

# Mitme muutuja matemaatiline analüüs

LTMS.00.023

MÄRT PÕLDVERE

Joonised programmeeris: ERKI KÜLAOTS

3. jaanuar 2026. a.



# Sisukord

|           |                                                                                  |          |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I.</b> | <b>Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus</b>                          | <b>1</b> |
| § 1.      | Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$                                                 | 1        |
| 1.1.      | $m$ -mõõtmelise eukleidilise ruumi mõiste                                        | 1        |
| 1.2.      | Minkowski võrratus                                                               | 3        |
| 1.3.      | Kerad ja risttahukad. Punkti ümbrused                                            | 6        |
| 1.4.      | Lahtised ja kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$                                | 9        |
| 1.5.      | Hulga tõkestatus ruumis $\mathbb{R}^m$                                           | 12       |
| 1.6.      | Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$                                              | 13       |
| 1.6.1.    | Funktsiooni $T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus $T \subset \mathbb{R}$ , pidevus. | 13       |
| 1.6.2.    | Pideva joone mõiste ruumis $\mathbb{R}^m$                                        | 14       |
| 1.6.3.    | Joone esitusviise                                                                | 15       |
| 1.6.4.    | Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$                                              | 16       |
| 1.7.      | Täiendavaid ülesandeid                                                           | 16       |
| § 2.      | Jadad ruumis $\mathbb{R}^m$                                                      | 19       |
| 2.1.      | Jada koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$                                             | 19       |
| 2.2.      | Sulundi punkti ja kinnisuse kirjeldus jadade keeles                              | 20       |
| 2.3.      | Hulga kuhjumispunkt.                                                             | 21       |
| 2.4.      | Bolzano–Weierstrassi teoreem                                                     | 22       |
| 2.5.      | Cauchy kriteerium jada koonduvuseks.                                             | 22       |
| 2.6.      | Täiendavaid ülesandeid                                                           | 23       |
| § 3.      | Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus                                 | 24       |
| 3.1.      | Mitme muutuja funktsiooni mõiste                                                 | 24       |
| 3.2.      | Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus                                            | 24       |
| 3.3.      | Funktsiooni piirväärtuse omadusi.                                                | 26       |
| 3.4.      | Mitme muutuja funktsiooni pidevus.                                               | 30       |
| 3.5.      | Piirväärtus protsessis $\ P\  \rightarrow \infty$                                | 31       |
| 3.6.      | Piirväärtus mööda pidevat joont                                                  | 32       |
| 3.7.      | Korduvad piirväärtused                                                           | 33       |
| § 4.      | Pidevate mitme muutuja funktsioonide põhiomadused                                | 36       |
| 4.1.      | Pideva funktsiooni märgi säilivus                                                | 36       |
| 4.2.      | Aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega                                   | 36       |
| 4.3.      | Pidevate funktsioonide liitfunktsiooni pidevus                                   | 37       |
| 4.4.      | Mitme muutuja elementaarfunktsioonid                                             | 38       |

|                                                                                                                                                                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.5. Sidusas hulgas pideva funktsiooni vahepealsed väärtused . . .                                                                                                                                                        | 38        |
| 4.6. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni tõkestatus . . .                                                                                                                                                       | 39        |
| 4.7. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni rajad . . . . .                                                                                                                                                        | 39        |
| 4.8. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlane<br>pidevus . . . . .                                                                                                                                           | 41        |
| <b>II. Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus</b>                                                                                                                                                               | <b>43</b> |
| § 1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus . . . .                                                                                                                                                   | 43        |
| 1.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised . . . . .                                                                                                                                                                     | 43        |
| 1.2. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus . . . . .                                                                                                                                                                 | 45        |
| 1.3. Piisav tingimus mitme muutuja funktsiooni<br>diferentseeruvuseks . . . . .                                                                                                                                           | 52        |
| 1.4. Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse geomeetriline<br>tõlgendus (kahe muutuja funktsiooni graafiku<br>puutujatasand) . . . . .                                                                                 | 55        |
| 1.5. Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal . .                                                                                                                                                        | 58        |
| 1.6. Mitme muutuja liitfunktsioonide diferentseerimine . . . . .                                                                                                                                                          | 59        |
| § 2. Tuletis etteantud suunas. Gradient . . . . .                                                                                                                                                                         | 65        |
| § 3. Kõrgemat järku osatuletised ja diferentsiaalid . . . . .                                                                                                                                                             | 70        |
| 3.1. Kõrgemat järku osatuletised . . . . .                                                                                                                                                                                | 70        |
| 3.2. Kõrgemat järku diferentseeruvus . . . . .                                                                                                                                                                            | 73        |
| 3.3. Piisavaid tingimusi segaosatuletiste sõltumatuseks<br>diferentseerimise järjekorrast . . . . .                                                                                                                       | 76        |
| 3.4. Kõrgemat järku diferentsiaalid . . . . .                                                                                                                                                                             | 79        |
| § 4. Tayloriga valem mitme muutuja funktsiooni jaoks . . . . .                                                                                                                                                            | 85        |
| 4.1. Tayloriga valem jääkliikmega Peano kujul . . . . .                                                                                                                                                                   | 85        |
| 4.2. Tayloriga valem jääkliikmega Lagrange'i kujul . . . . .                                                                                                                                                              | 87        |
| § 5. II peatüki lisa. Kujutuste $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvus . .                                                                                    | 90        |
| 5.1. Funktsiooni $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , piirväärtus . . . . .                                                                                                  | 91        |
| 5.2. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvuse mõiste .                                                                                             | 91        |
| 5.3. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvuse mõiste<br>kooskõla funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruvuse mõistega . . . | 93        |
| 5.4. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , ja teda määravate<br>funktsioonide $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruvuse vahekord . . . . .           | 93        |
| <b>III. Ilmutamata funktsioonide teooria</b>                                                                                                                                                                              | <b>97</b> |
| § 1. Jacobi maatriksid ja determinandid . . . . .                                                                                                                                                                         | 97        |
| § 2. Ühe võrrandiga antud ilmutamata funktsioonid . . . . .                                                                                                                                                               | 102       |
| 2.1. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni mõiste . . . . .                                                                                                                                                                  | 102       |
| 2.2. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja pidevus .                                                                                                                                                            | 104       |
| 2.3. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni diferentseeruvus . . .                                                                                                                                                            | 107       |
| 2.4. Mitme muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja<br>diferentseeruvus . . . . .                                                                                                                                      | 110       |

|                                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 3. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid . . . .                                                          | .114       |
| 3.1. Võrrandite süsteemiga määratud ilmutamata funktsioonid . . . .                                                          | .114       |
| 3.2. Kujutuse $\Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ , lokaalne pööratavus . . . .            | .119       |
| <b>IV. Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid</b>                                                                            | <b>127</b> |
| § 1. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid. . . . .                                                               | .127       |
| 1.1. Lokaalse ekstreemumi mõiste. Tarvilik tingimus lokaalse<br>ekstreemumi olemasoluks . . . . .                            | .127       |
| 1.2. Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks. . . .                                                             | .129       |
| 1.2.1. Ruutvormi mõiste ja määratus . . . . .                                                                                | .129       |
| 1.2.2. Üldine (s.t. $m$ muutuja funktsiooni) juht . . . . .                                                                  | .130       |
| 1.2.3. Kahe muutuja funktsiooni juht . . . . .                                                                               | .134       |
| § 2. Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid . . . . .                                                             | .136       |
| § 3. Tinglikud ekstreemumid . . . . .                                                                                        | .140       |
| 3.1. Tingliku lokaalse ekstreemumi mõiste . . . . .                                                                          | .140       |
| 3.2. Taandamine harilikule ekstreemumile . . . . .                                                                           | .141       |
| 3.3. Lagrange'i meetod . . . . .                                                                                             | .143       |
| <b>V. Kordsed integraalid</b>                                                                                                | <b>145</b> |
| § 1. Kahekordne integraal üle ristküliku . . . . .                                                                           | .145       |
| 1.1. Riemanni integraal . . . . .                                                                                            | .145       |
| 1.2. Darboux' summad. Darboux' integraal . . . . .                                                                           | .149       |
| 1.3. Darboux' summade piirväärtus. Darboux' lemma . . . . .                                                                  | .152       |
| 1.4. Riemanni ja Darboux' mõttes integreeruvuse samaväärsus.<br>Tarvilikke ja piisavaid tingimusi integreeruvuseks . . . . . | .155       |
| 1.5. Täiendavaid ülesandeid . . . . .                                                                                        | .158       |
| § 2. Kahekordne integraal üle mis tahes tõkestatud hulga . . . . .                                                           | .159       |
| 2.1. Integraali definitsioon. . . . .                                                                                        | .159       |
| 2.2. Hulga mõõtuvus Jordani mõttes . . . . .                                                                                 | .162       |
| 2.3. Tarvilik ja piisav tingimus hulga Jordani mõttes<br>mõõtuvuseks tema raja nullmõõdulisuse kaudu . . . . .               | .166       |
| 2.4. Mõõtuvas kinnises hulgas pideva kahe muutuja funktsiooni<br>integreeruvus . . . . .                                     | .169       |
| 2.5. Integraal üle nullmõõduga hulga . . . . .                                                                               | .170       |
| § 3. Kahekordse integraali omadusi. . . . .                                                                                  | .171       |
| 3.1. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud aritmeetiliste<br>tehetega . . . . .                                      | .172       |
| 3.2. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud järjestusega .                                                            | .176       |
| 3.3. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi. . . . .                                                               | .179       |
| 3.4. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade põhiomadused. . . . .                                                                  | .180       |
| 3.4.1. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade omadused, mis on<br>seotud hulgateoreetiliste tehetega . . . . .                     | .180       |
| 3.4.2. Jordani mõõdu invariantisus nihke suhtes . . . . .                                                                    | .182       |

|                                                                                                                                                   |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 4. Teine vaatenurk Jordani mõõdule ja kahekordsele integraalile . . .                                                                           | 183 |
| 4.1. Jordani mõõdu alternatiivne (samaväärne) definitsioon . . .                                                                                  | 183 |
| 4.2. Kahekordse integraali alternatiivne (samaväärne)<br>definitsioon . . . . .                                                                   | 187 |
| § 5. Kahekordse integraali arvutamine . . . . .                                                                                                   | 189 |
| 5.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku . . . . .                                                                                    | 189 |
| 5.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi . . . . .                                                                                 | 190 |
| 5.3. Muutujate vahetus kahekordses integraalis . . . . .                                                                                          | 192 |
| 5.3.1. Regulaarsed teisendused ruumis $\mathbb{R}^m$ . . . . .                                                                                    | 192 |
| 5.3.2. Üldine muutuja vahetuse valem kahekordses<br>integraalis . . . . .                                                                         | 193 |
| 5.3.3. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.4 tõestuseks I –<br>regulaarse teisenduse omadusi. . . . .                                                  | 197 |
| 5.3.4. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.4 tõestuseks II –<br>lineaarteisenduse $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ “skaleerimistegur” . . . . . | 203 |
| 5.3.5. Teoreemi 5.4 tõestus. . . . .                                                                                                              | 203 |
| 5.3.6. Üks teoreemi 5.4 tugevdus . . . . .                                                                                                        | 207 |
| 5.3.7. Üleminek polaarkoordinaatidele kahekordses<br>integraalis . . . . .                                                                        | 208 |
| 5.3.8. Üleminek elliptilistele polaarkoordinaatidele<br>kahekordses integraalis . . . . .                                                         | 211 |
| § 6. Kahekordse integraali rakendusi . . . . .                                                                                                    | 215 |
| 6.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine . . . . .                                                                                             | 215 |
| 6.2. Kõversilindri ruumala arvutamine . . . . .                                                                                                   | 216 |
| 6.3. Ruumilise pinnatüki pindala arvutamine. . . . .                                                                                              | 217 |
| § 7. Kolmekordne integraal . . . . .                                                                                                              | 219 |
| 7.1. Kolmekordse integraali mõiste . . . . .                                                                                                      | 219 |
| 7.2. Kolmekordse integraali arvutamine . . . . .                                                                                                  | 219 |
| 7.3. Muutujate vahetus kolmekordses integraalis . . . . .                                                                                         | 223 |
| 7.3.1. Üldine muutujate vahetuse valem kolmekordse<br>integraali jaoks . . . . .                                                                  | 223 |
| 7.3.2. Üks teoreemi 7.6 tugevdus . . . . .                                                                                                        | 223 |
| 7.3.3. Üleminek silindrilistele koordinaatidele kolmekordses<br>integraalis . . . . .                                                             | 224 |
| 7.3.4. Üleminek sfäärilistele koordinaatidele kolmekordses<br>integraalis . . . . .                                                               | 225 |
| 7.4. Kolmekordse integraali rakendusi . . . . .                                                                                                   | 227 |
| 7.4.1. Keha ruumala arvutamine . . . . .                                                                                                          | 227 |

## **VI. Joonintegraalid 229**

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| § 1. Joone kaare pikkus . . . . .       | 229 |
| 1.1. Tasandilise joone mõiste . . . . . | 229 |
| 1.2. Täiendavaid ülesandeid . . . . .   | 231 |

|                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1.3. Tasandilise kaare pikkuse mõiste . . . . .                                                               | 232 |
| 1.4. Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus . . . . .                                                            | 236 |
| 1.5. (Tasandilise) kaare pikkuse arvutamine . . . . .                                                         | 239 |
| 1.6. Tükiti siledad (tasandilised) kaared . . . . .                                                           | 244 |
| 1.7. Tõkestatud variatsiooniga funktsioonid. Tarvilik ja piisav<br>tingimus kaare sirgestuvuseks . . . . .    | 245 |
| 1.8. Sirgestuva tasandilise kaare jälg on nullmõõduga hulk . . . .                                            | 245 |
| § 2. Esimest liiki tasandiline joonintegraal . . . . .                                                        | 247 |
| 2.1. Esimest liiki (tasandilise) joonintegraali mõiste . . . . .                                              | 247 |
| 2.2. Integraalsummade piirväärtus integraalsummade jadade<br>piirväärtuste kaudu. . . . .                     | 249 |
| 2.3. Esimest liiki joonintegraali omadusi. . . . .                                                            | 251 |
| 2.4. Esimest liiki joonintegraali arvutamine . . . . .                                                        | 258 |
| 2.5. Esimest liiki joonintegraali rakendusi . . . . .                                                         | 261 |
| § 3. Teist liiki tasandiline joonintegraal . . . . .                                                          | 263 |
| 3.1. Teist liiki joonintegraali mõiste. . . . .                                                               | 263 |
| 3.2. Integraalsummade piirväärtus integraalsummade jadade<br>piirväärtuste kaudu. . . . .                     | 265 |
| 3.3. Teist liiki joonintegraali omadusi . . . . .                                                             | 268 |
| 3.4. Teist liiki joonintegraali arvutamine . . . . .                                                          | 275 |
| 3.5. Greeni valem . . . . .                                                                                   | 279 |
| 3.6. Teist liiki joonintegraali sõltumatus integreerimistest . . .                                            | 282 |
| 3.7. Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii) $\Rightarrow$ (i) tõestus üldjuhul . . .                               | 288 |
| 3.8. Teist liiki joonintegraali rakendusi . . . . .                                                           | 292 |
| 3.8.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine . . . . .                                                       | 292 |
| 3.8.2. Jõu töö arvutamine . . . . .                                                                           | 292 |
| § 4. Ruumilise kaare sirgestuvus ja pikkus ning esimest ja teist liiki<br>ruumilised joonintegraalid. . . . . | 293 |
| § 5. Cauchy integral formula . . . . .                                                                        | 293 |

## **VII. Parameetrist sõltuvad integraalid 295**

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Parameetrist sõltuvad Riemanni integraalid . . . . .                                                                                                  | 295 |
| 1.1. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali mõiste . . . . .                                                                                             | 295 |
| 1.2. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali pidevus,<br>integreeruvus ja diferentseeruvus . . . . .                                                      | 296 |
| 1.3. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali pidevus,<br>integreeruvus ja diferentseeruvus – juht, kus integraali rajad<br>sõltuvad parameetrist. . . . . | 298 |
| § 2. Parameetrist sõltuvad päratud integraalid . . . . .                                                                                                   | 303 |
| 2.1. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali mõiste .                                                                                         | 303 |
| 2.2. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlase<br>koonduvuse mõiste ja Cauchy kriteerium . . . . .                                      | 303 |

|                                                                                                                                                     |      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2.3. Piisavaid tingimusi parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks – Weierstrassi tunnus ja Dini tunnus . . . . . | .306 |
| 2.4. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali pidevus, integreeruvus ja diferentseeruvus . . . . .                                      | .307 |
| 2.5. Esimest liiki päratu integraal parameetrist sõltuvast esimest liiki päratust integraalist . . . . .                                            | .311 |
| 2.6. Parameetrist sõltuv teist liiki päratu integraal . . . . .                                                                                     | .312 |
| § 3. Euleri integraalid . . . . .                                                                                                                   | .316 |
| 3.1. Euleri integraalide koonduvuspiirkond. . . . .                                                                                                 | .316 |
| 3.2. Euleri funktsioonide pidevus . . . . .                                                                                                         | .317 |
| 3.3. Euleri gammafunktsiooni omadusi . . . . .                                                                                                      | .319 |
| 3.4. Euleri beetafunktsiooni omadusi . . . . .                                                                                                      | .321 |
| 3.5. Euleri integraalide vaheline seos . . . . .                                                                                                    | .323 |

## I peatükk.

# Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

## § 1. Eukleidiline ruum $\mathbb{R}^m$

### 1.1. $m$ -mõõtmelise eukleidilise ruumi mõiste

Olgu  $m \in \mathbb{N}$ . Tähistame

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

(hulga  $\mathbb{R}^m$  elemendid on niisiis kõikvõimalikud reaalarvuliste komponentidega  $m$ -komponendilised järjendid). Hulga  $\mathbb{R}^m$  elemente nimetame *punktideks*. Me kasutame tähistust  $(x_i)_{i=1}^m := (x_1, \dots, x_m)$ . Arvuseid  $x_1, \dots, x_m$  nimetame selle punkti *koordinaatideks*.

Kõneldes edaspidi *tasandist* või lihtsalt *ruumist*, mõistame me selle all vastavalt ruumi  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$ : tasandi (ja ruumi) igale punktile vastavad (fikseeritud ristkoordinaadistiku puhul) tema üheselt määratud koordinaadid; teiselt poolt, iga tasandi (ja ruumi) punkt on üheselt määratud oma koordinaatidega.

Punktide  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  ja  $Q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  vaheline *kaugus*  $d(P, Q)$  defineeritakse võrdusega

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2}. \quad (1.1)$$

Hulka  $\mathbb{R}^m$  koos temas valemiga (1.1) defineeritud kaugusega nimetatakse  *$m$ -mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks*  $\mathbb{R}^m$ .

Valemi (1.1) poolt antud kaugus ruumides  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3$  langeb kokku nn. loomuliku kaugusega nendes ruumides: nendes ruumides tuleb punktide  $P$  ja  $Q$  vaheline valemist (1.1) rehkendatav kaugus  $d(P, Q)$  sama, mis lõigu  $PQ$  pikkus (rehkendatuna välja elementaargeomeetrilistele argumentidele tuginedes).

Tõepoolest, juhul  $m = 1$ , tähistades  $P = (x) =: x$  ja  $Q = (y) =: y$ ,

$$d(P, Q) = |y - x|;$$

juhul  $m = 2$ , tähistades  $P = (x_1, y_1)$  ja  $Q = (x_2, y_2)$ ,

$$d(P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

(selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu  $PQ$  pikkus); juhul  $m = 3$ ,

tähistades  $P = (x_1, y_1, z_1)$  ja  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$d(P, Q) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

(ka selle võrduse parem pool on Pythagorase teoreemi abil leitud lõigu  $PQ$  pikkus).

Loetleme kauguse olulisemad omadused: mis tahes  $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$  korral

$$1^\circ \quad d(P, Q) = 0 \iff P = Q;$$

$$2^\circ \quad d(P, Q) = d(Q, P);$$

$$3^\circ \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q).$$

Omadusi  $1^\circ$ – $3^\circ$  nimetatakse *kauguse aksioomideks*. Aksioom  $3^\circ$  väidab sisuliselt, et kolmnurga ühegi külje pikkus ei ületa ülejäänud kahe külje pikkuste summat. Seejärel nimetatakse aksioomi  $3^\circ$  *kolmnurga võrratuseks*. Aksioomid  $1^\circ$  ja  $2^\circ$  järelduvad vahetult kauguse definitsioonist. Kolmnurga võrratust on kõige lihtsam järeldada *Minkowski võrratusest* (vt. arutelu järgmises punktis teoreemi 1.1 järel), kuid see on tõestatav ka vahetult, nagu me seda järgnevalt teeme.

KOLMNURGA VÕRRATUSE  $3^\circ$  TÕESTUS. Olgu  $P = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $Q = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $R = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ . Kolmnurga võrratuse tõestuseks peame näitama, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2},$$

milleks, arvestades, et  $\sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (|y_i - z_i| + |z_i - x_i|)^2}$ , piisab näidata, et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (|y_i - z_i| + |z_i - x_i|)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2}$$

ehk, tähistades iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral  $a_i := |y_i - z_i|$  ja  $b_i := |z_i - x_i|$ ,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}$$

ehk (tõstes selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} + \sum_{i=1}^m b_i^2$$

ehk, arvestades, et  $\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 + 2 \sum_{i=1}^m a_i b_i + \sum_{i=1}^m b_i^2$ ,

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2} \quad (1.2)$$

ehk (tõstes jällegi selle võrratuse mõlemad pooled ruutu)

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right). \quad (1.3)$$

Kuna

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^m a_i b_i\right) \left(\sum_{j=1}^m a_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i b_i a_j b_j \\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2 b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m a_i b_i a_j b_j + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^m a_i b_i a_j b_j = \sum_{i=1}^m a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m a_i b_i a_j b_j \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^m b_i^2\right) &= \left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right) \left(\sum_{j=1}^m b_j^2\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i^2 b_j^2 \\ &= \sum_{i=1}^m a_i^2 b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m a_i^2 b_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j < i}}^m a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^m a_i^2 b_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2), \end{aligned}$$

siis võrratus (1.3) on samaväärne võrratusega

$$2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m a_i b_i a_j b_j \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^m (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2),$$

mis kehtib, sest mis tahes  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_j b_j = (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0.$$

□

**Märkus 1.1.** Võrratust (1.2) (mis kehtib mis tahes  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geq 0$  korral), nimetatakse *Cauchy võrratuseks*.

**Ülesanne 1.1.** Tõestada tagurpidi kolmnurga võrratus: mis tahes  $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$  korral

$$d(P, Q) \geq |d(P, R) - d(Q, R)|.$$

Tagurpidi kolmnurga võrratus väidab sisuliselt, et kolmnurga kahe külje pikkuste vahe ei ületa kolmanda külje pikkust.

NÄPUNÄIDE. Kasutada kauguse aksioome 2° ja 3°.

## 1.2. Minkowski võrratus

Kõige lihtsam moodus kauguse kolmnurga aksioomi tõestuseks on järeldada ta *Minkowski võrratusest*.

**Teoreem 1.1** (Minkowski võrratus). *Olgu  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geq 0$  ning olgu  $p > 1$  ( $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m$  ja  $p$  on reaalarvud). Siis*

$$\left( \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^m b_i^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.4)$$

Minkowski võrratusest järeldub kolmnurga aksioom eukleidilise kauguse jaoks: mis tahes punktide  $P = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $Q = (y_1, \dots, y_m)$ ,  $R = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m$  korral, võttes Minkowski võrratuse  $p = 2$ ,  $a_i = |y_i - z_i|$  ja  $b_i = |z_i - x_i|$ , saame

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - x_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (|y_i - z_i| + |z_i - x_i|)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |y_i - z_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^m |z_i - x_i|^2} = d(P, R) + d(R, Q). \end{aligned}$$

Minkowski võrratust on mugav järeldada *Rogers–Hölder*i võrratusest.

**Teoreem 1.2** (Rogers–Hölder võrratus). *Olgu  $p, q \in (1, \infty)$  kaaseksponendid, s.t.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Mis tahes reaalarvude  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geq 0$  korral*

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^m b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.5)$$

**Märkus 1.2.** Cauchy võrratus (1.2) on erijuht Rogers–Hölder võrratusest (1.5), kus  $p = q = 2$ .

Rogers–Hölder võrratust, omakorda, on mugav järeldada *Youngi* võrratusest.

**Teoreem 1.3** (Youngi võrratus). *Olgu  $p, q \in (1, \infty)$  kaaseksponendid, s.t.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Mis tahes reaalarvude  $a, b \geq 0$  korral*

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \quad (1.6)$$

**Märkus 1.3.** Youngi võrratus formuleeritakse sageli järgneval (lausega 1.3 samaväärsel) kujul: *kui  $p, q \in (1, \infty)$  on kaaseksponendid, siis mis tahes reaalarvude  $a, b \geq 0$  korral*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**MINKOWSKI VÖRRATUSE TÕESTUS.** Olgu  $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \geq 0$ . Kuna mis tahes  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$(a_i + b_i)^p = (a_i + b_i)(a_i + b_i)^{p-1} = a_i(a_i + b_i)^{p-1} + b_i(a_i + b_i)^{p-1},$$

siis Rogers–Hölder võrratuse põhjal, valides  $q \in (1, \infty)$  selliselt, et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (siis  $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$  ja  $q(p-1) = p$ ),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^p &= \sum_{i=1}^m a_i(a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^m b_i(a_i + b_i)^{p-1} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{i=1}^m b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left( \left( \sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^m b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \left( \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Kui  $a_1 = \dots = a_m = 0$ , siis võrratuse (1.4) kehtivus on ilmne. Kui mingi  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral  $a_i > 0$ , siis järeldub eelnevast võrratuste-võrdusteahelast, et

$$\left( \sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^p \right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left( \sum_{i=1}^m a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^m b_i^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

mis, arvestades, et  $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ , on samaväärne võrratusega (1.4).  $\square$

ROGERS–HÖLDERI VÕRRATUSE TÕESTUS. Kui  $a_1 = \dots = a_m = 0$  või  $b_1 = \dots = b_m = 0$ , siis on võrratuse (1.5) kehtivus ilmne. (Õigupoolest kehtib niisugusel juhul selles mitteranges võrratuses võrdus.) Vaatleme nüüd juhtu, kus vähemalt üks arvudest  $a_1, \dots, a_m$  ja vähemalt üks arvudest  $b_1, \dots, b_m$  erinevad nullist. Siis iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral, võttes Youngi võrratuse (1.6)

$$a = \frac{a_i^p}{\sum_{k=1}^m a_k^p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{b_i^q}{\sum_{k=1}^m b_k^q},$$

saame

$$\frac{a_i b_i}{\left( \sum_{k=1}^m a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^m b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{k=1}^m b_k^q}.$$

Seega

$$\sum_{i=1}^m \frac{a_i b_i}{\left( \sum_{k=1}^m a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^m b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^m a_i^p}{p \sum_{k=1}^m a_k^p} + \frac{\sum_{i=1}^m b_i^q}{q \sum_{k=1}^m b_k^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

millest järeldub võrratus (1.5).  $\square$

YOUNGI VÕRRATUSE TÕESTUS. Olgu  $a, b \geq 0$ . Kui  $b = 0$ , siis võrratus (1.6) ilmselt kehtib; seega võime järeldada, et  $b > 0$ . Tähistades  $\lambda := \frac{1}{p}$ , omandab võrratus (1.6) kuju

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

ehk (jagades selle võrratuse mõlemad pooled läbi arvuga  $b$ )

$$\left( \frac{a}{b} \right)^\lambda \leq \lambda \frac{a}{b} + 1 - \lambda.$$

Tähistades  $t := \frac{a}{b}$ , piisab Youngi võrratuse tõestuseks niisiis näidata, et iga  $t \in (0, \infty)$  korral

$$t^\lambda - \lambda t \leq 1 - \lambda.$$

Selleks vaatleme funktsiooni  $\varphi(t) = t^\lambda - \lambda t$ . Kuna

$$\varphi'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda = \lambda(t^{\lambda-1} - 1),$$

siis  $\varphi'(t) > 0$ , kui  $t \in (0, 1)$ , ning  $\varphi'(t) < 0$ , kui  $t \in (1, \infty)$ . Niisiis,  $\varphi(1)$  on funktsiooni  $\varphi$  maksimaalne väärtus intervallis  $(0, \infty)$ ; seega iga  $t \in (0, \infty)$  korral

$$t^\lambda - \lambda t \leq \varphi(1) = 1 - \lambda,$$

nagu soovitud.  $\square$

**Ülesanne 1.2.** Tõestada, et

- Rogers–Hölderi võrratuses (1.5) kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub arv  $\xi \in \mathbb{R}$  nii, et  $b_i^q = \xi a_i^p$  iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral või  $a_i^p = \xi b_i^q$  iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral;
- Minkowski võrratuses (1.4) kehtib võrdus parajasti siis, kui leidub arv  $\eta \in \mathbb{R}$  nii, et  $b_i = \eta a_i^p$  iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral või  $a_i = \eta b_i^p$  iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral.

### 1.3. Kerad ja risttahukad. Punkti ümbrused

**Definitsioon 1.1.** Olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  ning olgu  $r > 0$ .

Hulka

$$B(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m : d(P, P_0) < r\}$$

(s.t. niisuguste ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktide  $P$  hulka, mille kaugus punktist  $P_0$  on väiksem kui  $r$ ) nimetatakse *lahtiseks keraks* (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) keskpunktiga  $P_0$  ja raadiusega  $r$ .

Hulka

$$\overline{B}(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m : d(P, P_0) \leq r\}$$

(s.t. niisuguste ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktide  $P$  hulka, mille kaugus punktist  $P_0$  ei ületa arvu  $r$ ) nimetatakse *kinniseks keraks* (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) keskpunktiga  $P_0$  ja raadiusega  $r$ .

Hulka

$$S(P_0, r) := \{P \in \mathbb{R}^m : d(P, P_0) = r\}$$

(s.t. niisuguste ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktide  $P$  hulka, mis asuvad punktist  $P_0$  kaugusel  $r$ ) nimetatakse *sfääriks* (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) keskpunktiga  $P_0$  ja raadiusega  $r$ .

Juhul  $m = 1$ , s.t. ruumis  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ , on lahtine kera ja kinnine kera vastavalt vahemik ja lõik: tähistades  $P_0 = (x_0) =: x_0$ ,

$$B(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r),$$

$$\overline{B}(P_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r].$$

Juhul  $m = 2$ , s.t. ruumis  $\mathbb{R}^2$ , on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine ring, kinnine ring ja ringjoon: tähistades  $P_0 = (x_0, y_0)$ ,

$$B(P_0, r) = \{(x, y) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < r^2\},$$

$$\overline{B}(P_0, r) = \{(x, y) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leq r^2\},$$

$$S(P_0, r) = \{(x, y) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 = r^2\}.$$

Juhul  $m = 3$ , s.t. ruumis  $\mathbb{R}^3$ , on lahtine kera, kinnine kera ja sfäär vastavalt lahtine kera, kinnine kera ja kerapind (ehk sfäär) selles tähenduses, nagu me neid tunneme analüütilisest geomeetriast: tähistades  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,

$$B(P_0, r) = \{(x, y, z) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 < r^2\},$$

$$\overline{B}(P_0, r) = \{(x, y, z) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 \leq r^2\},$$

$$S(P_0, r) = \{(x, y, z) : |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |z - z_0|^2 = r^2\}.$$

**Definitsioon 1.2.** Lahtist kera  $B(P_0, \varepsilon)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  nimetatakse punkti  $P_0$   $\varepsilon$ -ümbruseks ja tähistatakse ka sümboliga  $U_\varepsilon(P_0)$ .

Mis tahes hulka ruumis  $\mathbb{R}^m$ , mis sisaldab punkti  $P_0$  mingi  $\varepsilon$ -ümbruse, nimetatakse punkti  $P_0$  *ümbruseks*.

**Definitsioon 1.3.** Olgu  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Hulka

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \times \dots \times (a_m, b_m) &= \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in (a_i, b_i), i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

nimetatakse *lahtiseks koordinaatristtahukaks*. Hulka

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] &= \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in [a_i, b_i], i = 1, \dots, m\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_m) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

nimetatakse *kinniseks koordinaatristtahukaks*.

Vahemikke  $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$  ja lõike  $[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m]$  nimetatakse vastavalt risttahukate (1.7) ja (1.8) *servadeks*.

Edaspidi, *kõneldes lihtsalt (kinnistest ja lahtistest) risttahukatest, mõistame me nende all (vastavalt kinnisi ja lahtisi) koordinaatristtahukaid*. Risttahukat, mille kõik servad on võrdse pikkusega, nimetatakse *kuubiks*.

Risttahukaid ja kuupe ruumis  $\mathbb{R}^2$  nimetatakse vastavalt *ristkülikuteks* ja *ruutudeks*. Ristkülikute (sealhulgas ruutude) puhul kõneldakse servade asemel *külgedest*.

Punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ , kus iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral  $x_i^0 := \frac{b_i + a_i}{2}$  (s.t. punkti, mille koordinaadid on risttahukate (1.7) ja (1.8) vastavate servade keskpunktid), nimetatakse risttahukate (1.7) ja (1.8) *keskpunktiks*.

Tähistades iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$d_i := \frac{b_i - a_i}{2} = b_i - x_i^0 = x_i^0 - a_i,$$

esituvad risttahukad (1.7) ja (1.8) vastavalt kujul

$$\begin{aligned} (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \dots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m) \\ = \{(x_1, \dots, x_m): x_i^0 - d_i < x_i < x_i^0 + d_i, i = 1, \dots, m\} \\ = \{(x_1, \dots, x_m): |x_i - x_i^0| < d_i, i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} [x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1] \times \dots \times [x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m] \\ = \{(x_1, \dots, x_m): x_i^0 - d_i \leq x_i \leq x_i^0 + d_i, i = 1, \dots, m\} \\ = \{(x_1, \dots, x_m): |x_i - x_i^0| \leq d_i, i = 1, \dots, m\} \end{aligned}$$

(vt. ka joonist 1.1).

**Lause 1.4.** (a) Iga kera  $B$  korral ruumis  $\mathbb{R}^m$  leiduvad sama keskpunktiga kuubid  $C_1$  ja  $C_2$  nii, et

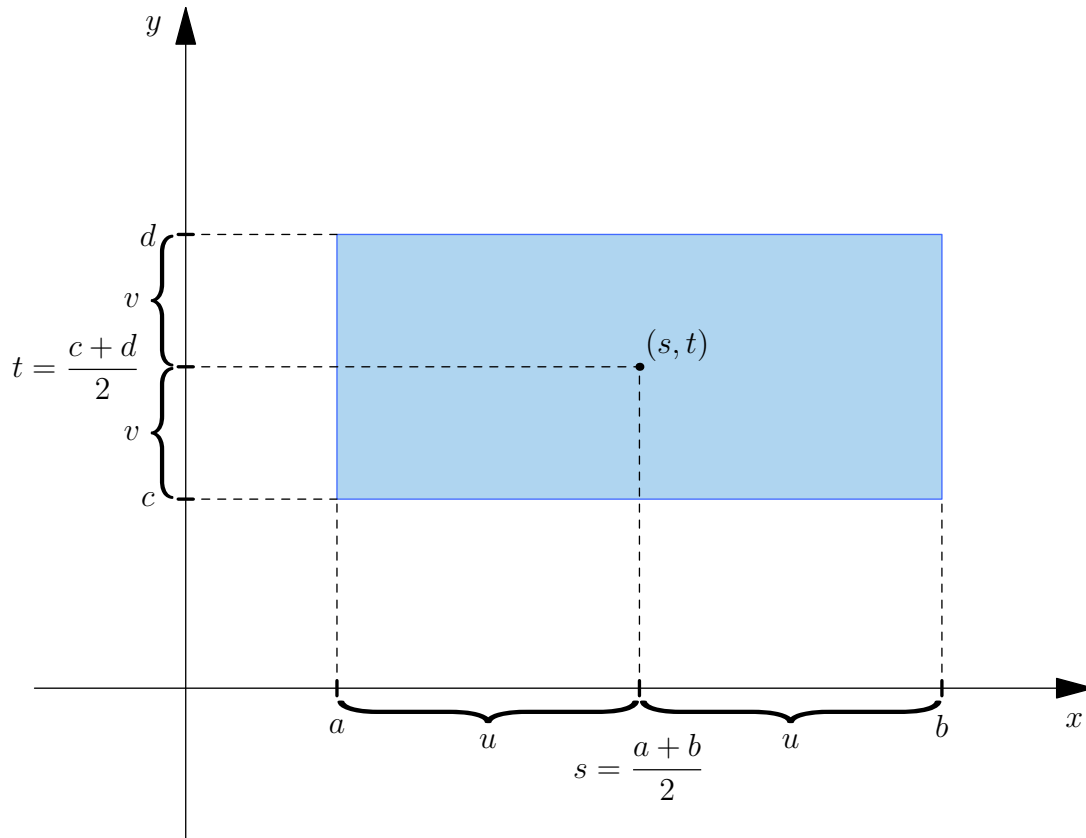
$$C_1 \subset B \subset C_2.$$

(b) Iga (koordinaat)risttahuka  $C$  korral ruumis  $\mathbb{R}^m$  leiduvad sama keskpunktiga kerad  $B_1$  ja  $B_2$  nii, et

$$B_1 \subset C \subset B_2.$$

Muuhulgas järeldub lausest 1.4, (b), et (koordinaat)risttahukas keskpunktiga  $P_0$  on punkti  $P_0$  ümbrus. Lahtiseid ja kinniseid (koordinaat)risttahukaid keskpunktiga  $P_0$  nimetatakse vastavalt punkti  $P_0$  *lahtisteks* ja *kinnisteks risttahukakujulisteks ümbrusteks*.

Lause 1.4 tõestamiseks on otstarbekas eelnevalt tõestada üks lemma (mida on mugav kasutada ka näiteks lause 2.1 tõestuses).



