ , seega tema kordaja  $K(p, q, a_1)$  sõltub ainult suurustest  $p, q$  ja  $a_1$ . Võrdusest  $L(a_1, a_2) = P(p, q, a_1)$  arvutame teadaolevate suuruste  $p, q, a_1$  abil kordaja  $a_2$ . Kordaja  $a_3$  arvutame seosest  $L(a_1, a_2, a_3) = K(p, q, a_1, a_2)$ , korrates ülaltoodud arutlust. Nii jätkates saame arvutada kordajad  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ , olles võrrelnud astmete  $x^{2k-1}, x^{2k-2}, \dots, x^{k+1}$  ees olevaid kordajaid hulkliikmetes  $P(Q(x))$  ja  $Q(P(x))$ . Kordaja  $a_k$  arvutamiseks võrdleme astme  $x^k$  kordajaid. Erinevalt esimese punkti käsitlesest tuleb nüüd hulkliikmes  $P(Q(x))$  arvestada ka avaldist  $p \cdot Q(x)$ , kus  $x^k$  kordajaks on  $p$ . Avaldises  $(Q(x))^2$  tekib aste  $x^k$  astmete  $x^k$  ja  $x^0$ ,  $x^{k-1}$  ja  $x$ ,  $x^{k-2}$  ja  $x^2$ , ... korrutamisel. Seega võime astme  $x^k$  kordaja hulkliikmes  $P(Q(x))$  tähistada  $L(p, a_1, a_2, \dots, a_k)$ , kus suurus  $a_k$  on esimeses astmes. Hulkliikmes  $Q(P(x))$  on astme  $x^k$  kordaja  $K(p, q, a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$  ja seega osutub  $a_k$  leidmine võimalikuks ka antud juhul.

Järelikult oleme hulkliikmete  $P(x)$  ja  $Q(x)$  kommutatiivsuse tingimuse põhjal leidnud hulkliikme  $Q(x)$  kordajate jaoks ainult ühed kindlad väärtused, s.t. et antud hulkliikmega  $P(x)$  ei saa kommuteeruda kaks erinevat  $k$ -astme hulkliiget.

*Märkus.* Et kehtiks võrdus  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ , peavad loomulikult ka astmete  $x^{k-1}, x^{k-2}, \dots, x^1, x^0$  kordajad nendes hulkliikmetes olema võrdsed. Järelikult, hulkliige  $Q(x)$ , mille kordajad me eespool arvutasime, võib ka mitte kommuteeruda hulkliikmega  $P(x)$ . Sel juhul pole ühtegi  $k$ -astme hulkliiget, mis kommuteerub hulkliikmega  $P(x)$ .

c) Neljanda astme hulkliige  $P(P(x))$  ja kaheksanda astme hulkliige  $P(P(P(x)))$

kommuteeruvad hulkliikmega  $P(x)$ . Punkti b) põhjal rohkem selliseid hulkliikmeid ei ole.

d) Nii hulkliige  $Q(R(x))$  kui ka hulkliige  $R(Q(x))$  kommuteeruvad hulkliikmega  $P(x)$ . Tõepoolest,

$$Q(R(P(x))) = Q(P(R(x))) = P(Q(R(x)))$$

ja

$$R(Q(P(x))) = R(P(Q(x))) = P(R(Q(x))).$$

Punkti b) põhjal  $Q(R(x)) = R(Q(x))$ , s.t. hulkliikmed  $R(x)$  ja  $Q(x)$  kommuteeruvad omavahel.

e) Siin peab kõigepealt tegema veidi eeltööd. Teame, et  $P_3(x) = x^3 - 3x$  (vt. punkt a)),  $P_4(x) = P_2(P_2(x))$ ,  $P_8(x) = P_2(P_2(P_2(x)))$  (vt. punkt c)). Kergesti saame ka, et  $P_6(x) = P_3(P_2(x))$ . Kõik need hulkliikmed kommuteeruvad hulkliikmega  $P_2(x)$ , järelikult ka omavahel. Vahetu arvutamisega leiame ka  $P_5(x)$  ja  $P_7(x)$ . Seega

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - 2, \\ P_3(x) &= x^3 - 3x, \\ P_4(x) &= x^4 - 4x^2 + 2, \\ P_5(x) &= x^5 - 5x^3 + 5x, \\ P_6(x) &= x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2, \\ P_7(x) &= x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x, \\ P_8(x) &= x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2. \end{aligned}$$

Ilmneb, et  $k = 4, 5, 6, 7, 8$  korral kehtib seos

$$P_k(x) = xP_{k-1}(x) - P_{k-2}(x). \quad (1)$$

Sama seosega defineerime hulkliikmed  $P_k(x)$  kõikide ülejäänud  $k$  väärtuste jaoks. Nüüd tuleb näidata, et selliselt saadud hulkliikmed  $P_{k-2}(x)$  ja  $P_{k-1}(x)$  kommuteeruvad hulkliikmega  $P_2(x)$ . Siis

$$\begin{aligned} P_k(P_2(x)) &= P_2(x) \cdot P_{k-1}(P_2(x)) - P_{k-2}(P_2(x)) = \\ &= P_2(x) \cdot P_2(P_{k-1}(x)) - P_2(P_{k-2}(x)) = \\ &= (x^2 - 2) [P_{k-1}^2(x) - 2] - [P_{k-2}^2(x) - 2]. \end{aligned}$$

Leiame ka

$$P_2(P_k(x)) = P_k^2(x) - 2 = x^2 \cdot P_{k-1}^2(x) - 2x \cdot P_{k-1}(x) \cdot P_{k-2}(x) + P_{k-2}^2(x) - 2.$$

Et oleks  $P_2(P_k(x)) = P_k(P_2(x))$ , peab kehtima võrdus

$$xP_{k-1}(x) \cdot P_{k-2}(x) - P_{k-1}^2(x) - P_{k-2}^2(x) = x^2 - 4. \quad (2)$$

Allpool näitame, et võrdus (2) kehtib kõikide valemiga (1) määratud hulkliikmete korral. Sellega saab ühtlasi tõestatud, et kõik hulkliikmed  $P_k(x)$  commuteeruvad hulkliikmega  $P_2(x)$ , sest  $P_7(x)$  ja  $P_8(x)$  commuteeruvad hulkliikmega  $P_2(x)$  ja seose (2) tõttu saab rakendada matemaatilise induktsiooni meetodit. Punktist d) omakorda jäeldub, et hulkliikmed  $P_k(x)$  ja  $P_j(x)$  commuteeruvad omavahel, kui  $k$  ja  $j$  on suvalised naturaalarvud.

Tõestame seose (2) kehtivuse. Eeldame, et võrdus (2) on õige mingi naturaalarvu  $i$  korral (näiteks  $i = 4$  korral). Leiame võrduse (2) vasaku poole  $k = i + 1$  korral, arvestades seost (1):

$$\begin{aligned} xP_i(x) \cdot P_{i-1}(x) - P_i^2(x) - P_{i-1}^2(x) &= \\ &= x[x \cdot P_{i-1}(x) - P_{i-2}(x)]P_{i-1}(x) - [xP_{i-1}(x) - P_{i-1}(x)]^2 - \\ &\quad - P_{i-1}^2(x) = xP_{i-1}(x)P_{i-2}(x) - P_{i-2}^2(x) - P_{i-1}^2(x) = x^2 - 4. \end{aligned}$$

Seega on seos (2) tõestatud.

Osutub, et hulkliikmeid  $P_k(x)$  saab konstrueerida ka teisiti. Olgu

$$t^k + t^{-k} = P_k(t + t^{-1}), \quad (3)$$

s.t. et esitame funktsiooni  $t^k + t^{-k}$  hulkliikmena suurusest  $t + t^{-1}$ . Näiteks

$$\begin{aligned} t^2 + t^{-2} &= (t + t^{-1})^2 - 2, \quad \text{siit} \quad P_2(x) = x^2 - 2; \\ t^3 + t^{-3} &= (t + t^{-1})^3 - 3(t + t^{-1}), \quad P_3(x) = x^3 - 3x. \end{aligned}$$

Asjaolu, et seos (3) määrab  $k$ -astme hulkliikme, jäeldub matemaatilise induktsiooni abil seosest

$$t^k + t^{-k} = (t + t^{-1})(t^{k-1} + t^{-(k-1)}) - (t^{k-2} + t^{-(k-2)}). \quad (4)$$

Saadud hulkliikmete paarikaupa commuteeruvus on samuti lihtsalt tõestatav. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} P_k(P_m(t + t^{-1})) &= P_k(t^m + t^{-m}) = (t^m)^k + (t^m)^{-k} = t^{mk} + t^{-mk} = \\ &= t^{km} + t^{-km} = P_m(t^k + t^{-k}) = P_m(P_k(t + t^{-1})). \end{aligned}$$

Tähistades  $t + t^{-1} = x$ , saame, et  $P_k(P_m(x)) = P_m(P_k(x))$ . Seega on  $P_k(x)$  ja  $P_m(x)$  commuteeruvad. Kui nüüd eeldada, et  $t$  on reaalarv, siis  $|x| = |t + t^{-1}| \geq 2$  ja seega on  $P_k(x)$  ja  $P_m(x)$  commuteeruvus tõestatud vaid nende  $x$  väärtuste korral, kus  $|x| \geq 2$ . Kuid miski ei sega meid vaatlemast

kompleksarvulisi  $t$  väärtusi, sest seos (4) kehtib nii reaalarvuliste kui ka kompleksarvuliste  $t$  väärtuste korral.

45. a) Kahekohaline „eriline“ arv peab algama numbriga 1, 4 või 9. Lihtne on veenduda, et sobib vaid 49. Neljakohaliste „eriliste“ arvude leidmiseks vaatleme esmalt arve kujul  $16^{**}$ .

Et  $40^2 = 1600$ ,  $41^2 = 1681$  ja  $42^2 > 1700$ , siis saame „erilise“ arvu 1681. Kuid „erilist“ arvu kujul  $25^{**}$  ei leidu, sest  $50^2 = 2500$  ja  $51^2 = 2601 > 2600$ . Ei leidu ka „erilisi“ arve kujul  $36^{**}$ ,  $49^{**}$ ,  $64^{**}$  ja  $81^{**}$ , sest  $(10k + 1)^2 - (10k)^2 > 100$ , kui  $5 \leq k \leq 9$ . Järelikult otsitavad arvud on 49 ja 1681.

b) Kui tähistada otsitava 20-kohalise „erilise“ arvu  $A$  kümnest esimesest numbrist moodustatud arv sümboliga  $x^2$  ja kümnest viimasest numbrist moodustatud arv sümboliga  $y^2$ , siis

$$A = 10^{10}x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{kus} \quad 10^9 \leq x^2 \leq 10^{10} \quad \text{ja} \quad 0 < y^2 < 10^{10}.$$

Ülesande üks võimalikest lahendustest on järgmine. Kirjutame lähtevõrrandi kujul

$$(10^5x)^2 + y^2 = z^2$$

ja püüame kasutada Pythagorase „kolmikute“ üldkuju:

$$\begin{aligned} 10^5x &= 2kmn, \\ y &= (m^2 - n^2)k, \\ z &= (m^2 + n^2)k. \end{aligned}$$

Võttes  $k = 1$ , järeldub kitsendustest  $x$  ja  $y$  kohta, et

$$10^{10}/\sqrt{10} < 2mn < 10^{10} \quad \text{ja} \quad 0 < m^2 - n^2 < 10^5.$$

Siit on näha, et  $m$  ja  $n$  on ligikaudu võrdsed ja nende suurusjärk on  $10^5$ . Võttes näiteks  $m = 10^5$  ja  $n = 10^5 - 1$ , saame, et mõlemad võrratused on „peaaegu“ täidetud. Viga võib parandada näiteks nii: võtame  $m = 10^5/2$  ja  $n = 10^5/2 - 1$ . Lihtne on näha, et sel juhul  $x = 2mn/10^5 = n = 10^5/2$  ja  $y = m^2 - n^2 = 10^5 - 1$ , seega  $A = 24\,999\,000\,019\,999\,800\,001$ .

Esitatud lahendusviis on küllaltki kunstlik. Punktis c) vaatleme lahendust, mis on tunduvalt loomulikum ja mida võib rakendada ka käesoleva punkti lahendamisel.

c) Antud juhul saab otsitava arvu üles kirjutada järgmiselt:

$$A = (10^{25}x)^2 + y^2 = z^2, \quad \text{kus} \quad 10^{49} < x^2 < 10^{50} \quad \text{ja} \quad 0 < y^2 < 10^{50}.$$

Kui võtta  $y = 0$ , siis  $z = 10^{25}x$ . Et  $y \neq 0$ , siis  $z = 10^{25}x + t$ , kus  $t \geq 1$ . Näitame, et  $t = 1$ . Tõepoolest, kui oletada vastuväiteliselt, et  $t \geq 2$ , siis

$$(10^{25}x)^2 + y^2 = (10^{25}x)^2 + 2 \cdot 10^{25}xt + t^2,$$

millest

$$y^2 = 2 \cdot 10^{25}xt + t^2 > 2 \cdot 10^{25}xt > 2 \cdot 10^{25} \cdot \sqrt{10} \cdot 10^{24} \cdot 2 > 10^{50},$$

mis on aga vastuolus algtingimustega. Järelikult  $t = 1$  ja  $y^2 = 2 \cdot 10^{25}x + 1$ . Seega

$$(y - 1)(y + 1) = 2 \cdot 10^{25}x = 2^{26} \cdot 5^{25} \cdot x.$$

Et  $(y + 1) - (y - 1) = 2$ , siis üks tegureist,  $(y + 1)$  või  $(y - 1)$ , on kujul  $2c$ , kus  $c$  on paaritu arv, ja teine tegur on kujul  $2^{25}c_1$ . Vaadeldes nende tegurite jaguvust 5-ga, ilmneb, et ainult üks neist tegureist saab jaguda 5-ga. Seega saame 4 võimalust:

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} y - 1 = 2 \cdot 5^{25}c \\ y + 1 = 2^{25}c_1 \end{cases} & 3) \begin{cases} y - 1 = 5^{25} \cdot 2^{25}c_1 \\ y + 1 = 2c \end{cases} \\ 2) \begin{cases} y + 1 = 2 \cdot 5^{25}c \\ y - 1 = 2^{25}c_1 \end{cases} & 4) \begin{cases} y + 1 = 5^{25} \cdot 2^{25}c_1 \\ y - 1 = 2c \end{cases} \end{array}$$

Kolmas võimalus langeb ära, sest sel juhul  $y - 1 = 10^{25}c_1$  ja  $y^2 > 10^{50}$ , mis on aga võimatu. Neljandal juhul peab  $c_1 = 1$ , sest vastasel korral  $y^2 \geq 10^{50}$ , mis on võimatu. Võttes siis  $c_1 = 1$ , saame lahendi

$$y = 10^{25} - 1 \quad \text{ja} \quad x = \frac{1}{2} \cdot 10^{25} - 1.$$

Esimesel juhul

$$c = (y - 1)/2 \cdot 5^{25} < 10^{25}/2 \cdot 5^{25} = 2^{24}.$$

Teisel juhul

$$c = (y + 1)/2 \cdot 5^{25} < 2^{24} + \frac{1}{2} \cdot 5^{-25}.$$

Et  $c$  on naturaalarv, siis  $c \leq 2^{24}$ . Seega nii esimesel kui teisel juhul  $0 < c \leq 2^{24}$ . Lahutades nii esimesel kui teisel juhul ühest võrrandist teise, saame vastavalt

$$2 \cdot 5^{25}c - 2^{25}c_1 = -2 \quad \text{ja} \quad 2 \cdot 5^{25}c - 2^{25}c_1 = 2$$

ehk

$$5^{25}c - 2^{24}c_1 = -1 \quad \text{ja} \quad 5^{25}c - 2^{24}c_1 = 1.$$

Näitame, et kumbagi saadud võrrandit võib rahuldada maksimaalselt üks naturaalarvuline  $c$  väärtus, kus  $0 < c \leq 2^{24}$ . Oletame, et sel võrrandil on kaks lahendit  $c = a$  ja  $c = b$  (vastavad  $c_1$  väärtused olgu  $c_{1a}$  ja  $c_{1b}$ ), kus  $0 < a \leq 2^{24}$  ja  $0 < b \leq 2^{24}$ . Sel juhul  $5^{25}(a - b) - 2^{24}(c_{1a} - c_{1b}) = 0$  ning

seega peab  $a - b$  jaguma arvuga  $2^{24}$ , mis on aga võimatu. Analoogiliselt vaadeldakse ka teist võrrandit. Järelikult võib nii esimesel kui teisel juhul leiduda mitte rohkem kui üks „eriline“ arv. Seega 100-kohalisi „erilisi“ arve ei saa olla rohkem kui kolm.