JOONIS 1.1. Ristkülik  $[a, b] \times [c, d]$  on joonisel helesiniseks värvitud. Selle ristküliku keskpunkt on  $(s, t)$ . Tähistades  $u := \frac{b-a}{2}$  ja  $v := \frac{d-c}{2}$ , esitub see ristkülik võrdusega  $[a, b] \times [c, d] = [s - u, s + u] \times [t - v, t + v]$ .

**Lemma 1.5.** Olgu  $P = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Siis

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| \leq d(P, P_0) \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0|. \quad (1.9)$$

TÕESTUS. Arvestades, et  $d(P, P_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i - x_i^0|^2}$ , sisalduvad võrratused (1.9) järgnevas võrratusteahelas:

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |x_i - x_i^0|^2} \leq \sqrt{m \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0|^2} = \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0|.$$

□

LAUSE 1.4 TÕESTUS. Lause väited piisab tõestada ainult lahtiste kerade  $B$  ja lahtiste (koordinaat)risttahukate  $C$  jaoks, sest iga kinnine kera sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist kera ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises kera; samuti, iga kinnine (koordinaat)risttahukas sisaldab mingit sama keskpunktiga lahtist (koordinaat)risttahukat ja sisaldub mingis sama keskpunktiga lahtises (koordinaat)risttahukas.

Olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ .

(a). Olgu  $r > 0$ . Vaatleme lahtist kera  $B := B(P_0, r)$ . Olgu  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B &\iff d(P, P_0) < r \implies \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| < r \\ &\iff P \in (x_1^0 - r, x_1^0 + r) \times \dots \times (x_m^0 - r, x_m^0 + r) =: C_2, \end{aligned}$$

seega  $B \subset C_2$ ; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in B &\iff d(P, P_0) < r \\ &\iff \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| < r \iff \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| < \frac{r}{\sqrt{m}} \\ &\iff P \in \left(x_1^0 - \frac{r}{\sqrt{m}}, x_1^0 + \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \times \dots \times \left(x_m^0 - \frac{r}{\sqrt{m}}, x_m^0 + \frac{r}{\sqrt{m}}\right) =: C_1, \end{aligned}$$

niisiis  $B \supset C_1$ .

(b). Olgu  $d_1, \dots, d_m > 0$ . Tähistame

$$C := (x_1^0 - d_1, x_1^0 + d_1) \times \dots \times (x_m^0 - d_m, x_m^0 + d_m).$$

Olgu  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Siis, kasutades lemmat 1.5, ühelt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C &\iff |x_i - x_i^0| < d_i \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\implies \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| < \max_{1 \leq i \leq m} d_i =: d \\ &\implies d(P, P_0) < \sqrt{m}d \iff P \in B(P_0, \sqrt{m}d) =: B_2, \end{aligned}$$

seega  $C \subset B_2$ ; teiselt poolt,

$$\begin{aligned} P \in C &\iff |x_i - x_i^0| < d_i \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\iff \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - x_i^0| < \min_{1 \leq i \leq m} d_i =: r \\ &\iff d(P, P_0) < r \iff P \in B(P_0, r) =: B_1, \end{aligned}$$

niisiis  $C \supset B_1$ . □

## 1.4. Lahtised ja kinnised hulgad ruumis $\mathbb{R}^m$

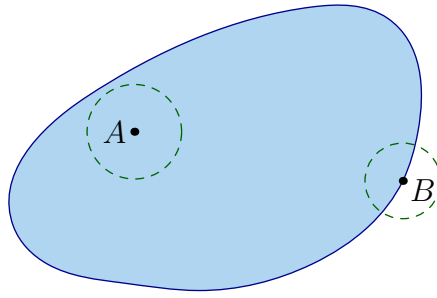
Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ .

**Definitsioon 1.4.** Öeldakse, et punkt  $P \in \mathbb{R}^m$  on hulga  $\mathcal{D}$

- *sisepunkt*, kui leidub  $\varepsilon > 0$  nii, et  $U_\varepsilon(P) \subset \mathcal{D}$  (s.t. punktil  $P$  leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ );
- *rajapunkt*, kui iga  $\varepsilon > 0$  korral

$$U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad U_\varepsilon(P) \cap (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \neq \emptyset$$

(s.t. punkti  $P$  iga ümbrus sisaldab nii hulga  $\mathcal{D}$  punkte kui ka hulka  $\mathcal{D}$  mittekuuluvaid punkte).



JOONIS 1.2. Punkt  $A$  on joonisel sinisega kujutatud hulga sisepunkt (ruumis  $\mathbb{R}^2$  ehk tasandil), sest punktil  $A$  leidub ümbrus, mis tervenisti sisaldub selles hulgas. Punkt  $B$  on selle hulga rajapunkt, sest punkti  $B$  iga ümbrus sisaldab nii selle hulga punkte kui ka sellesse hulka mittekuuluvaid punkte.

**Definitsioon 1.5.** Hulga  $\mathcal{D}$  kõigi sisepunktide hulka nimetatakse hulga  $\mathcal{D}$  *sisemuseks* ja tähistatakse sümboliga  $\mathcal{D}^\circ$ .

Hulga  $\mathcal{D}$  kõigi rajapunktide hulka nimetatakse hulga  $\mathcal{D}$  *rajaks* ja tähistatakse sümboliga  $\partial\mathcal{D}$ .

Hulga  $\mathcal{D}$  ja tema raja ühendit nimetatakse hulga  $\mathcal{D}$  *sulundi*ks ja tähistatakse sümboliga  $\overline{\mathcal{D}}$ :

$$\overline{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}.$$

Järgnev lause, mis toob välja sisemuse, raja ja sulundi lihtsamad omadused, järeldub vahetult vastavatest definitsioonidest.

**Lause 1.6.** (a)  $\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$ ;

(b)  $\mathcal{D}^\circ \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset$ ;

(c) *hulga  $\mathcal{D}$  iga punkt on kas hulga  $\mathcal{D}$  sisepunkt või selle hulga rajapunkt, s.t. iga  $P \in \mathcal{D}$  korral realiseerub täpselt üks järgmistest teineteist välistavatest võimalustest:*

$$P \in \mathcal{D}^\circ \quad \text{või} \quad P \in \partial\mathcal{D};$$

(d)  $\partial\mathcal{D} = \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})$ ;

(e) *iga  $P \in \mathbb{R}^m$  korral realiseerub täpselt üks järgmistest üksteist välistavatest võimalustest:*

$$P \in \mathcal{D}^\circ, \quad P \in \partial\mathcal{D} \quad \text{või} \quad P \in (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})^\circ.$$

**NB!** Kas peaks siin eraldi välja tooma, et  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}^\circ \cup \partial\mathcal{D}$ ?

**Definitsioon 1.6.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D}$  on

- *lahtine*, kui  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ$  (s.t. kõik hulga  $\mathcal{D}$  punktid on tema sisepunktid);
- *kinnine*, kui  $\mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D}$  (s.t. hulk  $\mathcal{D}$  sisaldab oma raja).

**Ülesanne 1.3.** Tõestada, et mis tahes lahtine hulk ruumis  $\mathbb{R}^m$  on mis tahes selle hulga punkti ümbrus.

Vahetult definitsioonist järeldub, et hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine parajasti siis, kui  $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$ .

Tõepoolest,

$$\mathcal{D} \text{ on kinnine} \iff \mathcal{D} \supset \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} \supset \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D} \iff \mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}.$$

**Lause 1.7.** (a) *Lahtine kera ruumis  $\mathbb{R}^m$  on lahtine hulk.*

(b) *Kinnine kera ruumis  $\mathbb{R}^m$  on kinnine hulk.*

Väite (b) tõestamiseks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lihtne lause.

**Lause 1.8.** *Hulk  $\mathcal{D}$  on lahtine parajasti siis, kui tema täiend  $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  on kinnine.*

TÕESTUS:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \text{ on lahtine} &\iff \mathcal{D} = \mathcal{D}^\circ \iff \mathcal{D} \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset \iff \partial\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \\ &\iff \partial(\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \iff \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D} \text{ on kinnine.} \end{aligned}$$

**NB!** Kas peaks eraldi välja tooma järgmise järelduse lausest 1.8: hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine parajasti siis, kui tema täiend  $\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$  on lahtine.

□

LAUSE 1.7 TÕESTUS. Olgu  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  ning olgu  $r > 0$ .

(a). Olgu  $P \in B(P_0, r)$ . Veendumaks kera  $B(P_0, r)$  lahtisuses, piisab näidata, et  $P$  on selle kera sisepunkt, s.t. leidub  $\varepsilon > 0$  nii, et  $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$ . Selleks paneme tähele, et mis tahes  $\varepsilon > 0$  ja  $Q \in U_\varepsilon(P)$  korral (kolmnurga võrratuse põhjal)

$$d(Q, P_0) \leq d(Q, P) + d(P, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0);$$

niisiis, kui võtta  $\varepsilon := r - d(P, P_0) > 0$ , siis mis tahes  $Q \in U_\varepsilon(P)$  korral

$$d(Q, P_0) < \varepsilon + d(P, P_0) = r - d(P, P_0) + d(P, P_0) = r,$$

s.t.  $Q \in B(P_0, r)$  ning seega  $U_\varepsilon(P) \subset B(P_0, r)$ .

(b). Veendumaks kera  $\overline{B}(P_0, r)$  kinnisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et täiend  $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$  on lahtine, milleks, fikseerides vabalt  $P \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ , piisab näidata, et  $P$  on hulga  $\mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$  sisepunkt, s.t. leidub  $\varepsilon > 0$  nii, et  $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ . Selleks paneme tähele, et mis tahes  $\varepsilon > 0$  ja  $Q \in U_\varepsilon(P)$  korral (tagurpidi kolmnurga võrratuse põhjal, vt. ülesannet 1.1)

$$d(Q, P_0) \geq d(P, P_0) - d(P, Q) > d(P, P_0) - \varepsilon;$$

niisiis, kui võtta  $\varepsilon := d(P, P_0) - r > 0$ , siis mis tahes  $Q \in U_\varepsilon(P)$  korral

$$d(Q, P_0) > d(P, P_0) - \varepsilon = d(P, P_0) - (d(P, P_0) - r) = r,$$

s.t.  $Q \in \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$  ning seega  $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}^m \setminus \overline{B}(P_0, r)$ .

□

**Märkus 1.4.** Teine võimalus lause 1.7 tõestamiseks on tõestada kõigepealt järgnev lause.

**Lause 1.9.** Mis tahes  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  ning  $r > 0$  korral

$$\partial B(P_0, r) = S(P_0, r) \quad \text{ja} \quad \partial \overline{B}(P_0, r) = S(P_0, r).$$

*Teisisõnu, kera raja ruumis  $\mathbb{R}^m$  on sama keskpunkti ja raadiusega sfäär.*

Kinnise kera kinnisus järeldub lausest 1.9 vahetult kinnisuse definitsiooni põhjal. Veendumaks lahtise kera lahtisuses, piisab lause 1.8 põhjal näidata, et tema täiend on kinnine, mis, arvestades, et hulga ja tema täiendi rajad on võrdsed, järeldub jällegi lausest 1.9 vahetult hulga kinnisuse definitsiooni põhjal.

Veel ühte võimalust lause 1.7 tõestuseks on kirjeldatud ülesandes 2.2.

LAUSE 1.9 TÕESTUS.

**Ülesanne 1.4.** Tõestada lause 1.9.

□

**Märkus 1.5.** Ruumi  $\mathbb{R}^m$  hulkade korral võivad esineda kõik järgnevad (üksteist välistavad) olukorrad:

- (1) hulk on lahtine, kuid mitte kinnine;
- (2) hulk on kinnine, kuid mitte lahtine;
- (3) hulk pole ei kinnine ega lahtine;
- (4) hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

Seejuures hulk on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine (s.t. realiseerub olukord (4)) parajasti siis, kui tema raja on tühi hulk. Ainsad niisuguse omadusega hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tühi hulk  $\emptyset$  ja kogu hulk  $\mathbb{R}^m$  ise.

**Ülesanne 1.5.** Tõestada, et ainsad hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ , mille raja on tühi hulk, on hulk  $\mathbb{R}^m$  ja tühi hulk  $\emptyset$ .

NÄPUNÄIDE. Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}$  ja  $Q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}$ . Tõestada, et leidub hulga  $\mathcal{D}$  rajapunkt, mis asub punkte  $P$  ja  $Q$  ühendaval sirglõigul

$$\{(x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_m + t(y_m - x_m)) : t \in [0, 1]\}.$$

## 1.5. Hulga tõkestatus ruumis $\mathbb{R}^m$

**Definitsioon 1.7.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  on *tõkestatud*, kui ta sisaldub mingis keras, s.t. leiduvad punkt  $Q \in \mathbb{R}^m$  ja reaalarv  $r > 0$  nii, et  $\mathcal{D} \subset B(Q, r)$ .

**Ülesanne 1.6.** Tõestada, et hulk ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis keras keskpunktiga  $\underbrace{(0, \dots, 0)}_{m \text{ arvu null}}$ .

Järgnev lause järeldub vahetult ülesandest 1.6, arvestades, et lause 1.4 põhjal sisaldub iga kera ruumis  $\mathbb{R}^m$  mingis sama keskpunktiga kuubis ning, vastupidi, iga kuup ruumis  $\mathbb{R}^m$  sisaldub mingis sama keskpunktiga keras.

**Lause 1.10.** *Hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  on tõkestatud parajasti siis, kui leidub arv  $M \geq 0$  nii, et*

$$\mathcal{D} \subset \underbrace{[-M, M] \times \cdots \times [-M, M]}_{m \text{ tegurit}}.$$

*Teisisõnu, hulk  $\mathcal{D}$  on tõkestatud parajasti siis, kui ta sisaldub mingis kuubis keskpunktiga  $(0, \dots, 0)$ .*

Lause 1.10 võime ümber sõnastada ka järgmiselt: *hulk  $\mathcal{D}$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tõkestatud parajasti siis, kui tema punktide kõikvõimalike koordinaatide hulk on tõkestatud, s.t. leidub arv  $M \geq 0$  nii, et*

$$|x_i| \leq M \quad \text{iga } P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D} \text{ ja iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.}$$

## 1.6. Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$

Hulga sidususe definitsioon ruumis  $\mathbb{R}^m$  toetub Jordani joone mõistele, mis omakorda toetub funktsiooni  $T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus  $T \subset \mathbb{R}$ , pidevuse mõistele. Neile kahele mõistele ongi pühendatud käesoleva jaotise kolm esimest alajaotist.

### 1.6.1. Funktsiooni $T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus $T \subset \mathbb{R}$ , pidevus

**Definitsioon 1.8.** Olgu  $T \subset \mathbb{R}$ . Öeldakse, et funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on pidev punktis  $t_0 \in T$ , kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ t \in T, |t - t_0| < \delta \right] \implies d(\Phi(t), \Phi(t_0)) < \varepsilon.$$

Öeldakse, et funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on pidev, kui ta on oma määramispiirkonna  $T$  igas punktis pidev.

Paneme tähele, et juhul  $m = 1$  langeb äsjadefineeritud funktsiooni  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  pidevuse mõiste kokku kursusest “Ühe muutuja matemaatiline analüüs” tuttava (ühe muutuja) funktsiooni  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}$  pidevuse mõistega, sest sel juhul  $d(\Phi(t), \Phi(t_0)) = |\Phi(t) - \Phi(t_0)|$ .

Märgime, et funktsioonide  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  ning funktsioonide süsteemide

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \dots, \quad x_m = \phi_m(t), \quad t \in T, \quad (1.10)$$

vahel on üksühene vastavus: ühelt poolt, süsteem (1.10) määrab funktsiooni

$$\Phi: T \ni t \longmapsto (\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \in \mathbb{R}^m; \quad (1.11)$$

teiselt poolt, mis tahes funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  määrab ühesel viisil funktsioonid (1.10), mis rahuldavad tingimust (1.11) – sellise omadusega funktsioonide (1.10) väärtused mis tahes punktis  $t \in T$  on defineeritud võrdustega

$$\phi_1(t) = \xi_1, \quad \dots, \quad \phi_m(t) = \xi_m, \quad \text{kus } \Phi(t) = (\xi_1, \dots, \xi_m).$$

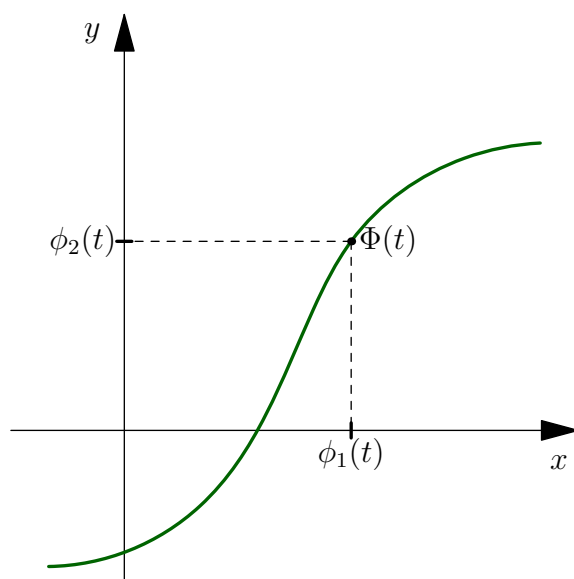
Seejuures funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on pidev parajasti siis, kui teda (tingimuse (1.11) abil) määravad funktsioonid (1.10) on pidevad.

**Ülesanne 1.7.** Tõestada, et funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on pidev parajasti siis, kui teda (tingimuse (1.11) abil) määravad funktsioonid (1.10) on pidevad.

### 1.6.2. Pideva joone mõiste ruumis $\mathbb{R}^m$

**Definitsioon 1.9.** Olgu  $T \subset \mathbb{R}$  intervall. Pidevat funktsiooni  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  nimetatakse *pidevaks jooneks* ehk *Jordani jooneks* ehk lihtsalt *jooneks* ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Hulka  $\{\Phi(t): t \in T\}$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  (s.t. funktsiooni  $\Phi$  väärtuste hulka) nimetatakse seejuures joone  $\Phi$  *jäljeks*. Funktsiooni  $\Phi$  argumentidele viidatakse kui *parameetritele*.

Kuidas on pideva joone definitsioon 1.9 kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga joontest? Joont  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on kõige lihtsam ette kujutada kui ruumis  $\mathbb{R}^m$  eeskirja  $u = \Phi(t)$  järgi liikuva punkti trajektoori: ajahetkel  $t \in T$  asub liikuv punkt ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktis  $\Phi(t)$  (vt. joonist 1.3, kus  $m = 2$ ).



JOONIS 1.3. Siin  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ , s.t.  $\phi_1(t)$  ja  $\phi_2(t)$  on punkti  $\Phi(t)$  (rist)koordinaadid.

Sageli, kõneldes joonest, peetakse tegelikult silmas hoopis teatava joone jälge. Näiteks öeldes, et teatav joon ruumis  $\mathbb{R}^m$  sisaldub ruumi  $\mathbb{R}^m$  teatavas alamhulgas, peetakse tegelikult silmas, et kõnealuse joone jälg sisaldub kõnealuses hulgas; öeldes, et teatav joon ruumis  $\mathbb{R}^m$  läbib teatavat punkti (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ), peetakse tegelikult silmas, et kõnealuse joone jälg sisaldab kõnealust punkti. Sedalaadi terminoloogilist ebatäpsust, mis üldjuhul sisulist kaksipidimõistmist ei tekita, lubame endale käesolevas konspektis ka meie.

Kui intervall  $T$  on lõik, s.t.  $T = [\alpha, \beta]$  mingite  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$ , korral, siis nimetatakse joont  $\Phi$  *kaareks*. Ruumi  $\mathbb{R}^m$  punkte  $\Phi(\alpha)$  ja  $\Phi(\beta)$  nimetatakse seejuures vastavalt kaare  $\Phi$  *alguspunktiks* ja kaare  $\Phi$  *lõpp-punktiks*. Kaare algus- ja lõpp-punkti nimetatakse selle kaare *otspunktideks*. Öeldes, et kaar ruumis  $\mathbb{R}^m$  ühendab ruumi  $\mathbb{R}^m$  punkte  $A$  ja  $B$ , peetakse silmas, et  $A$  ja  $B$  on selle kaare otspunktid.

**1.6.3. Joone esitusviise**

Kuigi käsiloleva punkti põhimõiste – ruumi  $\mathbb{R}^m$  alamhulga sidususe – defineerimiseks vajaminev matemaatiline aparatuur sai meil eelnevates punktides sisse toodud, lük-kame sidususe mõiste defineerimise edasi järgmisse jaotisse: käsilolev jaotis on parim võimalik koht tutvumaks mõnede sagedaminikasutatavate joone esitusviisidega.

Kõikjal selles jaotises on  $T \subset \mathbb{R}$  mingi intervall.

**1.6.3.1. Joone esitus parameetriliste võrranditega**

Olgu

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \dots, \quad x_m = \phi_m(t), \quad t \in T, \quad (1.12)$$

pidevad funktsioonid. Siis ka funktsioon

$$\Phi: T \ni t \longmapsto (\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \in \mathbb{R}^m$$

on pidev (vt. ülesannet 1.7), s.t. see funktsioon on joon (selle joone jälge juhul, kus  $m = 2$ , on kujutatud joonisel 1.3). Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud *parameetrilisel kujul* võrranditega (1.12) (või et see joon on esitatud *parameetriliste võrranditega* (1.12).

Märgime, et *iga pidev joon ruumis  $\mathbb{R}^m$  on ühesel viisil esitatav parameetrilise võrrandite abil* (vt. jaotise 1.6.1 lõiku, mis algab sõnadega “Märgime, et”).

**1.6.3.2. Tasandilise joone esitus võrrandiga  $y = f(x)$** 

Jooni ruumis  $\mathbb{R}^2$  nimetatakse *tasandilisteks joonteks*. Selles ja järgmises alajaotises tutvustame kaht sagedastikasutatavat tasandiliste joonte esitusviisi.

Olgu funktsioon

$$y = f(x), \quad x \in T, \quad (1.13)$$

pidev funktsioon. Siis ka funktsioon

$$T \ni t \longmapsto (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2$$

on pidev (sest “koordinaatfunktsioonid”  $T \ni t \mapsto t \in \mathbb{R}$  ja  $T \ni t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$  on pidevad; vt. ülesannet 1.7), s.t. see funktsioon on joon. Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud võrrandiga (1.13). Märgime, et võrrandiga (1.13) esitatud tasandilise joone esitus parameetrilisel kujul on

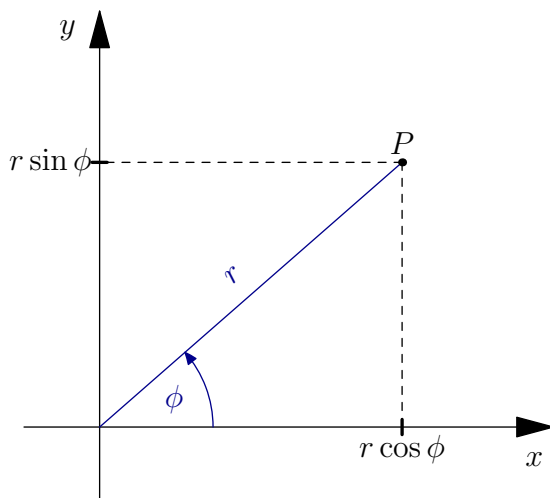
$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in T.$$

**1.6.3.3. Tasandilise joone esitus polaarkoordinaatides**

Kõikjal järgnevas, kõneldes polaarkoordinaatidest “ $xy$ -tasandil”  $\mathbb{R}^2$ , loeme poolu-seks koordinaatide alguspunkti ja polaarteljeks  $x$ -telje positiivse osa. Sel juhul ta-sandi mis tahes punkti ristkoordinaadid  $x$  ja  $y$  ning polaarkoordinaadid  $\phi$  ja  $r$  (siin  $\phi$  tähistab polaarnurka ja  $r$  polaarraadiust) on seotud võrdustega

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi; \quad (1.14)$$

vt. joonist 1.4.



JOONIS 1.4. Punkti  $P$  ristkoordinaadid  $x$  ja  $y$  ning polaarkoordinaadid  $r$  ja  $\phi$  on seotud võrdustega (1.14).

Olgu funktsioon

$$r = r(\phi), \quad \phi \in T, \quad (1.15)$$

pidev. Siis ka funktsioon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mis seab parameetri väärtusele  $\phi$  hulgast  $T$  vastavusse tasandi  $\mathbb{R}^2$  punkti, mille polaarnurk ja polaarraadius on vastavalt  $\phi$  ja  $r(\phi)$ , on pidev (sest võrduste (1.14) põhjal  $\Phi: T \ni \phi \mapsto (r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \in \mathbb{R}^2$  ning “koordinaatfunktsioonid”  $T \ni \phi \mapsto r(\phi) \cos \phi \in \mathbb{R}$  ja  $T \ni \phi \mapsto r(\phi) \sin \phi \in \mathbb{R}$  on pidevad; vt. ülesannet 1.7). Selle joone kohta öeldakse, et ta on esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga (1.15). Märkime, et polaarkoordinaatides võrrandiga (1.15) esitatud tasandilise joone esitus parameetrilisel kujul on

$$x = r(\phi) \cos \phi, \quad y = r(\phi) \sin \phi, \quad \phi \in T$$

**NB!** Must-valge televisiooni vaatajad seda jälge rohelisena ei näe!

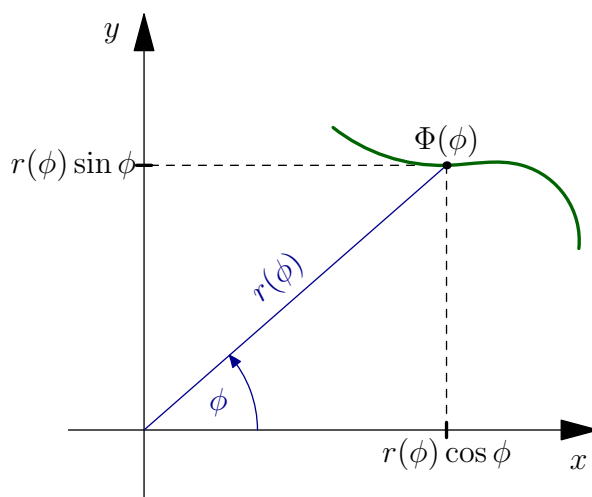
(selle joone jälge on rohelisega kujutatud joonisel 1.5).

#### 1.6.4. Hulga sidusus ruumis $\mathbb{R}^m$

**Definitsioon 1.10.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  on *sidus*, kui tema mis tahes kahe punkti korral leidub neid punkte ühendav pidev kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ .

### 1.7. Täiendavaid ülesandeid

**Ülesanne 1.8.** Olgu  $n \in \mathbb{N}$ , olgu hulk  $U \subset \mathbb{R}^m$  punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  ümbrus ruumis  $\mathbb{R}^m$  ning olgu hulk  $V \subset \mathbb{R}^n$  punkti  $Q_0 = (y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^n$  ümbrus ruumis  $\mathbb{R}^n$ . Tõlgendame otsekorrutist  $U \times V$  ruumi  $\mathbb{R}^{m+n}$  alamhulgana, samastades iga punkti  $((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) \in U \times V$  punktiga  $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ . Tõestada, et niisuguse tõlgenduse korral on hulk  $U \times V$  punkti  $R_0 := (x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0) \in \mathbb{R}^{m+n}$  ümbrus ruumis  $\mathbb{R}^{m+n}$ .



JOONIS 1.5

**Ülesanne 1.9.** Tõestada, et

- (a) 1°  $\mathbb{R}^m$  ja  $\emptyset$  on lahtised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ ;
- 2° kui  $I$  on mis tahes indeksite hulk ning  $U_i, i \in I$ , on lahtised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ , siis ka nende hulkade ühend  $\bigcup_{i \in I} U_i$  on lahtine (s.t. mis tahes kogumi lahtiste hulkade ühend ruumis  $\mathbb{R}^m$  on lahtine hulk);
- 3° kui  $n \in \mathbb{N}$  ning  $U_1, \dots, U_n$  on lahtised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ , siis ka nende hulkade ühisosa  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  on lahtine (s.t. lõpliku arvu lahtiste hulkade ühisosa ruumis  $\mathbb{R}^m$  on lahtine hulk);
- (b) 1°  $\mathbb{R}^m$  ja  $\emptyset$  on kinnised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ ;
- 2° kui  $I$  on mis tahes indeksite hulk ning  $F_i, i \in I$ , on kinnised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ , siis ka nende hulkade ühisosa  $\bigcap_{i \in I} F_i$  on kinnine (s.t. mis tahes kogumi kinniste hulkade ühisosa ruumis  $\mathbb{R}^m$  on kinnine hulk);
- 3° kui  $n \in \mathbb{N}$  ning  $F_1, \dots, F_n$  on kinnised hulgad ruumis  $\mathbb{R}^m$ , siis ka nende hulkade ühend  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  on kinnine (s.t. lõpliku arvu kinniste hulkade ühend ruumis  $\mathbb{R}^m$  on kinnine hulk).

NÄPUNÄIDE. Ülesande (b)-osa tõestuses on mugav kasutada (a)-osa koos lausega 1.8.

**Ülesanne 1.10.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Tõestada, et

- (a)  $\mathcal{D}^\circ = \mathbb{R}^m \setminus (\overline{\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}})$  (teisisõnu, hulga sisemus on tema täiendi sulundi täiend);
- (b)  $\overline{\mathcal{D}} = \mathbb{R}^m \setminus ((\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})^\circ)$  (teisisõnu, hulga sulund on tema täiendi sisemuse täiend).

NÄPUNÄIDE. Kasutada lauset 1.6, (e) ja (d).

**Ülesanne 1.11.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Tõestada, et

- (a) sisemus  $\mathcal{D}^\circ$  on lahtine hulk;
- (b) sulund  $\overline{\mathcal{D}}$  on kinnine hulk;
- (c) raja  $\partial \mathcal{D}$  on kinnine hulk;
- (d)  $\partial(\partial \mathcal{D}) \subset \partial \mathcal{D}$ .

NÄPUNÄIDE. Väite (a) tõestamisel on mugav kasutada lauset 1.7, (a), mille kohaselt lahtine kera on lahtine, ja ülesannet 1.3 mis ütleb, et mis tahes lahtine hulk ruumis  $\mathbb{R}^m$  on mis tahes selle hulga punkti ümbrus.

Väide (b) järeldeb ülesandest 1.10, (b), väitest (a) ja lausest 1.8.

Väited (c) ja (d) on hulga kinnisuse definitsiooni põhjal samaväärsed. Üks moodus nende väidete tõestamiseks on tõestada väide (d), lähtudes vahetult rajapunkti definitsioonist (siin on mugav kasutada lauset 1.7, (a), ja ülesannet 1.3). Teine moodus on tõestada väide (c), pannes kõigepealt tähele, et  $\partial\mathcal{D} = \mathbb{R}^m \setminus (\mathcal{D}^\circ \cup (\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D})^\circ)$  (vt. lauset 1.6, (e)) ning rakendades seejärel väidet (a), ülesannet 1.9, (a), 2°, ja lausest 1.8 (mis teisisõnu ütleb, et hulk on kinnine parajasti siis, kui tema täiend on lahtine). Veel üks moodus väite (c) tõestamiseks on veenduda kõigepealt, et  $\partial\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}} \cap \overline{\mathbb{R}^m \setminus \mathcal{D}}$ , ning rakendada seejärel väidet (b) ja ülesannet 1.9, (b), 2°.

**Ülesanne 1.12.** Olgu hulgad  $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^m$  sellised, et  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$ . Tõestada, et siis ka  $\mathcal{D}^\circ \subset \mathcal{E}^\circ$  ja  $\overline{\mathcal{D}} \subset \overline{\mathcal{E}}$ . (Selles ülesandes tõestatavatele sisemuse ja sulundi omadustele viidatakse vastavalt kui *sisemuse monotoonsusele* ja *sulundi monotoonsusele*.)

NÄPUNÄIDE. Sisalduvuse  $\overline{\mathcal{D}} \subset \overline{\mathcal{E}}$  tõestamisel kasutada ülesannet 1.10, (b), ja sisemuse monotoonsust. Teine moodus selle sisalduvuse tõestamiseks on lähtuda vahetult sulundi definitsioonist. Kolmas moodus selle sisalduvuse tõestamiseks on kasutada järgmise paragrahvi lauset 2.2.

**Ülesanne 1.13.** Tõestada, et tõkestatud hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  sulund  $\overline{\mathcal{D}}$  on tõkestatud hulk.

## § 2. Jada ruumis $\mathbb{R}^m$

### 2.1. Jada koonduvus ruumis $\mathbb{R}^m$

**Definitsioon 2.1.** Kui igale arvule  $n \in \mathbb{N}$  on vastavalt mingile eeskirjale seatud vastavusse mingi (üheselt määratud) punkt  $P_n \in \mathbb{R}^m$ , siis öeldakse, et on antud *jada*

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots \quad (2.1)$$

Jada (2.1) tähistatakse ka sümboliga  $(P_n)_{n=1}^\infty$  või lihtsalt  $(P_n)$ . Kõneldes ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktide jada, ütleme me edaspidi lihtsalt *jada ruumis  $\mathbb{R}^m$* .

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et jada  $(P_n)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  *koondub* punktiks  $P \in \mathbb{R}^m$ , kui

$$d(P_n, P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

s.t. iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ n \in \mathbb{N}, n \geq N \right] \implies d(P_n, P) < \varepsilon.$$

Punkti  $P$  nimetatakse seejuures jada  $(P_n)$  *piirväärtuseks* ja kirjutatakse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \quad \text{või} \quad P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P.$$

**Ülesanne 2.1.** Olgu jada  $(P_n)$  ja  $(Q_n)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  ning punktid  $P, Q \in \mathbb{R}^m$  sellised, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$  ja  $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q$  ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Tõestada, et

$$(a) \quad d(P_n, Q) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(P, Q);$$

$$(b) \quad d(P_n, Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(P, Q).$$

NÄPUNÄIDE. Kasutada tagurpidi kolmnurga võrratust (vt. ülesannet 1.1).

Järgnev lause kirjeldab koonduvust ruumis  $\mathbb{R}^m$ .

**Lause 2.1.** Olgu  $P_n = (x_1^n, \dots, x_m^n)$ ,  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Järgmised väited on samaväärsed:

$$(i) \quad P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \text{ ruumis } \mathbb{R}^m;$$

$$(ii) \quad x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.}$$

Teisisõnu, lause 2.1 ütleb, et jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  koondub punktiks  $P \in \mathbb{R}^m$  parajasti siis, kui selle jada punktide vastavate koordinaatide jada koonduvad punkti  $P$  vastavateks koordinaatideks (niisugusel juhul öeldakse, et jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  koondub koordinaaditi punktiks  $P$ ). Niisiis, koonduvus ruumis  $\mathbb{R}^m$  on samaväärne koordinaaditi koonduvusega.

LAUSE 2.1 TÕESTUS. Lemma 1.5 põhjal iga  $n \in \mathbb{N}$  korral

$$0 \leq \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^n - x_i| \leq d(P_n, P) \leq \sqrt{m} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^n - x_i|,$$

järelikult arvjada piirväärtuse sändvitšsteoreemi põhjal

$$d(P_n, P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Seega

$$\begin{aligned} P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \text{ ruumis } \mathbb{R}^m &\iff d(P_n, P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \max_{1 \leq i \leq m} |x_i^n - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\iff |x_i^n - x_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral} \\ &\iff x_i^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_i \text{ iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.} \end{aligned}$$

□

## 2.2. Sulundi punkti ja kinnisuse kirjeldus jadade keeles

**Lause 2.2.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P \in \mathbb{R}^m$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $P \in \overline{\mathcal{D}}$  (s.t. punkt  $P$  kuulub hulga  $\mathcal{D}$  sulundisse);
- (ii) iga  $\varepsilon > 0$  korral  $U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$  (s.t. punkti  $P$  iga ümbrus lõikab hulka  $\mathcal{D}$ );
- (iii) leiduvad punktid  $P_n \in \mathcal{D}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$  (s.t. leidub hulga  $\mathcal{D}$  punktide jada, mis koondub punktiks  $P$ ).

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu  $P \in \overline{\mathcal{D}}$ . Siis kehtib vähemalt üks tingimustest  $P \in \mathcal{D}$  ja  $P \in \partial\mathcal{D}$ . Kui  $P \in \mathcal{D}$ , siis punkti  $P$  iga ümbrus sisaldab hulka  $\mathcal{D}$  kuuluva punkti  $P$ . Kui  $P \in \partial\mathcal{D}$ , siis rajapunkti definitsiooni põhjal lõikab punkti  $P$  iga ümbrus hulka  $\mathcal{D}$ . Niisiis igal juhul tingimus (ii) kehtib.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii). Peame näitama, et  $P \in \overline{\mathcal{D}}$ . Kui  $P \in \mathcal{D}$ , siis see sisalduvus ilmselt kehtib (sest  $\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$ ). Vaatleme nüüd juhtu, kus  $P \notin \mathcal{D}$ . Siis punkti  $P$  iga ümbrus sisaldab hulka  $\mathcal{D}$  mittekuuluva punkti  $P$ . Kuna tingimuse (ii) põhjal sisaldab punkti  $P$  iga ümbrus ka hulga  $\mathcal{D}$  punkte, siis  $P \in \partial\mathcal{D}$ , seega  $P \in \overline{\mathcal{D}}$  (sest  $\partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$ ), nagu soovitud.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Kehtigu (ii). Siis iga  $n \in \mathbb{N}$  korral leidub punkt  $P_n \in U_{\frac{1}{n}}(P) \cap \mathcal{D}$ . Punktid  $P_n$  rahuldavad tingimusi

$$0 \leq d(P_n, P) < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

seega jada piirväärtuse sändvitšsteoreemi põhjal ka  $d(P_n, P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , s.t.  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$ . Kuna  $P_n \in \mathcal{D}$  iga  $n \in \mathbb{N}$  korral, siis tingimus (iii) kehtib.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (iii) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Kuna  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$  ehk, teisisõnu,  $d(P_n, P) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , siis leidub  $n \in \mathbb{N}$  nii, et  $d(P_n, P) < \varepsilon$ . Aga nüüd  $P_n \in U_\varepsilon(P) \cap \mathcal{D}$ ; järelikult (ii) kehtib. □

**Lause 2.3.** *Hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  on kinnine parajasti siis, kui ta sisaldab kõik oma elementide koonduvate jadade piirväärtused, s.t. parajasti siis, kui kehtib implikatsioon*

$$\left[ P_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots, \quad P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P \right] \implies P \in \mathcal{D}. \quad (2.2)$$

**TÕESTUS.** *Tarvilikkus.* Olgu hulk  $\mathcal{D}$  kinnine ning olgu punktid  $P_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots$ , ja  $P \in \mathbb{R}^m$  sellised, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$ . Peame näitama, et  $P \in \mathcal{D}$ . Kuna hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine, siis  $\mathcal{D} = \overline{\mathcal{D}}$ , seega piisab näidata, et  $P \in \overline{\mathcal{D}}$ . See sisalduvus järeldub lause 2.2 samaväärsusest (i)  $\Leftrightarrow$  (iii).

*Piisavus.* Kehtigu implikatsioon (2.2) ning olgu  $P \in \partial\mathcal{D}$ . Hulga  $\mathcal{D}$  kinnisuseks piisab näidata, et  $P \in \mathcal{D}$ . Kuna  $P \in \partial\mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}$ , siis lause 2.2 samaväärsuse (i)  $\Rightarrow$  (iii) põhjal leiduvad punktid  $P_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$ . Implikatsiooni (2.2) põhjal järeldub siit, et  $P \in \mathcal{D}$ , nagu soovitud.  $\square$

**Ülesanne 2.2.** Järeldada lause 1.7 (kinnise kera kinnisus ja lahtise kera lahtisus) lausest 2.3.

**NÄPUNÄIDE.** Kasutada ülesannet 2.1. Lahtise kera lahtisuse tõestuseks näidata, et tema täiend on kinnine ja rakendada lauset 1.8.

### 2.3. Hulga kuhjumispunkt

**Definitsioon 2.3.** Punkti  $P \in \mathbb{R}^m$  nimetatakse hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  *kuhjumispunktiks*, kui iga  $\varepsilon > 0$  korral  $U_\varepsilon(P) \cap (\mathcal{D} \setminus \{P\}) \neq \emptyset$  (s.t. punkti  $P$  iga ümbrus sisaldab temast erinevaid hulga  $\mathcal{D}$  punkte).

**Märkus 2.1.** Rõhutame, et ruumis  $\mathbb{R}^m$  üldjuhul

- hulgal võib kuhjumispunkte leiduda, aga võib ka mitte leiduda;
- hulga kuhjumispunkt võib kuuluda sellesse hulka, aga võib ka mitte kuuluda.

**Ülesanne 2.3.** Tõestada, et

- ruumi  $\mathbb{R}^m$  lõplikul alamhulgal ei ole kuhjumispunkte;
- kui  $r > 0$ ,  $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ ,  $P_1 := (x_1^0 + r, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ , siis  $P_1$  on nii lahtise kera  $B(P_0, r)$  kui ka kinnise kera  $\overline{B}(P_0, r)$  kuhjumispunkt, kusjuures  $P_1 \in \overline{B}(P_0, r)$ , kuid  $P_1 \notin B(P_0, r)$ .

**Lause 2.4.** *Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P \in \mathbb{R}^m$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- $P$  on hulga  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt;
- $P \in \overline{\mathcal{D} \setminus \{P\}}$  (s.t. punkt  $P$  kuulub hulga  $\mathcal{D} \setminus \{P\}$  sulundisse);
- leiduvad punktid  $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P\}, n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P$  (s.t. leidub punktist  $P$  erinevate hulga  $\mathcal{D}$  punktide jada, mis koondub punktiks  $P$ ).

**TÕESTUS.** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) järeldub vahetult kuhjumispunkti definitsioonist ja lause 2.2 samaväärsusest (ii)  $\Leftrightarrow$  (i).

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) järeldub vahetult lause 2.2 samaväärsusest (i)  $\Leftrightarrow$  (iii).  $\square$

## 2.4. Bolzano–Weierstrassi teoreem

**Definitsioon 2.4.** Öeldakse, et jada  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tõkestatud, kui tema elementide hulk  $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$  on tõkestatud.

**Ülesanne 2.4.** Tõestada, et koonduv jada ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tõkestatud.

**Teoreem 2.5** (Bolzano–Weierstrassi teoreem). *Igal tõkestatud jadal ruumis  $\mathbb{R}^m$  leidub koonduv osajada.*

**TÕESTUS.** Olgu  $(P_n)_{n=1}^{\infty} = ((x_1^n, \dots, x_m^n))_{n=1}^{\infty}$  tõkestatud jada ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Lause 1.10 põhjal on ka selle jada punktide vastavate koordinaatide jadad

$$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (x_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \dots, \quad (x_m^n)_{n=1}^{\infty}$$

tõkestatud. Seega Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal (arvjadade jaoks) leidub jada  $(P_n)_{n=1}^{\infty}$  punktide esimeste koordinaatide jadal  $(x_1^n)_{n=1}^{\infty}$  koonduv osajada  $(x_1^{k_1^n})_{n=1}^{\infty}$ , teiste koordinaatide (osa)jadal  $(x_2^{k_1^n})_{n=1}^{\infty}$  leidub koonduv osajada  $(x_2^{k_2^n})_{n=1}^{\infty}$  jne. Kirjeldatud protseduuri tulemusena me saame (kasvavad) indekse jada

$$(k_1^n)_{n=1}^{\infty}, \quad (k_2^n)_{n=1}^{\infty}, \quad \dots, \quad (k_m^n)_{n=1}^{\infty}$$

nii, et

- jada  $(k_n^{i+1})_{n=1}^{\infty}$  on jada  $(k_n^i)_{n=1}^{\infty}$  osajada iga  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  korral;
- jada  $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$  koondub iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral.

Aga nüüd kõik vastavate koordinaatide (osa)jadad  $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , koonduvad (sest iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral on  $(x_i^{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$  koonduva jada  $(x_i^{k_n^i})_{n=1}^{\infty}$  osajada), seega osajada  $(P_{k_n^m})_{n=1}^{\infty}$  koondub (sest ta koondub koordinaaditi).  $\square$

## 2.5. Cauchy kriteerium jada koonduvuseks

**Definitsioon 2.5.** Öeldakse, et jada  $(P_n)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  on *Cauchy jada* ehk *fundamentaaljada*, kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ k, n \in \mathbb{N}, \quad k, n \geq N \right] \implies d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

**Teoreem 2.6** (Cauchy kriteerium jada koonduvuseks). *Jada ruumis  $\mathbb{R}^m$  koondub parajasti siis, kui ta on Cauchy jada.*

**TÕESTUS.** *Tarvilikkus.* Koondugu jada  $(P_n)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  punktiks  $P \in \mathbb{R}^m$  ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Veendumaks, et  $(P_n)$  on Cauchy jada, peame leidma indeksi  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ k, n \in \mathbb{N}, \quad k, n \geq N \right] \implies d(P_k, P_n) < \varepsilon.$$

Mis tahes  $k, n \in \mathbb{N}$  korral kolmnurga võrratuse põhjal

$$d(P_k, P_n) \leq d(P_k, P) + d(P, P_n).$$

Niisiis, kui valida indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ n \in \mathbb{N}, n \geq N \right] \implies d(P_n, P) < \frac{\varepsilon}{2},$$

siis kõikide  $k, n \geq N$  korral

$$d(P_k, P_n) \leq d(P_k, P) + d(P, P_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

*Piisavusele* esitame kaks erinevat tõestust. Neist esimene toetub jada koonduvuse kirjeldusele ruumis  $\mathbb{R}^m$  (lausele 2.1) ja Cauchy kriteeriumile arvjadade koonduvuseks, teine aga Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5.

*Piisavuse esimene tõestus.* Olgu  $(P_n)_{n=1}^\infty = ((x_1^n, \dots, x_m^n))_{n=1}^\infty$  Cauchy jada ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Siis ka selle jada elementide vastavate koordinaatide jaded

$$(x_1^n)_{n=1}^\infty, \quad (x_2^n)_{n=1}^\infty, \quad \dots, \quad (x_m^n)_{n=1}^\infty \quad (2.3)$$

on Cauchy jaded, sest mis tahes  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral lemma 1.5 põhjal

$$|x_i^k - x_i^n| \leq d(P_k, P_n) \quad \text{kõikide } k, n \in \mathbb{N} \text{ korral};$$

seega Cauchy kriteeriumi põhjal arvjada koonduvuseks jaded (2.3) koonduvad, s.t. jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  koondub koordinaaditi; järelikult lause 2.1 põhjal jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  koondub.

*Piisavuse teine tõestus.* Olgu  $(P_n)$  Cauchy jada ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Jada  $(P_n)$  koonduvuseks piisab näidata, et

- (1) iga Cauchy jada ruumis  $\mathbb{R}^m$  on tõkestatud;
- (2) kui Cauchy jadal ruumis  $\mathbb{R}^m$  on olemas koonduv osajada, siis see jada koondub samaks piirväärtuseks, milleks see osajadagi.

Tõepoolest, kui väited (1) ja (2) kehtivad, siis väite (1) ja Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub jadal  $(P_n)$  koonduv osajada, seega väite (2) põhjal jada  $(P_n)$  koondub.

**Ülesanne 2.5.** Tõestada väited (1) ja (2).

□

## 2.6. Täiendavaid ülesandeid

**Ülesanne 2.6.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk ja  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$  kinnine tõkestatud hulk, kusjuures  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ . Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise ja kinnise kera keskpunktiga  $P \in \mathbb{R}^m$  ja raadiusega  $\alpha > 0$  vastavalt sümboolitega  $B(P, \alpha)$  ja  $\overline{B}(P, \alpha)$ , s.t.  $B(P, \alpha) := \{Q \in \mathbb{R}^m : d(P, Q) < \alpha\}$  ja  $\overline{B}(P, \alpha) := \{Q \in \mathbb{R}^m : d(P, Q) \leq \alpha\}$ .

- (a) Tõestada, et leidub reaalarv  $\alpha > 0$  nii, et  $B(P, \alpha) \subset \mathcal{U}$  iga  $P \in \mathcal{K}$  korral.
- (b) Väitest (a) järeldub niisuguse reaalarvu  $\gamma > 0$  olemasolu, et  $\overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$  iga  $P \in \mathcal{K}$  korral. Tõestada, et ühend  $\bigcup_{P \in \mathcal{K}} \overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$  on (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) kinnine tõkestatud hulk.

**NB!** Ülesannet 2.6 kasutatakse teoreemi 11.1.11 tõestuses.

## § 3. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus ja pidevus

### 3.1. Mitme muutuja funktsiooni mõiste

**Definitsioon 3.1.** Kujutusi

$$f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{kus } \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m, \quad (3.1)$$

nimetatakse *m* muutuja funktsioonideks.

Kõikvõimalikke *m* muutuja funktsioone, kus  $m \geq 2$ , nimetatakse *mitme muutuja funktsioonideks*.

Funktsiooni (3.1) määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  iga punkt  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}$  on üheselt määratud oma koordinaatidega  $x_1, \dots, x_m$ ; teiselt poolt, punktiga  $P \in \mathcal{D}$  on üheselt määratud tema koordinaadid  $x_1, \dots, x_m$ . Termin “*m* muutuja funktsioon” on niisiis põhjendatud asjaoluga, et sellise funktsiooni väärtused on määratud määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  punktide koordinaate tähistavate *m* muutuja  $x_1, \dots, x_m$  väärtustega. Neid muutujaid (nagu ka määramispiirkonna punkte tähistavat muutujat  $P$ ) nimetatakse funktsiooni (3.1) *argumentideks* ning, kui selle funktsiooni väärtuste märkimiseks kasutada muutujat  $u$ , siis selle funktsiooni märkimiseks kasutatakse ka tähistust

$$u = f(x_1, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad u = f(P) \quad \text{või} \quad u = u(x_1, \dots, x_m) \quad \text{või} \quad u = u(P).$$

### 3.2. Mitme muutuja funktsiooni piirväärtus

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt.

**Definitsioon 3.2.** Öeldakse, et funktsiooni  $f$  *piirväärtus* punktis  $P_0$  (või piirväärtus protsessis  $P \rightarrow P_0$ ) on arv  $c$  (või et funktsioon  $f$  *koondub* arvuks  $c$  protsessis  $P \rightarrow P_0$  (või argumenti väärtuse lähenemisel punktile  $P_0$ )) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} c,$$

või

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} f(x_1, \dots, x_m) = c \quad \text{või} \quad f(x_1, \dots, x_m) \xrightarrow{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ \vdots \\ x_m \rightarrow x_m^0}} c,$$

kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, 0 < d(P, P_0) < \delta \right] \implies |f(P) - c| < \varepsilon.$$

Ruumis  $\mathbb{R}^m$  kasutame piirprotsessi  $(x_1, \dots, x_m) \longrightarrow (x_1^0, \dots, x_m^0)$  märkimisel ka tähistust  $x_1, \dots, x_m \longrightarrow x_1^0, \dots, x_m^0$ ; näiteks tähistame funktsiooni  $u = f(x, y)$  piirväärtust punktis  $(x_0, y_0)$  sümboliga  $\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f(x, y)$ ; kui seejuures  $x_0 = y_0 =: a$ , siis kirjutame  $\lim_{x, y \rightarrow a, a}$  asemel lihtsalt  $\lim_{x, y \rightarrow a}$ .

**Definitsioon 3.3.** Kui  $f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0$ , siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on punktis  $P_0$  lõpmata väike (või protsessis  $P \rightarrow P_0$  lõpmata väike või ka, et funktsioon  $f$  hääbub protsessis  $P \rightarrow P_0$ ).

**Definitsioon 3.4.** Öeldakse, et funktsiooni  $f$  piirväärtus punktis  $P_0$  (või piirväärtus protsessis  $P \rightarrow P_0$ ) on  $\infty$  (loetakse: lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} \infty,$$

kui iga reaalarvu  $E > 0$  korral leidub realarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, 0 < d(P, P_0) < \delta \right] \implies f(P) > E.$$

**Definitsioon 3.5.** Öeldakse, et funktsiooni  $f$  piirväärtus punktis  $P_0$  (või piirväärtus protsessis  $P \rightarrow P_0$ ) on  $-\infty$  (loetakse: miinus lõpmatus) ja kirjutatakse

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = -\infty \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} -\infty,$$

kui iga reaalarvu  $E > 0$  korral leidub realarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, 0 < d(P, P_0) < \delta \right] \implies f(P) < -E.$$

**Definitsioon 3.6.** Kui  $|f(P)| \xrightarrow{P \rightarrow P_0} \infty$ , siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on punktis  $P_0$  lõpmata suur (või protsessis  $P \rightarrow P_0$  lõpmata suur).

**Teoreem 3.1** (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteerium). Olgu  $P_0$  funktsiooni  $f$  määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt ning olgu  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

$$(i) \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} c;$$

$$(ii) \quad \left[ P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}, n = 1, 2, \dots, P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0 \right] \implies f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c.$$

*Teisisõnu, funktsiooni  $f$  piirväärtus punktis  $P_0$  on  $c$  parajasti siis, kui iga punktiks  $P_0$  koonduva punktist  $P_0$  erinevate määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  punktide jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  korral on vastava funktsiooni väärtuste jada  $(f(P_n))_{n=1}^\infty$  piirväärtus  $c$ .*

**TÕESTUS.** Tõestame teoreemi ainult juhu  $c \in \mathbb{R}$  jaoks. Juhtudel  $c = \infty$  ja  $c = -\infty$  on tõestus analoogiline.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i) ning olgu punktid  $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sellised, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$ . Fikseerides vabalt  $\varepsilon > 0$ , piisab meil implikatsiooni (i) $\Rightarrow$ (ii) tõestuseks leida indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ n \in \mathbb{N}, n \geq N \right] \implies |f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

Kuna  $f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} c$ , siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, 0 < d(P, P_0) < \delta \right] \implies |f(P) - c| < \varepsilon.$$

Kuna  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$ , siis leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$\left[ n \in \mathbb{N}, n \geq N \right] \implies d(P_n, P_0) < \delta.$$

Kui nüüd  $n \geq N$ , siis  $P_n \in \mathcal{D}$  ja  $0 < d(P_n, P_0) < \delta$  ning järelikult

$$|f(P_n) - c| < \varepsilon.$$

(ii) $\implies$ (i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et (i) ei kehti. Siis leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  nii, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral leidub punkt  $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ , mille korral

$$d(P_n, P_0) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad |f(P_n) - c| \geq \varepsilon.$$

Aga nüüd  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$ , kuid mitte  $f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ , mis on vastuolus eeldusega (ii).  $\square$

**Järeldus 3.2.** *Mitme muutuja funktsioonil saab antud punktis eksisteerida ülimalt üks piirväärtus.*

**TÕESTUS.** Olgu  $P_0$  funktsiooni  $f$  määramispiirkonna  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumispunkt ning olgu  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$  sellised, et

$$f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} \beta.$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et  $\alpha = \beta$ . Selleks valime mingi punktiks  $P_0$  koonduva punktist  $P_0$  erinevate määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  punktide jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  (nii-sugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest  $P_0$  on hulga  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt); siis funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi (teoreemi 3.1) põhjal

$$f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{ja} \quad f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$$

ning järelikult arvjada piirväärtuse ühesuse tõttu  $\alpha = \beta$ , nagu soovitud.  $\square$

### 3.3. Funktsiooni piirväärtuse omadusi

Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funktsioonide  $f$  ja  $g$  summa  $f + g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , vahe  $f - g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , korrutis  $f \cdot g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ning, kui  $g(P) \neq 0$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral, siis ka jagatis  $\frac{f}{g}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  on defineeritud “punktiviisi”:

$$\begin{aligned} (f + g)(P) &= f(P) + g(P), & (f - g)(P) &= f(P) - g(P), \\ (f \cdot g)(P) &= f(P) \cdot g(P), & \frac{f}{g}(P) &= \frac{f(P)}{g(P)}, \end{aligned} \quad P \in \mathcal{D}.$$

**Teoreem 3.3.** Eksisteerigu funktsioonidel  $f$  ja  $g$  lõplik piirväärtus oma määramispiirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumispunktis  $P_0$ . Siis ka nende funktsioonide summal  $f + g$ , vahel  $f - g$ , korrutisel  $fg$  ning, kui  $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \neq 0$ , siis ka jagatisel  $f/g$  eksisteerib punktis  $P_0$  lõplik piirväärtus, kusjuures

$$\begin{aligned}\lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) + g(P)) &= \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) + \lim_{P \rightarrow P_0} g(P), \\ \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) - g(P)) &= \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) - \lim_{P \rightarrow P_0} g(P), \\ \lim_{P \rightarrow P_0} (f(P) g(P)) &= \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \lim_{P \rightarrow P_0} g(P), \\ \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} &= \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)}.\end{aligned}$$

TÕESTUS. Tähistame

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) =: \beta.$$

Olgu punktid  $P_n \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sellised, et  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$ . Teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$f(P_n) \pm g(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \pm \beta, \quad f(P_n) g(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \beta \quad \text{ja} \quad \frac{f(P_n)}{g(P_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta}$$

(siin viimane koonduvus peab aset leidma eeldusel, et  $\beta \neq 0$ ), mis kehtib arvjada piirväärtuse vastavate omaduste põhjal, sest (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \quad \text{ja} \quad g(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta.$$

□

**Lause 3.4** (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse monotoonsus). Leidugu funktsioonide  $f$  ja  $g$  määramispiirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumispunktil  $P_0$  ümbrus  $\mathcal{U}$ , mille korral

$$f(P) \leq g(P) \quad \text{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

Kui eksisteerivad piirväärtused  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  ja  $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$ , siis

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \leq \lim_{P \rightarrow P_0} g(P).$$

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) =: \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) =: \beta.$$

Lause tõestuseks peame näitama, et  $\alpha \leq \beta$ . Selleks valime mingi punktiks  $P_0$  koonduva punktist  $P_0$  erinevate hulga  $\mathcal{D}$  punktide jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  (niisugune jada eksisteerib

lause 2.4 põhjal, sest  $P_0$  on hulga  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt). Kuna  $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P_0$ , siis leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$n \geq N \implies P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes  $n \geq N$  korral  $P_n \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\}$ , seega

$$f(P_n) \leq g(P_n).$$

Kuna teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \alpha \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = \beta,$$

siis arvjada piirväärtuse monotoonsuse tõttu  $\alpha \leq \beta$ , nagu soovitud.  $\square$

**Lause 3.5** (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse sändvitšteoreem). *Leidugu funktsioonide  $f$ ,  $g$  ja  $h$  määramispiirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumispunktil  $P_0$  ümbrus  $\mathcal{U}$ , mille korral*

$$f(P) \leq g(P) \leq h(P) \quad \text{iga } P \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

*Kui eksisteerivad piirväärtused  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  ja  $\lim_{P \rightarrow P_0} h(P)$ , kusjuures need piirväärtused on võrdsed:*

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{P \rightarrow P_0} h(P) =: c, \tag{3.2}$$

*siis eksisteerib ka piirväärtus  $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$ , kusjuures*

$$\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = c.$$

**TÕESTUS.** Eksisteerigu piirväärtused  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$  ja  $\lim_{P \rightarrow P_0} h(P)$  ning kehtigu võrdus (3.2). Olgu  $(P_n)_{n=1}^\infty$  punktiks  $P_0$  koonduv punktist  $P_0$  erinevate määramispiirkonnas  $\mathcal{D}$  punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest  $P_0$  on hulga  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt). Veendumaks, et  $\lim_{P \rightarrow P_0} g(P) = c$ , piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(P_n) = c. \tag{3.3}$$

Kuna  $P_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} P_0$ , siis leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$n \geq N \implies P_n \in \mathcal{U}.$$

Nüüd mis tahes  $n \geq N$  korral  $P_n \in (\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \setminus \{P_0\}$ , seega

$$f(P_n) \leq g(P_n) \leq h(P_n).$$

Kuna (jällegi teoreemi 3.1 põhjal)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(P_n) = c,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal kehtib (3.3).  $\square$

**Lause 3.6.** Olgu  $P_0$  funktsioonide  $f$  ja  $g$  määramispiirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumis-punkt, kusjuures

$$(1) \quad f(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0;$$

(2) funktsioon  $g$  on punkti  $P_0$  mingis ümbruses tõkestatud, s.t leiduvad punkti  $P_0$  ümbrus  $\mathcal{U}$  ja arv  $M \geq 0$  nii, et

$$|g(P)| \leq M \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{D} \text{ korral.}$$

Siis ka

$$f(P)g(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0.$$

Teisisõnu, lause 3.6 ütleb, et antud piirprotsessis hääbuva funktsiooni ja tõkestatud funktsiooni korrutis on selles piirprotsessis hääbuv.

LAUSE 3.6 TÕESTUS. Olgu  $(P_n)_{n=1}^\infty$  punktiks  $P_0$  koonduv punktist  $P_0$  erinevate määramispiirkonnas  $\mathcal{D}$  punktide jada (niisugune jada eksisteerib lause 2.4 põhjal, sest  $P_0$  on hulga  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt). Veendumaks, et  $f(P)g(P) \xrightarrow{P \rightarrow P_0} 0$ , piisab teoreemi 3.1 (funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal näidata, et

$$f(P_n)g(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.4)$$

Selleks märgime, et

- $f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (see järeldub eeldusest (1) teoreemi 3.1 põhjal);
- jada  $(g(P_n))_{n=1}^\infty$  on tõkestatud, sest kuna  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$ , siis leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$n \geq N \implies P_n \in \mathcal{U},$$

seega

$$|g(P_n)| \leq M \quad \text{iga } n \geq N \text{ korral,}$$

järelikult

$$|g(P_n)| \leq \max\{|g(P_1)|, \dots, |g(P_N)|, M\} \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kuna hääbuva arvjada ja tõkestatud arvjada korrutis on hääbuv arvjada, siis (3.4) kehtib.  $\square$

### 3.4. Mitme muutuja funktsiooni pidevus

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ .

**Definitsioon 3.7.** Öeldakse, et funktsioon  $f$  on *pidev* punktis  $P_0$ , kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, d(P, P_0) < \delta \right] \implies |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon.$$

Paneme tähele, et

- funktsioon  $f$  on pidev igas tema määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  *isoleeritud punktis* (s.t. igas niisuguses hulga  $\mathcal{D}$  punktis, millel leidub ümbrus, mis ei sisalda ühtegi sellest punktist erinevat hulga  $\mathcal{D}$  punkti);
- kui  $P_0$  on määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt, siis funktsiooni  $f$  pidevus selles punktis tähendab, et

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

Olgu  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$  sellised, et  $P := (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{D}$ . Vahet

$$\Delta u := \Delta u(P) := f(P) - f(P_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  (*täis*)*muuduks* punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ . Funktsiooni  $f$  pidevuse tingimuse selle funktsiooni määramispiirkonna kuhjumispunkti jaoks võime kirja panna ka järgneval nn. *diferentskujul*: kui  $P_0 \in \mathcal{D}$  on funktsiooni  $u = f(P)$  määramispiirkonna kuhjumispunkt, siis see funktsioon on pidev punktis  $P_0$  parajasti siis, kui

$$\Delta u \xrightarrow{\Delta x_i \rightarrow 0, i=1, \dots, m} 0.$$

Järgnev teoreem on kiire järeldus teoreemist 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumist).

**Teoreem 3.7** (mitme muutuja funktsiooni pidevuse Heine kriteerium). *Olgu funktsioon  $f$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *funktsioon  $f$  on pidev punktis  $P_0$ ;*
- (ii)  $\left[ P_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots, P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0 \right] \implies f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(P_0).$

*Teisisõnu, funktsioon  $f$  on pidev punktis  $P_0$  parajasti siis, kui iga punktiks  $P_0$  koonduva määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  punktide jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  korral koondub vastav funktsiooni väärtuste jada  $(f(P_n))_{n=1}^\infty$  funktsiooni väärtuseks  $f(P_0)$  punktis  $P_0$ .*

**Definitsioon 3.8.** Öeldakse, et funktsioon  $f$  on *pidev*, kui ta on pidev igas oma määramispiirkonna punktis.

Olgu  $\emptyset \neq \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ . Öeldakse, et funktsioon  $f$  on pidev hulgas  $\mathcal{D}_0$ , kui ahend  $f|_{\mathcal{D}_0}$  on pidev funktsioon.

### 3.5. Piirväärtus protsessis $\|P\| \rightarrow \infty$

**Definitsioon 3.9.** Olgu  $P \in \mathbb{R}^m$ . Arvu

$$\|P\| := d(P, (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu null}}))$$

(s.t. punkti  $P$  kaugust punktist  $(\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu null}}))$  nimetatakse punkti  $P$  *normiks*.

**Definitsioon 3.10.** Olgu funktsiooni  $f$  määramispiirkond  $\mathcal{D}$  tõkestamata. Me ütleme, et funktsiooni  $f$  piirväärtus protsessis  $\|P\| \rightarrow \infty$  on

- arv  $c \in \mathbb{R}$ , kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $D > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, \|P\| > D \right] \implies |f(P) - c| < \varepsilon;$$

- $\infty$  (loetakse: lõpmatus), kui iga reaalarvu  $E > 0$  korral leidub reaalarv  $D > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, \|P\| > D \right] \implies f(P) > E;$$

- $-\infty$  (loetakse: miinus lõpmatus), kui iga reaalarvu  $E > 0$  korral leidub reaalarv  $D > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, \|P\| > D \right] \implies f(P) < -E.$$

Kui funktsiooni  $f$  piirväärtus protsessis  $\|P\| \rightarrow \infty$  on  $c$  ( $c \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ ), siis me kirjutame

$$\lim_{\|P\| \rightarrow \infty} f(P) = c \quad \text{või} \quad f(P) \xrightarrow{\|P\| \rightarrow \infty} c.$$

Kehtib teoreemi 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) järgnev analoog.

**Teoreem 3.8.** Olgu funktsiooni  $f$  määramispiirkond ülalt tõkestamata ning olgu  $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $f(P) \xrightarrow{\|P\| \rightarrow \infty} c$ ;
- (ii)  $\left[ P_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots, \|P_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \right] \implies f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c.$

Toetudes teoreemile 3.8, on lihtne tõestada järelduse 3.2 analoog mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse ühesusest protsessis  $\|P\| \rightarrow \infty$  ning samuti teoreemi 3.3 ja lausete 3.4–3.6 analoogid piirprotsessi  $\|P\| \rightarrow \infty$  jaoks eeldusel, et funktsioonide  $f$  ja  $g$  (ning lauses 3.5 ka funktsiooni  $h$ ) ühine määramispiirkond  $\mathcal{D}$  on ülalt tõkestamata.

### 3.6. Piirväärtus mööda pidevat joont

Olgu funktsioon  $f$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , olgu  $P_0$  määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt ning olgu  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  (siin  $T \subset \mathbb{R}$  on mingi intervall) pidev joon ruumis  $\mathbb{R}^m$ , mis läbib punkti  $P_0$  ning mis sisaldub määramispiirkonnas  $\mathcal{D}$ , välja arvatud, võib-olla, punkt  $P_0$ , millest me ei eelda kuulumist määramispiirkonda  $\mathcal{D}$ . Seejuures me eeldame, et leidub parajasti üks  $t_0 \in T$  nii, et  $P_0 = \Phi(t_0)$ .

**Definitsioon 3.11.** Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\Phi(t)),$$

siis seda piirväärtust nimetame funktsiooni  $f$  piirväärtuseks punktis  $P_0$  (või argumendi väärtuse lähenemisel punktile  $P_0$ ) *mööda joont*  $\Phi$ ,

**Lause 3.9.** Kui funktsioonil  $f$  eksisteerib oma määramispiirkonna  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  kuhjumispunktis  $P_0$  (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) =: c, \quad (3.5)$$

siis  $c$  on ka funktsiooni  $f$  piirväärtus punktis  $P_0$  mööda mis tahes pidevat joont (mis läbib punkti  $P_0$  ning mis sisaldub määramispiirkonnas  $\mathcal{D}$ , välja arvatud, võib-olla, punkt  $P_0$ ).

**TÕESTUS.** Eksisteerigu funktsioonil  $f$  punktis  $P_0$  (lõplik või lõpmatu) piirväärtus (3.5), olgu punkti  $P_0$  sisaldav ning määramispiirkonnas  $\mathcal{D}$  sisalduv (välja arvatud, võib-olla, punkt  $P_0$ ) pidev joon antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \quad \dots, \quad x_m = \phi_m(t), \quad t \in T,$$

kus  $T \subset \mathbb{R}$  on mingi intervall, ning olgu  $t_0 \in T$  (ainus) selline punkt, et

$$P_0 = (\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0)).$$

Peame näitama, et

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) = c. \quad (3.6)$$

Olgu  $(t_n)_{n=1}^\infty$  mingi punktist  $t_0$  erinevate intervalli  $T$  punktide jada, mille korral  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$ . Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab võrduseks (3.6) näidata, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(\phi_1(t_n), \dots, \phi_m(t_n)) = c$$

ehk, tähistades iga  $n \in \mathbb{N}$  korral

$$P_n := (\phi_1(t_n), \dots, \phi_m(t_n)),$$

piisab näidata, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = c. \quad (3.7)$$

Funktsioonide  $\phi_1, \dots, \phi_m$  pidevuse tõttu funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi põhjal

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_1(t_n) = \phi_1(t_0), \quad \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_m(t_n) = \phi_m(t_0);$$

s.t. jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  koondub punktiks  $P_0$  koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$  ning järelikult lause 3.1 (mitme muutuja funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi) põhjal kehtib (3.7) (sest  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = c$ ).  $\square$

**Ülesanne 3.1.** Tõestada lause 3.9 toetudes punkti  $P_0$  läbiva joone esitusele kujul  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus  $T \subset \mathbb{R}$  on mingi intervall (ja mitte selle joone esitusele parameetrilisel kujul nagu eelnevas tõestuses), ning vahetult piirväärtuse definitsioonile (ja mitte piirväärtuse Heine kriteeriumile nagu eelnevas tõestuses).

**NÄPUNÄIDE.** Vaadelda eraldi juhtusid, kus  $c \in \mathbb{R}$ ,  $c = \infty$  ja  $c = -\infty$ .

**Näide 3.1.** Veendume, et kahe muutuja funktsiooni  $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$  piirväärtus punktis  $(0, 0)$

**NB!** Näitele 3.1 viidatakse näites 3.2.

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (3.8)$$

ei eksisteeri. Vaadeldava kahe muutuja funktsiooni piirväärtus punktis  $(0, 0)$  mööda joont  $y = x$  (parameetri rollis on siin muutuja  $x$ ) on

$$\lim_{\substack{x, y \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2};$$

piirväärtus punktis  $(0, 0)$  mööda joont  $y = 2x$  (parameetri rollis on siin muutuja  $x$ ) on

$$\lim_{\substack{x, y \rightarrow 0 \\ y=2x}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 2x}{x^2 + (2x)^2} = \frac{2}{5};$$

need piirväärtused on erinevad; järelikult lause 3.9 põhjal piirväärtus (3.8) ei eksisteeri.

### 3.7. Korduvad piirväärtused

Olgu kahe muutuja funktsioon  $u = f(x, y)$  määratud punkti  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses, välja arvatud, võib-olla, punktis  $(x_0, y_0)$  endas. Eksisteerigu iga punkti  $x$  korral koordinaadi  $x_0$  mingist ümbrusest (välja arvatud, võib-olla, punkti  $x_0$  enda korral) lõplik piirväärtus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) =: g(x).$$

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =: \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y), \quad (3.9)$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *korduvaks piirväärtuseks*.

Analoogiliselt defineeritakse korduv piirväärtus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \quad (3.10)$$

(ning samuti ka korduvad piirväärtused rohkem kui kahe muutuja funktsioonide jaoks).

Üldiselt ei järeldu korduvate piirväärtuste (3.9) ja (3.10) olemasolust piirväärtuse

$$\lim_{x,y \rightarrow x_0,y_0} f(x,y). \quad (3.11)$$

olemasolu.

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 57, näide 2.3.8

**Näide 3.2.** Piirväärtus

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

ei eksisteeri (vt. näidet 3.1); samas vastavad korduvad piirväärtused eksisteerivad: mis tahes  $x \neq 0$  korral

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

ning seega  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ . Analoogiliselt saame, et ka  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ .

Samuti ei järeldu piirväärtuse (3.11) olemasolust korduvate piirväärtuste (3.9) ja (3.10) olemasolu.

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 57, näide 2.3.9

**Näide 3.3.** Piirväärtus

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$$

on olemas, kuid üks vastavatest korduvatest piirväärtustest ei eksisteeri. Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele:  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , on piirprotsess  $x, y \rightarrow 0$  sama, mis piirprotsess  $r \rightarrow 0$ ; seega

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \phi \sin \frac{1}{r \cos \phi} = 0,$$

sest hääbuv ja tõkestatud funktsiooni korrutis on hääbuv (märgime, et funktsioon  $(\phi, r) \mapsto \sin \phi \sin \frac{1}{r \cos \phi}$  on tõkestatud). Samuti mis tahes  $x \neq 0$  korral  $\lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = 0$ , seega

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Samas mitte ühegi  $y \neq 0$  korral piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$  ei eksisteeri, seega ei eksisteeri ka korduv piirväärtus  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ .

**Lause 3.10.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $u = f(x, y)$  määratud punkti  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses, välja arvatud, võib-olla, punktis  $(x_0, y_0)$  endas, kusjuures eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{x,y \rightarrow x_0,y_0} f(x,y) =: c.$$

(a) Kui iga punkti  $x$  korral punkti  $x_0$  mingist ümbrusest (välja arvatud, võib-olla, punkti  $x_0$  enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) =: g(x), \quad (3.12)$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y)$ , kusjuures

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lim_{x,y \rightarrow x_0,y_0} f(x,y) = c.$$

- (b) Kui iga punkti  $y$  korral punkti  $y_0$  mingist ümbrusest (välja arvatud, võib-olla, punkti  $y_0$  enda korral) eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

siis eksisteerib ka korduv piirväärtus  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ , kusjuures

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f(x, y) = c.$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse sümmeetriliselt.)

Olgu reaalarv  $\delta > 0$  selline, et iga (punktist  $x_0$  erineva) punkti  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  korral eksisteerib lõplik piirväärtus (3.12), ning olgu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  punktiks  $x_0$  koonduv punktist  $x_0$  erinevate vahemiku  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  punktide jada. Funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piisab väite (a) tõestuseks näidata, et  $g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ .

Iga  $n \in \mathbb{N}$  korral, arvestades, et  $f(x_n, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} g(x_n)$ , saame valida punkti  $y_n$  nii, et

$$|y_n - y_0| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |f(x_n, y_n) - g(x_n)| < \frac{1}{n}.$$

Kuna  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  ja  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$ , siis lause 2.1 põhjal  $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x_0, y_0)$  ruumis  $\mathbb{R}^2$ , seega funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal  $f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$  ning järelikult

$$g(x_n) = (g(x_n) - f(x_n, y_n)) + f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$$

(siin  $g(x_n) - f(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , sest  $|g(x_n) - f(x_n, y_n)| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ), nagu soovitud.  $\square$

## § 4. Pidevate mitme muutuja funktsioonide põhiomadused

### 4.1. Pideva funktsiooni märgi säilivus

**Teoreem 4.1.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu funktsioon  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  pidev punktis  $P_0 \in \mathcal{D}$ . Kui  $f(P_0) \neq 0$ , siis leidub  $\delta > 0$  nii, et

$$\text{iga } P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D} \text{ korral } f(P) \neq 0 \text{ ja } \operatorname{sgn} f(P) = \operatorname{sgn} f(P_0)$$

(s.t. leidub punkti  $P_0$  ümbrus, milles selle funktsiooni väärtused erinevad nullist ning on sama märgiga, mis  $f(P_0)$ ).

**TÕESTUS.** Tähistame  $\alpha := f(P_0) \neq 0$ . Funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu punktis  $P_0$  leidub  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P \in \mathcal{D}, d(P, P_0) < \delta \right] \implies |f(P) - f(P_0)| < \frac{|\alpha|}{2},$$

s.t. iga  $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$  korral

$$f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} < f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2}.$$

Niisiis, kui  $f(P_0) > 0$ , siis iga  $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$  korral

$$f(P) > f(P_0) - \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) - \frac{f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} > 0;$$

kui aga  $f(P_0) < 0$ , siis iga  $P \in U_\delta(P_0) \cap \mathcal{D}$  korral

$$f(P) < f(P_0) + \frac{|\alpha|}{2} = f(P_0) + \frac{-f(P_0)}{2} = \frac{f(P_0)}{2} < 0.$$

□

### 4.2. Aritmeetilised tehted pidevate funktsioonidega

Järgnev teoreem on kiire järeldus funktsiooni pidevuse definitsioonist ja teoreemist 3.3.