Lihtne on näha, et ülaltoodud hinnang on rakendatav kõikidele  $4m$ -kohalistele arvudele „erilistele“ arvudele, s.t. et iga  $m$  korral võib leiduda maksimaalselt kolm  $4m$ -kohalist „erilist“ arvu.

d) Antud juhul saab ülesande tingimuste põhjal võrrandi

$$10^{15}x^2 + y^2 = z^2, \quad \text{kus} \quad 10^{14} \leq x^2 < 10^{25} \quad \text{ja} \quad 0 < y^2 < 10^{15},$$

ehk

$$(z - y)(z + y) = 10^{15}x^2.$$

Lahendame ülesande proovimise teel. Selleks lahutame suuruse  $10^{15}x^2$  tegureiks näiteks järgmiselt:

$$\begin{cases} z - y = 5 \cdot 10^{14} \\ z + y = 2x^2 \end{cases}$$

Elimineerides muutuja  $z$ , saame võrrandi

$$2x^2 - 2y = 5 \cdot 10^{14} \quad \text{ehk} \quad x^2 - y = 25 \cdot 10^{13}.$$

Näitame, et kui  $x = \left[ \sqrt{25 \cdot 10^{13}} \right] + 1$ , siis on ülesanne lahendatud. Tõepoolest,  $x^2 \approx 2,5 \cdot 10^{14}$ , mis ei ole vastuolus algtingimustega. Suuruse  $y$  jaoks saame tingimuse

$$y = x^2 - 25 \cdot 10^{13} \leq 2 \left[ \sqrt{25 \cdot 10^{13}} \right] < 2 \cdot 5 \cdot 10^6 \sqrt{10} = 10^7 \sqrt{10}$$

ehk

$$y^2 < 10^{15},$$

mis pole samuti vastuolus algtingimustega. Järelikult eksisteerib 30-kohaline „eriline“ arv.

Et  $\sqrt{25 \cdot 10^{13}} = 15811388,3\dots$ , siis  $x = \left[ \sqrt{25 \cdot 10^{13}} \right] + 1 = 15811389$  ja  $y = x^2 - 25 \cdot 10^{13} = 22109321$  ning

$$A = z^2 = \underbrace{250\,000\,022\,109\,321}_{x^2} \underbrace{492\,822\,075\,081\,041}_{y^2}.$$

**46.** Punktide a), b) ja c) lahendus on analoogiline ül. 29 lahendusega.

d) Üldsust kitsendamata võib eeldada, et marslaste tähestik koosneb sümbolitest  $0, 1, 2, \dots, 9$ . Jaotame tähestiku  $A$  kolmeks hulgaks nii, et  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , kus  $A_1 = \{0; 1; 2\}$ ,  $A_2 = \{3; 4; 5\}$  ja  $A_3 = \{6; 7; 8; 9\}$ . Vaatleme eesnimedena kõiki neid kahetähelisi sõnu  $\overline{xy}$ , kus  $x$  ja  $y$  kuuluvad ühte ja samasse hulka  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), s.t.  $00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55, 66, 67, 68, 69, 76, 77, 78, 79, 86, 87, 88, 89, 96, 97, 98, 99$ . Selliseid eesnimesid on  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 34$ . Näitame, et võib läbi ajada nende 34 eesnimega. Tõepoolest, kui on antud perekonnanimi  $\overline{xyz\overline{u}}$ , siis tähtede  $x, y, z$  ja  $u$  hulgas leidub vähemalt kaks tähte, mis kuuluvad ühte ja samasse hulka  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Kriipsutades perekonnanimest  $\overline{xyz\overline{u}}$  maha kaks ülejäänud tähte, saame ühe 34-st eesnimest. Seega möödunud sajandil said marslased läbi ajada 34 eesnimega.

e) Vaatleme algul juhtu, kus  $k = 4$ . Näitame, et see taandub juhule, kus  $k = 3$ . Oletame, et perekonnanimede arv kujul  $\overline{k*}$  on  $a_k$ . Olgu  $a = \min(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et eesnimesid kujul  $\overline{0*}$  on  $a$  tükki. Vajaduse korral sümboleid ümber paigutades võib saavutada olukorra, et esinevad eesnimed  $00, 01, 02, \dots, 0(a-1)$ . Vaatleme nüüd perekonnanimesid kujul  $\overline{0xyz}$ , kus  $x \geq a, y \geq a$  ja  $z \geq a$ . On selge, et kui 0 jätta maha tõmbamata, siis selle perekonnanime jaoks ei leidu sobivat eesnime. Järelikult, maha tuleb tõmmata igal juhul sümbol 0. Seega ülesanne taandub sellele, et antud eesnimedele on vaja lisada veel sellised eesnimed, mis võimaldaksid kõikvõimalikel kombinatsioonidel  $\overline{xyz}$  valida enesele sobiv eesnimi. Järelikult on ülesanne taandunud juhule, kus  $k = 3$ , kuid lähtehulga  $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$  asemel on hulk  $\{a; a+1; \dots; 9\}$ . Analoogiliselt punktiga c) (vt. ül. 30) saab näidata, et selliste kolmekohaliste kombinatsioonide jaoks vajaminevate eesnimede arv ei ole väiksem kui  $(10-a-k)^2 + k^2$ , kus  $k$  on mingi arv 1 ja  $10-a$  vahel. Edasi, eesnimesid kujul  $\overline{0*}, \overline{1*}, \overline{2*}, \dots, \overline{(a-1)*}$  on vähemalt  $a^2$  tükki. Seega on eesnimede arv vähemalt  $a^2 + k^2 + (10-(a+k))^2$ . Tähistades  $10-(a+k) = b$ , saame, et vaja on minimiseerida avaldis  $B = a^2 + k^2 + b^2$ , kus  $a + k + b = 10$ . Lihtne on näha, et suurus  $B$  saavutab minimaalse väärtuse  $B_{\min}$  siis, kui kaks arvudest (näiteks  $a$  ja  $k$ ) on võrdsed kolmega ja kolmas (antud juhul  $b$ ) on võrdne neljaga. Siis  $B_{\min} = 34$ . Et selline eesnimede nimekiri ka tegelikult eksisteerib, seda nägime eelmises punktis.

Juhtu, kus  $k = 5$ , saab analoogia põhjal taandada juhule  $k = 4$ , kusjuures minimiseerida tuleb antud juhul avaldis  $B = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ , kus  $a + b + c + d = 10$ . Lihtne on näha, et suuruse  $B$  minimaalne väärtus saavutatakse juhul, kui näiteks  $a = b = 2$  ja  $c = d = 3$ . Minimaalse nimekirja pikkus tuleb  $2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 26$ . Tõsisasi, et eksisteerib eesnimede nimekiri pikkusega 26, järeldub punkti d vastavast konstruktsioonist. Hulk  $A$  tuleb jaotada neljaks osahulgaks nii, et  $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ , kus  $A_1 = \{0; 1\}$ ,  $A_2 = \{2; 3\}$ ,  $A_3 = \{4; 5; 6\}$ ,  $A_4 = \{7; 8; 9\}$ .

Kui  $k = 6$ , siis  $B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 20$ ,  
 $k = 7$ ,  $B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 = 18$ ,  
 $k = 8$ ,  $B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 16$ ,  
 $k = 9$ ,  $B_{\min} = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 14$ ,  
 $k = 10$ ,  $B_{\min} = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 12$ ,  
 $k = 11$ ,  $B_{\min} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 10$ .

Kui  $k \geq 6$ , siis eesnimede nimekiri pikkusega  $B_{\min}$  konstrueeritakse analoogiliselt juhuga  $k = 5$ .

**47.** Olgu  $k$  naturaalarv. Leiame kõik indeksi  $m$  võimalikud väärtused, mille korral  $a_m = k$ . Ülesande tingimuste kohaselt peab kõikide selliste  $m$  väärtuste korral kehtima ahelvõrratus

$$k - 0,5 < \sqrt{m} < k + 0,5$$

ehk

$$k^2 - k + 0,25 < m < k^2 + k + 0,25$$

Seega on indeksi  $m$  võimalikud väärtused  $k^2 - k + 1, k^2 - k + 2, \dots, k^2 + k$ . Selliste indeksite arv on  $2k$ . Järelikult

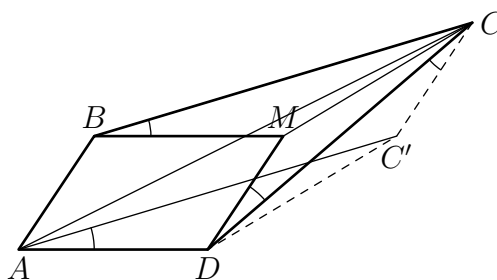
$$\frac{1}{a_{k^2-k+1}} + \frac{1}{a_{k^2-k+2}} + \dots + \frac{1}{a_{k^2+k}} = 2k \cdot \frac{1}{k} = 2$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}} &= \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) + \left( \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6} \right) + \\ &+ \dots + \left( \frac{1}{a_{1893}} + \frac{1}{a_{1894}} + \dots + \frac{1}{a_{1980}} \right) = 2 + 2 + \dots + 2 = 88. \end{aligned}$$

**48.** Leiame punkti  $C'$  nii, et kujund  $DMCC'$  on rööpkülik (vt. joon. 25). Siis kolmnurgad  $CBM$  ja  $C'AD$  on võrdsed. Järelikult  $\widehat{CBM} = \widehat{C'AD}$ . Et  $\widehat{CDM} = \widehat{CBM}$ , siis  $\widehat{DCC'} = \widehat{CDM} = \widehat{CBM} = \widehat{C'AD}$ . Järelikult punktid  $A, D, C'$  ja  $C$  asuvad ühel ringjoonel ( $\widehat{DOC'} = \widehat{O'AD}$ !) ning seega

$$\widehat{ACD} = \widehat{AC'D} = \widehat{BCM}.$$



Joonis 25

**49.** Oletame vastuväiteliselt, et  $1978^m - 1$  jagub arvuga  $1000^m - 1$ . Siis jagub arvuga  $1000^m - 1$  ka arv

$$(1978^m - 1) - (1000^m - 1) = 1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m).$$

Et  $2^m$  ja  $1000^m - 1$  on ühisteguriteta, siis peab arv  $989^m - 500^m$  jaguma arvuga  $1000^m - 1$ , Kuid see on võimatu, sest et

$$0 < 989^m - 500^m < 989^m < 1000^m - 1.$$

**50.** a) Vaatleme punktide  $A$  ja  $B$  poolt määratud sirget. Toome sisse koordinaadid. Olgu punkti  $A$  korral  $x = 0$  ja punkti  $B$  korral  $x = 1$ . Et sellisel juhul  $K_0 = \{0; 1\}$ , siis  $K_1 = \{-1; 0; 1; 2\}$ . Matemaatilise induktsiooni meetodiga on lihtne näidata, et

$$K_n = \left\{ -\frac{3^n - 1}{2}; -\frac{3^n - 1}{2} + 1; \dots; \frac{3^n + 1}{2} \right\}.$$

Tõepoolest, kui  $n = 1$ , siis väide kehtib. Oletame, et väide kehtib  $n = m$  korral, s.t.

$$K_m = \left\{ \frac{-3^m + 1}{2}; \frac{-3^m + 3}{2}; \frac{-3^m + 5}{2}; \dots; \frac{3^m + 1}{2} \right\}$$

Hulga  $K_{m+1}$  äärmise vasakpoolse punkti saame, kui peegeldame hulga  $K_m$  äärmist parempoolset punkti  $x = \frac{3^m + 1}{2}$  punkti  $x = \frac{-3^m + 1}{2}$  suhtes. Järelikult, selle koordinaat on

$$-\frac{3^m - 1}{2} - \left( \frac{3^m + 1}{2} + \frac{3^m - 1}{2} \right) = -\frac{3^{m+1} - 1}{2}$$

Hulga  $K_{m+1}$  ülejäänud punktid, mis asuvad punktist  $x = -\frac{3^m - 1}{2}$  vasakul, saame, kui peegeldame hulga  $K_m$  ülejäänud punktid tema vasakpoolse otspunkti suhtes. Et saada hulga  $K_{m+1}$  neid punkte, mis asuvad hulga  $K_m$  äärmisest parempoolsest punktist paremal, tuleb peegeldada hulka  $K_m$  tema äärmise parempoolse punkti suhtes. Järelikult on hulga  $K_{m+1}$  parempoolseima punkti koordinaat

$$\frac{3^m + 1}{2} + \left( \frac{3^m + 1}{2} + \frac{3^m - 1}{2} \right) = \frac{3^{m+1} + 1}{2}$$

ning seega

$$K_{m+1} = \left\{ -\frac{3^{m+1} - 1}{2}; \dots; \frac{3^{m+1} + 1}{2} \right\}.$$

Võttes  $n = 6$  ja  $n = 7$ , saame, et

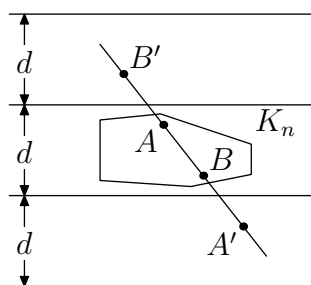
$$K_6 = \{-364; -363; \dots; 364; 365\}$$

ja

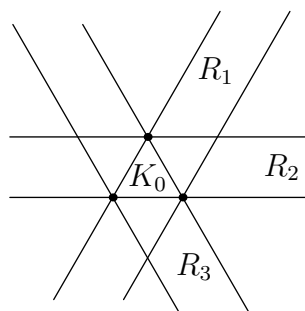
$$K_7 = \{-1093; -1092; \dots; 1093; 1094\}.$$

Seega  $n = 7$  rahuldab ülesande tingimusi.