**Teoreem 4.2.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu funktsioonid  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  pidevad punktis  $P_0 \in \mathcal{D}$ . Siis ka nende funktsioonide summa  $f + g$ , vahe  $f - g$ , korrutis  $fg$  ning, kui  $g(P_0) \neq 0$ , siis ka jagatis  $f/g$  on pidevad punktis  $P_0$ .

**Järeldus 4.3.** Olgu  $f$  ja  $g$  pidevad funktsioonid, millel on ühine määramispiirkond. Siis ka nende funktsioonide summa  $f + g$ , vahe  $f - g$ , korrutis  $fg$  ning, kui funktsioon  $g$  pole üheski määramispiirkonna punktis 0, siis ka jagatis  $f/g$  on pidevad funktsioonid.

### 4.3. Pidevate funktsioonide liitfunktsiooni pidevus

Olgu  $l \in \mathbb{N}$  ning olgu hulgas  $\Delta \subset \mathbb{R}^l$  määratud funktsioonid

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(Q) = \phi_1(t_1, \dots, t_l), \\ x_2 &= \phi_2(Q) = \phi_2(t_1, \dots, t_l), \\ &\dots\dots\dots, \\ x_m &= \phi_m(Q) = \phi_m(t_1, \dots, t_l). \end{aligned}$$

Olgu hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  selline, et

$$\mathcal{D} \supset \left\{ (\phi_1(Q), \dots, \phi_m(Q)) : Q \in \Delta \right\},$$

ning olgu hulgas  $\mathcal{D}$  määratud funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m).$$

Siis on hulgas  $\Delta$  määratud funktsioon

$$u = f(\phi_1(Q), \dots, \phi_m(Q)) = f(\phi_1(t_1, \dots, t_l), \dots, \phi_m(t_1, \dots, t_l)). \quad (4.1)$$

Ülaltoodud moel saadud (täpsemalt, kahe või enama funktsiooni järjest rakendamise teel saadud) funktsioone nimetatakse *liitfunktsioonideks*.

**Teoreem 4.4.** *Olgu funktsioonid  $\phi_1, \dots, \phi_m$  pidevad punktis  $Q_0 \in \Delta$  ning olgu funktsioon  $f$  pidev punktis*

$$P_0 = (\phi_1(Q_0), \dots, \phi_m(Q_0)).$$

*Siis ka liitfunktsioon (4.1) on pidev punktis  $Q_0$ .*

**TÕESTUS.** Olgu  $(Q_n)_{n=1}^\infty$  selline hulga  $\Delta$  punktide jada, et  $Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_0$ . Teoreemi 3.7 (pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal piisab liitfunktsiooni (4.1) pidevuseks punktis  $Q_0$  näidata, et

$$f(\phi_1(Q_n), \dots, \phi_m(Q_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\phi_1(Q_0), \dots, \phi_m(Q_0))$$

ehk, tähistades iga  $n \in \mathbb{N}$  korral

$$P_n := (\phi_1(Q_n), \dots, \phi_m(Q_n)),$$

piisab näidata, et

$$f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(P_0). \quad (4.2)$$

Funktsioonide  $\phi_1, \dots, \phi_m$  pidevuse tõttu punktis  $Q_0$  teoreemi 3.7 põhjal

$$\phi_1(Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_1(Q_0), \quad \dots\dots\dots, \quad \phi_m(Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi_m(Q_0);$$

s.t. jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  koondub punktiks  $P_0$  koordinaaditi, seega lause 2.1 põhjal  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P_0$  ning järelikult (jällegi teoreemi 3.7 põhjal) funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu punktis  $P_0$  kehtib (4.2).  $\square$

#### 4.4. Mitme muutuja elementaarfunktsioonid

**Definitsioon 4.1.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Funktsioone  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , mis on saadud (hulga  $\mathcal{D}$  punktide koordinaate tähistavatest)  $m$  sõltumatust muutujast lõpliku arvu aritmeetiliste tehete, ühe muutuja elementaarfunktsioonide ja liifunktsiooni moodustamise operatsioonide rakendamise teel, nimetatakse  $m$  muutuja elementaarfunktsioonideks.

Kui  $m \geq 2$ , siis  $m$  muutuja elementaarfunktsioone nimetatakse *mitme muutuja elementaarfunktsioonideks*.

Järgneva teoreemi võtame käesolevas kursuses teadmiseks ilma seda tõestamata.

**Teoreem 4.5.** *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad.*

Teoreemi 4.5 saab rakendada elementaarfunktsiooni piirväärtuse leidmisel: kui  $f$  on mitme muutuja elementaarfunktsioon ning  $P_0$  on selle funktsiooni määramispiirkonna punkt, mis on ühtlasi selle määramispiirkonna kuhjumispunkt, siis teoreemi 4.5 põhjal

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0).$$

#### 4.5. Sidusas hulgas pideva funktsiooni vahepealsed väärtused

**Teoreem 4.6** (Bolzano–Cauchy teoreem). *Olgu funktsioon  $f$  pidev sidusas hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , olgu  $A, B \in \mathcal{D}$  ning rahuldagu reaalarv  $c$  tingimust*

$$f(A) \leq c \leq f(B) \quad (\text{või } f(B) \leq c \leq f(A), \text{ kui } f(B) < f(A)).$$

*Siis mis tahes punkte  $A$  ja  $B$  ühendaval pideval kaarel, mis sisaldub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$ , leidub punkt  $C$  nii, et  $f(C) = c$ .*

**TÕESTUS.** Olgu tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  sisalduv punkte  $A$  ja  $B$  ühendav kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x_1 = \phi_1(t), \dots, x_m = \phi_m(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus  $\phi_1, \dots, \phi_m$  on lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidevad funktsioonid ning

$$A = (\phi_1(\alpha), \dots, \phi_m(\alpha)) \quad \text{ja} \quad B = (\phi_1(\beta), \dots, \phi_m(\beta)).$$

Siis  $u: [\alpha, \beta] \ni t \mapsto f(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \in \mathbb{R}$  on lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon (sest ta on pidevate funktsioonide liitfunktsioon), kusjuures  $u(\alpha) = f(A)$  ja  $u(\beta) = f(B)$ ; järelikult Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub  $t_0 \in [\alpha, \beta]$  nii, et  $u(t_0) = c$  ehk, teisisõnu, tähistades  $C := (\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0))$ ,

$$f(C) = f(\phi_1(t_0), \dots, \phi_m(t_0)) = u(t_0) = c.$$

□

## 4.6. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni tõkestatus

**Definitsioon 4.2.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ . Öeldakse, et funktsioon  $f$  on *tõkestatud*, kui tema väärtuste hulk  $\{f(P): P \in \mathcal{D}\}$  on tõkestatud, s.t. leiduvad arvud  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  nii, et  $\alpha \leq f(P) \leq \beta$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral.

**Teoreem 4.7** (Weierstrassi esimene teoreem). *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on tõkestatud selles hulgas.*

**NB!** Kas Weierstrassi teoreemidele ikka viidatakse kui “esimesele” ja “teisele”? Jah, nii [Φ] kui ka [III] teevad nii!

**TÕESTUS.** Olgu funktsioon  $f$  pidev tõkestatud kinnises hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon  $f$  ei ole tõkestatud hulgas  $\mathcal{D}$ . Siis iga  $n \in \mathbb{N}$  korral leidub punkt  $P_n \in \mathcal{D}$  nii, et

$$|f(P_n)| > n.$$

Jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas  $\mathcal{D}$ ), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub tal koonduv osajada  $(P_{k_n})_{n=1}^\infty$ . Tähistame  $P_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{k_n}$ ; siis hulga  $\mathcal{D}$  kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal  $P_0 \in \mathcal{D}$ . Kuna funktsioon  $\mathcal{D} \ni P \mapsto |f(P)| \in \mathbb{R}$  on pidev (sest ta on pidevate funktsioonide  $\mathcal{D} \ni P \mapsto f(P) \in \mathbb{R}$  ja  $\mathbb{R} \ni u \mapsto |u| \in \mathbb{R}$  liitfunktsioon), siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal  $|f(P_{k_n})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |f(P_0)|$ . Teiselt poolt, kuna punktid  $P_{k_n}$  rahuldavad tingimust

$$|f(P_{k_n})| > k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

siis  $|f(P_{k_n})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Saadud vastuolu tõestab teoreemi.  $\square$

## 4.7. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni rajad

**Teoreem 4.8** (Weierstrassi teine teoreem). *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon saavutab selles hulgas oma väärtuste hulga rajad. Teisisõnu, kui funktsioon  $f$  on pidev tõkestatud kinnises hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , siis leiduvad punktid  $P_0, Q_0 \in \mathcal{D}$  nii, et*

$$f(P_0) = \sup_{P \in \mathcal{D}} f(P) \quad \text{ja} \quad f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P).$$

Esitame Weierstrassi teisele teoreemile 4.8 kaks tõestust, millest esimene toetub Bolzano–Weierstrassi teoreemile 2.5 ning teine Weierstrassi esimesele teoreemile 4.7.

**WEIERSTRASSI TEISE TEOREEMI 4.8 ESIMENE TÕESTUS.** Olgu funktsioon  $f$  pidev tõkestatud kinnises hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Tähistame

$$M := \sup_{P \in \mathcal{D}} f(P) \quad \text{ja} \quad m := \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P)$$

ning valime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral punkti  $P_n \in \mathcal{D}$  nii, et

$$f(P_n) > M - \frac{1}{n}.$$

Siis jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas  $\mathcal{D}$ ), järelilikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub tal koonduv osajada  $(P_{k_n})_{n=1}^\infty$ . Tähistame  $P_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{k_n}$ ; siis hulga  $\mathcal{D}$  kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal  $P_0 \in \mathcal{D}$ . Teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal  $f(P_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(P_0)$ . Kuna punktid  $P_{k_n}$  rahuldavad tingimusi

$$M \geq f(P_{k_n}) > M - \frac{1}{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M,$$

siis arvjada piirväärtuse sändvitsteoreemi põhjal

$$f(P_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_{k_n}) = M.$$

Tõestame nüüd sellise punkti  $Q_0 \in \mathcal{D}$  olemasolu, mille korral  $f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P)$ . Selleks märgime, et ka funktsioon  $-f$  on pidev hulgas  $\mathcal{D}$ , järelilikult eelnevalt tõestatu põhjal leidub punkt  $Q_0 \in \mathcal{D}$  nii, et

$$-f(Q_0) = \sup_{P \in \mathcal{D}} (-f(P)) = -\inf_{P \in \mathcal{D}} f(P),$$

aga nüüd

$$f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P).$$

□

WEIERSTRASSI TEISE TEOREEMI 4.8 TEINE TÕESTUS. Olgu funktsioon  $f$  pidev tõkestatud kinnises hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Tähistame  $M := \sup_{P \in \mathcal{D}} f(P)$  (see supremum on Weierstrassi esimese teoreemi 4.7 põhjal lõplik) ja oletame vastuväiteliselt, et

$$f(P) < M \quad \text{iga } P \in \mathcal{D} \text{ korral.} \quad (4.3)$$

Siis funktsioon

$$g: \mathcal{D} \ni P \mapsto \frac{1}{M - f(P)} \in \mathbb{R}$$

on pidev (sest ta on saadud pidevatest funktsioonidest aritmeetiliste tehete abil; juhime veel tähelepanu, et eelduse (4.3) põhjal  $M - f(P) \neq 0$  hulgas  $\mathcal{D}$ ); seega Weierstrassi esimese teoreemi 4.7 põhjal on funktsioon  $g$  tõkestatud. Teiselt poolt, valides hulga  $\mathcal{D}$  punktide jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$ , mille korral  $f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M$ , saame, et  $M - f(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0+$  ning seega  $g(P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , mis on vastuolus funktsiooni  $g$  tõkestatusega.

Sellise punkti  $Q_0 \in \mathcal{D}$  olemasolu, mille korral  $f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P)$ , saab näidata täpselt samamoodi nagu eelmises tõestuses. □

**Märkus 4.1.** Tingimust  $f(Q_0) = \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P) =: m$  rahuldava punkti  $Q_0 \in \mathcal{D}$  olemasolu teoreemi 4.8 tõestuses võib näidata ka analoogiliselt punkti  $P_0$  olemasolu tõestusele, valides analoogiliselt esimese tõestusega punktid  $Q_n \in \mathcal{D}$  nii, et  $f(Q_n) < m + \frac{1}{n}$  (punktiks  $Q_0$  sobib sellisel juhul jada  $(Q_n)$  mis tahes koonduva osajada piirväärtus), või, analoogiliselt teise tõestusega, oletades vastuväiteliselt, et  $f(P) > m$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral ja vaadeldes sel juhul funktsiooni  $h: \mathcal{D} \ni P \mapsto \frac{1}{f(P) - m} \in \mathbb{R}$ .

### 4.8. Kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlane pidevus

**Definitsioon 4.3.** Olgu funktsioon  $f$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ .

Õeldakse, et funktsioon  $f$  on hulgas  $\mathcal{D}$  *ühtlaselt pidev*, kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ P, Q \in \mathcal{D}, d(P, Q) < \delta \right] \implies |f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

Vahetult definitsioonist on ilmne, et hulgas  $\mathcal{D}$  ühtlaselt pidev funktsioon on pidev selles hulgas. Vastupidine väide üldjuhul ei kehti. Vastavasisulisi kontranäiteid on lihtne leida juba vahemikus määratud pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta – näiteks funktsioon  $y = \frac{1}{x}$  on vahemikus  $x \in (0, 1)$  pidev, kuid mitte ühtlaselt pidev.

**Teoreem 4.9** (Cantori teoreem). *Tõkestatud kinnises hulgas pidev funktsioon on selles hulgas ühtlaselt pidev.*

**TÕESTUS.** Olgu funktsioon  $f$  pidev tõkestatud kinnises hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ . Oletame vastuväiteliselt, et  $f$  ei ole ühtlaselt pidev selles hulgas. Siis leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  selliselt, et iga indeksi  $n \in \mathbb{N}$  korral leiduvad punktid  $P_n, Q_n \in \mathcal{D}$ , mille korral

$$d(P_n, Q_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{kuid} \quad |f(P_n) - f(Q_n)| \geq \varepsilon.$$

Jada  $(P_n)_{n=1}^\infty$  on tõkestatud (sest tema elemendid asuvad tõkestatud hulgas  $\mathcal{D}$ ), järelikult Bolzano–Weierstrassi teoreemi 2.5 põhjal leidub tal koonduv osajada  $(P_{k_n})_{n=1}^\infty$ . Tähistame  $P_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} P_{k_n}$ ; siis ka  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{k_n} = P_0$ , sest

$$0 \leq d(Q_{k_n}, P_0) \leq d(Q_{k_n}, P_{k_n}) + d(P_{k_n}, P_0) \leq \frac{1}{k_n} + d(P_{k_n}, P_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ning arvjada piirväärtuse sändvitšteoreemi põhjal seega ka  $d(Q_{k_n}, P_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Hulgaga  $\mathcal{D}$  kinnisuse tõttu lause 2.3 põhjal  $P_0 \in \mathcal{D}$ . Kuna funktsioon  $f$  on pidev hulgas  $\mathcal{D}$ , siis teoreemi 3.7 (funktsiooni pidevuse Heine kriteeriumi) põhjal  $f(P_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(P_0)$  ja  $f(Q_{k_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(P_0)$ . Nüüd ühel poolt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})| = |f(P_0) - f(Q_0)| = 0, \quad (4.4)$$

teiselt poolt

$$|f(P_{k_n}) - f(Q_{k_n})| \geq \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

mis on vastuolus tingimusega (4.4). □



## II peatükk.

# Mitme muutuja funktsioonide diferentsiaalarvutus

## § 1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised ja diferentseeruvus

### 1.1. Mitme muutuja funktsiooni osatuletised

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses.

**Definitsioon 1.1.** Olgu  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Kui eksisteerib (lõplik või lõpmatu) piirväärtus

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \Delta x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni  $f$  (*esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks*) *osatuletiseks* *argumendi*  $x_i$  *järgi* punktis  $P_0$  ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0), \quad f'_{x_i}(P_0), \quad u'_{x_i}(P_0), \quad f_{x_i}(P_0), \quad u_{x_i}(P_0) \quad (1.1)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \\ f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Kui mingi hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis  $P$  eksisteerib lõplik osatuletois  $f'_{x_i}(P)$ , siis hulgas  $\mathcal{D}$  on määratud (*esimest järku*) *osatuletisfunktsioon* (*argumendi*  $x_i$  *järgi*)

$$f'_{x_i} : \mathcal{D} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt funktsiooni  $f$  (*esimest järku* ehk lihtsalt *esimeseks*) *osatuletiseks* *argumendi*  $x_i$  *järgi*. Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad f'_{x_i}, \quad u'_{x_i}, \quad f_{x_i}, \quad u_{x_i}. \quad (1.2)$$

Tähistused (1.1) on tähistustega (1.2) hästi kooskõlas: (lõplik) osatuletis antud punktis on osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

**Märkus 1.1.** Märkimaks funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  esimest järku osatuletisfunktsiooni muutuja  $x_i$  järgi, kasutatakse tähistuste (1.2) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x_i} u.$$

**Märkus 1.2.** Vahetult osatuletise definitsioonist näeme, et ühe muutuja funktsiooni  $y = f(x)$  osatuletis muutuja  $x$  järgi on sama, mis selle funktsiooni tuletis:  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}$  (ehk, alternatiivsetes tähistustes,  $f'_x = f'$ ).

**Märkus 1.3.** Vahetult osatuletise definitsioonist järeldub, et  $m$  muutuja funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  osatuletis punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  muutuja  $x_i$  järgi on ühe muutuja funktsiooni

$$g(x) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$$

tuletis punktis  $x_i^0$ :

$$f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0).$$

See tähelepanek on kasulik mitme muutuja funktsiooni osatuletiste arvutamisel: leides funktsiooni  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  osatuletist muutuja  $x_i$  järgi, loeme ülejäänud muutujad  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m$  fikseeritud konstantideks ning leiame osatuletise  $u'_{x_i}$  nagu ühe muutuja  $x_i$  funktsiooni tuletise.

**Näide 1.1.** Leiame funktsiooni  $u = x^4 \sin^3(x^7 y + 5y^{11})$  osatuletised.

Tõlgendades muutujat  $y$  fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist  $u$  kui ühe muutuja  $x$  funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_x &= (x^4)'_x \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \left( \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) \right)'_x \\ &= 4x^3 \sin^3(x^7 y + 5y^{11}) + x^4 \cdot 3 \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot 7x^6 y \\ &= x^3 \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cdot \left( 4 \sin(x^7 y + 5y^{11}) + 21x^7 y \cos(x^7 y + 5y^{11}) \right). \end{aligned}$$

Tõlgendades muutujat  $x$  fikseeritud konstandina ja leides tuletise funktsioonist  $u$  kui ühe muutuja  $y$  funktsioonist, saame

$$\begin{aligned} u'_y &= x^4 \cdot 3 \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}) \cdot (x^7 + 55y^{10}) \\ &= 3x^4 (x^7 + 55y^{10}) \sin^2(x^7 y + 5y^{11}) \cos(x^7 y + 5y^{11}). \end{aligned}$$

**Märkus 1.4.** Ühe muutuja funktsiooni puhul järeldub lõpliku tuletise olemasolust mingis punktis selle funktsiooni pidevus selles punktis. Mitme muutuja funktsiooni puhul analoogiline väide ei kehti:  $m$  muutuja funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  puhul ei järeldu esimest järku osatuletiste  $f'_{x_1}(P_0), \dots, f'_{x_m}(P_0)$  olemasolust ja lõplikkusest funktsiooni  $f$  pidevus punktis  $P_0$ .

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 67, ül. 447

**Näide 1.2.** Näites I.3.2 veendusime, et piirväärtus  $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$  ei eksisteeri; seega funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

ei ole pidev punktis  $(0, 0)$ . Samas leiduvad sellel funktsiooni punktis  $(0, 0)$  lõplikud osatuletised:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0$$

ning, sümmeetriliselt,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

## 1.2. Mitme muutuja funktsiooni diferentseeruvus

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses  $\mathcal{U}$ . Kõneldes funktsiooni  $f$  argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudest  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$  punktis  $P_0$ , eeldame edaspidi alati, kasutades tähistusi

$$\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \quad \text{ja} \quad P_0 + \Delta P := (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$$

(juhime tähelepanu, et viimane tähistus on kooskõlas ruumi  $\mathbb{R}^m$  vektorruumistruktuuriga), et  $P := P_0 + \Delta P \in \mathcal{U}$ .

Tähistame

$$\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0).$$

Vahet

$$\begin{aligned} \Delta u &:= f(P) - f(P_0) = f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) \\ &= f(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0), \end{aligned} \quad (1.3)$$

nimetatakse *funktsiooni  $f$  muuduks punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$* .

**Definitsioon 1.2.** Öeldakse, et funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  on *diferentseeruv* punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ , kui leiduvad arvud  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$  selliselt, et selle funktsiooni muut punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ , rahuldab tingimust

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - (A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m) = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

s.t.

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - (A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m)}{\rho} = 0.$$

Allpool märkuses 1.5 veendume, et  $m$  muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooni 1.2 juht  $m = 1$  on kooskõlas kursuses “Ühe muutuja matemaatiline analüüs” antud ühe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga. Eelnevalt on aga otstarbekas  $m$  muutuja funktsiooni diferentseeruvuse mõistet veidi uurida.

Järgnev teoreem annab kaks funktsiooni diferentseeruvusega samaväärset tingimust, mida sageli kasutatakse ka diferentseeruvuse definitsioonina.

**NB!** Tähistust  $\Delta u$  kasutatakse teoreemi 1.3 tõestuses.

**Teoreem 1.1.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ ;
- (ii) leiduvad arvud  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$  selliselt, et funktsiooni  $f$  muut (1.3) esitub kujul

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha, \quad (1.5)$$

kus funktsioon  $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha = o(\rho)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ ;

- (iii) leiduvad arvud  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$  selliselt, et funktsiooni  $f$  muut (1.3) esitub kujul

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (1.6)$$

kus funktsioonid  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldavad tingimust  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Teoreem 1.1 on vahetu järeldus järgnevast lemmast, mida me kasutame ka allpool teoreemide 1.3 ja 1.4 tõestamisel. See lemma ütleb, et definitsiooni 1.2 tingimusi rahuldavad arvukomplektid  $A_1, \dots, A_m$ , teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid  $A_1, \dots, A_m$  ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi rahuldavad arvukomplektid  $A_1, \dots, A_m$  on täpselt ühed ja samad. Veelgi enam, teoreemis 1.3 tõestame, et kui funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  on diferentseeruv punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$ , siis tal eksisteerivad selles punktis lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide  $x_1, \dots, x_m$  järgi, kusjuures ainus ülalloeletatud tingimusi rahuldav arvukomplekt  $A_1, \dots, A_m$  on

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \quad \dots, \quad A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

**Lemma 1.2.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses ning olgu  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsiooni  $f$  muut (1.3) rahuldab tingimust (1.4);
- (ii) funktsiooni  $f$  muut (1.3) esitub kujul (1.5), kus funktsioon  $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha = o(\rho)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ ;
- (iii) funktsiooni  $f$  muut (1.3) esitub kujul (1.6), kus funktsioonid  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldavad tingimust  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**TÕESTUS.** (i) $\Rightarrow$ (ii) on ilmne, kui defineerida

$$\alpha := f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - (A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) on samuti ilmne.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Kehtigu (ii). Siis

$$\begin{aligned} f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - (A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m) \\ = \alpha \frac{\Delta x_1^2 + \cdots + \Delta x_m^2}{\rho^2} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\Delta x_1}{\rho} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\Delta x_m}{\rho} \Delta x_m \\ = \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \Delta x_m, \end{aligned}$$

kus  $\alpha_i = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\Delta x_i}{\rho}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Kuna

$$|\alpha_i| \leq \left| \frac{\alpha}{\rho} \right| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

siis  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Seega kehtib (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (iii). Siis kehtib valem (1.5), kus

$$\alpha = \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \Delta x_m;$$

seejuures  $\alpha = o(\rho)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ , sest

$$\begin{aligned} \left| \frac{\alpha}{\rho} \right| &= \left| \alpha_1 \frac{\Delta x_1}{\rho} + \cdots + \alpha_m \frac{\Delta x_m}{\rho} \right| \leq |\alpha_1| \frac{|\Delta x_1|}{\rho} + \cdots + |\alpha_m| \frac{|\Delta x_m|}{\rho} \\ &\leq |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_m| \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Seega (ii) kehtib. □

Järgnev teoreem ütleb, et funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis järeldub selle funktsiooni kõikvõimalike esimest järku osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles punktis.

**Teoreem 1.3.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Siis funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $P_0$  lõplikud esimest järku osatuletised kõikide argumentide järgi. Seejuures ainus reaalarvukomplekt  $A_1, \dots, A_m$ , mis rahuldab ( $m$  muutuja funktsiooni diferentseeruvuse) definitsiooni 1.2 tingimusi (ning lemma 1.2 põhjal seega ka ainus reaalarvukomplekt  $A_1, \dots, A_m$ , mis rahuldab teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi, ning ainus reaalarvukomplekt  $A_1, \dots, A_m$ , mis rahuldab teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi), on

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \quad \dots, \quad A_m = \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0).$$

**TÕESTUS.** Teoreemi 1.1 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (iii) põhjal leiduvad arvud  $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$  nii, et funktsiooni  $f$  muut  $\Delta u$  punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ , esitub kujul

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \cdots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \cdots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (1.7)$$

kus funktsioonid  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldavad tingimust

$$\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \xrightarrow{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0} 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Fikseerime vabalt  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Tähistades

$$\Delta_{x_j} u := f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + \Delta x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

piisab teoreemi tõestuseks näidata, et

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j$$

(sest osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(P_0)$  on defineeritud kui selles valemis esinev piirväärtus ning lemma 1.2 põhjal rahuldavad definitsiooni 1.2 tingimusi, teoreemi 1.1 väite (ii) tingimusi ning teoreemi 1.1 väite (iii) tingimusi täpselt ühed ja samad arvukomplektid  $A_1, \dots, A_m$ ).

Kui  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_{j-1} = \Delta x_{j+1} = \dots = \Delta x_m = 0$ , siis  $\Delta_{x_j} u = \Delta u$ , seega valemi (1.7) põhjal

$$\Delta_{x_j} u = \Delta u = A_j \Delta x_j + \alpha_j(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0) \Delta x_j$$

ning järelikult

$$\frac{\Delta_{x_j} u}{\Delta x_j} = A_j + \alpha_j(0, \dots, 0, \Delta x_j, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\Delta x_j \rightarrow 0} A_j,$$

nagu soovitud. □

**Teoreem 1.4.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ ;
- (ii) funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $P_0$  kõik lõplikud esimest järku osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$ , kusjuures selle funktsiooni muut (1.3) punktis  $P_0$  rahuldab tingimust

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) - \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \Delta x_m \right) = o(\rho) \quad (1.8)$$

protsessis  $\rho \rightarrow 0$ ;

- (iii) funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $P_0$  kõik lõplikud esimest järku osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$ , kusjuures selle funktsiooni muut (1.3) esitub kujul

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \Delta x_m + \alpha, \quad (1.9)$$

kus funktsioon  $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha = o(\rho)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ ;

(iv) funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $P_0$  kõik lõplikud esimest järku osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0)$ , kusjuures selle funktsiooni muut (1.3) punktis  $P_0$  esitub kujul

$$\begin{aligned} f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kus funktsioonid  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta P) = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldavad tingimust  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii) järeldub ( $m$  muutuva funktsiooni diferentseeruvuse) definitsioonist 1.2 ja teoreemist 1.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i) järeldub definitsioonist 1.2.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) järeldub lemmast 1.2. □

**Märkus 1.5.** Kursuses “Ühe muutuva matemaatiline analüüs” defineeriti ühe muutuva funktsiooni  $y = f(x)$  diferentseeruvus punktis  $x_0$  kui lõpliku tuletise  $f'(x_0)$  olemasolu. See definitsioon on kooskõlas  $m$  muutuva funktsiooni diferentseeruvuse definitsiooniga 1.2 juhul  $m = 1$ .

Tõepoolest, kui eksisteerib lõplik tuletis

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

siis, defineerides funktsiooni  $\alpha = \alpha(\Delta x) := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$ , kehtib tingimus  $\alpha \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ , kusjuures funktsiooni  $f$  muut punktis  $x_0$  esitub kujul

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + \alpha \Delta x;$$

niisiis teoreemi 1.1 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (iii) põhjal funktsioon  $f$  on diferentseeruv definitsiooni 1.2 (juhu  $m = 1$ ) järgi.

Teiselt poolt, kui funktsioon  $y = f(x)$  on diferentseeruv definitsiooni 1.2 mõttes (juhul  $m = 1$ ), siis teoreemi 1.3 põhjal eksisteerib tal punktis  $x_0$  lõplik (osa)tuletis (muutuva  $x$  järgi)  $f'_x(x_0) = f'(x_0)$  (vt. märkust 1.2), niisiis see funktsioon on diferentseeruv kursuses “Ühe muutuva matemaatiline analüüs” antud definitsiooni mõttes.

Näites 1.2 veendusime, et  $m$  muutuva funktsiooni lõplike (esimest järku) osatuletiste olemasolust (kõigi muutujate järgi) antud punktis ei järeldu üldjuhul selle funktsiooni pidevust selles punktis. Järgnev lause ütleb, et  $m$  muutuva funktsiooni diferentseeruvus antud punktis (millest teoreemi 1.3 põhjal järeldub kõigi lõplike esimest järku osatuletiste olemasolu selles punktis) toob endaga kaasa selle funktsiooni pidevuse selles punktis. Seega *lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust antud punktis ei järeldu üldjuhul funktsiooni diferentseeruvust selles punktis*. Veelgi

enam: näites 1.5 vaadeldakse kahe muutuja funktsiooni, mis on pidev punktis  $(0, 0)$  ning millel eksisteerivad punktis  $(0, 0)$  lõplikud esimest järku osatuletised mõlema argumenti järgi, kuid mis pole diferentseeruv punktis  $(0, 0)$ . Seega *ka antud punktis pideva funktsiooni puhul ei järeldu üldjuhul lõplike esimest järku osatuletiste olemasolust selles punktis funktsiooni diferentseeruvust selles punktis*.

**Lause 1.5.** *Antud punktis diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.*

TÕESTUS. Funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  on pidev (oma määramispiirkonna kuhjumis)punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  parajasti siis, kui

$$\Delta u = f(P) - f(P_0) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Kui eeldada, et funktsion  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ , siis see koonduvus järeldub esitusest (1.5) (sest kui  $\alpha = o(\rho)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ , siis ammugi  $\alpha \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ ).  $\square$

Selle punkti lõpetuseks toome mõned näited konkreetsete funktsioonide diferentseeruvuse kindlakstegemisest antud punktis.

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 74, ül. 512

**Näide 1.3.** Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis  $(0, 0)$ . Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{\sqrt{h^2}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{|h|} = 0$$

ning, sümmeetriliselt,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) põhjal piisab funktsiooni  $f$  diferentseeruvuseks punktis  $(0, 0)$  (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - 0 \Delta x - 0 \Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0$$

(siin  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ), s.t.

$$(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0.$$

**NB!** Kas see "Minnes üle polaarkoordinaatidele:  $\Delta x = \rho \cos \phi$ ,  $\Delta y = \rho \sin \phi$ " on aktsepteeritav keeleline konstruktsioon? Tagapool kasutatakse seda veel kaks korda.

Veendume selles. Minnes üle polaarkoordinaatidele  $\Delta x = \rho \cos \phi$ ,  $\Delta y = \rho \sin \phi$ , saame

$$\frac{(\Delta x + \Delta y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}}{\rho} = \frac{\rho^2 (\cos \phi + \sin \phi)^2 \sin \frac{1}{\rho}}{\rho} = \rho (\cos \phi + \sin \phi)^2 \sin \frac{1}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

**Näide 1.4.** Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 74, ül. 513

on diferentseeruv punktis  $(0, 0)$ . Selleks leiame esmalt selle funktsiooni esimest järku osatuletised punktis  $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0$$

ning, sümmeetriliselt,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) põhjal piisab funktsiooni  $f$  diferentseeruvuseks punktis  $(0, 0)$  (ning on selleks ühtlasi ka tarvilik) näidata, et

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - 0 \Delta x - 0 \Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0$$

(siin  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ), s.t.

$$(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0.$$

Veendume selles:

$$\frac{(\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\rho} = \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \rho \sin \frac{1}{\rho^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

**Näide 1.5.** Veendume, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

on pidev punktis  $(0, 0)$  ning tal eksisteerivad selles punktis lõplikud osatuletised, kuid ta ei ole diferentseeruv selles punktis.

Funktsiooni  $f$  pidevuseks punktis  $(0, 0)$  piisab näidata, et  $f(x, y) \xrightarrow{x, y \rightarrow 0} f(0, 0) = 0$ . Minnes üle polaarkoordinaatidele :  $\Delta x = \rho \cos \phi$ ,  $\Delta y = \rho \sin \phi$ , saame

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \phi \sin \phi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \phi \sin \phi = 0.$$

Funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $(0, 0)$  lõplikud osatuletised

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2}}{h} = 0$$

ja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{h^2}}{h} = 0;$$

seega teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) põhjal on tema diferentseeruvuseks punktis  $(0, 0)$  tarvilik (ning ka piisav), et

$$f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - 0 \Delta x - 0 \Delta y = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0$$

(siin  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ), s.t.

$$f(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0. \quad (1.11)$$



(mis sõltub argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudest  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ ) nii, et

$$\begin{aligned} g_i(x_i) - g_i(x_i^0) &= g'_i(x_i^0 + \theta_i \Delta x_i) \Delta x_i \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \Delta x_i \end{aligned}$$

(märgime, et kui  $x_i = x_i^0$ , s.t.  $\Delta x_i = 0$ , siis sobib  $\theta_i$  rolli mis tahes arv vahemikust  $(0, 1)$ ). Niisiis,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^m (g_i(x_i) - g_i(x_i^0)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0) \Delta x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \Delta x_i, \end{aligned}$$

kus iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + \theta_i \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Kuna osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid)  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$  on pidevad punktis  $P_0$ , siis funktsioonid  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  rahuldavad tingimust  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0, i = 1, \dots, m$ , ning seega funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ .  $\square$

**Märkus 1.6.** Mitme muutuja funktsiooni  $f$  diferentseeruvusest punktis  $P_0$  ei järeldu üldjuhul tema osatuletiste (s.t. osatuletisfunktsioonide) pidevus punktis  $P_0$ .

**Näide 1.6.** Näites 1.4 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis  $(0, 0)$ . Näitame, et kogu tasandil  $\mathbb{R}^2$  eksisteerivad lõplikud osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , kuid osatuletisfunktsioonid  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ei ole pidevad punktis  $(0, 0)$ .

Näites 1.4 veendusime, et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Kõikjal hulgas  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left( (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right)'_x = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \left( -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right) \\ &= 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus  $\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial x}$  on punkti  $(0, 0)$  igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ei ole punktis  $(0, 0)$  pidev.

Tõepoolest, valides iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $r_n > 0$  nii, et  $\frac{1}{r_n^2} = 2n\pi$  (s.t.  $r_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ ), ning tähistades  $P_n := (r_n, 0)$  ja  $Q_n := (-r_n, 0)$ , saame, arvestades, et  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0).$$

Samal ajal

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_n) = 2r_n \sin \frac{1}{r_n^2} - \frac{2r_n}{r_n^2} \cos \frac{1}{r_n^2} = 2r_n \sin 2n\pi - \frac{2}{r_n} \cos 2n\pi = -\frac{2}{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$$

ning, analoogiliselt,  $\frac{\partial f}{\partial x}(Q_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus  $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  ei eksisteeri (ning, lisaks, osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial y}$  on punkti  $(0,0)$  igas ümbruses tõkestamata); niisiis osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ei ole punktis  $(0,0)$  pidev.

**Näide 1.7.** Näites 1.3 veendusime, et kahe muutuja funktsioon

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

on diferentseeruv punktis  $(0,0)$ . Näitame, et kogu tasandil  $\mathbb{R}^2$  eksisteerivad lõplikud osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ , kuid osatuletisfunktsioonid  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ei ole pidevad punktis  $(0,0)$ .

Näites 1.3 veendusime, et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ . Kõikjal hulgas  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \left( (x+y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)'_x \\ &= 2(x+y) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+y)^2 \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left( -\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= 2(x+y) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(x+y)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}$$

Siit näeme, et piirväärtus  $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  ei eksisteeri; niisiis osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ei ole punktis  $(0,0)$  pidev.

Tõepoolest, minnes üle polaarkoordinaatidele:  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ , saame

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2r(\cos \phi + \sin \phi) \sin \frac{1}{r} - \frac{r \cos \phi r^2 (\cos \phi + \sin \phi)^2}{r^3} \cos \frac{1}{r} \\ &= o(1) - \cos \phi (\cos \phi + \sin \phi)^2 \cos \frac{1}{r} \quad \text{protsessis } r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Valides iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $r_n > 0$  nii, et  $\frac{1}{r_n} = 2n\pi$  (s.t.  $r_n = \frac{1}{2n\pi}$ ), ning tähistades  $P_n := (r_n \cos 0, r_n \sin 0) = (r_n, 0)$  ja  $Q_n := (r_n \cos \frac{\pi}{2}, r_n \sin \frac{\pi}{2}) = (0, r_n)$ , saame, arvestades, et  $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ,

$$P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0) \quad \text{ja} \quad Q_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0,0).$$

Samal ajal

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(P_n) &= o(1) - \cos 0 (\cos 0 + \sin 0)^2 \cos \frac{1}{r_n} = o(1) - \cos 2n\pi = o(1) - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(Q_n) &= o(1) - \cos \frac{\pi}{2} \left( \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos \frac{1}{r_n} = o(1) - 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0; \end{aligned}$$

järelikult funktsiooni piirväärtuse Heine kriteeriumi põhjal piirväärtus  $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$  ei eksisteeri.

Sümmeetriliselt saame, et piirväärtus  $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$  ei eksisteeri; niisiis osatuletis  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ei ole punktis  $(0,0)$  pidev.

## 1.4. Kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvuse geomeetriline tõlgendus (kahe muutuja funktsiooni graafiku puutujatasand)

**Definitsioon 1.3.** Olgu kahe muutuja funktsiooni  $z = f(x, y)$  määramispiirkond  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Hulka

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}^3$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  *graafikuks*.

**Definitsioon 1.4.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  pidev punkti  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses. Tähistame  $M_0 := (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  (märgime, et punkt  $M_0$  asub funktsiooni  $f$  graafikul).

Tasandit  $\pi$  nimetatakse funktsiooni  $f$  graafiku *puutujatasandiks* punktis  $M_0$ , kui graafiku punkte  $M := (x, y, f(x, y))$  ja  $M_0$  ühendava sirge ning selle tasandi vaheline nurk läheneb protsessis  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$  nullile.

Paneme tähele, et funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu punktis  $(x_0, y_0)$  on punkti  $(x, y)$  lähenemine punktile  $(x_0, y_0)$  (s.t. koonduvus  $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ) samaväärne graafiku punkti  $M = (x, y, f(x, y))$  lähenemisega punktile  $M_0$  (mööda seda graafikut). Seetõttu sõnastatakse graafiku puutujatasandi definitsioon sageli ka järgmiselt: tasandit  $\pi$  nimetatakse funktsiooni  $f$  graafiku *puutujatasandiks* punktis  $M_0$ , kui graafiku punkti  $M$  lähenemisel punktile  $M_0$  (mööda seda graafikut) läheneb neid punkte ühendava sirge ja selle tasandi vaheline nurk nullile (vt. joonist 1.1).

Järgnev teoreem ütleb, et kahe muutuja funktsiooni diferentseeruvus antud punktis tähendab geomeetriliselt selle funktsiooni graafiku (*z-teljega mitteparalleelse*) puutujatasandi olemasolu vastavas graafiku punktis.

**Teoreem 1.7.** Olgu funktsioon  $z = f(P) = f(x, y)$  pidev punkti  $P_0 := (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses. Kui funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ , siis tema graafikul eksisteerib puutujatasand punktis  $M_0 := (x_0, y_0, f(P_0))$ . Selle puutujatasandi võrrand on

$$z - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0). \quad (1.12)$$

Teiselt poolt, kui funktsiooni  $f$  graafikul eksisteerib punktis  $M_0$  puutujatasand, kusjuures see puutujatasand pole paralleelne  $z$ -teljega, siis funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0$ .

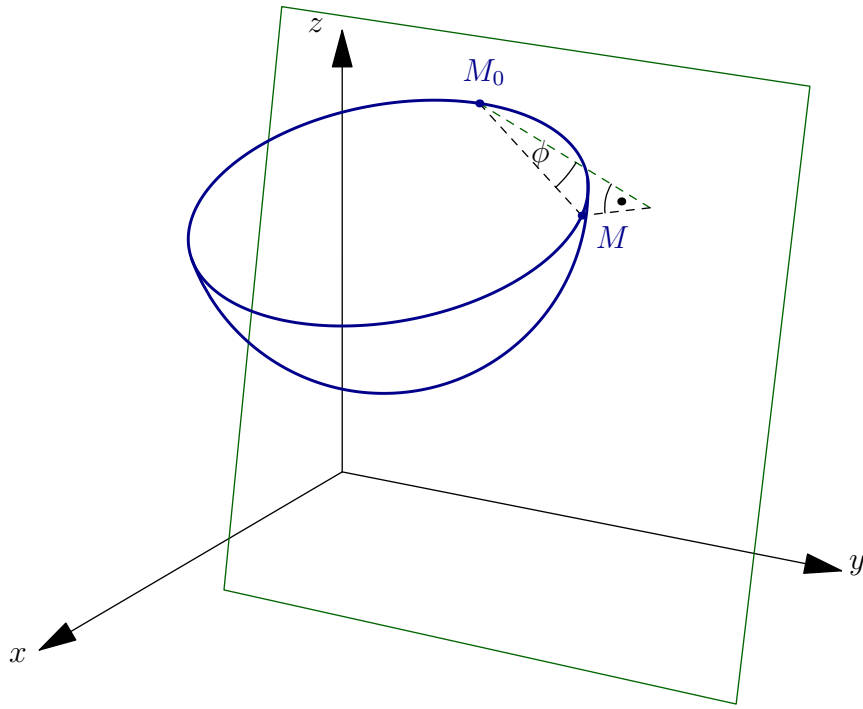
**TÕESTUS.** Olgu funktsioon  $z = f(x, y)$  diferentseeruv punktis  $P_0$ . Veendumaks, et tasand (1.12) on tema graafiku puutujatasand punktis  $M_0$ , piisab näidata, et graafiku punkti  $M := (x, y, f(x, y))$  lähenemisel punktile  $M_0$  (mööda graafikut) läheneb neid punkte läbiva sirge ja selle tasandi vaheline nurk nullile ehk, teisisõnu, tähistades  $P := (x, y)$ , vektori

$$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, f(P) - f(P_0))$$

**NB!** Joonisel 1.1 ei peaks punktid  $M_0$  ja  $M$  olema "kausi" "serval", vaid "külje peal". Hea oleks, kui  $xy$ -tasandil oleksid kujutatud punkte  $P_0$  ja  $P$  ning punktidest  $M_0$  ja  $M$  oleks tõmmatud  $xy$  tasandile ristsirged (vastavalt punkti  $P_0$  ja  $P$ ).

**NB!** Kas märkida, et punkt  $M_0$  asub tasandil (1.12)?

**NB!** Joonis?



JOONIS 1.1

ja tasandi (1.12) normaalvektori

$$\vec{n} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(P_0), \frac{\partial f}{\partial y}(P_0), -1 \right)$$

vaheline nurk  $\angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n})$  läheneb täisnurgale  $\frac{\pi}{2}$  protsessis  $P \rightarrow P_0$ . Tähistame

$$\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Kuna piirprotsess  $P \rightarrow P_0$  tähendab, et  $\rho \rightarrow 0$ , ning

$$\angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) \rightarrow \frac{\pi}{2} \iff \cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) \rightarrow 0,$$

siis jääb meil näidata, et  $\cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ . Selleks märgime, et

$$\cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{M_0M}| |\vec{n}|}$$

(sümbolid  $|\overrightarrow{M_0M}|$ ,  $|\vec{n}|$  ning  $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}$  tähistavad vastavalt vektorite  $\overrightarrow{M_0M}$  ja  $\vec{n}$  pikkusi ning nende skalaarkorrutist). Kuna funktsiooni  $f$  diferentseeruvuse tõttu punktis  $P_0$

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) - (f(P) - f(P_0)) = o(\rho) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0,$$

siis

$$\cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = \frac{1}{|\vec{n}|} \frac{o(\rho)}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \frac{1}{|\vec{n}|} \frac{\rho}{|\overrightarrow{M_0M}|} \frac{o(\rho)}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

(sest

$$|\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 + |f(P) - f(P_0)|^2} = \sqrt{\rho^2 + |f(P) - f(P_0)|^2} \geq \rho$$

ning seega  $0 \leq \frac{\rho}{|\overrightarrow{M_0M}|} \leq 1$ ), nagu soovitud.

Teiselt poolt, eksisteerigu funktsiooni  $z = f(x, y)$  graafikul  $z$ -teljega mitteparalleelne puutujatasand punktis  $M_0$ ; olgu selle puutujatasandi võrrand

$$z - f(P_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0). \quad (1.13)$$

**NB!** Kas see on hea - muutujad  $x$  ja  $y$  on kinni - või pole kinni?? Las jääb (esialgu?) nii!

Märgime, et  $\vec{m} := (A, B, -1)$  on selle puutujatasandi normaalvektor.

Märkides, nagu eelnevaski  $P := (x, y)$ ,  $\rho := d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  ja  $M = (x, y, f(x, y)) = (x, y, f(P))$ , piisab funktsiooni  $f$  diferentseeruvuseks punktis  $P_0$  näidata, et

$$\frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) - (f(P) - f(P_0))}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

ehk, teisisõnu,  $\frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{m}}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ . Kuna

$$\frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{m}}{\rho} = |\vec{m}| \frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{m}}{|\overrightarrow{M_0M}| |\vec{m}|} \frac{|\overrightarrow{M_0M}|}{\rho} = |\vec{m}| \cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) \frac{|\overrightarrow{M_0M}|}{\rho},$$

kusjuures  $\cos \angle(\overrightarrow{M_0M}, \vec{m}) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$  (sest tasand (1.13) on funktsiooni  $f$  graafiku puutujatasand), siis, veendumaks, et  $\frac{\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{m}}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ , piisab näidata, et

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M}|}{\rho} = O(1) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0.$$

Selleks, arvestades, et

$$\frac{|\overrightarrow{M_0M}|}{\rho} = \frac{\sqrt{\rho^2 + |f(P) - f(P_0)|^2}}{\rho} = \sqrt{1 + \left| \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} \right|^2},$$

piisab näidata, et

$$\frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = O(1) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned} & |f(P) - f(P_0)| \\ & \leq |f(P) - f(P_0) - A(x - x_0) - B(y - y_0)| + |A||x - x_0| + |B||y - y_0| \\ & = |\overrightarrow{ML}| + |A||x - x_0| + |B||y - y_0|, \end{aligned}$$

kus punkt  $L := (x, y, A(x - x_0) + B(y - y_0) + f(P_0))$  on punkti  $M$  läbiva  $z$ -teljega paralleelse sirge ja puutujatasandi (1.13) löikepunkt.

Tähistades tähega  $N$  punkti  $M$  ristprojektsiooni puutujatasandile (1.13), pane-me tähele, et kõik (täisnurksed) kolmnurgad  $\triangle MLN$  on sarnased (sest kõik hüpo-te-nuusid  $ML$  on paralleelsed – nad on paralleelsed  $z$ -teljega – ning kõik kaatetid  $MN$  on paralleelsed – nad on risti puutujatasandiga (1.13)), seega leidub konstant  $\kappa > 0$  nii, et alati  $|\overrightarrow{ML}| = \kappa |\overrightarrow{MN}|$ . Tähistades tähega  $\psi$  punkte  $M$  ja  $M_0$  läbiva sirge ja puutujatasandi (1.13) vahelise nurga, saame nüüd, et

$$\frac{|\overrightarrow{ML}|}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \kappa \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{M_0M}|} = \kappa \sin \psi \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Siit järeldub, et “piisavalt väikeste”  $\rho$  väärtuste korral

$$|\overrightarrow{ML}| \leq \frac{1}{2} |\overrightarrow{M_0M}| = \frac{1}{2} \sqrt{\rho^2 + |f(P) - f(P_0)|^2} \leq \frac{\rho + |f(P) - f(P_0)|}{2},$$

seega

$$|f(P) - f(P_0)| \leq |A||x - x_0| + |B||y - y_0| + \frac{\rho}{2} + \frac{|f(P) - f(P_0)|}{2}$$

ning järelikult

$$\frac{|f(P) - f(P_0)|}{\rho} \leq 2|A| \frac{|x - x_0|}{\rho} + 2|B| \frac{|y - y_0|}{\rho} + 1 \leq 2|A| + 2|B| + 1.$$

□

## 1.5. Mitme muutuja funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ .

**Definitsioon 1.5.** Avaldist

$$du(P_0) := df(P_0) := \frac{\partial u}{\partial x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(P_0) \Delta x_m$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  (esimest järku ehk lihtsalt esimeseks) täisdiferentsiaaliks punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ .



Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} u = g(Q) &= g(t_1, \dots, t_l) := f(\phi_1(Q), \dots, \phi_m(Q)) \\ &= f(\phi_1(t_1, \dots, t_l), \dots, \phi_m(t_1, \dots, t_l)), \quad Q = (t_1, \dots, t_l) \in \Delta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

**Teoreem 1.8.** *Olgu funktsioonid  $\phi_1, \dots, \phi_m$  diferentseeruvad punktis*

$$Q_0 = (t_1^0, \dots, t_l^0) \in \Delta$$

*ning olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv punktis*

$$P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) = (\phi_1(Q_0), \dots, \phi_m(Q_0)) \in \mathcal{D}.$$

*Siis ka liitfunktsioon (1.14) on diferentseeruv punktis  $Q_0$ . Seejuures iga  $j \in \{1, \dots, l\}$  korral*

$$\frac{\partial u}{\partial t_j}(Q_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0).$$

**TÕESTUS.** Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et funktsiooni  $u = g(Q)$  muut punktis  $Q_0$ , mis vastab argumentide  $t_1, \dots, t_l$  muutudele  $\Delta t_1, \dots, \Delta t_l$ ,

$$\begin{aligned} \Delta u &= g(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_l^0 + \Delta t_l) - g(t_1^0, \dots, t_l^0) \\ &= f(\phi_1(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_l^0 + \Delta t_l), \dots, \phi_m(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_l^0 + \Delta t_l)) \\ &\quad - f(\phi_1(t_1^0, \dots, t_l^0), \dots, \phi_m(t_1^0, \dots, t_l^0)) \end{aligned}$$

esitub kujul

$$\Delta u = C_1 \Delta t_1 + \dots + C_l \Delta t_l + \gamma_1 \Delta t_1 + \dots + \gamma_l \Delta t_l,$$

kus iga  $j \in \{1, \dots, l\}$  korral

$$C_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0)$$

ning, tähistades  $r := \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_l^2}$ , funktsioon  $\gamma_j = \gamma_j(\Delta t_1, \dots, \Delta t_l)$  rahuldab tingimust  $\gamma_j \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ .

Funktsiooni  $f$  diferentseeruvuse tõttu punktis  $P_0$  esitub argumentide  $x_1, \dots, x_m$  muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$  vastav funktsiooni  $f$  muut punktis  $P_0$  valemiga

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_0) \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m,$$

kus  $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$  ning iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral funktsioon  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$  (siin, nagu kõikjal,  $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ ). Tähistame edaspidises

$$\Delta x_i := \phi_i(t_1^0 + \Delta t_1, \dots, t_l^0 + \Delta t_l) - \phi_i(t_1^0, \dots, t_l^0), \quad i = 1, \dots, m.$$

Kuna funktsioonid  $\phi_1, \dots, \phi_m$  on diferentseeruvad punktis  $Q_0$ , siis iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\Delta x_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t_1}(Q_0) \Delta t_1 + \dots + \frac{\partial \phi_i}{\partial t_l}(Q_0) \Delta t_l + \beta_1^i \Delta t_1 + \dots + \beta_l^i \Delta t_l,$$

kus iga  $j \in \{1, \dots, l\}$  korral funktsioon  $\beta_j^i = \beta_j^i(\Delta t_1, \dots, \Delta t_l)$  rahuldab tingimust  $\beta_j^i \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$  (siin, nagu ennegi,  $r = \sqrt{\Delta t_1^2 + \dots + \Delta t_l^2}$ ). Niisiis,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) + \beta_j^i \right) \Delta t_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^l \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right) \Delta t_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^l \left( \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \beta_j^i + \alpha_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right) \right) \Delta t_j \\ &= C_1 \Delta t_1 + \dots + C_l \Delta t_l + \gamma_1 \Delta t_1 + \dots + \gamma_l \Delta t_l, \end{aligned}$$

kus

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^m \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) + \alpha_i \right) \beta_j^i + \alpha_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t_j}(Q_0) \right), \quad j = 1, \dots, l.$$

Teoreemi tõestuseks jääb veenduda, et funktsioonid  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$  rahuldavad tingimust  $\gamma_j \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ ,  $j = 1, \dots, l$ . Selleks piisab näidata, et iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral  $\alpha_i \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , milleks arvestades, et  $\alpha_i \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ , piisab näidata, et  $\rho \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ . Kuna funktsioonide  $\phi_1, \dots, \phi_m$  diferentseeruvusest punktis  $Q_0$  järeldub nende funktsioonide pidevus selles punktis, siis iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral  $\Delta x_i \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , järelikult  $\rho \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ , nagu soovitud.  $\square$

Konkreetsuse mõttes sõnastame teoreemi 1.8 eraldi juhu jaoks, kus  $m = 3$  ja  $l = 2$ .

Olgu funktsioon

$$w = f(P) = f(x, y, z)$$

määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  ning olgu hulgas  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  määratud funktsioonid

$$x = x(Q) = x(u, v), \quad y = y(Q) = y(u, v), \quad z = z(Q) = z(u, v) \quad (1.15)$$

sellised, et

$$\mathcal{D} \supset \{ (x(Q), y(Q), z(Q)) : Q \in \Delta \}.$$

Sel juhul saame vaadelda liitfunktsiooni

$$\begin{aligned} w = g(Q) = g(u, v) &:= f(x(Q), y(Q), z(Q)) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \\ Q &= (u, v) \in \Delta. \end{aligned} \quad (1.16)$$

**NB!** Kas see juht, kus  $m = 3$  ja  $l = 2$ , ikka vajab eraldi väljatoomist?

**Teoreem 1.9.** Olgu funktsioonid (1.15) diferentseeruvad punktis  $Q_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$  ning olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv punktis

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (x(Q_0), y(Q_0), z(Q_0)) \in \mathcal{D}.$$

Siis ka liitfunktsioon (1.16) on diferentseeruv punktis  $Q_0$ . Seejuures

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(Q_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{\partial x}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{\partial y}{\partial u}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \frac{\partial z}{\partial u}(Q_0), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(Q_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \frac{\partial x}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \frac{\partial y}{\partial v}(Q_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \frac{\partial z}{\partial v}(Q_0).\end{aligned}$$

Järgneva järelduse – Lagrange'i keskväärtusteoreemi mitme muutuja funktsioonide jaoks – sõnastamiseks toome kõigepealt sisse ruumi  $\mathbb{R}^m$  kahte punkti ühendava sirglõigu mõiste.

**Definitsioon 1.6.** Punkte  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  ja  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  ühendavaks sirglõiguks nimetatakse (ruumi  $\mathbb{R}^m$ ) punktihulka

$$P_0P := \{(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m) \in \mathbb{R}^m : t \in [0, 1]\}$$

kus  $\Delta x_i := x_i - x_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Järeldus 1.10** (Lagrange'i keskväärtusteoreem mitme muutuja funktsioonide jaoks). Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  pidev punktides  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  ja  $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ , kus  $P \neq P_0$ , ning diferentseeruv neid punkte ühendava sirglõigu igas punktis, välja arvatud, võib-olla, punktides  $P_0$  ja  $P$  endis. Siis leidub punkt  $R$  punkte  $P_0$  ja  $P$  ühendaval sirglõigul punktide  $P_0$  ja  $P$  vahel (s.t.  $R = (x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta\Delta x_m)$  mingi  $\theta \in (0, 1)$  korral) selliselt, et

$$f(P) - f(P_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(R) \Delta x_i.$$

TÕESTUS. Vaatleme funktsiooni

$$\Phi(t) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m) = f(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)), \quad t \in [0, 1],$$

kus  $\phi_i(t) = x_i^0 + t\Delta x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; siis  $f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0)$ . Funktsioon  $\Phi$  rahuldab lõigus  $[0, 1]$  kõiki Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi – ta on selles lõigus pidev ning, vastavalt teoreemile 1.8, vahemikus  $(0, 1)$  diferentseeruv, sest mis tahes  $t \in (0, 1)$  korral funktsioonid  $\phi_1, \dots, \phi_m$  on diferentseeruvad punktis  $t$  ning funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis

$$P_t := (\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) = (x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m);$$

seejuures

$$\Phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P_t) \phi_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P_t) \phi_m'(t) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t) \Delta x_i.$$

Lagrange'i keskvaartusteoreemi kohaselt leidub arv  $\theta \in (0, 1)$  nii, et  $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta)$  ning järelikult, tähistades  $R := P_\theta = (x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m)$ ,

$$f(P) - f(P_0) = \Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_\theta) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(R) \Delta x_i.$$

□

Jaotise (ja ühtlasi paragrahvi) lõpetuseks tõestame järeldusena Lagrange'i keskvaartusteoreemi mitme muutuva funktsioonide jaoks (s.t. järeldusest 1.10) järgneva teoreemi 1.11, millel on (läbi lause V.5.6, (cc)) oluline roll muutuva vahetuse valemi (teoreemi V.5.4) tõestuses kordse integraali jaoks.

Teoreem 1.4 ütleb (muuhulgas), et kui  $m$  muutuva funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P = (x_1, \dots, x_m)$ , siis, tähistades  $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  ja  $P + \Delta P := (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$ , vahe

$$\alpha(P, \Delta P) := f(P + \Delta P) - f(P) - \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P) \Delta x_m \right)$$

**NB!** Tuua sisse mõiste “funktsiooni muudu lineaarne peaosas”?

rahuldab tingimust  $\frac{\alpha(P, \Delta P)}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$ , kus  $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ . Järgnev teoreem 1.11 ütleb, et kui funktsioonil  $f$  eksisteerivad pidevad osatuletised lahtises hulgas  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , siis mis tahes (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) kinnise tõkestatud alamhulga  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$  korral on see koonduvus ühtlane punktide  $P \in \mathcal{K}$  suhtes.

**NB!** Kas siin see “(ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) kinnise tõkestatud alamhulga” on õigesti mõistetav?

**Teoreem 1.11.** Eksisteerigu funktsioonil  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  lahtises hulgas  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  pidevad osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) kõigi argumentide järgi ning olgu tõkestatud alamhulk  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$  kinnine ruumis  $\mathbb{R}^m$ . Tähistame punktide  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  ja  $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$  korral  $P + \Delta P := (x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$  ja  $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ . Siis

$$\frac{f(P + \Delta P) - f(P) - \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P) \Delta x_m \right)}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$$

ühtlaselt punktide  $P \in \mathcal{K}$  suhtes.

**TÕESTUS.** Olgu  $\varepsilon > 0$ . Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et mis tahes punkti  $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$  korral, mis rahuldab tingimust  $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta$ , kehtib tingimus

$$f(P + \Delta P) - f(P) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \Delta x_i < \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^m |\Delta x_i|^2} \quad \text{iga } P \in \mathcal{K} \text{ korral.} \quad (1.17)$$

Selleks valime reaalarvu  $\gamma > 0$  nii, et  $\overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$  iga  $P \in \mathcal{K}$  korral (meenutame, et sümbol  $\overline{B}(P, \gamma)$  tähistab kinnist kera ruumis  $\mathbb{R}^m$  keskpunktiga  $P \in \mathbb{R}^m$  ja raadiusega  $\gamma > 0$ , s.t.  $\overline{B}(P, \gamma) := \{Q \in \mathbb{R}^m : d(P, Q) \leq \gamma\}$ ); siis ühend  $\mathcal{D} := \bigcup_{P \in \mathcal{K}} \overline{B}(P, \gamma) \subset \mathcal{U}$  on (ruumis  $\mathbb{R}^m$ ) kinnine tõkestatud hulk (nii sellise reaalarvu  $\gamma > 0$  olemasolu kui ka ühendi  $\mathcal{D}$  kinnisus ja tõkestatus on tõestatud ülesandes I.2.6).

Olgu  $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$  selline, et  $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \gamma$  ning olgu  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{K}$  suvaline. Siis Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal mitme muutuva funktsioonide jaoks (s.t. järelduse 1.10 põhjal) leidub reaalarv  $\theta \in (0, 1)$  nii, et

$$f(P + \Delta P) - f(P) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P) \Delta x_i,$$

kus  $P + \theta \Delta P := (x_1 + \theta \Delta x_1, \dots, x_m + \theta \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Seega Rogers–Hölderi võrratuse põhjal (vt. teoreemi I.1.2)

$$\begin{aligned} f(P + \Delta P) - f(P) - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \right) \Delta x_i \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(P + \theta \Delta P) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \right|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m |\Delta x_i|^2}. \end{aligned}$$

Cantori teoreemi I.4.9 põhjal leidub reaalarv  $\delta_0 > 0$  nii, et

$$\left[ Q, R \in \mathcal{D}, d(Q, R) < \delta_0 \right] \quad \implies \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(Q) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(R) \right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Arvestades, et  $d(P, P + \theta \Delta P) = \theta \rho < \rho$ , järeldub eelnevast, et kui punkt  $\Delta P = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \in \mathbb{R}^m$  rahuldab tingimust  $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \min\{\gamma, \delta_0\} =: \delta$ . siis kehtib tingimus (1.17)

(PÕHJENDADA!) .

□

## § 2. Tuletis etteantud suunas. Gradient

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses ning läbige punkti  $P_0$  suunatud telg  $l$ , mille suund on määratud vektoriga  $\vec{s} = (a_1, \dots, a_m)$ . Olgu  $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m)$  vektori  $\vec{s}$  suunaline ühikvektor, s.t.  $\vec{s}_0 := \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ , kus sümbol  $|\vec{s}|$  tähistab vektori  $\vec{s}$  pikkust.

**Märkus 2.1.** Kui  $m = 2$  või  $m = 3$ , siis vektori  $\vec{s}$  suunalise (ja ühtlasi telje  $l$  suunalise) ühikvektori  $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m)$  koordinaadid on vastavalt vektori  $\vec{s}$  ja  $x_1$ -telje, vektori  $\vec{s}$  ja  $x_2$ -telje jne vaheliste nurkade koosinused:

$$c_i = \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

kus  $\alpha_i$  on nurk vektori  $\vec{s}$  ja  $x_i$ -telje vahel (ehk, teisisõnu, nurk telje  $l$  ja  $x_i$ -telje vahel ehk nurk vektori  $\vec{s}_0$  ja  $x_i$  telje vahel).

Veendume selles. Vaatleme ainult juhtu, kus  $m = 3$  (juhtu, kus  $m = 2$ , käsitletakse analoogiliselt). Tähistades sümbolitega  $\vec{x}_1, \vec{x}_2$  ja  $\vec{x}_3$  vastavalt  $x_1$ -,  $x_2$ - ja  $x_3$ -telje suunalised ühikvektorid, s.t.  $\vec{x}_1 := (1, 0, 0)$ ,  $\vec{x}_2 := (0, 1, 0)$  ja  $\vec{x}_3 := (0, 0, 1)$ , saame ühelt poolt

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{x}_1 = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = c_1,$$

teiselt poolt aga

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{x}_1 = |\vec{s}_0| |\vec{x}_1| \cos \alpha_1 = \cos \alpha_1;$$

niisiis  $c_1 = \cos \alpha_1$ . Võrdused  $c_2 = \cos \alpha_2$  ja  $c_3 = \cos \alpha_3$  tõestatakse analoogiliselt.

**Definitsioon 2.1.** Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t},$$

siis seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni  $f$  *tuletiseks punktis  $P_0$  telje  $l$  suunas* (või *vektori  $\vec{s}$  suunas*) ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(P_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial l}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{s}}(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Toome välja mõned (vahetult definitsioonist 2.1 järelduvad) edasises kasulikuks osutada võivad valemid tuletise  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0)$  arvutamiseks: kui see tuletis eksisteerib, siis

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + tc_1, \dots, x_m^0 + tc_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \tau|\vec{s}|c_1, \dots, x_m^0 + \tau|\vec{s}|c_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\tau|\vec{s}|} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + ta_1, \dots, x_m^0 + ta_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{t|\vec{s}|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}) - f(P_0)}{t|\vec{s}|}. \end{aligned}$$

**NB!** Rõhutame, et meie käsitluses on  $x_1$ -telg,  $x_2$ -telg ja  $x_3$ -telg omavahel paarikaupa risti!

**Märkus 2.2.** Vahetult definitsioonist järeldub, et funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  osatuletised punktis  $P_0$  vastavalt muutujate  $x_1, \dots, x_m$  järgi on funktsiooni  $f$  tuletised punktis  $P_0$  vastavalt  $x_1$ -telje,  $x_2$ -telje jne suunas. (Eriti selgelt on see näha eelneva võrratusteahela teisest võrdusest.)

**Definitsioon 2.2.** Vektorit

$$\operatorname{grad} f(P_0) := \nabla f(P_0) := (f'_{x_1}(P_0), \dots, f'_{x_m}(P_0))$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  *gradiendiks* punktis  $P_0$ .

Sümbolit  $\nabla$  loetakse: “nabla” või “atled”. Nimetus “nabla” tuleb heebreakeelsest sõnast vanaaegse harfisarnase muusikariista kohta – elava fantaasiaga lugeja suudab kindlasti leida teatava sarnasuse selle sümboli ja harfi vahel; “atled” on “delta” loetuna tagant ettepoole, sümbol  $\nabla$  on tagurpidi sümbol  $\Delta$ !

**Teoreem 2.1.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Siis funktsioonil  $f$  eksisteerib punktis  $P_0$  tuletis mis tahes vektori  $\vec{s} \neq \vec{0} := (\underbrace{0, \dots, 0}_{m \text{ arvu } 0})$  suunas, kusjuures see tuletis on võrdne gradiendi  $\nabla f(P_0)$

ja vektori  $\vec{s}$  suunalise ühikvektori skalaarkorrutisega:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|}. \quad (2.1)$$

Esitame teoreemile 2.1 kaks tõestust, millest esimene toetub vahetult funktsiooni diferentseeruvuse definitsioonile ning teine liitfunktsiooni diferentseerimise reeglile teoreemile 1.8.

**TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS TOETUB FUNKTSIOONI DIFERENTSEERUVUSE DEFINITSIOONILE.** Olgu  $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m)$  vektori  $\vec{s} \neq \vec{0}$  suunaline ühikvektor, s.t.  $\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ .

Teoreemi tõestuseks tuleb näidata, et

$$\frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} f'_{x_1}(P_0)c_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0)c_m. \quad (2.2)$$

Funktsiooni  $f$  diferentseeruvuse tõttu punktis  $P_0$  esitub selle funktsiooni muut punktis  $P_0$ , mis vastab argumentide muutudele  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ , kasutades tähistust  $\Delta P := (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ , valemiga

$$f(P_0 + \Delta P) - f(P_0) = f'_{x_1}(P_0)\Delta x_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0)\Delta x_m + \alpha(\Delta P), \quad (2.3)$$

kus funktsioon  $\alpha = \alpha(\Delta P) = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust

$$\frac{\alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad (2.4)$$

(siin, nagu kõikjal,  $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ ). Valemi (2.3) põhjal, arvestades, et  $t\vec{s}_0 = (tc_1, \dots, tc_m)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t} &= \frac{f'_{x_1}(P_0)tc_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0)tc_m + \alpha(tc_1, \dots, tc_m)}{t} \\ &= f'_{x_1}(P_0)c_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0)c_m + \frac{\alpha(tc_1, \dots, tc_m)}{t}. \end{aligned}$$

Kuna  $\frac{\alpha(tc_1, \dots, tc_m)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$  (see järeldub koonduvusest (2.4) (PÕHJENDADA!)), siis (2.2) kehtib.  $\square$

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS TOETUB LIITFUNKTSIOONI DIFERENTSEERIMISE REEGLILE. Olgu  $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m)$  vektori  $\vec{s} \neq \vec{0}$  suunaline ühikvektor, s.t.  $\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ . Defineerime funktsiooni

$$g(t) := f(P_0 + t\vec{s}_0) = f(x_1^0 + tc_1, \dots, x_m^0 + tc_m).$$

Kuna funktsioon  $f$  on määratud punkti  $P_0$  mingis ümbruses, siis funktsioon  $g$  on määratud punkti  $t = 0$  teatavas ümbruses. Kuna  $g(0) = f(P_0)$ , siis tuletis  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(P_0 + t\vec{s}_0) - f(P_0)}{t}$  eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib tuletis  $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$ ; seejuures need kaks tuletist on võrdsed. Seega piisab teoreemi tõestuseks näidata, et eksisteerib tuletis  $g'(0)$ , kusjuures  $g'(0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ .

Funktsioon  $g$  on tõlgendatav liitfunktsioonina

$$g(t) = f(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)),$$

kus  $\phi_i(t) = x_i^0 + tc_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Kuna

- funktsioonid  $\phi_1, \dots, \phi_m$  on diferentseeruvad punktis 0, kusjuures  $\phi_i'(0) = c_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
- funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) = (\phi_1(0), \dots, \phi_m(0))$ ,

siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi 1.8) põhjal funktsioon  $g$  on diferentseeruv punktis 0, kusjuures

$$g'(0) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0) \phi_i'(0) = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0) c_i = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_0 = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|},$$

nagu soovitud.  $\square$

**Märkus 2.3.** Kui teoreemis 2.1 loobuda eeldusest funktsiooni  $f$  diferentseeruvuse kohta punktis  $P_0$ , siis valem (2.1) üldjuhul ei kehti.

**Näide 2.1.** Vaatleme kolme muutuja funktsiooni

$$u = f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}.$$

Sellel funktsioonil on punktis  $(0, 0, 0)$  olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui  $\vec{s} = (a, b, c)$  on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb, 0 + tc) - f(0, 0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{ta \cdot tb \cdot tc}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{abc}}{t} = \sqrt[3]{abc}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $(0, 0, 0)$  lõplikud osatuletised muutujate  $x$ ,  $y$  ja  $z$  järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -telje suunas), kusjuures

$$f'_x(0, 0, 0) = f'_y(0, 0, 0) = f'_z(0, 0, 0) = 0;$$

niisiis  $\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ . Seega mis tahes ühikvektori  $\vec{s} = (a, b, c)$  korral

$$\nabla f(0, 0, 0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b + 0c = 0,$$

kuid  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0, 0) = \sqrt[3]{abc} \neq 0$ , kui  $a, b, c \neq 0$ .

**Näide 2.2.** Vaatleme kahe muutuja funktsiooni

$$z = f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

Sellel funktsioonil on punktis  $(0, 0)$  olemas lõplik tuletis mis tahes suunas: kui  $\vec{s} = (a, b)$  on vektor pikkusega 1, siis

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 a^2 tb}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sqrt[3]{a^2 b}}{t} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Eelnevast nähtub ka, et funktsioonil  $f$  eksisteerivad punktis  $(0, 0)$  lõplikud esimest järku osatuletised muutujate  $x$  ja  $y$  järgi (sest need osatuletised on tuletised vastavalt vektorite  $(1, 0)$  ja  $(0, 1)$  suunas), kusjuures

$$f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0;$$

niisiis  $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ . Seega mis tahes ühikvektori  $\vec{s} = (a, b)$  korral

$$\nabla f(0, 0) \cdot \vec{s} = 0a + 0b = 0,$$

kuid  $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(0, 0) = \sqrt[3]{a^2 b} \neq 0$ , kui  $a, b \neq 0$ .

**Teoreem 2.2.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Siis funktsiooni  $f$  tuletis punktis  $P_0$  mis tahes suunas ei ületa tema tuletist selles punktis gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas (ehk, teisisõnu, tuletis gradiendi suunas on kõikvõimalikes suundades võetud tuletiste maksimaalne väärtus). Funktsiooni  $f$  tuletis punktis  $P_0$  gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas on võrdne gradiendi  $\nabla f(P_0)$  pikkusega  $|\nabla f(P_0)|$ .

**TÕESTUS.** Funktsiooni  $f$  tuletis punktis  $P_0$  gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas on teoreemi 2.1 põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \nabla f(P_0)}{|\nabla f(P_0)|} = \frac{|\nabla f(P_0)|^2}{|\nabla f(P_0)|} = |\nabla f(P_0)|,$$

s.t. see tuletis on võrdne gradiendi  $\nabla f(P_0)$  pikkusega.

Mis tahes  $\vec{s} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{s} \neq \vec{0}$ , korral, defineerides  $\vec{s}_0 = (c_1, \dots, c_m) := \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$  (s.t.  $\vec{s}_0$  on vektori  $\vec{s}$  suunaline ühikvektor), on funktsiooni  $f$  tuletis punktis  $P_0$  vektori  $\vec{s}$  suunas teoreemi 2.1 ja Rogers–Hölderite võrratuse (vt. teoreemi I.1.2) põhjal

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) &= \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{s}_0 = \sum_{i=1}^m f'_{x_i}(P_0) c_i \leq \sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(P_0)| |c_i| \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m |f'_{x_i}(P_0)|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m |c_i|^2} = |\nabla f(P_0)| |\vec{s}_0| = |\nabla f(P_0)|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

s.t. see tuletis ei ületa funktsiooni  $f$  tuletist punktis  $P_0$  gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas.  $\square$

**Märkus 2.4.** Võrratusteahelast (2.5) ja ülesandest I.1.2 järeldeb, et teoreemis 2.2 (s.t. punktis  $P_0$  diferentseeruva funktsiooni  $f$  korral) punktis  $P_0$  kõikvõimalikes suundades võetud (funktsiooni  $f$ ) tuletiste maksimaalne väärtus  $|\nabla f(P_0)|$  (gradiendi  $\nabla f(P_0)$  pikkus) saavutatakse *parajasti* gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas.

**Märkus 2.5.** Kui  $m = 2$  või  $m = 3$ , siis võime teoreemi 2.2 tõestuses Rogers–Hölderit võrratuse asemel toetuda trigonomeetria-alastele teadmistele. Esitame niisuguse tõestuse.