b) Nimetame ribaks tasandi kõikide punktide hulka, millised jäävad kahe paralleelse sirge vahele (sirged kaasa arvatud). Loeme riba laiuseks tema kahe ääresirge vahelise kauguse. On lihtne näidata, et kui hulk  $K_n$  sisaldub ribas laiusega  $d$ , siis hulk  $K_{n+1}$  sisaldub ribas laiusega  $3d$ . Toepoolest, olgu  $A$  ja  $B$  hulga  $K_n$  punktid. Siis nende punktide peegeldused teineteise suhtes asuvad ribas  $R_1$ , mille laius on  $3d$  ja mis on saadud riba  $R$  peegeldamisel tema ääresirgete suhtes (vt. joon. 26)

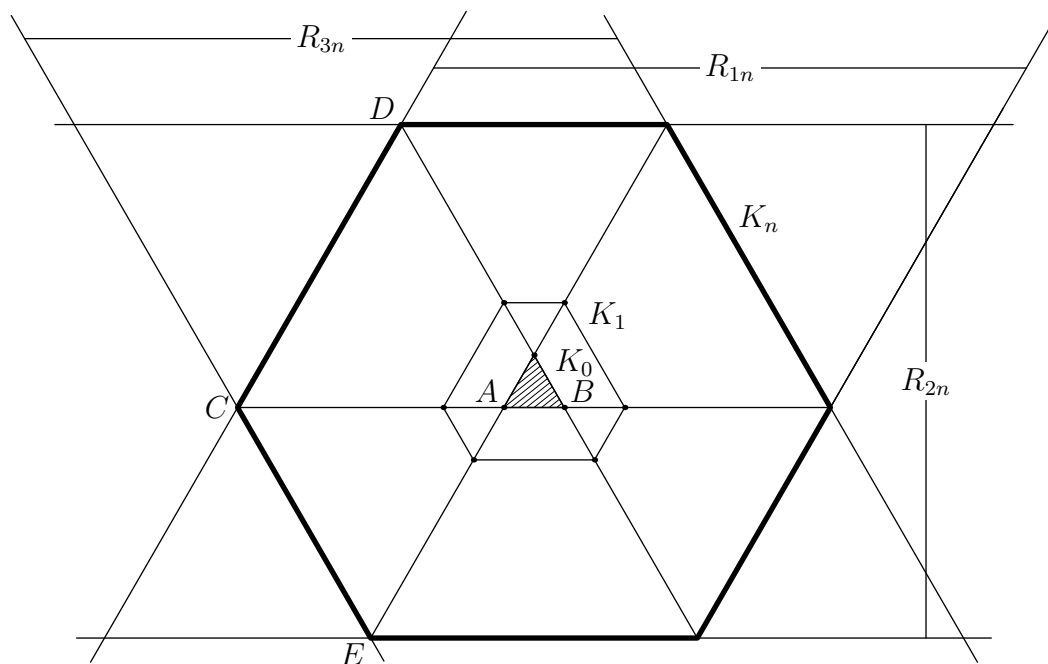


Joonis 26



Joonis 27

Antud ülesande lahendamiseks valime hulga  $K_0$  jaoks 3 riba ( $R_1, R_2, R_3$ ), nii nagu on näidatud joonisel 27.



Joonis 28

Ülaltoodu põhjal sisaldub hulk  $K_n$  ribades  $R_{1n}, R_{2n}$  ja  $R_{3n}$ , milledest iga-

üks on saadud vastava riba  $3^n$ -kordsel laiedamisel (vt. joon. 28). Osutub, et saadud kuusnurkne kujund (ribade  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$  ja  $R_{3n}$  ühisosa) ongi otsitav minimaalne kumer hulknurk, mis sisaldab hulga  $K_n$ . Tõepoolest, kui fikseerida hulgas  $K_0$  kaks punkti ja peegeldada neid teineteise suhtes  $n$  korda (punktis a naidatud viisil), siis saadud hulga äärmised punktid satuvad antud kuusnurga kahte tippu. (Näiteks joonisel 28 punktide  $A$  ja  $B$   $n$ -kordsel peegeldamisel saadud hulga äärepunktid asuvad hulkade  $R_{3n}$  ja  $R_{1n}$  ääresirgetel, järelikult ka saadud kuusnurga kahes tipus.) Kuusnurga pindala  $S$  arvutamiseks kasutame eelmise punkti tulemusi. Tahistagu  $S_0$  lähtekolmnurga pindala. Joon. 28 põhjal

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot S_{CBD} + 3 \cdot S_{CAE} - 2 \cdot S_0 = \\ &= 3 \left( \frac{3^n + 1}{2} \right)^2 + 3 \left( \frac{3^n - 1}{2} \right)^2 - 2 = \frac{1}{2} (3^{2n+1} - 1). \end{aligned}$$

**51.** Kirjutame vahe  $b - a$  kujul  $2^s m$ , kus  $m$  on paaritu arv. Nimetame kaarti  $(a, b)$  „ $m$ -universaalseks“, kui  $b - a$  jagub arvuga  $m$ . Näitame, et kõik automaadid säilitavad kaartide „ $m$ -universaalsuse“ omaduse, s.t. et kui minigisse automaati sisestada „ $m$ -universaalne“ kaart, siis automaadi poolt väljastatav kaart on samuti „ $m$ -universaalne“. Tõepoolest, kui „ $m$ -universaalsele“ kaardile  $(c, d)$  rakendada esimest automaati, siis kaart  $(c + 1, d + 1)$  on „ $m$ -universaalne“, sest  $(d + 1) - (c + 1) = d - c$  ning  $(d - c) : m$ . Kui kaardile  $(c, d)$  rakendada teist automaati, siis peab  $(c, d) = (2u, 2v)$  ja  $2(v - u) : m$ , kust saame, et peab ka  $(v - u) : m$ , sest  $m$  on paaritu. Seega on kaart  $(u, v)$  „ $m$ -universaalne“. Kui kaardid  $(c, d)$  ja  $(d, e)$  on „ $m$ -universaalsed“, siis  $(d - c) : m$ ,  $(e - d) : m$ ,  $[(e - d) + (d - c)] : m$ . Järelikult  $(e - c) : m$  ning seega on kaart  $(c, e)$  „ $m$ -universaalne“.

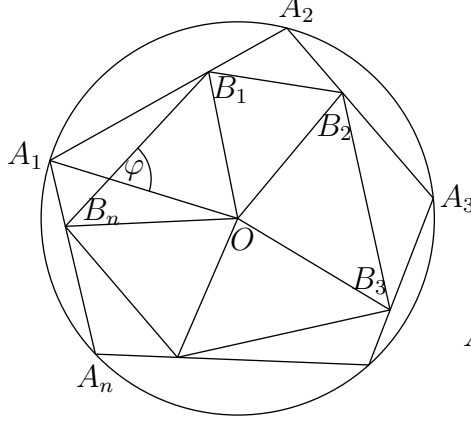
a) Kaarti  $(1, 50)$  on võimalik saada näiteks järgmiselt:



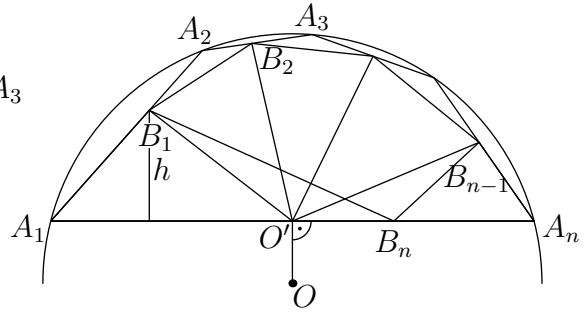
märgitud punktid  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . Vaatleme algul juhtu, kus punkt  $O$  asetseb lähtehulknurga sisepiirkonnas (joon. 29). Nelinurga  $OB_nA_1B_1$  pindala  $S_1 = \frac{1}{2}A_1O \cdot B_nB_1 \cdot \sin \varphi \leq \frac{1}{2} \cdot A_1O \cdot B_nB_1 = \frac{1}{2}R \cdot B_nB_1$ , kus  $\varphi$  on diagonaalide  $B_nB_1$  ja  $A_1O$  vaheline nurk. Analoogiline arutlus näitab, et selline võrratus kehtib ka kõikide ülejäänud nelinurkade  $OB_{i-1}A_iB_i$  korral, s.t, et  $S_i \leq \frac{1}{2}R \cdot B_iB_{i-1}$ , kus  $i = 2, 3, \dots, n$ . Liites saadud võrratused, saame, et

$$S \leq \frac{1}{2} R (B_nB_1 + B_1B_2 + B_2B_3 + \dots + B_{n-1}B_n) = \frac{1}{2} R p.$$

Lihtne on näha, et ülaltoodud tõestus on kehtiv ka juhul, kui punkt  $O$  asub lähtehulknurga küljel.



Joonis 29



Joonis 30

Juhul kui punkt  $O$  asub väljaspool lähtehulknurka, võib toimida järgmiselt. Tähistagu  $O'$  lähtehulknurga maksimaalse külje  $A_1A_n$  keskpunkti (joon. 30). Lõigud  $O'B_1, O'B_2, \dots, O'B_{n-1}$  jaotavad lähtehulknurga nelinurkadeks  $O'B_1A_2B_2, O'B_2A_3B_3, \dots, O'B_{n-2}A_{n-1}B_{n-1}$  (pindaladega vastavalt  $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$ ) ja kolmnurkadeks  $O'A_1B_1$  ning  $O'B_{n-1}A_n$  (pindaladega vastavalt  $S_1$  ja  $S_n$ ). Kolmnurkades  $OO'A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) on maksimaalne külg  $OA_i = R$ , s.t, et  $O'A_i < R$ , kui  $i = 1, 2, \dots, n$ . Suuruste  $S_2, S_3, \dots, S_{n-1}$  korral kehtib võrratus

$$S_i \leq \frac{1}{2}O'A_i \cdot B_iB_{i-1}, \text{ kus } i = 2, 3, \dots, n-1.$$

See võrratus kehtib ka  $i = n$  korral, sest et kolmnurka  $O'B_{n-1}A_n$  võib vaadelda nelinurgana  $O'B_{n-1}A_nB_n$ .

Kui tähistada kolmnurga  $O'A_1B_1$  tipust  $B_1$  küljele  $O'A_1$  langetatud kõrgus tähega  $h$ , siis

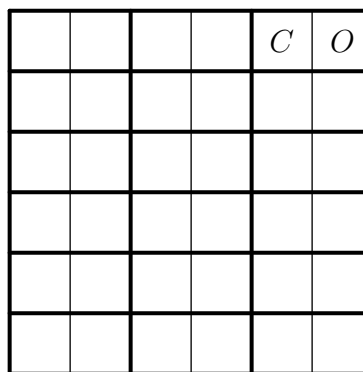
$$S_1 = \frac{1}{2}A_1O' \cdot h \leq \frac{1}{2}A_1O' \cdot B_1B_n.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
 S &= S_1 + S_2 + \dots + S_n \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} (A_1 O' \cdot B_1 B_n + A_2 O' \cdot B_2 B_1 + \dots + A_n O' \cdot B_n B_{n-1}) \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} R(B_1 B_n + B_2 B_1 + \dots + B_n B_{n-1}) = \frac{1}{2} Rp.
 \end{aligned}$$

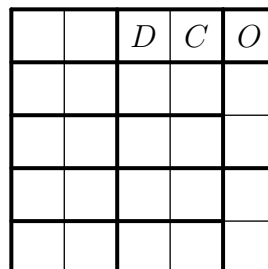
**53.** Olgu mängijad  $A$  ja  $B$ . Alustagu mängija  $A$ .

a) Kui  $n$  on paarisarv, võib malelaua jaotada nn. „doominokivideks“ joonisel 31 näidatud viisil. Mängija  $A$  nihutab esimese käiguga nupu väljalt  $O$  väljale  $C$  (vt. joon. 31). Edaspidi kasutab ta järgmist taktikat. Mängija  $B$  on sunnitud (ka pärast esimest käiku) esimesena sisenema mingisse uude „doominokivisse“ ja pärast tema käiku nihutab  $A$  nupu sellesama „doominokivi“ vabale väljale. Kui alustaja kasutab seda taktikat kõikide järgnevate käikude jooksul, siis on ilmne, et ta võidab.



Joonis 31

Kui  $n$  on paaritu, siis võib malelaua jaotada „doominokivideks“ joonisel 32 näidatud viisil. On selge, et kui nüüd  $B$  rakendab ülaltoodud taktikat, siis ta võidab, sõltumata  $A$  mängust. (Sest siin on mängija  $A$  alati sunnitud esimesena sisenema uude „doominokivisse“.)

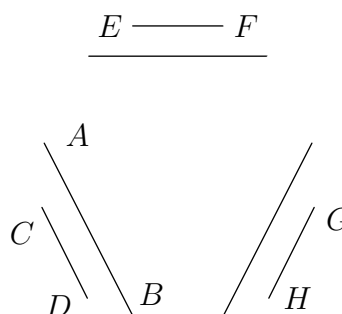


Joonis 32

b) Kui  $n$  on paarisarv, siis  $A$  võidab juhul, kui ta avakäiguks valib  $C \rightarrow O$  (vt. joon. 31) ja pärast kasutab punktis a) toodud taktikat.

Kui  $n$  on paaritu, siis  $A$  võidab käiguga  $C \rightarrow D$  (vt. joon. 32). Tõepoolest, kui oletada, et mäng lõpeb väljal  $O$ , siis tähendab see seda, et viimasena käib  $A$ , sest et väljad  $D$  ja  $O$  on malelual ühte värvi (kumbgi mängija käib alati ühte ja sama värvi väljadele). Kui mäng lõpeb mõnel teisel väljal, siis on ilmne, et väli  $O$  jääb mängust välja ja seetõttu võib  $A$  pärast avakäiku  $C \rightarrow D$  kasutada punktis a) kirjeldatud taktikat. Järelikult, kui  $n$  on paaritu, võidab samuti mängija  $A$ , s.t. mängu alustaja.

**54.** Ei ole alati võimalik. Kui näiteks 6 lõiku paigutada joonisel 33 näidatud viisil, siis nende lõikude otspunkte ei saa ühendada ülesandes nõutud viisil.



Joonis 33

Lõiku  $CD$  saab ühendada ainult lõiguga  $AB$ , sealjuures üks punktidest  $C$  või  $D$  jääb ühendamata (vastasel korral tekib teisest punktidest isoleeritud nelinurk  $CABD$ ). Järelikult peab kas  $C$  või  $D$  olema otsitava murdjoone alguspunkt. Analoogiline väide kehtib punktide  $E, F$  ning  $G, H$  kohta. Kuid see on võimatu, sest murdjoonel ei saa olla üle kahe alguspunkti.

**55.** Vt. ül. 47. lahendus.

**56.** Vt. ül. 48. lahendus.

**57.** Tähistame mängijad tähtedega  $A$  ja  $B$ . Alustagu mängu  $A$ .

a) Loogiliselt on võimalik kaks vastandlikku juhtu: 1) mängija  $B$  saab võita  $A$  igasuguse mängu korral, s.t. mängijal  $B$  on võitev strateegia, 2) mängijal  $A$  on võitev strateegia. Saab näidata, et esimene juht viib vastuolule. Tõepoolest, oletame, et  $B$  saab võita  $A$  igasuguse mängu korral. Järelikult, kui  $A$  võtab suuremast (esimesest) kuhjast  $n$  tikku, siis peab mängijal  $B$  olema võitev käik. Kuid pärast  $A$  käiku jääb suuremasse kuhja  $m - n > n$  tikku. Järelikult on mängija  $B$  teisel käigul sunnitud võtma esimesest kuhjas  $kn$  tikku. Seega jääb esimesse kuhja pärast teist käiku  $m - (k + 1)n$  tikku, kusjuures  $B$  saab võita  $A$  igasuguse mängu korral. Kui  $A$  oleks esimesel käigul võtnud kohe  $(k + 1)n$  tikku (esimesest kuhjast), siis oleks sama positsioon tekkinud pärast esimest käiku ja järelikult pidanuks võitma hoopis mängija  $A$ . Saadud vastuolu näitab, et kui  $m > 2n$ , siis on mängijal  $A$  võitev strateegia.

b) Punktis a) esitatud tõestus on õige ka juhul kui  $\alpha > 2$ , s.t. ka sel juhul on mängijal  $A$  võitev strateegia. Jääb vaadelda veel juhtu, kus  $1 < \alpha < 2$ . Näitame, et kui  $2 > \alpha \geq \frac{1}{2} \times (\sqrt{5} + 1)$ , siis on mängijal  $A$  võitev strateegia. Tähistame sümbolitega  $m_k$  ja  $n_k$  tikkude arvud kuhjades pärast  $k$ -ndat käiku, kusjuures olgu  $m_k \geq n_k$ . Et  $2 > \frac{m}{n} > \alpha \geq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ , siis  $m_1 = n, n_1 = m - n$  ning

$$1 < \frac{m_1}{n_1} = \frac{n}{m - n} < \frac{1}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Edasi

$$m_2 = n_1, \quad n_2 = m_1 - n_1 \quad \text{ja} \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{n_1}{m_1 - n_1} > \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Kui  $m_2/n_2 \geq 2$ , siis punkti a) põhjal saab võita  $A$ . Järelikult võib oletada, et

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} < \frac{m_2}{n_2} < 2.$$

Analoogiliselt ülaltõestatud saame, et

$$1 < \frac{m_3}{n_3} < \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{m_4}{n_4} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Siin võib jälle öelda, et  $m_4/n_4 < 2$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et arvud  $m$  ja  $n$  on ühisteguriteta (sest ühise teguri  $d > 1$  olemasolu ei muuda mängustrateegiat).

Konstruksiooni põhjal on jada  $n_k$  monotoonselt kahanev, s.t.  $n > n_1 > n_2 > \dots > n_s$ , kui vaid  $1 < \frac{m_k}{n_k} < 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ . Järelikult peab teatud paariskäigu järel saabuma olukord, kus  $m_k/n_k \geq 2$  ja  $n_k > 1$  või  $m_k \geq 2$  ja  $n_k = 1$ . Mõlemal juhul võidab  $A$ . Järelikult, kui  $\alpha \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , siis mängijal  $A$  on võitev strateegia. Näitame veel, et kui  $\alpha < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , siis võib valida sellised kuhjad tikkude arvuga  $m_0$  ja  $n_0$ , et  $m_0 > \alpha \cdot n_0$  ja mängijal  $B$  on võitev strateegia. Tõepoolest, valime taandumatu murru  $m_0/n_0$  selliselt, et  $\alpha < \frac{m_0}{n_0} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Kui nüüd valida kuhjades vastavalt  $m_0$  ja  $n_0$  tikku, siis ülaltoodud mõttekäigu põhjal kaotab alustaja.

Kerkib küsimus, kust on saadud arv  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Osutub, et selle arvu võib leida, lähtudes järgmistest kaalutlustest. Oletame, et arv  $\alpha$  jaotab vahemiku  $]1, 2[$  kaheks osaks nii, et kui  $\frac{m}{n} \in ]\alpha, 2[$ , siis mängijal  $A$  on võitev strateegia; kui aga  $\frac{m}{n} \in ]1, \alpha[$ , siis on mängijal  $B$  võitev strateegia.

Seega, kui

$$\frac{m}{n} \in ]\alpha, 2[, \quad \text{siis} \quad \frac{n}{m-n} \in ]1, \alpha[$$

ja kui

$$\frac{m_1}{n_1} \in ]1, \alpha[, \quad \text{siis} \quad \frac{n_1}{m_1 - n_1} \in ]\alpha, 2[.$$

Järelikult võrratustest  $m > n\alpha$ ,  $n < (m-n)\alpha$ ,  $m_1 < n_1\alpha$  ja  $n_1 > (m_1 - n_1)\alpha$  saame, et

$$1 + \alpha < \frac{m^2}{n} \quad \text{ja} \quad 1 + \alpha > \frac{m_1^2}{n_1}.$$

Et  $\frac{m}{n} > \alpha$  ja  $\frac{m_1}{n_1} < \alpha$ , siis võib arvud  $m$ ,  $n$ ,  $m_1$  ja  $n_1$  valida nii, et  $\frac{m}{n} - \alpha$  ja  $\alpha - \frac{m_1}{n_1}$  on küllalt väikesed, järelikult  $1 + \alpha \leq \alpha^2$  ja  $1 + \alpha \geq \alpha^2$ . Seega  $1 + \alpha = \alpha^2$ , millest  $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .

Ülesande lahenduse tulemuse võib resümeerida järgmiselt: kui  $1 < \frac{m}{n} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , siis on mängijal  $B$  võitev strateegia; kui aga  $\frac{m}{n} > \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , siis on võitev strateegia mängijal  $A$ .

**58.** Olgu  $x_n = 4\{\sqrt{2}n\}$ , kus  $\{x\} = x - [x]$  tähistab arvu  $x$  murdosa. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $m > k$ . Siis

$$\begin{aligned}
 |x_m - x_k| &= |4\{\sqrt{2}m\} - 4\{\sqrt{2}k\}| = 4|\sqrt{2}m - \sqrt{2}k - [\sqrt{2}m] + [\sqrt{2}k]| = \\
 &= 4|\sqrt{2}(m-k) - [\sqrt{2}m] + [\sqrt{2}k]| = \\
 &= 4 \frac{|2(m-k)^2 - ([\sqrt{2}m] - [\sqrt{2}k])^2|}{\sqrt{2}(m-k) + [\sqrt{2}m] - [\sqrt{2}k]} \geq \\
 &\geq \frac{4}{\sqrt{2}(m-k) + [\sqrt{2}m] - [\sqrt{2}k]} \geq \\
 &\geq \frac{4}{\sqrt{2}(m-k) + [\sqrt{2}m+1] - \sqrt{2}k} = \\
 &= \frac{4}{2\sqrt{2}(m-k) + 1} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}(m-k) + (m-k)} = \\
 &= \frac{4}{(2\sqrt{2}+1)(m-k)} > \frac{1}{m-k} = \frac{1}{[m-k]}.
 \end{aligned}$$

Vaatleme selle näite üldistust. Ahelmurdude teooriast<sup>1</sup> on teada, et iga ruutirratsionaalarvu  $\alpha = a + \sqrt{b}$  ( $a$  ja  $b$  on ratsionaalarvud) jaoks võib leida sellise positiivse konstandi  $c$  nii, et kõikide täisarvuliste  $p$  ja  $q$  ( $q \neq 0$ ) korral kehtib võrratus

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{cq^2}.$$

Valime vastavalt arvule  $q$  arvu  $p(q)$  nii, et murd  $p(q)/q$  oleks arvule  $\alpha$  küllalt lähedal, s.t. et  $\left| \alpha - \frac{p(q)}{q} \right| < \frac{1}{q}$ . Kui nüüd  $x_n = c(n\alpha - p(n))$ , siis

$$|x_n| = cn \left| \alpha - \frac{p(n)}{n} \right| < \frac{cn}{n} = c.$$

Järelikult on jada  $x_n$  tõkestatud. Kui  $n \neq k$ , siis

$$\begin{aligned}
 |x_n - x_k| &= c[n\alpha - k\alpha - p(n) + p(k)] = \\
 &= c|n-k| \cdot \left| \alpha - \frac{p(n) - p(k)}{n-k} \right| \geq c|n-k| \frac{1}{c(n-2)^2} \\
 &= \frac{1}{(n-k)}.
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>vt. Хинчин А.Я, *Цепные дроби*. Гостехиздат, 1949.

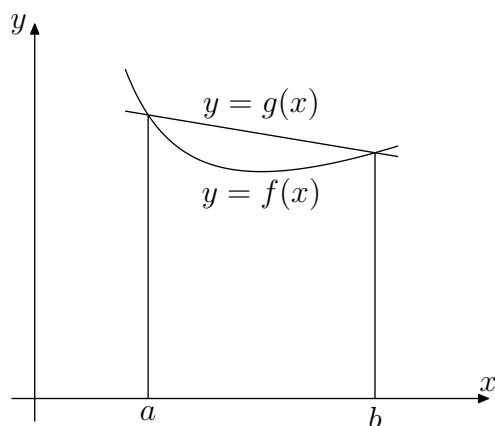
Seega rahuldab jada  $x_n$  ülesande tingimusi.

**59.** Vt. ül. 51 lahendus.

**60.** Vt. ül. 52 lahendus.

**61.** Olgu  $c > 0$  ( $c$  väärtuse täpsustame hiljem). Siis

$$\begin{aligned} S &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \cdot \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{c} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{c}{x_i} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left( \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{c} + \sum_{i=1}^n \frac{c}{x_i} \right)^2 = \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i} \right) \right]^2. \end{aligned}$$



Joonis 34

Vaatleme lõigul  $[a, b]$  funktsiooni  $y = f(x) = \frac{x}{c} + \frac{c}{x}$ . Et funktsiooni  $f(x)$  graafik on nõgus (vt. joon. 34), siis  $f(x)$  saavutab maksimaalse väärtuse punktis  $x = a$  või  $x = b$ . Tõepoolest, et graafik on nõgus, siis punkte  $(a, f(a))$  ja  $(b, f(b))$  ühendav sirge  $y = g(x)$  asub vahemikus  $]a, b[$  funktsiooni  $f(x)$  graafikust ülalpool. Järelikult, kui  $x \in [a, b]$ , siis  $f(x) = \frac{x}{c} + \frac{c}{x} \leq g(x) \leq \max(f(a), f(b))$ . Kui valida  $c$  nii, et  $f(a) = f(b)$ , siis  $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$ . Seega  $c = \sqrt{ab}$ . Järelikult lõigul  $[a, b]$

$$f(x) \leq \frac{a}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a} = \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$$

ning

$$S \leq \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{c} + \frac{c}{x_i} \right) \right]^2 \leq \frac{1}{4} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \right]^2 = \frac{(a+b)^2 n^2}{4ab}.$$

**62.** Fikseerime  $p$  punkti  $(x, y(x))$  ( $x = 0, 1, 2, \dots, p-1$ ) selliselt, et  $x = k$  ja  $y(x) \equiv k^2 \pmod{p}^2$ . Näitame, et need punktid rahuldavad ülesandes püstitatud nõudeid.

---

<sup>2</sup>Õeldakse, et arvud  $a$  ja  $b$  on kongruentsed mooduli  $m$  järgi ja kirjutatakse  $a \equiv b \pmod{m}$ , kui  $(a-b) \div m$ . Lähemalt vt. L. Kivistik, J. Gabovitš, *Arvuteooria*, TRÜ rotaprint, 1974.

Oletame vastuväiteliselt, et hulgas  $M$  leiduvad erinevad punktid  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  ja  $(x_3, y_3)$ , mis asuvad ühel sirgel. Sel juhul kehtib võrdus

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},$$

millest

$$(y_2 - y_1)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_2 - x_1) = 0.$$

Seega

$$[(x_2^2 - x_1^2)(x_3 - x_2) - (x_3^2 - x_2^2)(x_2 - x_1)] : p$$

ehk  $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) : p$ . Kuid see on võimatu, sest  $0 < |x_i - x_j| < p$ , kui  $i \neq j$ . Järelikult ei asu ükski punktikolmik ühel sirgel.

Oletame, et leidub 4 punkti  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  ja  $(x_4, y_4)$ , mis moodustavad võrdsed vektorid, siis

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4 \quad \text{ja} \quad y_2 - y_1 = y_3 - y_4.$$

Järelikult

$$(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2 + x_4^2) : p$$

ehk

$$[(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_3 - x_4)(x_3 + x_4)] : p.$$

Asendades nüüd  $x_2 = x_1 + x_3 - x_4$ , saame et:

$$2(x_1 - x_4)(x_3 - x_4) : p.$$

Kuid see on võimatu. Saadud vastuolu näitab, et ükski punktinelik ei saa olla rööpküliku tippudeks.

**63.** Ülesande lahendamiseks piisab näidata, et jada iga element on ühistegurita arvu  $m$ , sest hiljem võib arvu  $m$  osas võtta  $f(m), f(f(m)), \dots$ . Tõepoolest,

$$\begin{aligned} f(m) &= m^3 - m + 1 \equiv 1 \pmod{m},^3 \\ f(f(m)) &\equiv 1^3 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{m}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

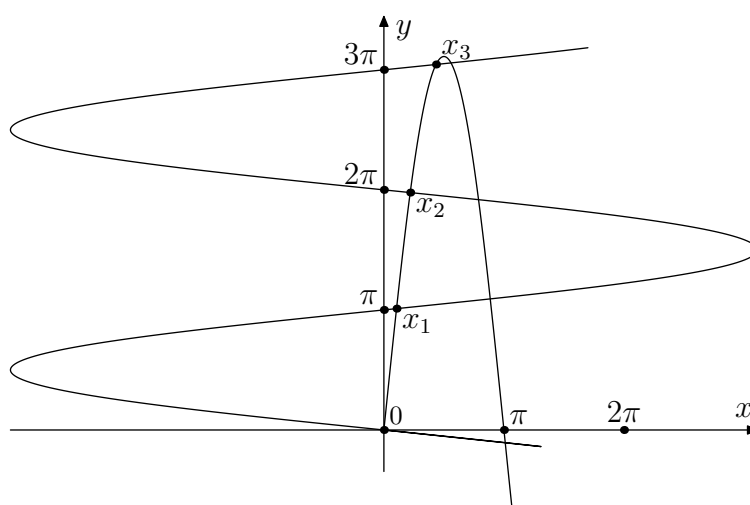
Järelikult arvud  $f(m), f(f(m)), \dots$ , annavad  $m$ -ga jagades jäägiks ühe. Sellega on tõestatud, et jada kõik liikmed on tõepoolest ühisteguriteta.

**64.** Pöörame funktsiooni  $y = A \sin x$  graafikut kordinaatide suhtes  $90^\circ$  võrra, s.t. et lisame funktsiooni  $y = A \sin x$  graafikule veel funktsiooni  $x =$

---

<sup>3</sup>Õeldakse, et arvud  $a$  ja  $b$  on kongruentsed mooduli  $m$  järgi ja kirjutatakse  $a \equiv b \pmod{m}$ , kui  $(a - b) : m$ . Lähemalt vt. L. Kivistik, J. Gabovits, *Arvuteooria*, TRÜ rotaprint, 1974.

$A \sin y$  graafiku. Kui nüüd kahe graafiku ühendit pöörata koordinaatide alguspunkti suhtes  $90^\circ$  võrra, siis see hulk teiseneb iseendaks, sest et  $y = A \sin x$  on paaritu funktsioon. Järelikult, kui esimeses veerandis on graafikute  $y = A \sin x$  ja  $x = A \sin y$  lõikepunkt, siis pöörates seda lõikepunkti  $90^\circ$  võrra, saame jälle nende graafikute lõikepunkti. Pöörates graafikute lõikepunkti  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ja  $270^\circ$  võrra, saame neli punkti, mis asuvad ruudu tippudes. Olles sel viisil konstrueerinud kaks ruutu, piisab nende mittekongruentsuse tõestamiseks näidata, et nende tipud esimeses veerandis on erinevatel kaugustel koordinaatide alguspunktist.