TEOREEMI 2.2 TÕESTUS JUHTUDE  $m = 2$  JA  $m = 3$  JAKS, MIS EI KASUTA ROGERS–HÖLDERI VÕRRATUST. Funktsiooni  $f$  tuletis punktis  $P_0$  vektori  $\vec{s} \neq \vec{0}$  suunas on teoreemi 2.1 põhjal, tähistades sümboliga  $\theta$  nurga selle vektori ja gradiendi  $\nabla f(P_0)$  vahel,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \frac{\nabla f(P_0) \cdot \vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{|\nabla f(P_0)| |\vec{s}| \cos \theta}{|\vec{s}|} = |\nabla f(P_0)| \cos \theta.$$

Näeme, et sellel tuletisel on suurim võimalik väärtus parajasti juhul, kui  $\cos \theta = 1$ , s.t.  $\theta = 0$  ehk, teisisõnu, vektori  $\vec{s}$  ja gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunad ühtivad. Eelnevast võrdusteahelast näeme ka, et tuletis punktis  $P_0$  gradiendi  $\nabla f(P_0)$  suunas on

$$\frac{\partial f}{\partial \nabla f(P_0)}(P_0) = |\nabla f(P_0)| \cos 0 = |\nabla f(P_0)|.$$

□

## § 3. Kõrgemat järku osatuletised ja diferentsiaalid

### 3.1. Kõrgemat järku osatuletised

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses ning olgu  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Kui funktsioonil  $f$  eksisteerib igas punktis  $P$  punkti  $P_0$  mingist ümbrusest  $\mathcal{U}$  lõplik osatuleti  $f'_{x_i}(P)$ , siis selles ümbruses on määratud osatuleti funktsioon

$$f'_{x_i}: \mathcal{U} \ni P \longmapsto f'_{x_i}(P) \in \mathbb{R}.$$

**Definitsioon 3.1.** Olgu  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Kui osatuleti funktsioonil  $f'_{x_i}$  eksisteerib punktis  $P_0$  (lõplik või lõpmatu) osatuleti argumenti  $x_j$  järgi  $(f'_{x_i})'_{x_j}(P_0)$ , siis seda osatuleti nimetatakse funktsiooni  $f$  teist järku (ehk lihtsalt teiseks) osatuleti punkti  $P_0$  (argumentide  $x_i$  ja  $x_j$  järgi) ning tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(P_0), \quad f''_{x_i x_j}(P_0), \quad u''_{x_i x_j}(P_0), \quad f_{x_i x_j}(P_0), \quad u_{x_i x_j}(P_0) \quad (3.1)$$

või

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad f''_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u''_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_m^0), \\ f_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_m^0). \end{aligned}$$

Seejuures, kui  $j \neq i$ , siis seda teist järku osatuleti nimetatakse *segaosatuleti* (ehk *seगतuleti*).

Kui mingi hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis  $P$  eksisteerib lõplik teist järku osatuleti  $f''_{x_i x_j}(P)$ , siis hulgas  $\mathcal{D}$  on määratud (teist järku) osatuleti funktsioon (argumentide  $x_i$  ja  $x_j$  järgi)

$$f''_{x_i x_j}: \mathcal{D} \ni P \longmapsto f''_{x_i x_j}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni  $f$ ) teist järku (ehk lihtsalt teiseks) osatuleti (argumentide  $x_i$  ja  $x_j$  järgi). Seda osatuleti (s.t. osatuleti funktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}, \quad f''_{x_i x_j}, \quad u''_{x_i x_j}, \quad f_{x_i x_j}, \quad u_{x_i x_j}. \quad (3.2)$$

Tähistused (3.1) on tähistustega (3.2) hästi kooskõlas: (lõplik) teist järku osatuleti antud punktis on vastava osatuleti funktsiooni väärtus selles punktis.

Üldiselt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}, \quad f''_{x_i x_j} = (f'_{x_i})'_{x_j}, \quad u''_{x_i x_j} = (u'_{x_i})'_{x_j}, \\ f_{x_i x_j} = (f_{x_i})_{x_j}, \quad u_{x_i x_j} = (u_{x_i})_{x_j}. \end{aligned}$$

Me kasutame tähistusi (juhu  $j = i$  jaoks)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} &=: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} &=: \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, & f''_{x_i x_i} &=: f''_{x_i^2}, & u''_{x_i x_i} &=: u''_{x_i^2}, \\ f_{x_i x_i} &=: f_{x_i^2}, & u_{x_i x_i} &=: u_{x_i^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

**Näide 3.1.** Leiame funktsiooni

$$u = f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

teist järku osatuletised. Kui  $(x, y) \neq (0, 0)$ , saame vahetult diferentseerides

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

millest sümmeetria põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4}{(x^2 + y^2)^2};$$

seega, jällegi vahetult diferentseerides,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \left( \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x = \frac{-4x^3 y^3 + 12x y^5}{(x^2 + y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \left( \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3},$$

millest sümmeetria põhjal vastavalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{-12x^5 y + 4x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4 y^2 - 9x^2 y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Leiame funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletised punktis  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0. \end{aligned}$$

Nüüd saame leida funktsiooni  $f$  teist järku osatuletised punktis  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0 + h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1. \end{aligned}$$

Üldiselt, ( $m$  muutuja) funktsiooni *kõrgemat järku osatuletised* defineeritakse **rekursiivselt**, sarnaselt teist järku osatuletistega. Haaramel järgnevas kaasa ka (eelnevas juba defineeritud) teist järku osatuletiste juhu.

Olgu  $n \geq 2$ , kusjuures eeldame, et meil on defineeritud  $m$  muutuja funktsiooni  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonid.

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  määratud punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses ning olgu  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ . Eksisteerigu funktsioonil  $f$  igas punktis  $P$  punkti  $P_0$  mingist ümbrusest  $\mathcal{U}$  lõplik  $(n-1)$ -järku osatuletis  $f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)}(P)$  (argumentide  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-1}}$  järgi). Siis selles ümbruses on määratud  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioon

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)} : \mathcal{U} \ni P \mapsto f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)}(P) \in \mathbb{R}.$$

**Definitsioon 3.2.** Kui  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonil  $f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)}$  eksisteerib punktis  $P_0$  (lõplik või lõpmatu) osatuletis argumendi  $x_{i_n}$  järgi  $(f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)})'_{x_{i_n}}(P_0)$ , siis seda osatuletist nimetatakse funktsiooni  **$f$   $n$ -ndat järku** (ehk lihtsalt  $n$ -ndaks; kirjutatakse ka:  $n$ -järku) *osatuletiseks punktis  $P_0$  (argumentide  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  järgi)* ja tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(P_0), \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P_0), \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P_0), \quad (3.4)$$

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P_0), \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(P_0)$$

või

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(x_1^0, \dots, x_m^0),$$

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(x_1^0, \dots, x_m^0), \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}(x_1^0, \dots, x_m^0).$$

Seejuures, kui mõned indeksitest  $i_1, \dots, i_n$  pole omavahel võrdsed (s.t. tegemist pole olukorraga, kus  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  on üks ja sama argument), siis seda  $n$ -ndat järku osatuletist nimetatakse *segaosatuletiseks* (ehk *segatuletiseks*).

Kui mingi hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis  $P$  eksisteerib lõplik  $n$ -ndat järku osatuletis  $f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P)$ , siis hulgas  $\mathcal{D}$  on määratud  $(n$ -ndat järku) *osatuletisfunktsioon* (argumentide  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  järgi)

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)} : \mathcal{D} \ni P \mapsto f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P) \in \mathbb{R},$$

mida nimetatakse ka lihtsalt (funktsiooni  $f$ )  $n$ -ndat järku (ehk lihtsalt  $n$ -ndaks; kirjutatakse ka:  $n$ -järku) *osatuletiseks* (argumentide  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  järgi). Seda osatuletist (s.t. osatuletisfunktsiooni) tähistatakse sümbolitega

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}, \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \dots \partial x_{i_1}}, \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}, \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}, \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}, \quad u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}. \quad (3.5)$$

Tähistused (3.4) on tähistustega (3.5) hästi kooskõlas: (lõplik)  $n$ -ndat järku osatuletis antud punktis on vastava osatuletisfunktsiooni väärtus selles punktis.

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $n$  kõrvuti olek halb.

Üldiselt,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)}{\partial x_{i_n}}, & \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} &= \frac{\partial \left( \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)}{\partial x_{i_n}}, \\ f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)} &= (f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)})'_{x_{i_n}}, & u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)} &= (u_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}}^{(n-1)})'_{x_{i_n}}, \\ f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}} &= (f_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}, & u_{x_{i_1} \dots x_{i_n}} &= (u_{x_{i_1} \dots x_{i_{n-1}}})_{x_{i_n}}.\end{aligned}$$

**Märkus 3.1.** Märkimaks funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$   $n$ -ndat järku osatuletist argumentide  $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$  järgi, kasutatakse tähistuste (3.5) kõrval sageli ka tähistusi

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} f \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} u;$$

niisiis (kooskõlas märkuses 1.1 kirjeldatud tähistustega)

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \frac{\partial^{n-1}}{\partial x_{i_{n-1}} \cdots \partial x_{i_1}} f \right).$$

Mitme muutuja funktsioonide kõrgemat järku osatuletiste märkimisel kasutatakse teist järku osatuletiste puhul kasutatavate lihtsustavate tähistuste (3.3) analooge: näiteks kolme muutuja funktsiooni  $u = f(x, y, z)$  korral

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial x} &=: \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, & f_{xxx}''' &=: f_{x^3}''', \\ \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial z \partial z \partial x \partial y} &=: \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial z^2 \partial x \partial y}, & f_{yxxzx}^{(5)} &=: f_{yxz^2x}^{(5)}, \\ \frac{\partial^6 f}{\partial y \partial y \partial y \partial x \partial z \partial z} &=: \frac{\partial^6 f}{\partial y^3 \partial x \partial z^2}, & f_{zzxyyy}^{(6)} &=: f_{z^2xy^3}^{(6)}.\end{aligned}$$

### 3.2. Kõrgemat järku diferentseeruvus

Juhul, kui  $n \geq 2$ , defineeritakse  $m$ -muutuja funktsiooni  $n$ -kordne diferentseeruvus antud punktis **rekursiivselt**:  $n$ -kordse diferentseeruvuse definitsioon toetub  $(n-1)$ -kordse diferentseeruvuse mõistele.

**Definitsioon 3.3.** Olgu  $n \geq 2$ . Öeldakse, et  $m$  muutuja funktsioon  $f$  on  $n$  korda diferentseeruv punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$ , kui see funktsioon on  $n-1$  korda diferentseeruv punkti  $P_0$  mingis ümbruses (s.t. igas punktis punkti  $P_0$  mingist ümbrusest on see funktsioon  $n-1$  korda diferentseeruv), kusjuures selle funktsiooni  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$ .

Öeldakse, et funktsioon  $f$  on  $n$  korda diferentseeruv hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , kui see funktsioon on  $n$  korda diferentseeruv hulga  $\mathcal{D}$  igas punktis.

Vahetult eelnevast definitsioonist nähtub, et antud punktis  $n$  korda diferentseeruv funktsioonil eksisteerivad selles punktis kõikvõimalikud lõplikud  $n$ -ndat järku osatuletised, sest funktsiooni  **$f$   $(n-1)$** -järku osatuletisfunktsioonide diferentseer-

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n-1)$  kõrvuti olek halb.

ruvusest punktis  $P_0$  jäeldub funktsioonil  $f$  kõikvõimalike  $n$ -ndat järku osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles punktis (sest teoreemi 1.3 põhjal funktsiooni diferentseeruvusest antud punktis jäeldub sellel funktsioonil lõplike esimest järku osatuletiste olemasolu selles punktis kõigi argumentide järgi ning funktsiooni  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonide esimest järku osatuletised on parajasti selle funktsiooni  $n$ -ndat järku osatuletised).

Vastavalt definitsioonile 3.3 tähendab  $m$  muutuja funktsiooni  $f$  kahekordne diferentseeruvus punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$ , et funktsioon  $f$  on diferentseeruv punkti  $P_0$  mingis ümbruses (ja seega teoreemi 1.3 põhjal eksisteerivad sellel funktsioonil selles ümbruses lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide järgi), kusjuures selle funktsiooni esimest järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$  (ning seega teoreemi 1.3 põhjal sellel funktsioonil eksisteerivad kõikvõimalikud lõplikud teist järku osatuletised selles punktis). Järgnev teoreem kirjeldab  $m$  muutuja funktsiooni  $n$ -kordset diferentseeruvust punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  juhul, kui  $n \geq 3$ .

**Teoreem 3.1.** Olgu  $m$  muutuja funktsioon  $f$  määratud punkti  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses ning olgu  $n \geq 3$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on  $n$  korda diferentseeruv punktis  $P_0$ ;
- (ii) funktsiooni  $f$   $(n-2)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punkti  $P_0$  mingis ümbruses, kusjuures selle funktsiooni  $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$ .

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n-2)$  kõrvuti olek halb.

Teoreem 3.1 on jäeldus järgnevast teoreemist, mis kirjeldab  $m$  muutuja funktsiooni  $n$ -kordset diferentseeruvust lahtises hulgas  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  juhul, kui  $n \geq 2$ .

**Teoreem 3.2.** Olgu  $m$  muutuja funktsioon  $f$  määratud lahtises hulgas  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  ning olgu  $n \geq 2$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on  $n$  korda diferentseeruv hulgas  $\mathcal{U}$ ;
- (ii) funktsiooni  $f$   $(n-1)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulgas  $\mathcal{U}$ .

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n-1)$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n-1)$  kõrvuti olek halb.

TEOREEMI 3.1 TÕESTUS. Samaväärsus (i) $\Leftrightarrow$ (ii) jäeldub teoreemist 3.2, sest selle teoreemi põhjal on funktsiooni  $f$   $(n-1)$ -kordne diferentseeruvus punkti  $P_0$  mingis lahtises ümbruses samaväärne selle funktsiooni  $(n-2)$ -järku osatuletisfunktsioonide diferentseeruvusega selles ümbruses.  $\square$

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $n$  kõrvuti olek halb.

TEOREEMI 3.2 TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii) on ilmne, sest funktsiooni  $f$   $n$ -kordne diferentseeruvus hulgas  $\mathcal{U}$  tähendab selle funktsiooni  $n$ -kordset diferentseeruvust selle hulga igas punktis, millest jäeldub selle funktsiooni  $(n-1)$ -järku osatuletiste diferentseeruvus selle hulga igas punktis, mis aga tähendab funktsiooni  $f$   $(n-1)$ -järku osatuletiste diferentseeruvust hulgas  $\mathcal{U}$ .

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n-1)$  kõrvuti olek halb.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Vaatleme kõigepealt juhtu, kus  $n = 2$ . Kehtigu (ii), s.t. funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulgas  $\mathcal{U}$ , s.t. need

osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis. Siis (lause 1.5 põhjal) funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletisfunktsioonid on ka pidevad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis, järelikult teoreemi 1.6 põhjal on funktsioon  $f$  diferentseeruv hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis, s.t. funktsioon  $f$  on diferentseeruv hulgas  $\mathcal{U}$ . Veendumaks, et kehtib (i), s.t., et funktsioon  $f$  on kaks korda diferentseeruv hulgas  $\mathcal{U}$ , jääb vaid (veel kord) märkida, et vastavalt tehtud eeldusele on funktsiooni  $f$  esimest järku osatuletisfunktsioonid diferentseeruvad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis.

Eeldame nüüd, et naturaalarv  $k \geq 2$  on selline, et implikatsioon (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtib, kui  $n = k$ . Tõestamaks, et implikatsioon (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtib iga naturaalarvu  $n \geq 2$  korral, jääb näidata, et sel eeldusel implikatsioon (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtib ka juhul, kui  $n = k + 1$ . Selleks eeldame, et  $m$  muutuja funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulgas  $\mathcal{U}$ , s.t. funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis. Veendumaks implikatsiooni (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtivuses juhul, kui  $n = k + 1$ , peame näitama, et funktsioon  $f$  on  $k + 1$  korda diferentseeruv hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis. Selleks piisab näidata, et

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

(1) funktsioon  $f$  on  $k$  korda diferentseeruv hulgas  $\mathcal{U}$ ;

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

(2) funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis.

Tingimus (2) kehtib tehtud eelduse põhjal; niisiis jääb näidata, et kehtib tingimus (1). Tehtud eelduse põhjal implikatsiooni (ii) $\Rightarrow$ (i) kehtivusest juhul, kui  $n = k$ , piisab selleks veenduda, et funktsiooni  $f$   $(k - 1)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulgas  $\mathcal{U}$ , s.t. need osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis. Teoreemi 1.6 põhjal piisab selleks märkida, et nendel  $(k - 1)$ -järku osatuletisfunktsioonidel eksisteerivad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis lõplikud esimest järku osatuletised (need esimest järku osatuletised on funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletised), kusjuures vastavad esimest järku osatuletisfunktsioonid (s.t. funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletisfunktsioonid) on pidevad hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis (sest lause 1.5 põhjal järeldub funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku osatuletisfunktsioonide diferentseeruvusest hulga  $\mathcal{U}$  igas punktis nende osatuletisfunktsioonide pidevus selle hulga igas punktis). □

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $(k - 1)$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

**Märkus 3.2.** Paljudes allikates (nt. õpikutes [III, I] ja [ICC]) defineeritakse  $m$  muutuja funktsiooni  $n$ -kordne diferentseeruvus antud punktis definitsioonist 3.3 veidi erineval moel: funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  loetakse  $n$  korda diferentseeruvaks punktis  $P_0 \in \mathbb{R}^m$ , kui sellel funktsioonil eksisteerivad selle punkti mingis ümbruses kõikvõimalikud lõplikud  $(n - 1)$ -järku osatuletised, kusjuures vastavad  $(n - 1)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$ .

On ilmne, et  $m$ -muutuja funktsiooni  $n$ -kordsest diferentseeruvusest punktis  $P_0$  (definitsiooni 3.3 mõttes) järeldub selle funktsiooni  $n$ -kordne diferentseeruvus märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes, sest funktsiooni  $(n - 1)$ -kordsest diferentseeruvusest punkti  $P_0$  mingis ümbruses järeldub sellel funktsioonil kõikvõimalike  $(n - 1)$ -järku osatuletiste olemasolu ja lõplikkus selles ümbruses.

Teiselt poolt (kui  $m \geq 2$  ja  $n \geq 2$ ), üldjuhul ei järeldu  $m$  muutuja funktsiooni  $n$ -kordsest diferentseeruvusest antud punktis märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes selle funktsiooni  $n$ -kordset diferentseeruvust selles punktis (definitsiooni 3.3 mõttes).

**NB!** Konsekti autorile teadaolevad näited sellise olukorra kohta on mittetruivaalsed.

Samas,  $m$ -muutuja funktsioon on  $n$  korda diferentseeruv lahtises hulgas  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  (definiitsiooni 3.3 mõttes) parajasti siis, kui see funktsioon on  $n$  korda diferentseeruv selle hulga igas punktis märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes – see samaväärsus jäeldub vahetult teoreemist 3.2.

Märgime, et kõik teoreemid/laused/lemmad/jäeldused käesolevas konspektis, kus eelduseks on mingi funktsiooni  $n$ -kordne diferentseeruvus (juhul  $n \geq 2$ ) ükskõik kas mingis etteantud punktis või etteantud hulgas, jäävad kehtima ka juhul, kui  $n$ -kordset diferentseeruvust mõista märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes, kusjuures ka nende tulemuste tõestused sellise juhu jaoks jäävad sõna-sõnalt (või peaaegu sõna-sõnalt) samaks. Siin on üks huvitav nüanss seoses jäeldusega 3.5. Nimelt, selle jäelduse tõestus toetub väitele, et (juhul, kui  $n \geq 2$ ) antud punktis  $n$  korda diferentseeruv funktsioon on selles punktis ka  $n - 1$  korda diferentseeruv. Kui  $n$ -kordset diferentseeruvust mõista definiitsiooni 3.3 mõttes, on see ilmne; kui aga  $n$ -kordset diferentseeruvust mõista märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes, pole see üldsegi (nii) ilmne.

Olgu  $n \geq 2$ . Näitame, et antud punktis märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes  $n$  korda diferentseeruv funktsioon on nimetatud mõttes ka  $n - 1$  korda diferentseeruv selles punktis. Selleks eeldame, et  $m$  muutuja funktsioon  $f$  on punktis  $P_0$  nimetatud mõttes  $n$  korda diferentseeruv, s.t. funktsioonil  $f$  eksisteerivad punkti  $P_0$  mingis ümbruses  $\mathcal{U}$  kõikvõimalikud lõplikud  $(n - 1)$ -järku osatuletised, kusjuures vastavad osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$ . Siis funktsioonil  $f$  eksisteerivad ümbruses  $\mathcal{U}$  kõikvõimalikud lõplikud  $(n - 2)$ -järku osatuletised (sest  $(n - 1)$ -järku osatuletised on  $(n - 2)$ -järku osatuletisfunktsioonide esimest järku osatuletised), seega, veendumaks, et funktsioon  $f$  on  $n - 1$  korda diferentseeruv punktis  $P_0$  märkuses 3.2 kirjeldatud mõttes, jääb näidata, et funktsiooni  $f(n - 2)$ -järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis  $P_0$ . Teoreemi 1.6 põhjal piisab selleks märkida, et nimetatud  $(n - 2)$ -järku osatuletisfunktsioonidel eksisteerivad lõplikud esimest järku osatuletised punkti  $P_0$  ümbruses  $\mathcal{U}$  (need esimest järku osatuletised on funktsiooni  $f(n - 1)$ -järku osatuletised), kusjuures vastavad esimest järku osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis  $P_0$  (sest lause 1.5 põhjal jäeldub funktsiooni  $f(n - 1)$ -järku osatuletisfunktsioonide diferentseeruvusest punktis  $P_0$  nende osatuletisfunktsioonide pidevus punktis  $P_0$ ).

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n - 2)$  kõrvutiolek halb.

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n - 1)$  kõrvutiolek halb.

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $(n - 1)$  kõrvutiolek halb.

### 3.3. Piisavaid tingimusi segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast

Lk. 71 näite 3.1 funktsiooni  $u = f(x, y)$  puhul kehtis väljaspool punkti  $(0, 0)$  võrdus  $f''_{xy} = f''_{yx}$ , s.t. samade argumentite järgi võetud segaosatuletis ei sõltunud diferentseerimise järjekorrast. Samas pole see mitte alati nii: selles samas näites  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

**NB!** Kuidas seda mõista?

**NB!** Või "Sellessamas"?

Selles jaotises anname mõned piisavad tingimused segaosatuletiste sõltumatuseks diferentseerimise järjekorrast.

**Teoreem 3.3.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x, y)$  kaks korda diferentseeruv punktis  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Siis

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

**TÕESTUS.** Teoreemi eeldustel leidub reaalarv  $d > 0$ , mille korral funktsioonil  $f$  eksisteerivad (esimest järku) osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid)  $f'_x$  ja  $f'_y$  punkti  $P = (x, y)$  ümbruses  $(x - d, x + d) \times (y - d, y + d)$ . Defineerime funktsiooni

$$\Phi(h) = f(x + h, y + h) - f(x + h, y) - (f(x, y + h) - f(x, y)), \quad h \in (-d, d). \quad (3.6)$$

Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et, ühelt poolt,

**NB!** Joonis?

$$\Phi(h) = f''_{xy}(x, y) h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

ning, teiselt poolt,

$$\Phi(h) = f''_{yx}(x, y) h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

sest nende esituste kehtides  $f''_{xy}(x, y) + \frac{o(h^2)}{h^2} = f''_{yx}(x, y) + \frac{o(h^2)}{h^2}$  protsessis  $h \rightarrow 0$ , millest järeldub, et  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ .

Esituse (3.7) saamiseks fikseerime vabalt  $h \in (-d, d) \setminus \{0\}$  ja defineerime funktsiooni

$$\phi(\xi) = f(\xi, y + h) - f(\xi, y), \quad \xi \in (x - d, x + d); \quad (3.9)$$

siis

$$\Phi(h) = \phi(x + h) - \phi(x).$$

Kuna funktsioon  $\phi$  rahuldab lõigus  $[x, x + h]$  (või lõigus  $[x + h, x]$ , kui  $h < 0$ ) kõiki Lagrange'i keskvaartusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$\phi'(\xi) = f'_x(\xi, y + h) - f'_x(\xi, y),$$

siis leidub arv  $\theta \in (0, 1)$  nii, et

$$\Phi(h) = \phi(x + h) - \phi(x) = \phi'(x + \theta h) h = (f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y)) h. \quad (3.10)$$

**NB!** Kas on vaja rõhutada, et  $\theta$  sõltub arvust  $h$ ?

Kuna osatuletis(funktsioon)  $f'_x$  on diferentseeruv punktis  $P = (x, y)$ , siis tema muut punktis  $P$  esitub kujul

$$\begin{aligned} f'_x(x + \Delta x, y + \Delta y) - f'_x(x, y) \\ = f''_{xx}(x, y) \Delta x + f''_{xy}(x, y) \Delta y + \alpha_1(\Delta x, \Delta y) \Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y) \Delta y, \end{aligned}$$

kus funktsioonid  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  rahuldavad tingimust  $\alpha_i(\Delta x, \Delta y) \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Seega

$$\begin{aligned} f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y) \\ = f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x, y) - (f'_x(x + \theta h, y) - f'_x(x, y)) \\ = f''_{x2}(x, y) \theta h + f''_{xy}(x, y) h + \alpha_1(\theta h, h) \theta h + \alpha_2(\theta h, h) h \\ \quad - (f''_{x2}(x, y) \theta h + \alpha_1(\theta h, 0) \theta h) \\ = f''_{xy}(x, y) h + \alpha_1(\theta h, h) \theta h + \alpha_2(\theta h, h) h - \alpha_1(\theta h, 0) \theta h. \end{aligned}$$

Niisiis, arvestades, et  $\alpha_1(\theta h, h) \theta h + \alpha_2(\theta h, h) h - \alpha_1(\theta h, 0) \theta h = o(h)$  protsessis  $h \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(h) = (f''_{xy}(x, y) h + o(h)) h = f''_{xy}(x, y) h^2 + o(h) h = f''_{xy}(x, y) h^2 + o(h^2) \\ \text{protsessis } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetria põhjal. □

Järgnev teoreem ütleb, et teoreemi 3.3 väide jääb kehtima ka veidi teistsuguste eelduste korral.

**Teoreem 3.4.** Eksisteerigu funktsioonil  $u = f(P) = f(x, y)$  punkti  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses segaosatuletised  $f''_{xy}$  ja  $f''_{yx}$ , kusjuures need osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid) on pidevad punktis  $P$ . Siis

$$f''_{xy}(P) = f''_{yx}(P).$$

**TÕESTUS.** Teoreemi tõestus on oma üldideelt sarnane teoreemi 3.3 tõestusega. Tehud eeldustel leidub reaalarv  $d > 0$ , mille korral funktsioonil  $f$  eksisteerivad punkti  $P = (x, y)$  ümbruses  $\mathcal{D} := (x - d, x + d) \times (y - d, y + d)$  teist järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid)  $f''_{xy}$  ja  $f''_{yx}$  (ning seega ühtlasi ka esimest järku osatuletised (s.t. osatuletisfunktsioonid)  $f'_x$  ja  $f'_y$ ). Defineerides funktsiooni (3.6), piisab (analoogiliselt teoreemi 3.3 tõestusele) saada esitused (3.7) ja (3.8).

Täpselt nagu ka teoreemi 3.3 tõestuses, defineeritakse esituse (3.7) saamiseks kõigepealt funktsioon (3.9) ning seejärel saadakse (ühe muutuja funktsiooni) Lagrange'i keskvaartusteoreemile toetudes esitus (3.10). Kuna funktsioonil  $f$  eksisteerib riskülikus  $\mathcal{D}$  lõplik segaosatuletis  $f''_{xy}$ , siis funktsioon

$$v(\eta) = f'_x(x + \theta h, \eta), \quad \eta \in (y - d, y + d),$$

rahuldab lõigus  $[y, y + h]$  (või lõigus  $[y + h, y]$ , kui  $h < 0$ ) kõiki Lagrange'i keskvaartusteoreemi eeldusi, kusjuures

$$v'(\eta) = f''_{xy}(x + \theta h, \eta),$$

**NB!** Kas on vaja järelikult leidub arv  $\hat{\theta} \in (0, 1)$  nii, et rõhutada, et  $\hat{\theta}$  sõltub arvust  $h$ ?

$$\begin{aligned} f'_x(x + \theta h, y + h) - f'_x(x + \theta h, y) &= v(y + h) - v(y) = v'(y + \hat{\theta}h)h \\ &= f''_{xy}(x + \theta h, y + \hat{\theta}h)h. \end{aligned}$$

Osatuletise  $f''_{xy}$  pidevuse tõttu punktis  $(x, y)$

$$f''_{xy}(x + \theta h, y + \hat{\theta}h) = f''_{xy}(x, y) + o(1) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0,$$

seega

$$\Phi(h) = (f''_{xy}(x, y) + o(1))h^2 = f''_{xy}(x, y)h^2 + o(h^2) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0.$$

Esitus (3.8) saadakse sümmeetria põhjal. □

Selle punkti lõpetuseks tõestame ühe olulise järelduse teoreemist 3.3.

**NB!** Siin on sümboolite  $f(x_1, \dots, x_m)$  ja  $n$  kõrvutiolek halb; samuti on sümboolite  $f$  ja  $n$  kõrvutiolek halb.

**Järeldus 3.5.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$   $n$  korda diferentseeruv punktis  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Siis funktsiooni  $f$   $n$ -ndat järku osatuletised punktis  $P$  ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

TÕESTUS. Piisab vaadelda juhtu, kus  $n \geq 2$ . Olgu  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$  ning olgu  $k_1, \dots, k_n$  indekseid  $1, \dots, n$  mingi ümberjärjestus. Järelduse tõestuseks piisab näidata, et

$$f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P) = f_{x_{i_{k_1}} \dots x_{i_{k_n}}}^{(n)}(P). \quad (3.11)$$

Selleks omakorda, arvestades, et

- indekseid  $1, \dots, n$  mis tahes ümberjärjestus on saadav järjendist  $1, \dots, n$  nii, et selles järjendis muudetakse mingite kahe kõrvuti olevate indekseid järjekorda, saadud järjendis muudetakse omakorda mingite kahe kõrvuti olevate indekseid järjekorda jne., kusjuures niisugust kõrvuti olevate indekseid järjekorra muutmist teostatakse lõplik arv kordi,

piisab näidata, et indekseid  $1, \dots, n$  mis tahes ümberjärjestuse  $j_1, \dots, j_n$  ja mis tahes  $l \in \{2, \dots, n\}$  korral

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_{l-1}} x_{j_l} x_{j_{l+1}} \dots x_{j_n}}^{(n)}(P) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_l} x_{j_{l-1}} x_{j_{l+1}} \dots x_{j_n}}^{(n)}(P). \quad (3.12)$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIHT JÄRELDUB VÕRDUS (3.11)!). Olgu  $j_1, \dots, j_n$  mingi indekseid  $1, \dots, n$  ümberjärjestus ning olgu  $l \in \{2, \dots, n\}$ . Võrduse (3.12) tõestuseks piisab näidata, et

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_{l-1}} x_{j_l}}^{(l)}(P) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_l} x_{j_{l-1}}}^{(l)}(P)$$

(PÕHJENDADA, MIKS SELLEST VÕRDUSEST JÄRELDUB VÕRDUS (3.12)!). See võrdus kehtib teoreemi 3.3 põhjal. Tõepoolest, kuna funktsioon  $f$  on  $n$  korda diferentseeruv punktis  $P$ , siis funktsioon  $f$  on ka  $l$  korda diferentseeruv punktis  $P$ , järelikult osatuletisfunktsioon  $f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}}}^{(l-2)}$  on kaks korda diferentseeruv punktis  $P$  (PÕHJENDADA!) (kui  $l = 2$ , siis osatuletisfunktsiooni  $f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}}}^{(l-2)}$  all mõistetakse funktsiooni  $f$  ennast), seega teoreemi 3.3 põhjal

$$\begin{aligned} f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_{l-1}} x_{j_l}}^{(l)}(P) &= (f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}}}^{(l-2)})''_{x_{j_{l-1}} x_{j_l}}(P) \\ &= (f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}}}^{(l-2)})''_{x_{j_l} x_{j_{l-1}}}(P) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{l-2}} x_{j_l} x_{j_{l-1}}}^{(l)}(P) \end{aligned}$$

(PÕHJENDADA!).

□

### 3.4. Kõrgemat järku diferentsiaalid

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  diferentseeruv hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis  $P$ . Fikseerides argumentide  $x_1, \dots, x_m$  diferentsiaalide väärtused  $dx_1, \dots, dx_m$  (s.t. lugedes need diferentsiaalid fikseeritud konstantideks), võime selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuva  $P$  (ehk siis  $m$  muutuva  $x_1, \dots, x_m$ ) funktsioonina  $du = du(P)$ :

$$du = du(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(P) dx_m.$$

Eeldame nüüd, et funktsioon  $f$  on fikseeritud punktis  $P \in \mathcal{D}$  kaks korda diferentseeruv (siis osatuletisfunktsioonid  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$  on diferentseeruvad punktis  $P$ ). Siis (vt. märkust 1.7) ka selle funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaal  $du$  (tõlgendatuna eespool kirjeldatud viisil  $m$  muutuja funktsioonina) on diferentseeruv punktis  $P$ , kusjuures tema (s.t. selle täisdiferentsiaali) täisdiferentsiaal selles punktis avaldub kujul

$$d(du)(P) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(P) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)(P) dx_m = \sum_{i=1}^m d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(P) dx_i.$$

Tähistades selles võrduses osatuletisfunktsioonide  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$  täisdiferentsiaali-  
de avaldistes argumentide  $x_1, \dots, x_m$  diferentsiaalid (selguse huvides) sümbolitega  $\delta x_1, \dots, \delta x_m$  (eristamaks neid fikseeritud väärtustest  $dx_1, \dots, dx_m$ ), s.t.

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(P) \delta x_1 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_i}(P) \delta x_m, \quad i = 1, \dots, m,$$

saame

$$d(du)(P) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) \delta x_j \right) dx_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) \delta x_j dx_i.$$

Selle diferentsiaali väärtust (s.t. funktsiooni  $f$  esimest järku täisdiferentsiaali  $du$  täisdiferentsiaali  $d(du)$  väärtust punktis  $P$ ), kui  $\delta x_i = dx_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , nimetatakse funktsiooni  $f$  teist järku (ehk lihtsalt teiseks) täisdiferentsiaaliks punktis  $P$  ja tähistatakse sümboliga  $d^2u(P)$  või  $d^2f(P)$ :

$$d^2u(P) := d^2f(P) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P) dx_i dx_j. \quad (3.13)$$

Kui funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  on hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis kaks korda diferentseeruv, siis analoogiliselt esimest järku täisdiferentsiaali juhuga võime argumentide  $x_1, \dots, x_m$  diferentsiaalide  $dx_1, \dots, dx_m$  fikseeritud väärtuste korral funktsiooni  $f$  teist järku täisdiferentsiaali tõlgendada muutuja  $P$  (ehk siis  $m$  muutuja  $x_1, \dots, x_m$ ) funktsioonina  $d^2u = d^2u(P)$ ; seejuures esitusest (3.13) (jättes seal argumenti  $P$  kirjutamata) saame, et

$$d^2u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j.$$

**NB!** Kas "kaks korda diferentseeruvuse" on aktsepteeritav keelend?

Juhime tähelepanu, et funktsiooni  $f$  kaks korda diferentseeruvuse tõttu hulgas  $\mathcal{D}$  (järeltuse 3.5 põhjal)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{kõikide } i, j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral.}$$

Nii näiteks kahe muutuja funktsiooni  $z = f(x, y)$  teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$dz = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2,$$

kolme muutuja funktsiooni  $u = f(x, y, z)$  teist järku täisdiferentsiaal esitub kujul

$$\begin{aligned} du = df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dx dz \end{aligned}$$

jne.

Funktsiooni kolmandat ja kõrgemat järku täisdiferentsiaalid defineeritakse analoogiliselt. Üldiselt, kui  $n \geq 2$ , siis  $n$  korda diferentseeruva funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$   **$n$ -ndat järku täisdiferentsiaal**  $d^n u$  defineeritakse **rekursiivselt** võrdusega  $d^n u = d(d^{n-1}u)$ , kus  $(n-1)$ -järku täisdiferentsiaali  $d^{n-1}u$  avaldises argumentide  $x_1, \dots, x_m$  diferentsiaalid  $dx_1, \dots, dx_m$  loetakse **fikseeritud** konstantideks ja seda täisdiferentsiaali tõlgendatakse  $m$  muutuja  $x_1, \dots, x_m$  funktsioonina ning selle funktsiooni täisdiferentsiaalis  $d(d^{n-1}u)$  võetakse argumentide  $x_1, \dots, x_m$  diferentsiaalid  $\delta x_1, \dots, \delta x_m$  võrdseks vastavalt diferentsiaalidega  $dx_1, \dots, dx_m$ .

Nii näiteks funktsiooni  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  kolmandat järku täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned} d^3 u &= d(d^2 u) \Big|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} = d \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j \right) \Big|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left( d \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \right) dx_i dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left( \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} \delta x_k \Big|_{\delta x_1 = dx_1, \dots, \delta x_m = dx_m} \right) dx_i dx_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j dx_k \end{aligned}$$

ja, analoogiliselt, neljandat järku täisdiferentsiaal on

$$d^4 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^4 f}{\partial x_l \partial x_k \partial x_j \partial x_i} dx_i dx_j dx_k dx_l$$

ning, üldiselt,  $n$ -ndat järku täisdiferentsiaal on

$$d^n u = \underbrace{\sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_n=1}^m}_{n \text{ summamärki}} \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_1}} dx_{i_1} \cdots dx_{i_n}.$$

**NB!** Siin on sümbole  $f(x_1, \dots, x_m)$  ja  $n$  kõrvutiolek halb.

**NB!** Kas lugeja saab aru, kuidas seda  $\delta x_1 = dx_1 \dots$  mõista tuleb?

Arvestades, et  $n$  korda diferentseeruva funktsiooni  $n$ -ndat järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast, saame siit näiteks valemid kahe muutuja funktsiooni  $z = f(x, y)$  kõrgemat järku täisdiferentsiaalide jaoks:

$$\begin{aligned} d^3 z &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3, \\ d^4 z &= \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial y \partial x^3} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2} dx^2 dy^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^3 \partial x} dx dy^3 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} dy^4 \end{aligned}$$

jne. Sarnasuse tõttu binoomvalemiga esitatakse üldine valem kahe muutuja funktsiooni  $z = f(x, y)$   $n$ -ndat järku täisdiferentsiaali jaoks kujul

**NB!** Siin on sümbolite  $f(x, y)$  ja  $n$  kõrvutiolek halb.

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f.$$

Järgnevat lauset vajame me teoreemi 4.2 (Taylori valem jäänkliikmega Peano kujul) tõestuses.