Joonis 35

Kui valime  $A > 1978\pi + 1$ , siis graafiku  $y = A \sin x$  see osa, kus  $0 < x \leq \frac{1}{2}\pi$ , lõikab graafikut  $x = A \sin y$  vähemalt 1978 punktis  $x_1, x_2, \dots, x_{1978}$ , sealjuures kõik need lõikepunktid on erinevatel kaugustel koordinaatide alguspunktist (vt. joon. 35).

**65.** Nimetame „kihiks“ kõikide ruumi punktide hulka, mis asuvad kahe paralleelse tasandi vahel (tasandite punktid kaasa arvatud). Loeme „kihi“ laiuks tema kahe äärtasandi vahelise kauguse. On lihtne näidata, et kui hulk  $K_n$  sisaldub „kihis“  $R$  (laiusega  $d$ ), siis hulk  $K_{n+1}$  sisaldub „kihis“  $R_1$ , mille laius on  $3d$  (tõestus on analoogiline ül. 50 punkt  $b$  tõestusega). Tähistame hulka  $K_n$  sisaldava minimaalse kumera hulkkahuka sümboliga  $K'_n$ . Punktides  $a$  ja  $b$  esitatud ülesannete lahendused järelduvad punkti  $c$  lahendusest, seepärast alustame punktist  $c$ ).

c) Valime tetraeedri  $K_0$  tippude koordinaadid järgmiselt:

$$A_1(d, d, d), \quad A_2(d, -d, -d), \quad A_3(-d, d, -d), \quad A_4(-d, -d, d).$$

Suuruse  $d$  arvuline väärtus tuleks leida tingimusest, et tetraeedri  $K_0$  ruumala on 1, kuid antud juhul ei ole selle arv väärtus meile tähtis. Konstrueerime 7 „kihti“  $X_1, X_2, \dots, X_7$  järgmiselt:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(x, y, z) \mid |x| \leq d\}, & X_5 &= \{(x, y, z) \mid |x - y - z - d| \leq 2d\}, \\ X_2 &= \{(x, y, z) \mid |y| \leq d\}, & X_6 &= \{(x, y, z) \mid |-x + y - z - d| \leq 2d\}, \\ X_3 &= \{(x, y, z) \mid |z| \leq d\}, & X_7 &= \{(x, y, z) \mid |-x - y + z - d| \leq 2d\}, \\ X_4 &= \{(x, y, z) \mid |x + y + z - d| \leq 2d\}. \end{aligned}$$

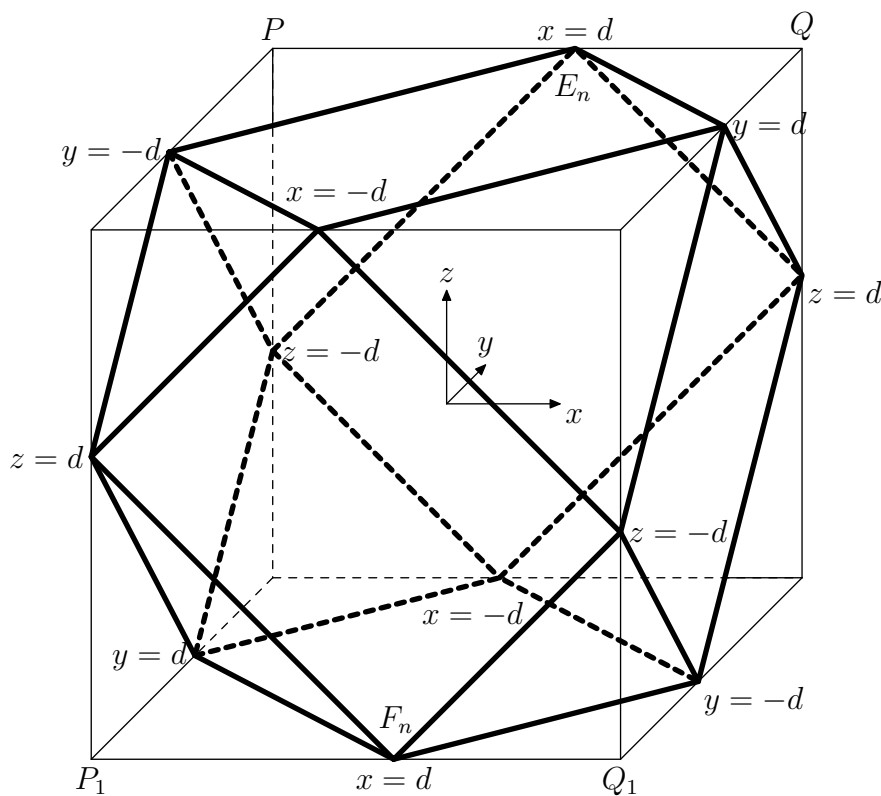
„Kihid“  $X_4, X_5, X_6$  ja  $X_7$  on valitud nii, et nende ühel äärtasandil on 3 ja teisel üks hulga  $K_0$  punkt. (Selles on lihtne veenduda, kui punktide  $A_1, A_2, A_3$  ja  $A_4$  koordinaadid asendada „kihtide“  $X_4, X_5, X_6$  ja  $X_7$  äärtasandite võrranditesse.) Lihtne on näha, et „kihtide“  $X_4, X_5, X_6$  ja  $X_7$  ühislõik moodustab tetraeedri  $K_0$ . Kui „kiht“  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) laiendada  $3^n$  korda, siis saadud „kihid“  $X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{7n}$  on kirjeldatavad järgmiselt:

$$\begin{aligned} X_{1n} &= \{(x, y, z) \mid |x| \leq 3^n d\}, & X_{5n} &= \{(x, y, z) \mid |x - y - z - d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \\ X_{2n} &= \{(x, y, z) \mid |y| \leq 3^n d\}, & X_{6n} &= \{(x, y, z) \mid |-x + y - z - d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \\ X_{3n} &= \{(x, y, z) \mid |z| \leq 3^n d\}, & X_{7n} &= \{(x, y, z) \mid |-x - y + z - d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \\ X_{4n} &= \{(x, y, z) \mid |x + y + z - d| \leq 2 \cdot 3^n d\}, \end{aligned}$$

Et siin iga „kiht“  $x_{in}$  on saadud „kihi“  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ )  $3^n$ -kordsel laiendamisel, siis järelikult  $K'_n \subset Z_n$ , kus  $Z_n = \bigcap_{i=1}^7 X_{in}$ . Näitame, et  $K'_n = Z_n$ . Kõige lihtsam on hulka  $Z_n$  ette kujutada kuubina  $X_{1n} \cap X_{2n} \cap X_{3n}$ , mille tippudest on „kihtide“  $X_{4n}, X_{5n}, X_{6n}$  ja  $X_{7n}$  äärtasanditega ära lõigatud tetraeedrid (vt. joon. 36). Tekib hulktahukas  $Z_n$ , mille 12 tipu koordinaadid on järgmised:

$$\begin{aligned} &(3^n d, 3^n d, d), (3^n d, d, 3^n d), (d, 3^n d, 3^n d), (-3^n d, -3^n d, d), \\ &(-3^n d, d, -3^n d), (d, -3^n d, -3^n d), (3^n d, -3^n d, -d), (3^n d, -d, -3^n d), \\ &(-d, -3^n d, 3^n d), (-3^n d, -d, 3^n d), (-d, 3^n d, -3^n d), (-3^n d, 3^n d, -d). \end{aligned}$$

Fikseerime hulgas  $K_0$  kaks punkti (näiteks  $A_1$  ja  $A_2$ ) ja näitame, et neid punkte teineteise suhtes  $n$  korda peegeldades saadakse punktid  $E_n$  ja  $F_n$ , mis on hulktahuka  $Z_n$  tipud. Tõepoolest, et punktid  $A_1$  ja  $A_2$  asuvad „kihtide“  $X_3$  ja  $X_2$  erinevatel äärtasanditel, siis punktid  $E_n$  ja  $F_n$  asuvad kihtide  $X_{3n}$  ja  $X_{2n}$  erinevatel äärtasanditel, s.t. nad asuvad lõikudel  $PQ$  ja  $P_1Q_1$ . Et  $A_1$  ja  $A_2$  asuvad „kihi“  $X_{4n}$  erinevatel äärtasanditel. Järelikult on punktid  $E_n$  ja  $F_n$  hulktahuka  $Z_n$  tipud. Võttes nüüd punktide  $A_1$  ja  $A_2$  asemel mõne



Joonis 36

teise punktupaari  $(A_i, A_j)$ , saame analoogia põhjal, et ka nende punktide  $n$ -kordsed peegeldused on hulktahuka  $Z_n$  tipud. Järelikult kõik hulktahuka  $Z_n$  tipud asuvad hulgas  $K'_n$ . Sellega on näidatud, et  $K'_n = Z_n$ .

Hulktahuka  $K'_n$  ruumala arvutamiseks tuleb kuubi ruumalast lahutada äralõigatud tetraeedrite ruumalad:

$$V_n = (2 \cdot 3^n d)^3 - \frac{1}{6}(3^n - 1)^3 d^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(3^n + 1)^3 d^3 - 3 \cdot \frac{1}{6}(3^n - 1)^3 d^3 - \frac{1}{6}(3^n + 1)^3 d^3 = 4(5 \cdot 3^{3n-1} - 3^n) d^3.$$

Kui tetraeedri  $K'_0$  ruumala tähistada  $V_0$ , siis  $V_0 = \frac{8}{3} d^3$ . Seega  $V_n/V_0 = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1})$ . Et  $V_0 = 1$ , siis

$$V_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1}).$$

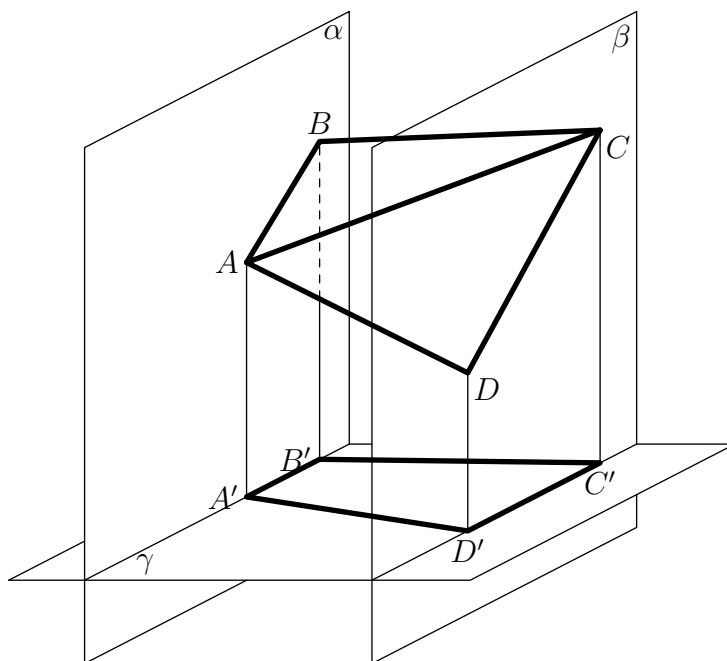
a) Hulktahukal  $K'_1$  on 14 tahku (vt. joon. 36). Kaheksa neist on võrdkülsed kolmnurgad ja kuus ristkülikud.

b)  $V_1 = \frac{1}{2}(5 \cdot 27 - 9) = 63.$

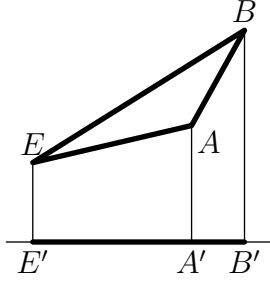
**66.** Vt. ül. 58 lahendus.

**67.** Vt. ül. 51 lahendus.

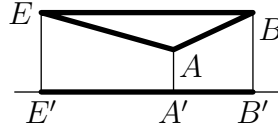
**68.** Olgu  $AB$  ja  $CD$  tetraeedri vastasküljed. Konstrueerime kaks paralleelset tasandit  $\alpha$  ja  $\beta$  nii, et  $[AB] \in \alpha$  ja  $[CD] \in \beta$ . Vaatleme mingit tasandit  $\gamma$ , mis on risti tasanditega  $\alpha$  ja  $\beta$ . Kui projekteerida tetraeeder  $ABCD$  tasandile  $\gamma$ , siis saame trapetsi  $A'B'C'D'$ , mille kõrgus ei sõltu tasandi  $\gamma$  valikust (vt. joon. 37), sest trapetsi kõrgus on tasandite  $\alpha$  ja  $\beta$  vaheline kaugus. Järelikult, et võrrelda selliste trapetside pindalasid (mis on saadud tetraeedri projekteerimisel erinevatele tasanditele  $\gamma$ ), selleks piisab võrrelda nende trapetsite aluste summasid. Valime tasandil  $\alpha$  punkti  $E$  nii, et lõigud  $EA$  ja  $CD$  on paralleelsed ning  $\widehat{EAB} \geq \frac{\pi}{2}$  (vt. joon. 38). On ilmne, et lõikude  $EA$  ja  $CD$  projektsioonid tasandile  $\gamma$  on võrdse pikkusega. Pöörates kolmnurka  $EAB$  nii, et  $EB$  on paralleelne tasandiga  $\gamma$ , saame et  $E'B' = EB$  (vt. joon. 39). Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $\widehat{EBA} \leq \frac{\pi}{4}$ . Sel juhul saab kolmnurka  $EAB$  pöörata nii, et lõik  $EB$  moodustab tasandiga  $\gamma$  nurga  $\frac{\pi}{4}$  (vt. joon. 40). Siis  $E'B' = \frac{1}{\sqrt{2}}EB$ .



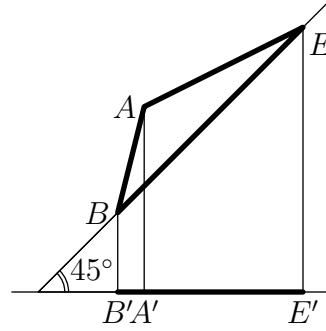
Joonis 37



Joonis 38



Joonis 39



Joonis 40

Kui nüüd neid kolmnurga  $EAB$  pööramisi tõlgendada tasandi  $\gamma$  kahe erineva valikuna, siis oleme näidanud, et võib valida kaks tasandit nii, et tetraeedri projektsioonide pindalade suhe nendele tasanditele on võrdne  $\sqrt{2}$ .

**69.** Olgu  $D_k = (a_1 - b_k)^2 + (a_2 - b_k)^2 + \dots + (a_k - b_k)^2$ , kus  $k = 1, 2, \dots, n$ . Siis  $D_n = D$  ja

$$\begin{aligned} D_k &= (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_k)^2 = (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1} + b_{k-1} - b_k)^2 = \\ &= (a_k - b_k)^2 + \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1})^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1})(b_{k-1} - b_k) + \\ &\quad + (k-1)(b_k - b_{k-1})^2. \end{aligned}$$

Et suuruste  $b_k$  definitsiooni kohaselt  $\sum_{i=1}^{k-1} (a_i - b_{k-1}) = 0$ , siis

$$D_k = D_{k-1} + (k-1)(b_k - b_{k-1})^2 + (a_k - b_{k-1})^2.$$

Lihtne on näha, et  $kb_k = (k-1)b_{k-1} + a_k$ , kui  $k \geq 1$ . Järelikult

$$b_{k-1} - b_k = \frac{b_k - a_k}{k-1}, \text{ kui } k \geq 2.$$

Seega

$$D_k = D_{k-1} + \frac{k}{k-1} (a_k - b_k)^2.$$

Järelikult

$$\begin{aligned} D &= D_n = D_{n-1} + \frac{n}{n-1} (a_n - b_n)^2 = \dots = \\ &= (a_1 - b_1)^2 + \frac{2}{1} (a_2 - b_2)^2 + \frac{3}{2} (a_3 - b_3)^2 + \dots + \frac{n}{n-1} (a_n - b_n)^2. \end{aligned}$$

Et  $1 < \frac{k}{k-1} \leq 2$  ( $k = 2, 3, \dots, n$ ), siis

$$C = \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 \leq D \leq 2 \sum_{k=1}^n (a_k - b_k)^2 = 2C.$$

**70.** Olgu  $x = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $y = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ,  $z = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ,  $w = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ . Siis on lihtne näidata, et kui

$$x^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

siis

$$y^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$z^n = q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$w^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

Kui tähistada  $q_n/x^n = A_n$ ,  $r_n\sqrt{2}/x^n = B_n$ ,  $s_n\sqrt{3}/x^n = C_n$  ja  $t_n\sqrt{6}/x^n = D_n$ , siis võib ülaltoodud avaldised kirjutada kujul:

$$\begin{aligned} A_n + B_n + C_n + D_n &= 1, \\ A_n - B_n + C_n - D_n &= (y/x)^n, \\ A_n + B_n - C_n - D_n &= (z/x)^n, \\ A_n - B_n - C_n + D_n &= (w/x)^n. \end{aligned} \tag{5}$$

Et  $x > y > 0$ ,  $x > z > 0$  ja  $x > |w|$ , siis süsteemi (5) teise, kolmanda ja neljanda võrrandi paremad pooled koonduvad nulliks, kui  $n \rightarrow \infty$ . Liites süsteemi (5) võrrandite vastavad pooled, saame et  $4A_n = 1 + u_n$ , kus  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

Järelikult  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{4}$ . Kui liita esimese ja teise võrrandi ja lahutada kolmanda ja neljanda võrrandi vastavad pooled, saame et  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \frac{1}{4}$ . Analoogiliselt saame, et  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{1}{4}$ . Järelikult

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n\sqrt{2}}{q_n} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n\sqrt{3}}{q_n} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n\sqrt{6}}{q_n} = 1,$$

kust saame, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

**71.** Vt. ül. 62 lahendus.

**72.** Olgu  $n$  naturaalarv ja  $y + 1, y + 2, \dots, x - 1, x$  järjestikused naturaalarvud. Vaatleme võrrandit

$$(y + 1) + (y + 2) + \dots + (x - 1) + x = n, \quad (6)$$

kus  $x - y > 1$  ja  $y \geq 0$ . Võrrand (6) on samaväärne võrrandiga

$$(x - y)(x + y + 1) = 2n. \quad (7)$$

Et arvud  $x - y$  ja  $x + y + 1$  on erineva paarsusega, siis võrrand (7) pole lahenduv, kui  $n = 2^s$ , kus  $s$  on naturaalarv. Näitame, et kui  $n \neq 2^s$ , siis võrrand (7) on lahenduv. Tõepoolest sellisel juhul  $n = 2^s p$ , kus  $p$  on paaritu ja  $p \geq 3$ . Kui  $p > 2^{s+1}$ , siis võttes  $x - y = 2^{s+1}$  ja  $x + y + 1 = p$ , saame, et

$$x = 2^s + (p - 1)/2 \quad \text{ja} \quad y = -2^s + (p - 1)/2.$$

Kui  $p < 2^{s+1}$ , siis võttes  $x - y = p$  ja  $x + y + 1 = 2^{s+1}$ , saame et

$$x = 2^s + (p - 1)/2 \quad \text{ja} \quad y = 2^s - (p + 1)/2.$$

Järelikult, arve kujul  $2^s$  ja ainult neid ei saa esitada järjestikuste naturaalarvude summana.

**73.** Kui  $x = 0$ , siis  $y = \pm 2$ . Et  $x > 0$  korral on võrrandi vasak pool paaritu, siis  $y = 2n + 1$ . Võib eeldada, et  $n > 0$ , s.t. leiame algul need lahendid, kus  $y > 0$ . Asendades  $y = 2n + 1$  lähtevõrrandisse, saame  $3 \cdot 2^{x-2}$  või  $n + 1 = 3$  ja  $n = 2^{x-2}$ . Esimesel juhul  $x = 4$  ja teisel juhul  $x = 3$ . Järelikult on antud võrrandil 6 lahendit, s.t.

$$\begin{aligned} \{(x; y) \mid 3 \cdot 2^x + 1 = y^2 \wedge x, y \in \mathbb{Z}\} = \\ = \{(0; 2); (0; -2); (4; 7); (4; -7); (3; 5); (3; -5)\}. \end{aligned}$$

**74.** Kokku on  $n$ -kohalisi arve  $10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$ .

a) Leiame, kui suure osa moodustavad  $n$ -kohalistest arvudest sellised „tasakaalustatud“ arvud, millel ühtivad  $k$  esimest ja  $k$  viimast numbrit ( $k \leq n$ ). Lihtne on näha, et sellistel arvudel on esimeste  $n - k$  numbriga määratud ka viimased  $k$  numbrit. Seega pole neid rohkem kui  $(k \leq n)$ -kohalisi arve üldse, s.t. et  $9 \cdot 10^{n-k-1}$ . Järelikult ei ületa selliste arvude osa  $n$ -kohaliste arvude hulgas suurust

$$\frac{9 \cdot 10^{n-k-1}}{9 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{10^k}.$$

Seega kõikide „tasakaalustatud“ arvude osa  $n$ -kohaliste arvude hulgas ei ületa arvu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9}.$$

b) Lihtne on konstrueerida sellist arvu samaaegselt algusest ja lõpust. Tähistame otsitava arvu tähega  $A$ . Siis

$$\begin{aligned} A &= 9 \dots = 98 \dots 9 = 9897 \dots 989 = 98979896 \dots 9897989 = \\ &= 9897989698979895 \dots 989798969897989 = \dots \end{aligned}$$

Arvus  $A$  on  $2^{10} - 1 = 1023$  numbrit. Arv  $A$  ongi otsitav arv, sest kui sellele lõppu kirjutada 9, siis ühtivad esimese ja viimase number, kui lõppu kirjutada 7, siis ühtivad neli esimest ja neli viimast numbrit jne.

**75.** Olgu  $a_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+1}$  ja  $b_n = \sqrt{4n+2}$ .

a) Et  $b_n^2 - a_n^2 = 2n + 1 - 2\sqrt{n(n+1)} < 1$  ja  $b_n^2 = 4n + 2$  pole täisruut, siis järelikult  $[a_n] = [b_n]$ .

b)

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= \frac{b_n^2 - a_n^2}{b_n + a_n} = \frac{2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{4n+2}} < \frac{2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}}{4\sqrt{n}} = \\ &= \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{4\sqrt{n}(2n+1+1\sqrt{n(n+1)})} = \frac{1}{4\sqrt{n}(2n+1+1\sqrt{n(n+1)})} < \\ &< \frac{1}{4\sqrt{n} \cdot 4n} = \frac{1}{16\sqrt{n^3}}. \end{aligned}$$

**76.** Et  $m \leq x_i \leq M$ , kui  $i = 1, 2, \dots, k$ , siis

$$\left(x_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{M-m}{2}\right)^2.$$

Et  $\sum_{i=1}^k x_i = 0$ , siis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left(x_i - \frac{M+m}{2}\right)^2 &= k \left(\frac{M+m}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2 - (M+m) \sum_{i=1}^k x_i = \\ &= k \left(\frac{M+m}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^k x_i^2. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\sum_{i=1}^k x_i^2 \leq k \left(\frac{M-m}{2}\right)^2 - k \left(\frac{M+m}{2}\right)^2 = -kmM.$$

**77.** Tähistame  $(a_{2n} - s_0)/2n = h$ . Vaatleme aritmeetilist progressiooni  $b_k = a_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ ). Lihtne on näha, et  $b_0 = a_0$  ja  $b_{2n} = a_{2n}$ . Kui  $c_k = a_k - b_k$ , siis suuruste  $c_k$  jaoks peab kehtima võrratus

$$c_k + b_k \geq (c_{k-1} + b_{k-1} + c_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Et  $b_k = (b_{k-1} + b_{k+1})/2$ , siis järelikult  $c_k \geq (c_{k-1} + c_{k+1})/2$ . Ülesandes tõestatatav võrratus saab kuju

$$\begin{aligned} \frac{(c_0 + b_0) + (c_2 + b_2) + \dots + (c_{2n} + b_{2n})}{n+1} &\leq \\ &\leq \frac{(c_1 + b_1) + (c_3 + b_3) + \dots + (c_{2n-1} + b_{2n-1})}{n} \end{aligned}$$

ehk

$$\frac{c_0 + c_2 + \dots + c_{2n}}{n+1} \leq \frac{c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1}}{n},$$

sest et liidetavad  $b_i$  saab koondada. Tõepoolest,

$$\frac{1}{n+1}(b_0 + b_2 + \dots + b_{2n}) = \frac{1}{n+1}(b_0 + b_{2n}) \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(b_0 + b_{2n}) = a_0 + nh$$

ja

$$\frac{1}{n}(b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) \cdot \frac{n}{2} = s_0 + nh.$$

Järelikult aritmeetilise progressiooni lahutamine antud jadast ei muuda ülesande tingimusi. Jada  $c_k$  konstruktsiooni põhjal  $c_0 = 0$  ja  $c_{2n} = 0$ . Näitame, et  $c_k \geq 0$ , kui  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n$ . Oletame vastuväiteliselt, et jadas  $c_k$  on negatiivseid liikmeid. Olgu  $c_m < 0$  selle jada minimaalne element. Siis

$$c_m \geq (c_{m-1} + c_{m+1})/2 \quad \text{ehk} \quad (c_m - c_{m-1}) + (c_m - c_{m+1}) \geq 0.$$

Et  $c_m$  on jada  $c_k$  minimaalne element, siis  $c_m - c_{m-1} \leq 0$  ja  $c_m - c_{m+1} \leq 0$ . Järelikult  $c_m = c_{m-1} = c_{m+1}$ . Et  $c_{m-1} \geq (c_{m-2} + c_m)/2$  ja  $c_{m+1} \geq (c_{m+2} + c_m)/2$ , siis saame analoogiliselt, et  $c_{m-2} = c_{m-1} = c_m = c_{m+1} = c_{m+2}$  jne. Seega ka  $c_0 = c_m < 0$ . Saadud vastuolu näitab, et jadas  $c_k$  ei ole negatiivseid liikmeid.

Et  $c_0 = c_{2n} = 0$  ja  $c_1 \geq (c_0 + c_2)/2$ ,  $c_3 \geq (c_2 + c_4)/2$ ,  $\dots$ ,  $c_{2n-1} \geq (c_{2n} + c_{2n-2})/2$ , siis  $c_1 + c_3 + \dots + c_{2n-1} \geq (c_0 + c_{2n})/2 + c_2 + c_4 + \dots + c_{2n-2} = c_0 + c_2 + \dots + c_{2n} \geq \frac{n}{n+1}(c_0 + c_2 + \dots + c_{2n})$ . Võrdus kehtib siis, kui  $c_0 + c_2 + \dots + c_{2n-2} + c_{2n} = \frac{n}{n-1}(c_0 + c_2 + \dots + c_{2n})$ , millest

$$c_0 = c_2 = \dots = c_{2n-2} = c_{2n} = 0.$$

Et  $c_{2k} \geq (c_{2k-1} + c_{2k+1})/2$ , kui  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , siis ka

$$c_1 = c_3 = \dots = c_{2n-1} = 0$$

Järelikult võrduse kehtimiseks on tarvilik ja piisav, et jada  $s_k$  oleks aritmeetiline progressioon.

**78.** Oletame, et murru  $1/p$  periood  $Q$  on  $n$ -kohaline, siis

$$\frac{1}{p} = \frac{A}{10^s} + \frac{Q}{10^{s+n}} + \frac{Q}{10^{s+2n}} + \frac{Q}{10^{s+3n}} + \dots, \quad (8)$$

kus  $0 \leq s < n$  ning  $A \geq 0$ . Kirjutame seose (8) kujul

$$\frac{10^s}{p} = A + \frac{Q \cdot 10^n}{10^n - 1} \quad \text{ehk} \quad 10^s(10^n - 1) = [(10^n - 1)A + 10^n Q]p,$$

saame, et  $10^n - 1$  jagub arvuga  $p$ . Lihtne on näha, et ka arvud  $10^{2n} - 1$ ,  $10^{3n} - 1$ , ... jaguvad arvuga  $p$ . Et  $10^n - 1$  jagub arvuga  $p$ , siis on perioodi pikkuseks võetud minimaalne  $n$ .

a) Vastuse selles punktis püstitatud ülesandele saame järgmisest punktist, võttes seal  $k = 1$  ja  $m = n$ .

b) Olgu  $n = mk$ . Jaotame perioodi  $Q$   $m$  „tükiks“. Seega

$$Q = Q_{m-1} + Q_{m-2} \cdot 10^k + Q_{m-3} \cdot 10^{2k} + \dots + Q_0 \cdot 10^{(m-1)k},$$

kus  $Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}$  on  $k$ -kohalised naturaalarvud. Siis

$$\begin{aligned} \frac{10^s}{p} - A &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_i}{10^{ki}}, \\ 10^k \left( \frac{10^s}{p} - A \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^k Q_i}{10^{ki}}, \\ 10^{2k} \left( \frac{10^s}{p} - A \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{2k} Q_i}{10^{ki}}, \\ &\dots, \end{aligned}$$

kus  $Q_i = Q_{i+m}$ , kui  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ . Liites saadud võrdused (neid on  $m$  tükki), saame et

$$\begin{aligned} &10^s(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})/p - A(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k}) = \\ &= \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = \sum_{t \geq i} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} + \sum_{t < i} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = \\ &= N + \sum_{t < i} \frac{10^{tk} Q_i}{10^{ki}} = \\ &= N + (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{10^{ks}}, \end{aligned} \quad (9)$$

kus  $N$  on naturaalarv.

Et  $10^n - 1 = 10^{mk} - 1 = (10^k - 1) \cdot (1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})$  jagub arvuga  $p$ , siis järelikult  $(1 + 10^k + \dots + 10^{(m-1)k})$  jagub arvuga  $p$ . Seega on võrduse (9) vasakul pool naturaalarv. Järelikult on naturaalarv ka

$$B = (Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{m-1}) \sum_{B=1}^{\infty} \frac{1}{10^{kB}}.$$

Et  $B = (Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \frac{1}{10^k - 1}$ , siis

$$(Q_0 + Q_1 + \dots + Q_{m-1}) \div (10^k - 1).$$

**79.** Saab küll. Et ruutvõrrandi diskriminant

$$D = (a - b)^2 - 2(a + b) + 1$$

oleks negatiivne, piisab, kui näiteks võtta  $a - b = 1978$  ja  $a + b = 1978^2$ , kust saame, et  $a = 989 \cdot 1979$  ja  $b = 989 \cdot 1977$ .