**Lause 3.6.** Olgu  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , ning olgu funktsioon

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$$

$n$  korda diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Tõlgendame diferentsiaali  $d^n f(P_0)$  muutujate  $h_1, \dots, h_m$  funktsioonina, võttes selle diferentsiaali avaldised  $dx_1 = h_1, \dots, dx_m = h_m$ . Siis iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\frac{\partial d^n f}{\partial h_i}(P_0) = n d^{n-1} f'_{x_i}(P_0), \quad (3.14)$$

kus diferentsiaali  $d^{n-1} f'_{x_i}(P_0)$  avaldised  $dx_1 = h_1, \dots, dx_m = h_m$ .

**TÕESTUS.** Fikseerime vabalt  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Tähistame  $I := \{1, \dots, m\}$  ja  $J := \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$ ; siis kõikide  $l, p \in \mathbb{N}$  korral

$$I^l = \overbrace{\{1, \dots, m\} \times \dots \times \{1, \dots, m\}}^{l \text{ tegurit}} \text{ ja } J^p = \overbrace{\{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \times \dots \times \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}}^{p \text{ tegurit}}.$$

Kui  $l \in \{n-1, n\}$ , siis iga  $p \in \{0, 1, \dots, l\}$  korral tähistame sümboliga  $I_p^l$  hulga  $I^l$  selliste järjendite  $(i_1, \dots, i_l)$  alamhulga, mille indeksist  $i$  erinevate komponentide arv on  $p$ , ning kõikide  $p \in \{1, \dots, l\}$  ja  $(k_1, \dots, k_p) \in J^p$  korral tähistame sümboliga  $I_{(k_1, \dots, k_p)}^l$  hulga  $I_p^l$  selliste järjendite  $(i_1, \dots, i_l)$  alamhulga, mille indeksist  $i$  erinevad komponendid loetuna esialgses järjekorras (s.t. järjendiga  $(i_1, \dots, i_l)$  antud järjekorras) on  $k_1, \dots, k_p$ .

Tähistame kõikide  $(i_1, \dots, i_n) \in I^n$  korral

$$\delta_{i_1, \dots, i_n}^n f := f_{x_{i_1} \dots x_{i_n}}^{(n)}(P_0) h_{i_1} \dots h_{i_n};$$

siis  $d^n f(P_0) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f$  ning seega

$$\begin{aligned} \frac{\partial d^n f(P_0)}{\partial h_i} &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I^n} \frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} = \sum_{p=0}^n \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in I_p^n} \frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} \\ &= n f_{x_i^n}^{(n)}(P_0) h_i^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in J^p} \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^n}} \frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} \end{aligned}$$

(siin me arvestasime, et ainus element hulgas  $I_0^n$  on  $\overbrace{(i, \dots, i)}^{n \text{ indeksit } i}$ , kusjuures  $\frac{\partial \delta_{i, \dots, i}^n f}{\partial h_i} = n f_{x_i^n}^{(n)}(P_0) h_i^{n-1}$ , ning et mis tahes  $(i_1, \dots, i_n) \in I_n^n$  korral  $\frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} = 0$ ). Teiselt poolt, tähistades kõikide  $(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I^{n-1}$  korral

$$\delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} := (f'_{x_i})_{x_{j_1} \dots x_{j_{n-1}}}^{(n-1)}(P_0) h_{j_1} \dots h_{j_{n-1}} = f_{x_i x_{j_1} \dots x_{j_{n-1}}}^{(n)}(P_0) h_{j_1} \dots h_{j_{n-1}},$$

saame (arvestades, et ainus element hulgas  $I_0^{n-1}$  on  $\overbrace{(i, \dots, i)}^{n-1 \text{ indeksit } i}$ , kusjuures  $\delta_{i, \dots, i}^{n-1} f'_{x_i} = f_{x_i^n}^{(n)}(P_0) h_i^{n-1}$ )

$$\begin{aligned} d^{n-1} f'_{x_i}(P_0) &= \sum_{(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I^{n-1}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I_p^{n-1}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} \\ &= f_{x_i^n}^{(n)}(P_0) h_i^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I_p^{n-1}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} \\ &= f_{x_i^n}^{(n)}(P_0) h_i^{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{(k_1, \dots, k_p) \in J^p} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{n-1}) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^{n-1}}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i}. \end{aligned}$$

Soovitud võrduse (3.14) tõestuseks piisab nüüsi näidata, et mis tahes  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  ja  $(k_1, \dots, k_p) \in J^p$  korral

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^n}} \frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} = n \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{n-1}) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^{n-1}}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} \quad (3.15)$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIIT JÄRELDUB SOOVITUD VÕRDUS (3.14)!).

Olgu  $p \in \{1, \dots, n-1\}$  ja olgu  $(k_1, \dots, k_p) \in J^p$ . Siis mis tahes  $(i_1, \dots, i_n) \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^n$  korral (arvestades, et punktis  $P_0$   $n$  korda diferentseeruva funktsiooni  $f$   $n$ -järku osatuletised selles punktis ei sõltu diferentseerimise järjekorrast)

$$\delta_{i_1, \dots, i_n}^n f = f_{x_i^{n-p} x_{k_1} \dots x_{k_p}}^{(n)}(P_0) h_i^{n-p} h_{k_1} \dots h_{k_p},$$

**NB!** Siin on sümbole  $P_0$  ja  $n$  kõrvutiolek halb; samuti on halb sümbole  $f$  ja  $n$  kõrvutiolek.

seega

$$\frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} = (n-p) f_{x_i^{n-p} x_{k_1} \dots x_{k_p}}^{(n)} (P_0) h_i^{n-p-1} h_{k_1} \dots h_{k_p}$$

niisiis, arvestades, et hulgas  $I_{(k_1, \dots, k_p)}^n$  on  $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$  elementi,

$$\sum_{\substack{(i_1, \dots, i_n) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^n}} \frac{\partial \delta_{i_1, \dots, i_n}^n f}{\partial h_i} = \frac{n!}{(n-p-1)! p!} f_{x_i^{n-p} x_{k_1} \dots x_{k_p}}^{(n)} (P_0) h_i^{n-p-1} h_{k_1} \dots h_{k_p}.$$

Teiselt poolt, kuna mis tahes  $(j_1, \dots, j_{n-1}) \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^{n-1}$  korral

$$\delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} = f_{x_i^{n-p} x_{k_1} \dots x_{k_p}}^{(n)} (P_0) h_i^{n-1-p} h_{k_1} \dots h_{k_p}$$

ning hulga  $I_{(k_1, \dots, k_p)}^{n-1}$  elementide arv on  $C_{n-1}^{n-1-p} = \frac{(n-1)!}{(n-1-p)! p!}$ , siis

$$n \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_{n-1}) \\ \in I_{(k_1, \dots, k_p)}^{n-1}}} \delta_{j_1, \dots, j_{n-1}}^{n-1} f'_{x_i} = \frac{n!}{(n-1-p)! p!} f_{x_i^{n-p} x_{k_1} \dots x_{k_p}}^{(n)} (P_0) h_i^{n-1-p} h_{k_1} \dots h_{k_p}.$$

Võrdus (3.15) kehtib. □

## § 4. Taylori valem mitme muutuja funktsiooni jaoks

### 4.1. Taylori valem jääkliikmega Peano kujul

Meenutame ühe muutuja funktsioonide matemaatilise analüüsi kursusest tuttavat (ühe muutuja funktsiooni) Taylori valemit jääkliikmega Peano kujul.

**Teoreem 4.1** ((ühe muutuja funktsiooni) Taylori valem jääkliikmega Peano kujul). *Olgu (ühe muutuja) funktsioon  $f$   $n$  korda diferentseeruv punktis  $a \in \mathbb{R}$ . Siis mis tahes punkti  $x$  jaoks funktsiooni  $f$  määramispiirkonnast kehtib valem*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \alpha_n(x), \quad (4.1)$$

kus funktsioon  $\alpha_n = \alpha_n(x)$  rahuldab tingimust  $\alpha_n(x) = o((x-a)^n)$  protsessis  $x \rightarrow a$ .

Selles jaotises me üldistame teoreemi 4.1 mitme muutuja funktsioonide juhule. Selleks, arvestades, et  $k$  korda diferentseeruva ühe muutuja funktsiooni  $f$   $k$ -ndat järku diferentsiaal  $d^k f(a)$  punktis  $a$  on defineeritud valemiga  $d^k f(a) := f^{(k)}(a) (dx)^k$ , märgime, et valem (4.1) on esitatav kujul

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(a)}{k!} + \alpha_n,$$

kus diferentsiaalide  $d^k f(a)$  avaldistes  $dx = x - a$ .

**Teoreem 4.2** (Taylori valem jääkliikmega Peano kujul). *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$$

*$n$  korda diferentseeruv punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Siis mis tahes punkti  $P = (x_1, \dots, x_m)$  jaoks funktsiooni  $f$  määramispiirkonnast kehtib valem*

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \alpha_n \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \alpha_n, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kus diferentsiaalide  $df(P_0), \dots, d^n f(P_0)$  avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i := x_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, m,$$

ning, tähistades

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0),$$

funktsioon  $\alpha_n = \alpha_n(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha_n = o(\rho^n)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ .

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $n$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $k$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Kuskil võiks eksplitsiitselt öelda, et valemit 4.2 nimetatakse Taylori valemiks (sellele valemile viidatakse hiljem kui Taylori valemile!) ning et liidetavat  $\alpha_n$  selles valemis nimetatakse selle Taylori valemis jääkliikmeks. Samuti võiks eksplitsiitselt öelda, et jääkliikme kuju " $\alpha_n = o(\rho^n)$ " protsessis  $\rho \rightarrow 0$  nimetatakse selle jääkliikme Peano kujuks.

TÕESTUS. Tõestame teoreemi induktsiooni abil funktsiooni  $f$  diferentseeruvuse järgu  $n$  järgi. Kui  $n = 1$ , siis teoreem kehtib teoreemi 1.4 samaväärsuse (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) põhjal. Eeldame nüüd, et  $n \geq 2$  ning et teoreem kehtib, kui seal arv  $n$  asendada arvuga  $n - 1$ . Näitame, et siisugusel eeldusel kehtib teoreem ka ülaltrükitud kujul.

Olgu funktsioon  $f$  korda diferentseeruv punktis  $P_0$ . Siis leiduvad reaalarvud  $\delta_1, \dots, \delta_m > 0$  nii, et funktsioonil  $f$  eksisteerivad punkti  $P_0$  risttahukakujulises ümbruses  $(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1) \times \dots \times (x_m^0 - \delta_m, x_m^0 + \delta_m)$  lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide järgi. Defineerime risttahukas  $\mathcal{U} := (-\delta_1, \delta_1) \times \dots \times (-\delta_m, \delta_m)$  funktsiooni  $\alpha = \alpha(h_1, \dots, h_m)$  võrdusega

$$\alpha(h_1, \dots, h_m) = f(x_1^0 + h_1, \dots, x_m^0 + h_m) - f(P_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(P_0),$$

kus diferentsiaalide  $d^k f(P_0)$  avaldistes  $dx_1 = h_1, \dots, dx_m = h_m$ . Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et

$$\alpha(h_1, \dots, h_m) = o(\rho^n) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

kus  $\rho := \sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}$ . Selleks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \alpha(h_1, \dots, h_m) &= \alpha(h_1, \dots, h_{m-1}, h_m) - \alpha(h_1, \dots, h_{m-1}, 0) \\ &\quad + \alpha(h_1, \dots, h_{m-2}, h_{m-1}, 0) - \alpha(h_1, \dots, h_{m-2}, 0, 0) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \alpha(h_1, 0, \dots, 0) - \alpha(0, 0, \dots, 0) \\ &= \sum_{i=1}^m \gamma_i(h_1, \dots, h_m), \end{aligned}$$

kus

$$\gamma_i(h_1, \dots, h_m) = \alpha(h_1, \dots, h_{i-1}, h_i, 0, \dots, 0) - \alpha(h_1, \dots, h_{i-1}, 0, 0, \dots, 0).$$

Seega piisab tingimuse (4.3) (ning ühtlasi teoreemi) tõestuseks näidata, et iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\gamma_i(h_1, \dots, h_m) = o(\rho^n) \quad \text{protsessis } \rho \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Selleks paneme kõigepealt tähele, et funktsioonil  $\alpha$  eksisteerivad risttahukas  $\mathcal{U}$  lõplikud osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral lause 3.6 põhjal

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial h_i}(h_1, \dots, h_m) &= f'_{x_i}(x_1^0 + h_1, \dots, x_m^0 + h_m) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial h_i} \left( f'_{x_1}(P_0) h_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0) h_m \right) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \frac{\partial d^k f(P_0)}{\partial h_i} \\ &= f'_{x_i}(x_1^0 + h_1, \dots, x_m^0 + h_m) - f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} k d^{k-1} f'_{x_i}(P_0) \end{aligned}$$

**NB!** Siin on sümbole  $f$  ja  $n$  kõrvuti olek halb.

**NB!** Siin saaksime tegelikult võtta  $\delta_1 = \dots = \delta_m$  ja seega tuleksid vaadeldavad risttahukad kuubid.

**NB!** Tegelikult me saame siin selle risttahukakujulise ümbruse  $(x_1^0 - \delta_1, x_1^0 + \delta_1) \times \dots \times (x_m^0 - \delta_m, x_m^0 + \delta_m)$  valida nii, et funktsioon  $f$  on  $n - 1$  korda diferentseeruv selles ümbruses. Sellisel juhul eksisteerivad funktsioonil  $f$  lõplikud  $(n - 1)$ -järku osatuletised selles ümbruses ning järelikult eksisteerivad sellel funktsioonil ka lõplikud esimest järku osatuletised selles ümbruses.

**NB!** Kas on se-  
gav, et siinne  $\rho$   
ole täpselt sama, mis  
 $\rho$  teoreemi sõnas-  
tuses?

**NB!** Siin on sümbolite  $f$  ja  $n$  kõrvuti olek halb.

(siin diferentsiaalide  $d^{k-1}f'_{x_i}(P_0)$  avaldistes  $dx_1 = h_1, \dots, dx_m = h_m$ ), millest, arvestades, et funktsiooni  $f$   $n$ -kordse diferentseervuse tõttu punktis  $P_0$  on osatuletisfunktsioon  $f'_{x_i}$  selles punktis  $n-1$  korda diferentseeruv (PÕHJENDADA!), saame teatud eelduse põhjal teoreemi kehtivusest juhul, kui seal arv  $n$  on asendatud arvuga  $n-1$  (rakendades sellist teoreemi osatuletisfunktsioonile  $f'_{x_i}$ ),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial h_i}(h_1, \dots, h_m) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} d^k f'_{x_i}(P_0) + \beta_i(h_1, \dots, h_m) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f'_{x_i}(P_0) \\ &= \beta_i(h_1, \dots, h_m),\end{aligned}$$

kus diferentsiaalide  $d^k f'_{x_i}(P_0)$  avaldistes  $dx_1 = h_1, \dots, dx_m = h_m$  ja funktsioon  $\beta_i$  rahuldab tingimust  $\beta_i(h_1, \dots, h_m) = o(\rho^{n-1})$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$  (siin, nagu ka eelnevas,  $\rho = \sqrt{h_1^2 + \dots + h_m^2}$ ). Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal (ühe muutuva funktsioonide jaoks) leidub iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral reaalarv  $\theta_i \in (0, 1)$  (mis sõltub argumentide  $h_1, \dots, h_m$  väärtustest) nii, et

$$\gamma_i(h_1, \dots, h_m) = \frac{\partial \alpha}{\partial h_i}(h_1, \dots, h_{i-1}, \theta_i h_i, 0, \dots, 0) h_i = \beta_i(h_1, \dots, h_{i-1}, \theta_i h_i, 0, \dots, 0) h_i$$

(PÕHJENDADA!). Kuna  $\beta_i(h_1, \dots, h_{i-1}, \theta_i h_i, 0, \dots, 0) = o(\rho^{n-1})$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$  (PÕHJENDADA!), siis järeldub siit, et iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral kehtib (4.4) (PÕHJENDADA!).  $\square$

## 4.2. Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul

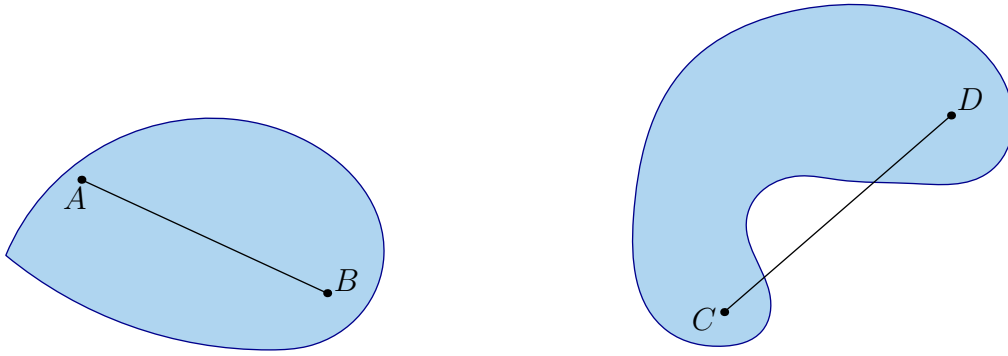
Selles jaotises anname jääkliikmele  $\alpha_n$  Taylori valemis (4.2) konkreetsema kuju (seda küll veidi tugevamatel eeldustel funktsiooni  $f$  jaoks kui teoreemis 4.2). Täpsemalt, me üldistame ühe muutuva funktsiooni Taylori valemi jääkliikmega Lagrange'i kujul (millega lugeja tutvus – või vähemalt oleks pidanud tutvuma – ühe muutuva funktsioonide matemaatilise analüüsi kursuses) mitme muutuva funktsioonide juhule.

**Teoreem 4.3** ((ühe muutuva funktsiooni) Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul). *Eksisteerigu (ühe muutuva) funktsioonil  $f$  mingis punkti  $a \in \mathbb{R}$  sisalduvas vahemikus  $\mathcal{U}$  lõplik  $(n+1)$ -järku tuletis. Siis iga  $x \in \mathcal{U}$  korral leidub punkt  $\xi$ , mis paikneb punktide  $a$  ja  $x$  vahel, selliselt, et*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Üldistamiseks teoreemi 4.3  $m$  muutuva funktsioonide juhule, vajame me *kumera hulga* mõistet. Selleks meenutame, et ruumi  $\mathbb{R}^m$  kahte punkti ühendava sirglõigu mõiste toodi sisse lk. 62 definitsioonis 1.6.

**Definitsioon 4.1.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  on *kumer*, kui tema mis tahes kahte punkti ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas.



JOONIS 4.1. Vasakpoolne hulk selle joonisel on kumer – tema mis tahes kahte punkti  $A$  ja  $B$  ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas. Parempoolne hulk ei ole kumer – tema punkte  $C$  ja  $D$  ühendav sirglõik ei sisaldu selles hulgas.

**Teoreem 4.4** (Taylori valem jääkliikmega Lagrange'i kujul). *Olgu funktsioon*

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$$

$n + 1$  korda diferentseeruv punkti  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  mingis kumeras lahtises ümbruses  $\mathcal{U}$ . Siis iga punkti  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$  korral leidub punkt  $R$  punkte  $P_0$  ja  $P$  ühendaval sirglõigul punktide  $P_0$  ja  $P$  vahel (s.t.  $R = (x_1^0 + \theta \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \theta \Delta x_m)$  mingi  $\theta \in (0, 1)$  korral) selliselt, et

**NB!** Võib-olla, peaks eksplitsiitselt ütleva, et viimane liidetav selle valemi "paremal poolel" on Taylori valemi jääkliik Lagrange'i kujul?

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!} \\ &= f(P_0) + df(P_0) + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \frac{d^3 f(P_0)}{3!} + \dots + \frac{d^n f(P_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

kus diferentsiaalide  $df(P_0), \dots, d^n f(P_0)$  ja  $d^{n+1} f(R)$  avaldistes

$$dx_i = \Delta x_i = x_i - x_i^0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

TÕESTUS. Olgu  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$ . Defineerime iga  $t \in \mathbb{R}$  korral punkti

$$P_t := (x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m) \in \mathbb{R}^m, \quad (4.6)$$

kus arvud  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m \in \mathbb{R}$  on defineeritud võrdustega (4.5). Paneme tähele, et punkt  $P_0$  eeskirja (4.6) järgi arvutatuna (s.t. punkt  $P_t$ , kus  $t = 0$ ) on meie esialgne punkt  $P_0$  ja  $P_1 = P$  ning et leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et  $P_t \in \mathcal{U}$  iga  $t \in (-\delta, 1 + \delta)$  korral **(PÕHJENDADA!)**.

Tõepoolest, hulga  $\mathcal{U}$  kumeruse tõttu mis tahes  $t \in [0, 1]$  korral  $P_t \in \mathcal{U}$ .

Olgu nüüd  $\delta > 0$  suvaline. Kui  $t \in (-\delta, 0)$ , siis

$$d(P_t, P_0) = \sqrt{(t\Delta x_1)^2 + \dots + (t\Delta x_m)^2} = |t| \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta d(P, P_0),$$

kui aga  $t \in (1, 1 + \delta)$ , siis (arvestades, et  $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m)$ )

$$d(P_t, P) = \sqrt{((t-1)\Delta x_1)^2 + \dots + ((t-1)\Delta x_m)^2} = |t-1| \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} < \delta d(P, P_0).$$

Kuna hulga  $\mathcal{U}$  lahtisuse tõttu on  $P_0$  ja  $P$  hulga  $\mathcal{U}$  sisepunktid, siis leiduvad  $r_0, r > 0$  nii, et  $B(P_0, r_0) \subset \mathcal{U}$  ja  $B(P, r) \subset \mathcal{U}$ , s.t.

$$d(Q, P_0) < r_0 \implies Q \in \mathcal{U} \quad \text{ja} \quad d(Q, P) < r \implies Q \in \mathcal{U}.$$

Niisiis, valides reaalarvu  $\delta > 0$  nii, et  $\delta d(P, P_0) < \min\{r_0, r\}$ , kehtib iga  $t \in (-\delta, 1 + \delta)$  korral  $P_t \in \mathcal{U}$ .

Defineerime funktsiooni

$$\Phi(t) := f(P_t) = f(x_1^0 + t\Delta x_1, \dots, x_m^0 + t\Delta x_m) = f(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)),$$

$$t \in (-\delta, 1 + \delta),$$

kus

$$\phi_i(t) = x_i^0 + t\Delta x_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

Funktsioon  $\Phi$  on liitfunktsiooni diferentseerimise reegli põhjal  $n + 1$  korda diferentseeruv vahemikus  $(-\delta, 1 + \delta)$ , kusjuures iga  $t \in (-\delta, 1 + \delta)$  korral

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(t) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_t) \Delta x_i, \\ \Phi''(t) &= \sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \right)'_t \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_i})}{\partial x_j}(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \frac{\partial \phi_j}{\partial t}(t) \right) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\phi_1(t), \dots, \phi_m(t)) \Delta x_i \Delta x_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(P_t) \Delta x_i \Delta x_j \end{aligned}$$

ning, üldiselt, iga  $k \in \{1, \dots, n + 1\}$  korral

$$\Phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}}(P_t) \Delta x_{i_1} \dots \Delta x_{i_k} = d^k f(P_t),$$

kus diferentsiaali  $d^k f(P_t)$  avaldises kehtivad võrdused (4.5). Nüüd ühe muutuja funktsiooni Tayloriga valemil põhjal jääkliikmega Lagrange'i kujul leidub  $\theta \in (0, 1)$  nii, et, tähistades  $R := P_\theta$ ,

$$\begin{aligned} f(P) &= \Phi(1) = \Phi(0) + \sum_{k=1}^n \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (1-0)^{n+1} \\ &= f(P_0) + \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(R)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

nagu soovitud. □

## § 5. II peatüki lisa.

### Kujutuste $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvus

Toome kõigepealt sisse selles paragrahvis kasutatavad tähistused.

Kõikjal selles paragrahvis on  $m$  ja  $n$  fikseeritud naturaalarvud, s.t.  $m, n \in \mathbb{N}$ . Punkti  $x \in \mathbb{R}^m$  korral me eeldame, et tema koordinaadid on  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ , s.t.  $x = (x_1, \dots, x_m) =: (x_j)_{j=1}^m$ , ning, teiselt poolt, etteantud arvude  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$  korral me kasutame tähistust (ilma seda tähistust eraldi sisse toomata)  $x := (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . (Analoogilisi tähistusi me kasutame ka ruumi  $\mathbb{R}^m$  või  $\mathbb{R}^n$  punktide  $y, z, h, k, u, v, w, a, b$  jms. jaoks.) Ruumi  $\mathbb{R}^m$  elementi  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  tõlgendame me sobival juhul ka üheveerulise maatriksina

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

ja, vastupidi, üheveerulist maatriksit (5.1) tõlgendame sobival juhul järjendina  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ . Punkti  $x \in \mathbb{R}^m$  ja reaalarvu  $t \neq 0$  korral me kasutame kirjaviisi

$$\frac{x}{t} := \frac{1}{t} x = \left( \frac{x_1}{t}, \dots, \frac{x_m}{t} \right).$$

*Eukleidilist normi* ruumis  $\mathbb{R}^m$  tähistame sümboliga  $|\cdot|$ , s.t.

$$|x| := \sqrt{\sum_{j=1}^m |x_j|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Paneme tähele, et mis tahes  $x, u \in \mathbb{R}^m$  korral

$$d(x, u) = |x - u|.$$

Lahtist ja kinnist kera ruumis  $\mathbb{R}^m$  keskpunktiga  $a \in \mathbb{R}^m$  ja raadiusega  $r > 0$  tähistame me vastavalt sümbolitega  $B(a, r)$  ja  $\overline{B}(a, r)$ , s.t.

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\} \quad \text{ja} \quad \overline{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| \leq r\}.$$

Funktsiooni  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , korral on  $f_1, \dots, f_n: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  alati funktsiooni  $f$  määravad nn. *koordinaatfunktsioonid*, s.t.

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \quad \text{iga } x \in \mathcal{U} \text{ korral,} \quad (5.2)$$

ja, vastupidi, etteantud funktsioonide  $f_1, \dots, f_n: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  korral loeme funktsiooni  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  defineerituks võrdusega (5.2).

**NB!** See tähistusviis on väga ebamugav jadade märkimise jaoks. Nii  $(x^n)_{n=1}^\infty = ((x_1^n, \dots, x_m^n))_{n=1}^\infty$  kui ka  $(x(n))_{n=1}^\infty = ((x_1^n, \dots, x_m^n))_{n=1}^\infty$  on mingis mõttes halvad.

**NB!** Kinnist kera me tegelikult ei kasuta!

### 5.1. Funktsiooni $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , piirväärtus

Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ , olgu  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ning olgu  $x_0 \in \mathbb{R}^m$  määramispiirkonna  $\mathcal{D}$  kuhjumispunkt. Kasutame funktsiooni  $f$  argumentina muutujat  $x$ .

**Definitsioon 5.1.** Öeldakse, et punkt  $c \in \mathbb{R}^n$  on funktsiooni  $f$  *piirväärtus* punktis  $x_0$  (või piirväärtus protsessis  $x \rightarrow x_0$ ) või et funktsioon  $f$  *koondub* punktiks  $c$  protsessis  $x \rightarrow x_0$  (või argumenti väärtuse lähenemisel punktile  $x_0$ ) ja kirjutatakse

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c \quad \text{või} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c,$$

kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\left[ x \in \mathcal{D}, 0 < |x - x_0| < \delta \right] \implies |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Pole raske näha, et funktsiooni  $f$  koonduvus on samaväärne tema koordinaat-funktsioonide koonduvusega:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c \iff f_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Kirjutades funktsiooni  $\phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  korral

$$f(x) = o(\phi(x)) \quad \text{protsessis } x \rightarrow x_0,$$

mõistame me selle all, et

$$\frac{f(x)}{\phi(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 := \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ arvu } 0}.$$

### 5.2. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvuse mõiste

**Definitsioon 5.2.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk, olgu  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ning olgu  $x \in \mathcal{U}$ . Öeldakse, et funktsioon  $f$  on *diferentseeruv* punktis  $x$ , kui leidub lineaarne kujutus  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  nii, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (5.3)$$

Kujutust  $A$  nimetatakse seejuures funktsiooni  $f$  (*Fréchet'*) *tuletiseks* punktis  $x$  ja tähistatakse sümboliga  $f'(x)$  (allpool veendume, et operaatori  $f$  tuletis punktis  $x$  on üheselt määratud):

$$f'(x) := A.$$

Tähistades  $\mathcal{W} := \{h \in \mathbb{R}^m: x+h \in \mathcal{U}\}$  ja defineerides funktsiooni  $\alpha: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha(h) = f(x+h) - f(x) - Ah, \quad h \in \mathcal{W},$$

võime valemi (5.3) kirjutada kujul

$$f(x+h) - f(x) = Ah + \alpha(h), \quad \text{kus } \alpha(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

**NB!** Lugeja ei pruugi teada, mis asi on *lineaarne kujutus*!

**NB!** Kas valemi (5.3) juures tuleks rõhutada, et siin tähendavad need sümbolid 0 teatavaid järjendeid  $(0, \dots, 0)$ ? (Seejuures ka  $h \rightarrow 0$  tähendab tegelikult, et  $h \rightarrow (0, \dots, 0)$ .)

**Märkus 5.1.** Märgime, et siin hulk  $\mathcal{W}$  on lahtine. Tõepoolest,  $\mathcal{W} \neq \emptyset$ , sest hulk  $\mathcal{U}$  on lahtine ja seega  $x$  on tema sisepunkt. Fikseerime vabalt  $h \in \mathcal{W}$ . Hulga  $\mathcal{W}$  lahtisuseks piisab näidata, et  $h$  on hulga  $\mathcal{W}$  sisepunkt, s.t. mingi  $r > 0$  korral  $B(h, r) \subset \mathcal{W}$ . Hulga  $\mathcal{W}$  definitsiooni põhjal  $x + h \in \mathcal{U}$ . Kuna  $\mathcal{U}$  on lahtine, siis  $x + h$  on hulga  $\mathcal{U}$  sisepunkt, seega leidub  $r > 0$  nii, et  $B(x + h, r) \subset \mathcal{U}$ . Väite tõestuseks jääb nüüd näidata, et  $B(h, r) \subset \mathcal{W}$ . Selleks, fikseerides vabalt punkti  $z \in B(h, r)$ , piisab näidata, et  $z \in \mathcal{W}$ , s.t.  $x + z \in \mathcal{U}$ , milleks omakorda piisab näidata, et  $x + z \in B(x + h, r)$ , s.t.  $|x + z - (x + h)| < r$ . Veendume selles:

$$|x + z - (x + h)| = |x + z - x - h| = |z - h| < r$$

(sest kuna  $z \in B(h, r)$ , siis  $|z - h| < r$ ), nagu soovitud.

Teine võimalus hulga  $\mathcal{W}$  lahtisuse tõestamiseks on panna tähele, et  $\mathcal{W} = -x + \mathcal{U}$ , ja kasutada fakti, et lahtise hulga nihe on lahtine.

Järgnev lause 5.1 ütleb, et operaator  $A$  eelnevast definitsioonist (s.t. funktsiooni  $f$  tuletis  $f'(x)$  punktis  $x$ ) on üheselt määratud. (Sellise operaatori ühesus järeldub ka lausest 5.2 allpool, mille tõestus ei kasuta lauset 5.1.)

**Lause 5.1.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk, olgu  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ning olgu  $x \in \mathcal{U}$ . Siis leidub ülimalt üks tingimust (5.3) rahuldav lineaarne kujutus  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

TÕESTUS. Rahuldagu lineaarsed kujutused  $A, B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  vastavalt tingimusi (5.4) ja

$$f(x + h) - f(x) = Bh + \beta(h), \quad \text{kus } \beta(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \rightarrow 0.$$

Lause tõestuseks piisab näidata, et  $A = B$ , milleks, fikseerides vabalt  $z \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , piisab näidata, et  $Az = Bz$ . Selleks märgime, et “piisavalt väikeste”  $t > 0$  korral (täpsemalt, selliste  $t > 0$  korral, mis rahuldavad tingimust  $x + tz \in \mathcal{U}$ )

$$A(tz) + \alpha(tz) = B(tz) + \beta(tz),$$

seega ka

$$\frac{A(tz)}{|tz|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{B(tz)}{|tz|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|},$$

millest, arvestades, et operaatorite  $A$  ja  $B$  lineaarsuse tõttu

$$\frac{A(tz)}{|tz|} = \frac{tAz}{t|z|} = \frac{Az}{|z|} \quad \text{ja} \quad \frac{B(tz)}{|tz|} = \frac{tBz}{t|z|} = \frac{Bz}{|z|},$$

saame, et

$$\frac{Az}{|z|} + \frac{\alpha(tz)}{|tz|} = \frac{Bz}{|z|} + \frac{\beta(tz)}{|tz|}. \quad (5.5)$$

Kuna  $|tz| \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0$ , siis tehtud eelduste põhjal funktsioonide  $\alpha$  ja  $\beta$  kohta

$$\frac{\alpha(tz)}{|tz|} \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\beta(tz)}{|tz|} \xrightarrow{t \rightarrow 0+} 0;$$

seega järeldub võrdusest (5.5) protsessis  $t \rightarrow 0+$ , et  $\frac{Az}{|z|} = \frac{Bz}{|z|}$ , millest  $Az = Bz$ , nagu soovitud.  $\square$

### 5.3. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , diferentseeruvuse mõiste kooskõla funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruvuse mõistega

Selles punktis veendume, et ülaltoodud diferentseeruvuse definitsioon 5.2 on kooskõlas funktsiooni  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  (s.t. tavalise  $m$  muutuja funktsiooni) diferentseeruvuse definitsiooniga 1.2, s.t. veendume definitsioonide 5.2 ja 1.2 samaväärsuses juhul  $n = 1$ .

Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk ning olgu  $x \in \mathcal{U}$ .

Ühelt poolt, oletame, et funktsioon  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  on diferentseeruv punktis  $x$  definitsiooni 1.2 mõttes. See tähendab, et leiduvad arvud  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  nii, et

$$\frac{f(x+h) - f(x) - (a_1 h_1 + \dots + a_m h_m)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (5.6)$$

Defineerime kujutuse  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$Ah = a_1 h_1 + \dots + a_m h_m, \quad h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m; \quad (5.7)$$

siis  $A$  on lineaarne kujutus, kusjuures kehtib (5.3). Seega  $f$  on diferentseeruv punktis  $x$  definitsiooni 5.2 mõttes.

Teiselt poolt, olgu funktsioon  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  diferentseeruv punktis  $x$  definitsiooni 5.2 mõttes. See tähendab, et leidub lineaarne kujutus  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  nii, et kehtib (5.3). Algebra kursusest teame, et leiduvad üheselt määratud arvud  $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  nii, et kehtib (5.7), niisiis kehtib (5.6). Seega  $f$  on diferentseeruv punktis  $x$  definitsiooni 1.2 mõttes.

### 5.4. Funktsiooni $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , kus $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , ja teda määravate funktsioonide $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ diferentseeruvuse vahekord

**Lause 5.2.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk, olgu  $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ning olgu  $x \in \mathcal{U}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on diferentseeruv punktis  $x$ ;
- (ii) funktsiooni  $f$  defineerivad funktsioonid  $f_1, \dots, f_n: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in \mathcal{U},$$

on diferentseeruvad punktis  $x$ .

Seejuures

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

**NB!** Siin vist  
vajab selgitamist,  
kuidas võrdust  
(5.8) mõista.

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu funktsioon  $f$  diferentseeruv punktis  $x \in \mathcal{U}$ , s.t. (definitsiooni 5.2 põhjal) leidub lineaarne kujutus  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  nii, et kehtib (5.4). Algebra kursusest teame, et lineaarne kujutus  $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  on üheselt määratud (reaal)arvmaatriksiga

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

kus iga  $h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$  korral

$$Ah = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \end{pmatrix} = \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \right).$$

Olgu  $\alpha_1, \dots, \alpha_n: \mathcal{W} := \{h \in \mathbb{R}^m: x+h \in \mathcal{U}\} \rightarrow \mathbb{R}$  funktsiooni  $\alpha: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$  määravad funktsioonid (tingimuses (5.4)), s.t.

$$\alpha(h) = (\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)), \quad h = (h_1, \dots, h_m) \in \mathcal{W}. \quad (5.9)$$

**NB!** Kas lugeja mõistab, mida siin need sümbolid 0 tähendavad?

Tingimus  $\alpha(h) = o(|h|)$  protsessis  $h \rightarrow 0$  tähendab, et

$$\frac{\alpha(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ehk

$$\left( \frac{\alpha_1(h)}{|h|}, \dots, \frac{\alpha_n(h)}{|h|} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

s.t. iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\frac{\alpha_i(h)}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

ehk, teisisõnu,

$$\alpha_i(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0. \quad (5.10)$$

Kuna iga  $h \in \mathcal{W}$  korral

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (f_1(x+h), \dots, f_n(x+h)) - (f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &= (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} Ah + \alpha(h) &= \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \right) + (\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)) \\ &= \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j + \alpha_n(h) \right), \end{aligned}$$

siis tingimus (5.4) tähendab, et iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{im}h_m + \alpha_i(h), \quad \text{kus } \alpha_i(h) = o(|h|) \text{ protsessis } h \rightarrow 0. \quad (5.11)$$

Tingimus (5.11) tähendab, et funktsioon  $f_i: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  on diferentseeruv punktis  $x$ ; seejuures

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{iga } j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral,}$$

s.t. kehtib (5.8).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et funktsioonid  $f_1, \dots, f_n$  on diferentseeruvad punktis  $x$ , s.t. iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral leiduvad arvud  $a_{i1}, \dots, a_{im} \in \mathbb{R}$  nii, et

$$f_i(x+h) - f_i(x) = a_{i1}h_1 + \dots + a_{im}h_m + \alpha_i(h) = \sum_{j=1}^m a_{ij}h_j + \alpha_i(h),$$

kus funktsioon  $\alpha_i: \mathcal{W} := \{h \in \mathbb{R}^m: x+h \in \mathcal{U}\} \rightarrow \mathbb{R}$  rahuldab tingimust  $\alpha_i(h) = o(|h|)$  protsessis  $h \rightarrow 0$ . Nüüd

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (f_1(x+h), \dots, f_n(x+h)) - (f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ &= (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_n(x+h) - f_n(x)) \\ &= \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j + \alpha_1(h), \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j + \alpha_n(h) \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^m a_{1j}h_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{nj}h_j \right) + (\alpha_1(h), \dots, \alpha_n(h)) \\ &= Ah + \alpha(h), \end{aligned}$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

**NB!** Kas lugejale on selge, kuidas siin seda vördust  $A = \dots$  mõista tuleb?

ja funktsioon  $\alpha: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on defineeritud võrdusega (5.9).