**80.** Antud võrratuse õiguse tõestamiseks piisab tõestada sellega ekvivalentne võrratus  $x \geq e \ln x$ , mis on saadud algvõrratuse logaritmimeisel. Kui  $x \in ]0, 1]$ , siis on selle võrratuse kehtivus ilmne. Kui  $x > 1$ , siis on vaja tõestada, et  $\frac{x}{\ln x} \geq e$ . Uurime funktsiooni

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

piirkonnas  $]1, \infty]$ . Et  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ , siis vahemikus  $]1, e[$   $f'(x) < 0$  ning vahemikus  $]e, \infty[$   $f'(x) > 0$ . Järelikult esimeses vahemikus  $f(x)$  kahaneb ja teises kasvab. Seega on punktis  $x = e$  funktsioonil  $f(x)$  miinimum, s.t. et

$$\frac{x}{\ln x} \geq \frac{e}{\ln e} = e, \quad \text{kui } x > 1.$$

**81.** Maksimaalne lahendite arv on 3. Selle näitamiseks tõestame algul ühe lemma.

**Lemma.** Kui diferentseeruv funktsioon  $f(x)$  omab vahemikus  $]a, b[$  pidevat tuletist ja  $f(a) = f(b) = 0$ , siis sellel leidub punkt  $c$  nii, et  $a < c < b$  ja  $f'(c) = 0$ .

*Tõestus.* Oletame vastuväiteliselt, et  $f'(x) \neq 0$ , kui  $a < x < b$ . Üldistust kitsendamata võib eeldada, et  $f'(x) > 0$ , kui  $a < x < b$ . Valime lõigul  $[a, b]$  osalõigu  $[a_1, b_1]$ , kus  $a < a_1 < b_1 < b$ . Et  $f'(x)$  on pidev funktsioon, siis lõigul  $[a_1, b_1]$  on funktsioonil  $f'(x)$  minimaalne väärtus  $m > 0$ . Seega

$$0 = f(a) - f(b) = \int_a^b f'(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} f'(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} m dx = (b_1 - a_1)m > 0.$$

Saadud vastuolu näitab, et peab leiduma selline reaalarv  $c$ , et  $a < c < b$  ja  $f'(c) = 0$ , m.o.t.t.  $\square$

Olgu  $f(x) = e^x - ax^2 - bx - c$  ning  $n$  võrrandi  $f(x) = 0$  lahendite arv. Ülaltõestatud lemma põhjal on võrrandil  $f'(x) = 0$  vähemalt  $n - 1$  lahendit ja võrrandil  $f''(x) = 0$  vähemalt  $n - 2$  lahendit. Et võrrandil  $e^x - 2a = 0$  on maksimaalselt üks lahend, siis  $n - 2 \leq 1$ , kust  $n \leq 3$ .

Kui võtta  $a = 3$ ,  $b = 0$  ja  $c = 0$ , siis on võrrandil  $e^x - 3x^2 = 0$  parajasti kolm lahendit.

**82.** Et  $(x_n - c)^2 \geq 0$ , siis jada  $x_n$  on mittekahanev, s.t. et  $x_{n+1} \geq x_n$ . Kui oletada, et jada  $x_n$  koondub suuruseks  $a$ , siis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - c)^2,$$

millest saame, et  $a = a + (a - c)^2$ . Järelikult

$$a = c \quad \text{ning} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq c.$$

Et  $x_2 = c^2$ , siis peab kehtima võrratus  $c^2 \leq c$  ehk  $0 \leq c \leq 1$ . Näitame, et saadud võrratus on jada  $x_n$  koonduvuseks piisav, s.t. et kui  $0 \leq c \leq 1$ , siis jada  $x_n$  koondub. Tõepoolest, et jada  $x_n$  on monotoonne, siis tema koonduvuse tõestamiseks piisab näidata, et ta on tõkestatud.

Näitame matemaatilise induktsiooni meetodiga, et iga  $n$  korral  $x_n \leq c$ . Kui  $n = 1$ , siis väide kehtib. Oletame, et ta kehtib ka  $n = m$  korral, s.t.  $x_m \leq c$ . Siis

$$x_{m+1} - c = x_m - c + (x_m - c)^2 = (x_m - c)(1 - c + x_m) \leq 0,$$

sest et  $1 - c + x_m > 0$  ja  $x_m - c \leq 0$ . Järelikult ka  $x_{m+1} \leq c$ . Seega jada  $x_n$  koondub parjasti siis, kui  $0 \leq c \leq 1$ .

**83.** Jada  $b_n$  koonduvuse tõestamiseks piisab näidata, et ta on monotoonselt kasvav ja tõkestatud. Tõepoolest

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \left( b_n + \sqrt{b_n^2 + \frac{1}{4^n}} \right) > \frac{1}{2} (b_n + b_n) = b_n.$$

Järelikult on jada  $b_n$  monotoonselt kasvav. Et

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{2} (\sqrt{b_n^2 + 1/4^n} - b_n) = \frac{1}{2 \cdot 4^n (\sqrt{b_n^2 + 1/4^n} + b_n)} < \\ &< \frac{1}{2^{2n+1} (b_n + b_n)} < \frac{1}{2^{2n+2} b_1} = \frac{1}{2^{2n+1}}, \end{aligned}$$

siis

$$b_n - b_{n-1} < \frac{1}{2^{2n-1}}, \quad b_{n-1} - b_{n-2} < \frac{1}{2^{2n-3}}, \quad \dots, \quad b_{n+1} - b_1 < \frac{1}{8}$$

Liites saadud võrratused, saame et

$$b_{n+1} - b_1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{6} \quad \text{ehk} \quad b_{n+1} < \frac{1}{6} + b_1.$$

Järelikult on jada  $b_n$  tõkestatud.

**84.** Valime koordinaatteljestiku nii, et sfääri keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis. Peegeldame värvitud punktid  $yz$ -tasandi suhtes ja värvi-me „mustade“ punktide peegeldamisel saadud punktid ka mustaks. Siis on sfäärilist värvitud mitte rohkem kui 24%. Pärast seda peegeldame värvitud punktid  $xz$ -tasandi suhtes ja toimime analoogiliselt. Sellisel juhul on sfäärilist värvitud mitte rohkem kui 48%. Pärast peegeldamist  $xy$ -tasandi suhtes saame, et sfäärilist on värvitud mitte rohkem kui 96%. Valides nüüd punkti sfääri värvimata osal ja peegeldades seda  $xy$ -,  $yz$ - ja  $xz$ -tasandi suhtes, saame 8 punkti, mis asuvad mingi risttahuka tippudes.

**85.** Kõikides  $2 \times 2$  ruutudes (kokku on neid 49) arvude summa ei ületa arvu  $64 + 63 + 62 + 61 = 250$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $2 \times 2$  ruute, milles arvude summa on suurem kui 100, ei ole rohkem kui kaks. Sellisel juhul kõikides  $2 \times 2$  ruutudes olevate arvude summa peab olema väiksem kui  $2 \cdot 250 + 47 \cdot 100 = 5200$ . Teiselt poolt on ilmne, et malelaua nurgaväljadel olevad arvud on selles summas ühekordselt, ääreväljadel (v.a nurgaväljadel) olevad arvud kahekordselt ja siseväljadel olevad arvud neljakordselt. Seega pole kõikides  $2 \times 2$  ruutudes olevate arvude summa väiksem kui  $64 + 63 + 63 + 62 + 61 + 2(60 + 59 + \dots + 37) + 4(36 + 35 + \dots + 1) = 5242$ . Saadud vastuolust järeldub, et saab leida vähemalt kolm  $2 \times 2$  ruutu, milledes olevate arvude summa on suurem kui 100.

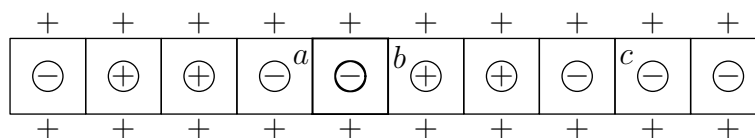
**86.** Vektorid  $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$  ja  $\vec{y} = (y_1; y_2; y_3)$  asuvad tasandil  $x + y + z = 0$  ning on omavahel risti, sest  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0$ . Et selle tasandi normaalvektor  $\vec{n} = (1, 1, 1)$  on risti vektoritega  $\vec{x}$  ja  $\vec{y}$ , siis moodustavad vektorid  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{n}$  ristreeperi. Järelikult iga vektori  $\vec{a}$  korral

$$\cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{x}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{y}}) + \cos^2(\widehat{\vec{a}, \vec{z}}) = 1 \quad (1)$$

Kui  $\vec{a} = (1; 0; 0)$ , siis seosest (1) saame, et

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \frac{y_1^2}{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \frac{1}{3} = 1.$$

**87.** Vaatleme kõikvõimalike kolmekohaliste arvude korrutisi  $100 \cdot 100, 100 \cdot 101, \dots, 998 \cdot 999, 999 \cdot 999$ . Selliseid korrutisi on  $C_{900}^2$ . Neid 6-kohalisi arve, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, on vähemalt  $900000 - C_{900}^2 = 459450 > \frac{1}{2} \cdot 900000$ . Seega on selliseid 6-kohalisi arve, mida ei saa esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena, rohkem kui neid 6-kohalisi arve, mida saab esitada kahe kolmekohalise arvu korrutisena. **88.** Kirjutame kõikide ruutude horisontaalsetele külgedele punase  $+1$ . Vaatleme nüüd suvalist mustade arvude horisontaalset rida. Fikseerime selles reas ruudu. Kui selles ruudus on  $+1$ , siis kirjutame selle ruudu vertikaalsetele külgedele punased  $+1$ , kui ruudus on  $-1$ , siis kirjutame vasakule küljele  $+1$  ja paremale  $-1$  (või vastupidi). Tähistame selle ruudu vertikaalsed küljed tähtedega  $a$  ja  $b$ . Antud rea ülejäänud vertikaalsete külgedega toimime järgmiselt. Olgu fikseeritud ruudus  $+1$ . Võtame vaadeldavas reas suvalise vertikaalse külje  $c$ . Kui  $c$  asub fikseeritud ruudust paremal, siis kirjutame küljele  $c$  arvu, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede  $a$  ja  $c$  vahel. Kui  $c$  asub fikseeritud ruudust vasakul, siis kirjutame küljele  $c$  arvu, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede  $c$  ja  $b$  vahel (vt. joon. 41). Juhul kui



Joonis 41

fikseeritud ruudus on  $-1$  ja küljele  $b$  on kirjutatud  $-1$ , siis tuleb küljele  $c$  (eeldusel, et ta asub fikseeritud ruudust vasakul) kirjutada arv, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede  $a$  ja  $c$  vahel. Kui  $c$  asub fikseeritud ruudust paremal, siis tuleb küljele  $c$  kirjutada arv, mis võrdub kõikide mustade arvude korrutisega külgede  $a$  ja  $c$  vahel. Joonisel 41 näidatud juhul tuleks küljele  $c$  kirjutada punane  $+1$ , sest et  $(+1)(-1)(+1)(-1) = +1$ .

Analoogiliselt toimime ka ülejäänud mustade arvude ridadega. Teostatud konstruktsiooni põhjal ilmneb, et ülesande väide kehtib kõikide riskülikute  $n \times 1$  kontuuride korral. Lihtne on ka veenduda selles, et kui kahel kujundil on ühine rajajoone osa, kuid ei ole ühiseid sisepunkte, ning ülesande väide kehtib mõlema kujundi kohta, siis kehtib see ka antud kujundite ühendi kohta. Siit järeldub, et väide kehtib kõikide riskülikute  $n \times m$  korral. Et antud eeldustel saab suvalist tasapinnalist kujundit vaadelda teatavate riskülikute ühendina, siis on ülesande väide tõestatud suvalise kinnise kontuuri korral.

**89.** Ei saa. Vaatleme kahte juhtu.

1° Pärast eelviimast käiku on asendamata üks paarisastme kordaja. seega

pärast viimast käiku saame võrduse

$$xQ(x) + 1 = -ax^{2m}, \quad (1)$$

kus  $xQ(x) + 1$  on hulkliikme  $P(x)$  see osa, kuhu kordajad kirjutati sisse esimese 8 käigu jooksul ja arv  $a$  kirjutati mängija  $A$  poolt viimasel käigul  $x^{2m}$  ette.

Osutub, et kui valida arv  $a$  küllalt suur, siis on võrrandil (1) vähemalt üks mittereaalne lahend. Olgu  $T(x) = xQ(x) + 1$ . Siis  $T(0) = 1$  ja  $T(x)$  pidevuse tõttu leidub selline  $\varepsilon > 0$ , et lõigul  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  funktsioon  $T(x) > 0$ . Olgu  $M = \max |xQ(x) + 1|$ . Tähistame sümboliga  $x_a$  võrrandi (1) sellise lahendi, mille korral  $|x_a| \leq 1$ . (Selline  $x_a$  leidub iga  $a$  korral, sest võrrandi (1) kõikide lahendite korrutis on 1.) Valime  $a = M/\varepsilon^{2m}$ . Sellisel juhul

$$|x_a^{2m}| = \left| \frac{x_a Q(x_a) + 1}{-a} \right| \text{ ning } |x_a|^{2m} = \frac{|x_a Q(x_a) + 1|}{|a|} \leq \frac{M}{a} = \varepsilon^{2m}.$$

Seega  $|x_a| \leq \varepsilon$ . Et funktsioon  $T(x)$  on lõigul  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  positiivne, siis  $x_a Q(x_a) + 1 > 0$  ning seega

$$x_a^{2m} = \frac{x_a Q(x_a) + 1}{-a} < 0.$$

Saadud võrratus näitab, et võrrandi (1) lahend  $x_a$  ei saa olla reaalarv.

2° Vaatleme juhtu, kus viimase käiguna asendab  $A$  paarituastme kordaja. Sellisel juhul saab  $A$  mängida nii, et pärast 9. käiku on hulkliige kujul

$$x^{10} + ax^8 + bx^6 + cx^4 + dx^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

( $A$  kirjutab kõikide paaritute astmete ette nullid. Kui  $B$  peaks püüdma mängijat  $A$  segada selle taktika läbiviimisel, siis taandub mäng juhule 1<sup>0</sup>. Tõepoolest, kui  $B$  kirjutab kordaja mingi paaritu astme ette, siis  $A$  jätkab kordajate kirjutamist paaritute astmete ette ja viimaseks käiguks jääb mängijale  $A$  kindlasti paarisastme kordaja kirjutamine.) Kui teha võrrandis (2) muutuja vahetus  $x^2 = 0$ , siis uue võrrandi lahendite  $u_1, u_2, u_3, u_4$  ja  $u_5$  korral kehtib Vieta teoreemi põhjal seos

$$u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 = -1 \quad (10)$$

Järelikult peab mingi  $i$  korral  $u_i < 0$ . See aga tähendab, et mingi lahendi  $x_0$  korral  $x_0^2 = u_i < 0$ . Järelikult ei saa  $x_0$  olla reaalne lahend.

**90.** Olgu  $N = 4n - 1$  ja arvu  $N$  algarvudeks lahutus

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}.$$

Et  $N = 4n - 1$ , siis peab antud lahutuses esinema algarv kujul  $4s - 1$ , mille astendaja on paaritu. Üldsust kitsendamata võib eeldada, et  $p_1 = 4s - 1$  ja  $a_1 = 2m + 1$ . On ilmne, et arvu  $N$  iga tegur on kujul  $p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k}$ , kus  $i_1 \leq a_1$ ,  $i_2 \leq a_2, \dots, i_k \leq a_k$ . „Täiusliku“ arvu definitsiooni kohaselt

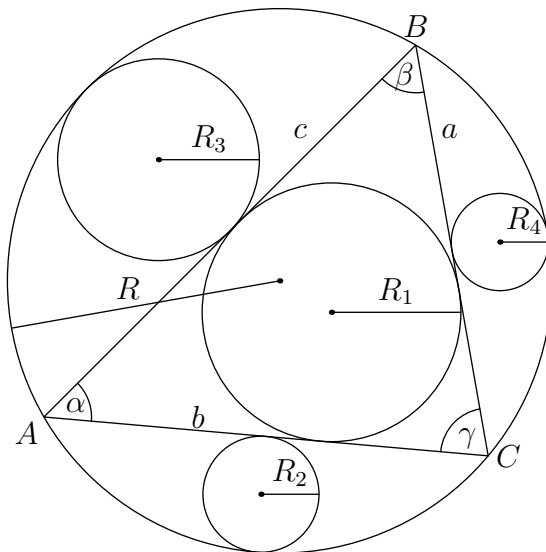
$$N + N = \sum p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_k^{i_k},$$

kus summeeritakse üle kõikvõimalike astendajate väärtuste, mille korral  $i_1 \leq a_1, i_2 \leq a_2, \dots, i_k \leq a_k$ . Järelikult  $2N = (1 + p_1 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{a_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{a_k})$ . Viimase võrduse vasak pool  $2 \cdot (4n - 1) = 8n - 2$  ei jagu neljaga. Kuid võrduse paremal pool on tegur

$$1 + p_1 + \dots + p_1^{2m+1} = (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \dots + p_1^{2m}) = 4s(1 + p_1^2 + \dots + p_1^{2m}),$$

mis jagub neljaga. Saadud vastuolu näitab, et arv kujul  $4n - 1$  ei saa olla „täiuslik“.

**91.** Vaatleme kolmnurka  $ABC$ . Olgu kolmnurga ümberringjoone raadius  $R$ , siseringjoone raadius  $R_1$  ja segmentidesse joonestatud ringjoonte raadiused vastavalt  $R_2, R_3$  ja  $R_4$ . Üldsust kitsendamata võib eeldada, et raadiused



Joonis 42

$R_2, R_3$  ja  $R_4$  on maksimaalse väärtusega (vt. joon. 42), s.t.

$$2R_2 = R - R \cos \beta,$$

$$2R_3 = R - R \cos \gamma,$$

$$2R_4 = R - R \cos \alpha.$$

Kolmnurga pindala  $S = \frac{abc}{4R}$ , ja kuna

$$a = 2R \sin \alpha,$$

$$b = 2R \sin \beta,$$

$$c = 2R \sin \gamma$$

siis  $S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ . Teisest küljest,

$$S = \frac{1}{2}R_1(a + b + c) \text{ ehk } R_1 = \frac{2R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}.$$

Seega

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{R}{2} \left[ 3 - (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + \frac{4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} \right]$$

Kuid  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) =$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin(\alpha + \beta) =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

Analoogiliselt saab näidata, et

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Järelikult

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = \frac{R}{2} \left( 2 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right).$$

Tähistame  $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = u$ . Et

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} &= \frac{1}{2} (3 - \cos \alpha - \cos \beta - \cos \gamma) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 - 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) = 1 - 2u \end{aligned}$$

ning alati

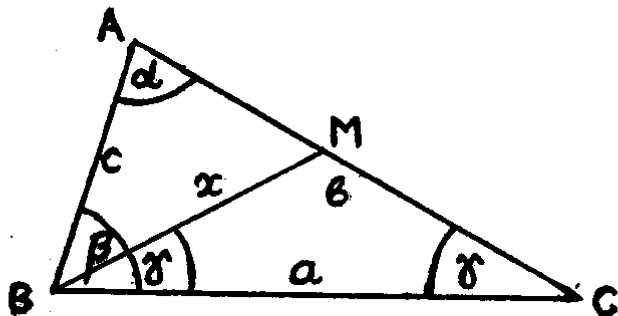
$$\frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2}} = (\sqrt[3]{u})^2,$$

siis peab  $u$  kõikvõimalike väärtuste korral kehtima võrratus  $\frac{1-2u}{3} \geq \sqrt[3]{u^2}$  ehk  $(2\sqrt[3]{u} - 1)(\sqrt[3]{u} + 1)^2 \leq 0$ . Siit saame, et  $\sqrt[3]{u} \leq \frac{1}{2}$ . Seega  $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = R(1 + \frac{1}{4}) = 5$ .

**92.** Võtame näiteks  $z = x + 1$ . Sel juhul  $(x + 1)! = y!x!$  ehk  $x = y! - 1$ . Tähistades  $y = n$  ( $n$  naturaalarvuline parameeter), saame järgmise lahendite hulga:  $x = n! - 1$ ,  $y = n$  ja  $z = n!$ , kus  $n = 3, 4, 5, \dots$

93. Olgu kolmnurga tipud A, B ja C ja kolmnurga küljed a, b ja c. Et  $\alpha = 2\beta - 2\gamma$ , siis

$$\beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha. \quad (1)$$



Joonis 43.

Tõmbame tipust B lõigu BM nii, et  $\widehat{MBC} = \gamma$  (vt. joon. 43). Siis  $BM = MC$  ja seose (1) põhjal  $\widehat{ABM} = \frac{1}{2}\alpha$ . Tähistame  $BM = x$ . Siis kolmnurgast ABM siinusteoreemi põhjal

$$\frac{c}{\sin(\pi - \frac{3\alpha}{2})} = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{b-x}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \quad (2)$$

Siit  $x = c \sin \alpha / \sin \frac{3\alpha}{2}$ . Asendades saadud x väärtuse avaldistesse  $\frac{b-x}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  ja  $\frac{x}{\sin \alpha}$ , saame seosest (2)

$$\begin{aligned} \frac{c}{b} &= \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{(3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}) \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} (1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{1 + 2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} - 1. \text{ Viimase põhjal } (\frac{c}{b} + 1)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 2 + 2 \cos \alpha = \\ &= 2 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}. \text{ Siit} \end{aligned}$$

$$(b+c)^2(b-c) = a^2b. \quad (3)$$

Seose (3) piisavus ilmneb sellest, et seos (2) on saadav seosest (3), kui kirjutada antud tõestus lihtsalt vastupidises järjekorras. Järelikult seos (3) on tarvilik ja piisav selleks, et  $\alpha = 2\beta - 2\gamma$ .

94. Olgu otsitav hulkliige  $P_N(x)$ . Ülesande tingimuste kohaselt  $P_N(0) = 0$  ning hulkliikmel  $Q_N(x) = P_N(x) - N$  on N erinevat nullkohta  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Järelikult

$$Q_N(x) = P_N(x) - N = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N) Q'_N(x), \quad (1)$$

kus  $Q'_N(x)$  on teatav hulkliige. Näitame, et hulkliige  $Q'_N(x)$  on samuti täisarvuliste kordajatega. Selleks piisab näidata, et kui  $A(x)$  on täisarvuliste kordajatega hulkliige ja  $x_0$  on vörrandi  $A(x) = 0$  täisarvuline lahend, siis  $A(x)/(x - x_0)$  on täisarvuliste kordajatega hulkliige. Töepoolest, olgu

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad \text{siis} \quad \frac{A(x)}{x - x_0} = \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \frac{x^k - x_0^k}{x - x_0} = \sum_{k=1}^m a_k \sum_{i=0}^{k-1} x^i x_0^{k-1-i} = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \sum_{k=i+1}^m a_k x_0^{k-1-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i, \quad \text{kus} \quad b_i = \sum_{k=i+1}^m a_k x_0^{k-1-i}. \end{aligned}$$

Et  $x_0$  on täisarv, siis ka  $b_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ ) on täisarv. Järelikult  $Q'_N(x)$  on täisarvuliste kordajatega hulkliige. Võtame võrduses (1)  $x = 0$ . Siis

$$Q_N(0) = P_N(0) - N = (-1)^N x_1 x_2 \dots x_N Q'_N(0).$$

Et  $P_N(0) = 0$  ja  $Q'_N(0)$  on täisarv, siis on arvul  $N$  vähemalt  $N$  erinevat täisarvulist jagajat. Arvude  $x_1, x_2, \dots, x_N$  hulgas leidub mitte rohkem kui kaks sellist arvu  $x_p$  ja  $x_q$ , et  $|x_p| = |x_q| = 1$ . Kõikide ülejäänud indeksi  $i$  väärtuste korral  $|x_i| \geq 2$ . Järelikult

$$N = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_N| \cdot |Q'_N(0)| \geq |x_p| \cdot |x_q| \cdot 2^{N-2} = 2^{N-2}.$$

Seega saab hulkliige  $P_N(x)$  eksisteerida vaid selliste  $N$  väärtuste korral, kus  $N \geq 2^{N-2}$ . On ilmne, et saadud võrratus kehtib ainult  $N = 1, 2, 3, 4$ , korral. Nende  $N$  väärtuste korral on lihtne näidata, et sellised hulkliikmed leiduvad. Võttes  $Q(x) = \pm 1$ , saame

$$P_1(x) - 1 = x - 1,$$

$$P_2(x) - 2 = (x + 1)(x - 2),$$

$$P_3(x) - 3 = (x - 1)(x + 1)(x + 3),$$

$$P_4(x) - 4 = -(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2),$$

kust  $P_1(x) = x$ ,  $P_2(x) = x^2 - x$ ,  $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - x$  ja  $P_4(x) = 5x^2 - x^4$ .

Kui  $N \geq 5$ , siis  $N < 2^{N-2}$  ja järelikult otsitavaid hulklislikmeid ei leidu.

95. Tõestame algul ühe samasuse kombinatoorika valdkonnast. Vaatleme vahet

$$\begin{aligned} (C_n^k)^{-1} - (C_{n+1}^{k+1})^{-1} &= \frac{k!(n-k)!}{n!} - \frac{(n-k)!(k+1)!}{(n+1)!} = \\ &= \frac{k!(n-k)!(n-k)}{(n+1)!} = \frac{k!(n-k+1)!}{(n+1)!} - \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \\ &= (C_{n+1}^k)^{-1} - \frac{1}{n+1} (C_n^k)^{-1} \quad \text{ehk} \\ \frac{1}{C_{n+1}^k} - \frac{1}{n+1} \frac{1}{C_n^k} &= \frac{1}{C_n^k} - \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}}. \end{aligned} \quad (1)$$

a) Korrutame võrduse (1) mõlemad pooli suurusega  $(-1)^k$  ja summeerime siis saadud võrdused  $k$  väärtuste  $1, 2, \dots, n$  korral. Saame

$$U_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{C_{n+1}^{n+1}} - \frac{1}{n+1} U_n = U_n + U_{n+1} + \frac{1}{C_{n+1}^1} \quad \text{ehk}$$

$$U_n = \frac{(-1)^n (n+1) - 1}{n+2}.$$

Saadud seosest näeme, et kui  $n$  on paaritu arv, siis  $U_n = -1$ , kui  $n$  on paarisarv, siis  $U_n = \frac{n}{n+2}$ .

b) Summeerime võrduse (1) mõlemad pooled  $k$  väärtuste  $1, 2, \dots, n$  korral. Saame

$$(S_{n+1} - 1) - \frac{1}{n+1} S_n = S_n - (S_{n+1} - \frac{1}{n+1}) \quad \text{ehk}$$

$$S_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} (S_n + 1). \quad (2)$$

Edasi tõestame matemaatilise induktsiooni meetodiga. On ilmne, et punkti b väide kehtib, kui  $n = 1$ . Oletame, et ta kehtib  $n = m$  korral, s.t.

$$S_m = \frac{m+1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k}.$$

Näitame, et tõestatav väide kehtib ka  $n = m + 1$  korral. Lähtume võrdusest (2):

$$\begin{aligned} S_{m+1} &= \frac{m+2}{2(m+1)} (1 + S_m) = \frac{m+2}{2(m+1)} \left( 1 + \frac{m+1}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} \right) = \\ &= \frac{m+2}{2(m+1)} + \frac{m+2}{2^{m+2}} \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} = \frac{m+2}{2^{m+2}} \left( \frac{2^{m+1}}{m+1} + \sum_{k=1}^m \frac{2^k}{k} \right) = \\ &= \frac{m+2}{2^{m+1}} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{2^k}{k}. \end{aligned}$$

Seega kehtib väide ka  $n = m + 1$  korral. Järelikult

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

c) Vaatleme suhet  $C_n^k : C_n^{k-1} = \frac{n-k+1}{k}$ . See suhe on suurem ühest, kui  $k < \frac{1}{2}(n+1)$ . Järelikult on jada  $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k$  monotoonselt kasvav, kui  $k < \frac{1}{2}(n+1)$  ning seega  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \leq 1 + 2 \sum_{k=1}^s \frac{1}{C_n^k}$ , kus  $s = \left[ \frac{1}{2}(n+1) \right]$ . Järelikult

$$\begin{aligned} S_n &\leq 1 + \frac{2}{n} + 2 \sum_{k=2}^s \frac{1}{C_n^k} < 1 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^s \frac{1}{C_n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{4(s-1)}{n(n-1)} < \\ &< 1 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n} = 1 + \frac{6}{n}. \end{aligned}$$

Teiselt poolt  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_n^k} \geq \frac{1}{C_n^n} = 1$ . Seega  $1 \leq S_n < 1 + \frac{6}{n}$ .

Järelikult  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ .

# S I S U K O R D

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| E e s s õ n a . . . . .                             | 3  |
| Ü l e s a n d e d . . . . .                         | 4  |
| X üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad   | 4  |
| 8. klass . . . . .                                  | 4  |
| 9. klass . . . . .                                  | 6  |
| 10. klass . . . . .                                 | 8  |
| XI üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad  | 10 |
| 8. klass . . . . .                                  | 10 |
| 9. klass . . . . .                                  | 12 |
| 10. klass . . . . .                                 | 13 |
| XII üleliiduline kooliõpilaste matemaatikaolümpiaad | 16 |
| 8. klass . . . . .                                  | 16 |
| 9. klass . . . . .                                  | 17 |
| 10. klass . . . . .                                 | 18 |
| Ülesandeid žürii materjalidest . . . . .            | 20 |
| L a h e n d u s e d . . . . .                       | 26 |



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ ЭСТОНСКОЙ ССР. В.Алтлейс, Т.Тяхт.

Задачи всесоюзных олимпиад школьников по математике. На эстонском языке.

Toimetaja E.Mitt. Trükkida antud 05.02.79 Paber 60x84/16.

Trükipoognaid 7,0. Arvestuspoognaid 5,66. Trükiarv 3000.

Besti NSV Haridusministeerium, Tallinn, Tõnismägi 11. VOT-1

rotaprint, Tallinn, Sakala 23. Tellimise nr. 25. Hind 15 kop.



Hind 15 kop.