Funktsiooni  $f$  diferentseeruvuseks punktis  $x$  jääb näidata, et

$$\alpha(h) = o(|h|) \quad \text{protsessis } h \rightarrow 0.$$

Viimane tingimus on implikatsiooni (i) $\Rightarrow$ (ii) tõestuses sisalduva arutelu põhjal samaväärne tingimusega (5.10) iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral, mis kehtib eespool tehtud eelduse põhjal.  $\square$



# Ilmutamata funktsioonide teooria

## Olgu funktsioonid

[illegible]

$$\Phi(P) = (u_1(P), \dots, u_n(P)) \in \mathbb{R}^n, \quad P \in \mathcal{D}. \quad (1.2)$$

Teiselt poolt, mis tahes kujutus  $\Phi: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  määrab ühesel viisil funktsioonid (1.1), mis rahuldavad tingimust (1.2): sellise omadusega funktsioonid (1.1) on defineeritud võrdustega

$$u_j(P) = u_j, \quad P \in \mathcal{D}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{kus } \Phi(P) = (u_1, \dots, u_n).$$

Niisiis, hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  määratud funktsioonide süsteemid (1.1) ja kujutused  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on üksüheses vastavuses.

Eeldame nüüd, et funktsioonid (1.1) on diferentseeruvad hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ .

### Definitsioon 1.1. Maatriksit

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

nimetatakse süsteemi (1.1) (või ka selle süsteemiga määratud kujutuse  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ) *Jacobi*<sup>1</sup> *maatriksiks*.

---

<sup>1</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) – saksa matemaatik







(siin osatuletised  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  arvutatakse punktides  $Q \in \Delta$  ja osatuletised  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  vastavates punktides  $(x_1(Q), \dots, x_m(Q)) \in \mathcal{D}$ ).

TÕESTUS. Defineerime iga  $j \in \{1, \dots, m\}$  korral funktsiooni  $F_j: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F_j(Q) = u_j(x_1(Q), \dots, x_m(Q)), \quad Q \in \Delta;$$

siis järelduse 1.2 põhjal

$$\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}.$$

Tingimuse (1.12) põhjal iga  $j \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$F_j(u_1, \dots, u_m) = u_j \quad \text{iga } (u_1, \dots, u_m) \in \Delta \text{ korral};$$

seega

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(u_1, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

niisiis **samasus** (1.13) kehtib. □

Vahetult eelnevast järeldusest 1.3 järeldub, et *kujutuse ja tema pöördkujutuse jakobiaanide korrutis on **samaselt** võrdne arvuga 1*.

**Järeldus 1.4.** Olgu süsteemide (1.9) ja (1.10) poolt määratud kujutused teineteise pöördkujutused, s.t. lisaks tingimustele (1.11) ja (1.12) kehtivad ka

$$\{(u_1(P), \dots, u_m(P)) : P \in \mathcal{D}\} \subset \Delta$$

ja

$$(x_1(u_1(P), \dots, u_m(P)), \dots, x_m(u_1(P), \dots, u_m(P))) = P \quad \text{iga } P \in \mathcal{D} \text{ korral}.$$

Siis kehtib (1.13) (siin vaadeldavates jakobiaanides osatuletised  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  arvutatakse punktides  $Q \in \Delta$  ja osatuletised  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  vastavates punktides  $(x_1(Q), \dots, x_m(Q)) \in \mathcal{D}$  või, sümmeetriliselt, osatuletised  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  arvutatakse punktides  $P \in \mathcal{D}$  ja osatuletised  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  vastavates punktides  $(u_1(P), \dots, u_m(P)) \in \Delta$ ).

## § 2. Ühe võrrandiga antud ilmutamata funktsioonid

### 2.1. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni mõiste

Sisaldagu kahe muutuja funktsiooni  $u = F(x, y)$  määramispiirkond ristkülikut

$$I_1 \times I_2 = \{(x, y) : x \in I_1, y \in I_2\},$$

kus  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$  on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x, y) = 0. \quad (2.1)$$

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et võrrand (2.1) määrab ristkülikus  $I_1 \times I_2$  muutuja  $y$  muutuja  $x$  (ühese) funktsioonina

$$y = y(x), \quad (2.2)$$

kui mis tahes fikseeritud väärtuse  $x \in I_1$  korral võrrandil (2.1) eksisteerib parajasti üks lahend  $y \in I_2$ .

Kõnealune funktsioon (2.2)

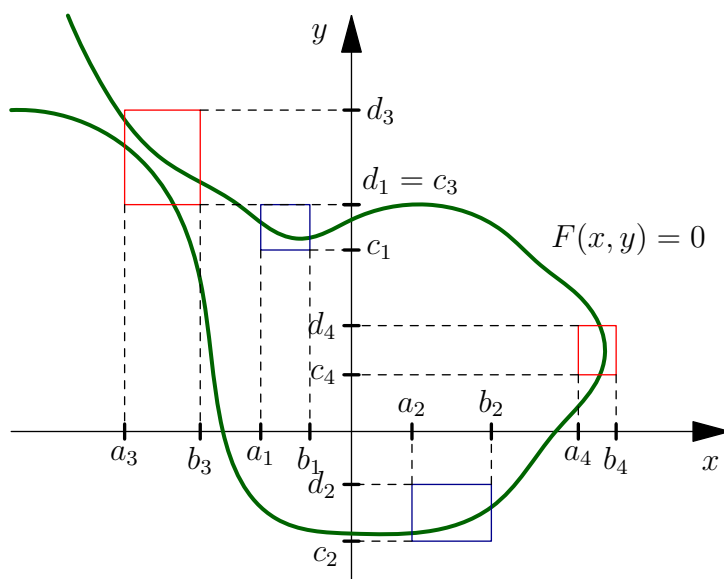
$$I_1 \ni x \mapsto y(x) \in I_2$$

on määratud võrdusega

$$F(x, y(x)) = 0;$$

see funktsioon seab punktile  $x \in I_1$  vastavusse võrrandi (2.1) ainsa lahendi  $y \in I_2$ .

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.2) on antud võrrandiga (2.1) *ilmutamata kujul*.



JOONIS 2.1

**NB!** Must-valge televisiooni vaatajad seda punktihulka rohelisena ei näe!

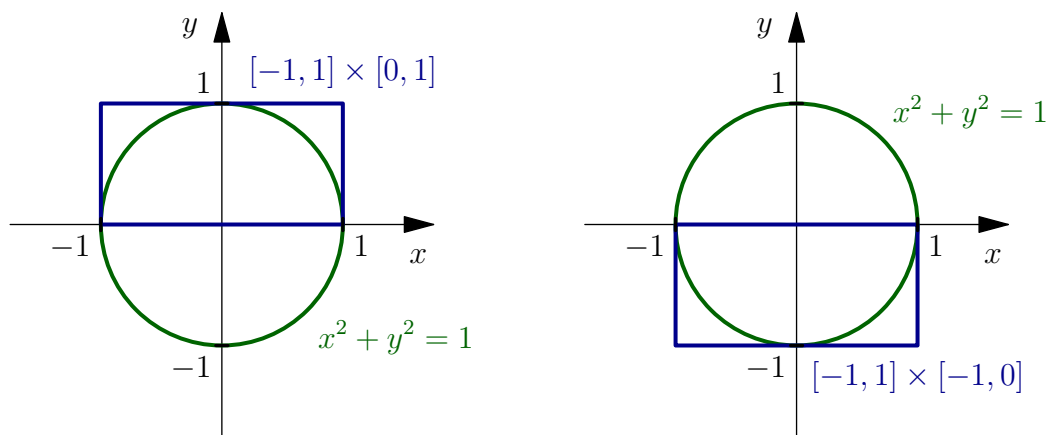
**Näide 2.1.** Joonisel 2.1 on võrrandi  $F(x, y) = 0$  lahendite hulk kujutatud rohelisega. Ristkülikutes  $[a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$  ja  $[a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$  määrab see võrrand muutuja  $y$  muutuja  $x$  ühese funktsioonina: kui  $i = 1$  või  $i = 2$ , siis iga fikseeritud väärtuse  $x \in [a_i, b_i]$  korral leidub võrrandil  $F(x, y) = 0$  parajasti üks lahend  $y \in [c_i, d_i]$ . Ristkülikutes  $[a_3, b_3] \times [c_3, d_3]$  ja  $[a_4, b_4] \times [c_4, d_4]$  ei määrab see võrrand muutujat  $y$  muutuja  $x$  ühese funktsioonina: leidub väärtusi  $x \in [a_3, b_3]$ , mille korral võrrandil  $F(x, y) = 0$  on rohkem, kui üks lahend  $y \in [c_3, d_3]$  ning leidub väärtusi  $x \in [a_4, b_4]$ , mille korral võrrandil  $F(x, y) = 0$  puudub lahend  $y \in [c_4, d_4]$ .

**Näide 2.2.** Vaatleme võrrandit

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2.3)$$

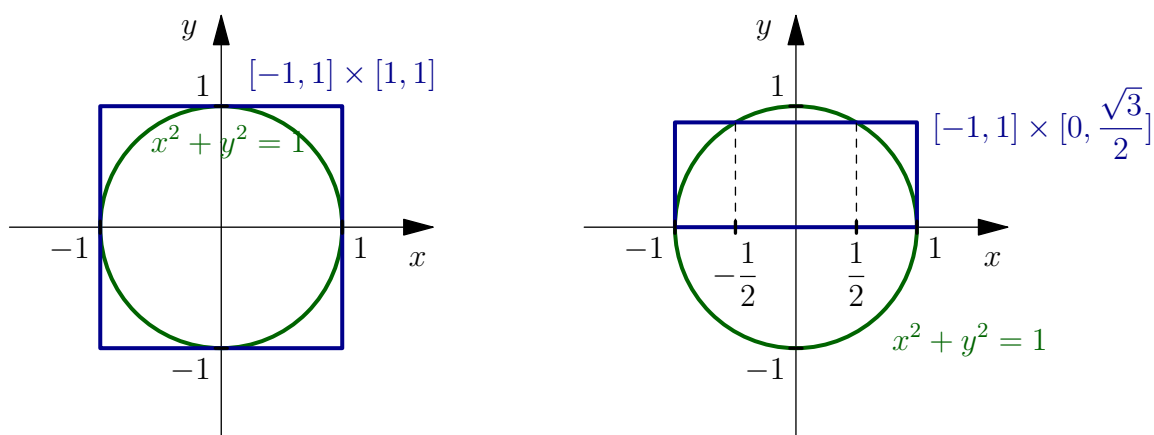
Paneme tähele, et

- võrrand (2.3) määrab ristkülikus  $[-1, 1] \times [0, 1]$  muutuja  $y$  muutuja  $x$  (ühese) funktsioonina  $y = y(x)$ , sest iga fikseeritud väärtuse  $x \in [-1, 1]$  korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend  $y$  lõigust  $[0, 1]$  (see lahend on  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ; niisiis  $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ); vt. joonise 2.2 vasakpoolset teljestikku;
- võrrand (2.3) ei määrata ristkülikus  $[-1, 1] \times [0, 1]$  muutujat  $x$  muutuja  $y$  (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse  $y \in [0, 1]$  korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit lõigust  $[-1, 1]$  (need lahendid on  $x = \sqrt{1 - y^2}$  ja  $x = -\sqrt{1 - y^2}$ ); vt. joonise 2.2 vasakpoolset teljestikku;
- võrrand (2.3) määrab ristkülikus  $[-1, 1] \times [-1, 0]$  muutuja  $y$  muutuja  $x$  (ühese) funktsioonina  $y = y(x)$ , sest iga fikseeritud väärtuse  $x \in [-1, 1]$  korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend  $y$  lõigust  $[-1, 0]$  (see lahend esitub kujul  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ; niisiis  $y(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ ); vt. joonise 2.2 parempoolset teljestikku;



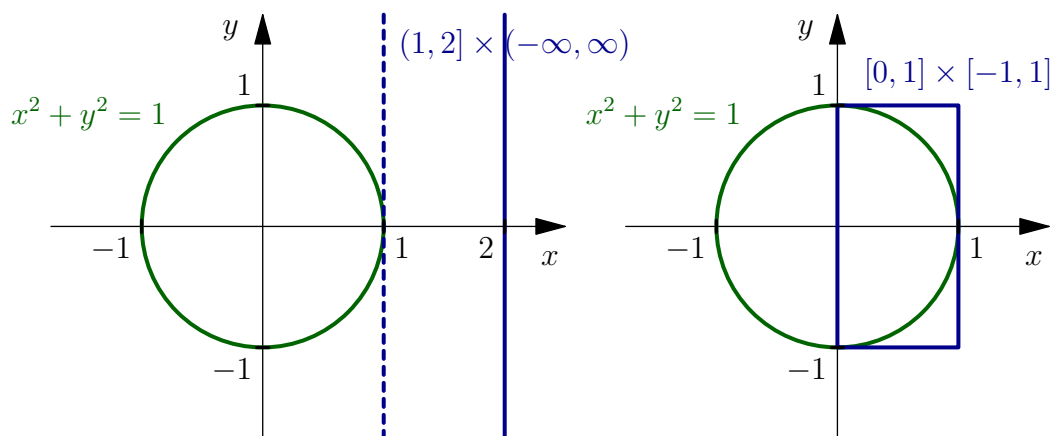
JOONIS 2.2

- võrrand (2.3) ei määrata ristkülikus  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  muutujat  $y$  muutuja  $x$  (ühese) funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse  $x \in (-1, 1)$  korral leidub võrrandil (2.3) kaks lahendit  $y$  lõigust  $[-1, 1]$  (need lahendid on  $y = \sqrt{1 - x^2}$  ja  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ); vt. joonise 2.3 vasakpoolset teljestikku;
- võrrand (2.3) ei määrata ristkülikus  $(-1, 1) \times [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$  muutujat  $y$  muutuja  $x$  funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  korral puudub võrrandil (2.3) lahend  $y$  lõigust  $[0, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ ; vt. joonise 2.3 parempoolset teljestikku;



JOONIS 2.3

- võrrand (2.3) ei määra riskülikus  $[1, 2] \times (-\infty, \infty)$  muutujat  $y$  muutuja  $x$  funktsioonina, sest mis tahes fikseeritud väärtuse  $x \in (1, 2]$  korral võrrandil (2.3) puudub lahend; vt. joonise 2.4 vasakpoolset teljestikku;
- võrrand (2.3) määrab riskülikus  $[0, 1] \times [-1, 1]$  muutuja  $x$  muutuja  $y$  (ühese) funktsioonina  $x = x(y)$ , sest mis tahes fikseeritud väärtuse  $y \in [-1, 1]$  korral leidub võrrandil (2.3) täpselt üks lahend  $x$  lõigust  $[0, 1]$  (see lahend on  $x = \sqrt{1 - y^2}$ ; niisiis  $x(y) = \sqrt{1 - y^2}$ ); vt. joonise 2.4 parempoolset teljestikku.



JOONIS 2.4

## 2.2. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja pidevus

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused ühe muutuja ilmutamata funktsiooni olemasoluks ja pidevuseks.

**Teoreem 2.1.** *Eeldame, et*

- (1) *funktsioon  $u = F(x, y)$  on määratud ja pidev mingis ristkülikus  $\mathcal{D}$  keskpunktiga  $(x_0, y_0)$ :*

$$\mathcal{D} := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \quad (\alpha, \beta > 0);$$

- (2)  $F(x_0, y_0) = 0$ ;

- (3) *iga fikseeritud väärtuse  $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  korral on funktsioon  $h_x(y) := F(x, y)$  rangelt monotoonne (s.t. see (argumendi  $y$ ) funktsioon on kas rangelt kasvav või rangelt kahanev) lõigus  $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ .*

*Siis*

- (a) *punkti  $(x_0, y_0)$  teatavas ristkülikukujulises ümbruses määrab võrrand  $F(x, y) = 0$  muutuja  $y$  muutuja  $x$  (ühese) funktsioonina  $y = y(x)$ ;*  
 (b)  $y(x_0) = y_0$ ;  
 (c) *funktsioon  $y = y(x)$  on punkti  $x_0$  teatavas ümbruses pidev.*

**TÕESTUS.** Väidete (a) ja (b) tõestuseks piisab veenduda, et muutuja  $x$  iga väärtuse korral teatavast lõigust  $[x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \subset [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  on väärtused  $F(x, y_0 - \beta)$  ja  $F(x, y_0 + \beta)$  erimärgilised. Nii sugusel juhul mis tahes fikseeritud  $x \in [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0]$  korral järeldub võrrandi

$$h_x(y) = F(x, y) = 0$$

lahendi (muutuja  $y$  suhtes) olemasolu Bolzano–Cauchy **esimesest** teoreemist (märgime, et funktsioon  $h_x$  on pidev lõigus  $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ ); selle lahendi ühesus järeldub funktsiooni  $h_x$  monotoonsusest.

Oletame konkreetsuse mõttes, et funktsioon  $h_{x_0}(y) = F(x_0, y)$  on rangelt kasvav. (Selle funktsiooni range kahanemise juhtu käsitletakse analoogiliselt.) Siis

$$F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + \beta),$$

s.t.

$$F(x_0, y_0 - \beta) < 0 < F(x_0, y_0 + \beta).$$

Kuna funktsioon  $F$  on pidev ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis on ta pidev ka punktides  $(x_0, y_0 - \beta)$  ja  $(x_0, y_0 + \beta)$  ning järelikult (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsiooni märgi säilimisest) leidub reaalarv  $\alpha_0 > 0$  nii, et

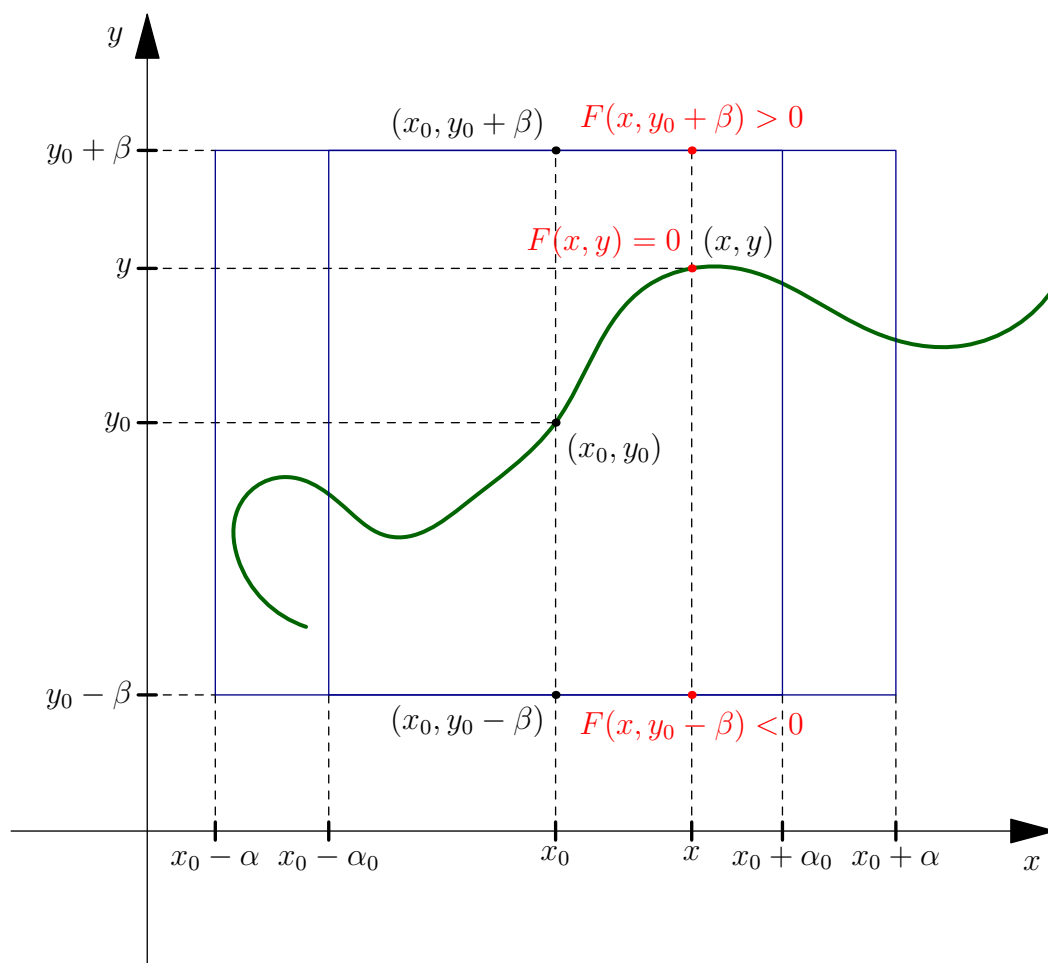
$$x \in [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \implies F(x, y_0 - \beta) < 0 < F(x, y_0 + \beta)$$

(vt. joonist 2.5). Väited (a) ja (b) on tõestatud.

Näitame, et funktsioon  $y = y(x)$  on pidev vahemikus  $(x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$ . Fikseerime vabalt punkti  $\tilde{x} \in (x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0)$  ja reaalarvu  $\varepsilon > 0$  ning tähistame  $\tilde{y} = y(\tilde{x})$ . Me peame leidma reaalarvu  $\delta > 0$  nii, et

$$\tilde{x} - \delta < x < \tilde{x} + \delta \implies \tilde{y} - \varepsilon < y(x) < \tilde{y} + \varepsilon.$$

**NB!** Teoreemi väide jääb kehtima, kui eeldus (1) asendada nõrgema eeldusega “ $F$  on pidev iga oma argumendi järgi (s.t.,  $F$  on nii argumendi  $x$  kui ka argumendi  $y$  järgi pidev ristkülikus  $\mathcal{D}$ ”.



JOONIS 2.5. Võrrandi  $F(x, y) = 0$  lahendite hulk on joonisel värvitud roheli-seks. Mustvalge televisiooni vaatajad seda punktihulka rohelisena ei näe!

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $[\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon] \subset [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$  (PÕHJENDADA!). Sel eeldusel piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et mis tahes  $x \in (\tilde{x} - \delta, \tilde{x} + \delta)$  korral on väärtused  $F(x, \tilde{y} - \varepsilon)$  ja  $F(x, \tilde{y} + \varepsilon)$  nullist erinevad ja erimärgilised, sest siisugusel juhul (muutuja  $y$ ) funktsiooni  $h_x(y) := F(x, y)$  range monotoonsuse ja pidevuse tõttu lõigus  $[\tilde{y} - \varepsilon, \tilde{y} + \varepsilon]$  (Bolzano–Cauchy esimese teoreemi põhjal) võrrandi  $F(x, y) = 0$  lahend  $y$  — s.t. väärtus  $y(x)$  — paikneb arvude  $\tilde{y} - \varepsilon$  ja  $\tilde{y} + \varepsilon$  vahel (vt. joonist 2.6).

Kuna funktsioon  $u(y) = F(\tilde{x}, y)$  on kasvav, siis

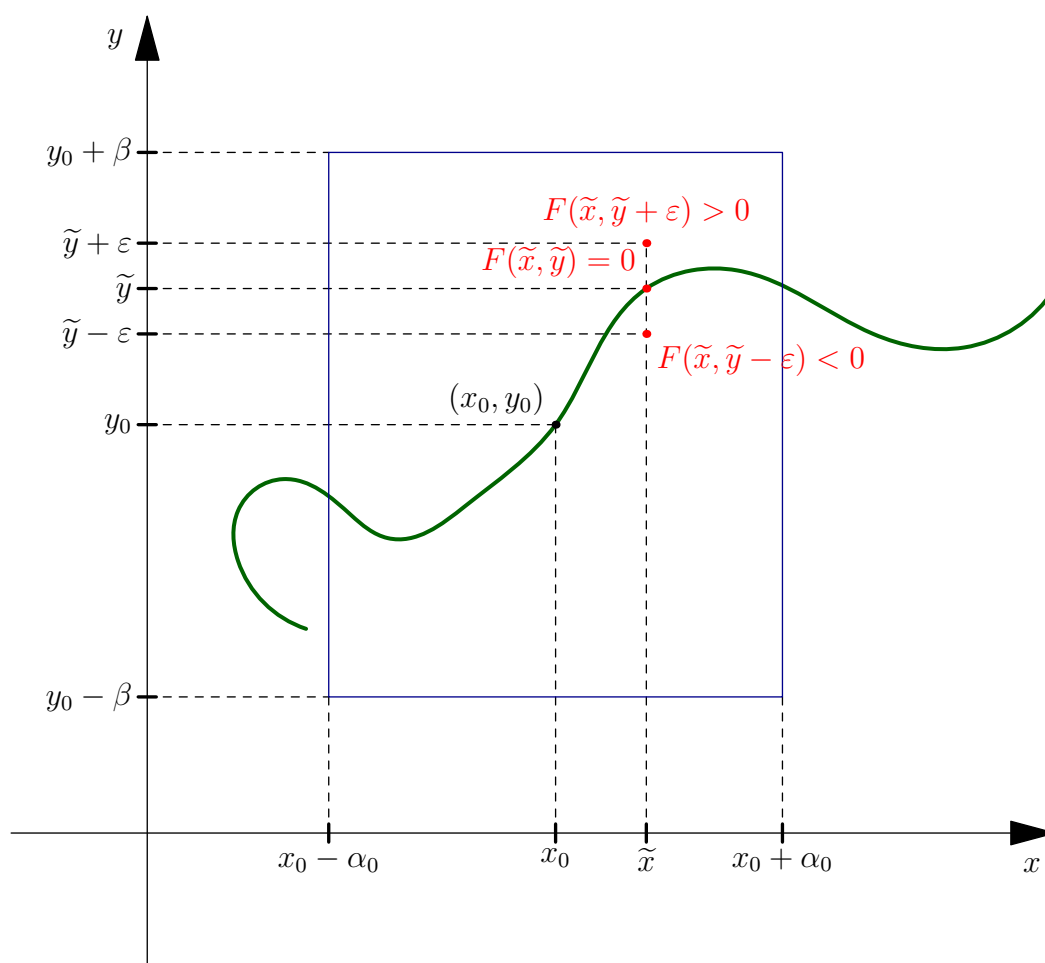
$$F(\tilde{x}, \tilde{y} - \varepsilon) < F(\tilde{x}, \tilde{y}) < F(\tilde{x}, \tilde{y} + \varepsilon),$$

s.t.,

$$F(\tilde{x}, \tilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(\tilde{x}, \tilde{y} + \varepsilon),$$

Kuna funktsioon  $F$  on pidev punktides  $(\tilde{x}, \tilde{y} - \varepsilon)$  ja  $(\tilde{x}, \tilde{y} + \varepsilon)$ , siis (teoreemi I.4.1 põhjal pideva funktsiooni märgi säilimisest) leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\tilde{x} - \delta < x < \tilde{x} + \delta \implies F(x, \tilde{y} - \varepsilon) < 0 < F(x, \tilde{y} + \varepsilon).$$



JOONIS 2.6. Võrrandi  $F(x, y) = 0$  lahendite hulk on joonisel värvitud roheliseks. Mustvalge televisiooni vaatajad seda punktihulka rohelisena ei näe!

Teoreem on tõestatud. □

### 2.3. Ühe muutuja ilmutamata funktsiooni diferentseeruvus

Tugevdades teoreemi 2.1 eeldusi, anname piisavad tingimused ilmutamata funktsiooni tuletise olemasoluks.

**Teoreem 2.2.** *Eeldame, et*

- (1) *funktsioon  $u = F(x, y)$  on määratud punkti  $(x_0, y_0)$  teatavas ümbruses  $\mathcal{U}$ ;*
- (2)  *$F(x_0, y_0) = 0$ ;*
- (3) *osatuletised  $F'_x$  ja  $F'_y$  eksisteerivad ja on pidevad ümbruses  $\mathcal{U}$ ;*
- (4)  *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .*

*Siis kehtivad teoreemi 2.1 väited (a)–(c). Veelgi enam,*

- (d) funktsioonil  $y = y(x)$  eksisteerib punkti  $x_0$  teatavas ümbruses pidev tuletis, kusjuures selles ümbruses

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}; \quad (2.4)$$

niisiis

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y(x_0))}{F'_y(x_0, y(x_0))} = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

TÕESTUS. Konkreetseuse mõttes eeldame, et  $F'_y(x_0, y_0) > 0$  (juhtu, kus  $F'_y(x_0, y_0) < 0$ , käsitletakse analoogiliselt).

Kuna osatuletis  $F'_y$  eksisteerib ümbruses  $\mathcal{U}$  ning on pidev punktis  $(x_0, y_0)$ , siis iga punkti  $(x, y)$  korral teatavast ristkülikust

$$\mathcal{D} := [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta] \subset \mathcal{U} \quad (\alpha, \beta > 0),$$

kehtib  $F'_y(x, y) > 0$ . Siit järeldub, et muutuja  $x$  iga fikseeritud väärtuse korral lõigust  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  on funktsioon  $h_x(y) := F(x, y)$  rangelt kasvav lõigus  $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ . Niisiis, funktsioon  $F$  rahuldab ristkülikus  $\mathcal{D}$  teoreemi 2.1 eeldusi (1)–(3) ning järelikult kehtivad selle teoreemi väited (a)–(c).

Olgu  $I$  mingi punkti  $x_0$  sisaldav vahemik, milles funktsioon  $y = y(x)$  on pidev. Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et funktsioonil  $y = y(x)$  eksisteerib lõplik tuletis vahemikus  $I$ , kusjuures vastav tuletisfunktsioon on selles vahemikus pidev.

Fikseerime vabalt punkti  $x \in I$  ning vaatleme funktsiooni  $y$  argumenti muutusid  $\Delta x$ , mille korral  $x + \Delta x \in I$ . Tähistame

$$y = y(x) \quad \text{ja} \quad \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x);$$

siis  $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$  ning järelikult

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0 - 0 = 0.$$

Funktsioon  $F$  on diferentseeruv ümbruse  $\mathcal{U}$  igas punktis (sest sellel funktsioonil eksisteerivad selles ümbruses pidevad osatuletised), seega

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = F'_x(x, y) \Delta x + F'_y(x, y) \Delta y + \lambda \Delta x + \mu \Delta y, \quad (2.5)$$

kus funktsioonid  $\lambda = \lambda(\Delta x, \Delta y)$  ja  $\mu = \mu(\Delta x, \Delta y)$  rahuldavad tingimusi

$$\lambda \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0 \quad \text{ja} \quad \mu \xrightarrow{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} 0.$$

Funktsiooni  $y = y(x)$  pidevuse tõttu  $\Delta y \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$  ning järelikult ka  $\lambda, \mu \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ .

Võrdusest (2.5) järeldub nüüd, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x, y) + \lambda}{F'_y(x, y) + \mu} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Siit järeldub, et

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))}.$$

Tuletisfunktsiooni  $y'$  pidevus järeldub funktsioonide  $F'_x$ ,  $F'_y$  ja  $y$  pidevusest. Teoreem on tõestatud.  $\square$

**Märkus 2.1.** Kui lisaks teoreemi 2.2 eelduste täidetusele funktsioon  $F$  on kaks korda diferentseeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon  $y = y(x)$  on kaks korda diferentseeruv punkti  $x_0$  teatavas ümbruses, kusjuures selles ümbruses valemi (2.4) põhjal, märkides üleskirjutuste lihtsustamiseks

$$\begin{aligned} F &:= F(x, y(x)), & F'_x &:= F'_x(x, y(x)), & F'_y &:= F'_y(x, y(x)), \\ F''_{x^2} &:= F''_{x^2}(x, y(x)), & F''_{y^2} &:= F''_{y^2}(x, y(x)), \\ F''_{xy} &= F''_{yx} := F''_{xy}(x, y(x)) = F''_{yx}(x, y(x)) \end{aligned}$$

ning  $y := y(x)$  ja  $y' := y'(x)$ ,

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left( -\frac{F'_x(x, y(x))}{F'_y(x, y(x))} \right)' \\ &= -\frac{\left( F'_x(x, y(x)) \right)' F'_y(x, y(x)) - F'_x(x, y(x)) \left( F'_y(x, y(x)) \right)'}{F'_y(x, y(x))^2} \\ &= -\frac{(F''_{x^2} + F''_{xy} y') F'_y - F'_x (F''_{yx} + F''_{y^2} y')}{(F'_y)^2} \\ &= -\frac{F'_x F''_{yx} - F'_y F''_{x^2} + (F'_x F''_{y^2} - F'_y F''_{xy}) y'}{(F'_y)^2} \\ &= -\frac{F'_x F''_{yx} - F'_y F''_{x^2} + (F'_x F''_{y^2} - F'_y F''_{xy}) \left( -\frac{F'_x}{F'_y} \right)}{(F'_y)^2} \\ &= -\frac{F'_x F'_y F''_{yx} - (F'_y)^2 F''_{x^2} - (F'_x)^2 F''_{y^2} + F'_x F'_y F''_{xy}}{(F'_y)^3} \\ &= -\frac{(F'_x)^2 F''_{y^2} - 2F'_x F'_y F''_{yx} + (F'_y)^2 F''_{x^2}}{(F'_y)^3}. \end{aligned}$$

Näeme, et kui funktsiooni  $F$  teist järku osatuletised on pidevad punkti  $P_0$  mingis ümbruses, siis ka teine tuletis(funktsioon)  $y''$  on pidev punkti  $x_0$  teatavas ümbruses.

Funktsiooni  $y = y(x)$  kõrgemat järku tuletised saab leida analoogiliselt (eeldusel, et funktsioon  $F$  on punkti  $P_0$  mingis ümbruses vastav arv kordi diferentseeruv).

**Näide 2.3.** Leiame võrrandiga

$$x^3 - 6x^2y + y^3 = 31 \quad (2.6)$$

punkti  $(2, -1)$  ümbruses määratud funktsiooni  $y = y(x)$  esimest ja teist järku tuletised punktis  $x = 2$ .

Selleks märgime, et võrrand (2.6) on samaväärne võrrandiga  $F(x, y) = 0$ , kus

$$F(x, y) = x^3 - 6x^2y + y^3 - 31.$$

Leiame funktsiooni  $F$  osatuletised:

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 12xy, \quad F'_y(x, y) = -6x^2 + 3y^2.$$

Näeme, et funktsiooni  $F$  osatuletised on kogu tasandil  $\mathbb{R}^2$  pidevad, kusjuures

$$F'_y(2, -1) = -21 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et  $F(2, -1) = 0$ ) teoreemi 2.2 põhjal punkti  $(2, -1)$  teatavas ümbruses võrrand (2.6) määrab muutuja  $y$  muutuja  $x$  diferentseeruva funktsioonina  $y = y(x)$ ; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes  $y := y(x)$ , valemi (2.4) põhjal

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = \frac{3x^2 - 12xy}{6x^2 - 3y^2} = \frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2}, \quad (2.7)$$

millest, arvestades, et  $y(2) = -1$ , saame

$$y'(2) = \frac{4 + 8}{8 - 1} = \frac{12}{7}.$$

Kuna punkti  $x = 2$  teatavas ümbruses kehtiva samasuse (2.7) parem pool on diferentseeruv (sest funktsioon  $y = y(x)$  on selles ümbruses diferentseeruv), siis selle samasuse mõlemat poolt diferentseerides saame

$$\begin{aligned} y'' &= \left( \frac{x^2 - 4xy}{2x^2 - y^2} \right)' = \frac{(x^2 - 4xy)'(2x^2 - y^2) - (x^2 - 4xy)(2x^2 - y^2)'}{(2x^2 - y^2)^2} \\ &= \frac{(2x - 4y - 4xy')(2x^2 - y^2) - (x^2 - 4xy)(4x - 2yy')}{(2x^2 - y^2)^2}, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et  $y(2) = -1$  ja  $y'(2) = \frac{12}{7}$ ,

$$y''(2) = \frac{(4 + 4 - \frac{96}{7})7 - 12(8 - \frac{24}{7})}{49} = \frac{56 - 96 - 96 - \frac{288}{7}}{49} = -\frac{1240}{343}.$$

## 2.4. Mitme muutuja ilmutamata funktsiooni olemasolu ja diferentseeruvus

Mitme muutuja ilmutamata funktsioonid defineeritakse analoogiliselt ühe muutuja ilmutamata funktsioonide juhuga.

Sisaldagu  $m + 1$  muutuja funktsiooni  $u = F(x_1, \dots, x_m, y)$  määramispiirkond risttahukat

$$\mathcal{D} := I_1 \times \dots \times I_m \times I = \{(x_1, \dots, x_m, y) : x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m, y \in I\},$$

kus  $I_1, \dots, I_m, I \subset \mathbb{R}$  on mingid intervallid. Vaatleme võrrandit

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0. \quad (2.8)$$

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et võrrand (2.8) määrab risttahukas  $\mathcal{D}$  muutuja  $y$  muutujate  $x_1, \dots, x_m$  (ühese) funktsioonina

$$y = y(x_1, \dots, x_m), \quad (2.9)$$

kui mis tahes fikseeritud väärtuste  $x_1 \in I_1, \dots, x_m \in I_m$  korral võrrandil (2.8) eksisteerib parajasti üks lahend  $y \in I$ .

Kõnealune funktsioon (2.9)

$$I_1 \times \dots \times I_m \ni (x_1, \dots, x_m) \longmapsto y(x_1, \dots, x_m) \in I$$

on määratud võrdusega

$$F(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m)) = 0:$$

see funktsioon seab punktile  $(x_1, \dots, x_m) \in I_1 \times \dots \times I_m$  vastavusse võrrandi (2.8) ainsa lahendi  $y \in I$ .

Seejuures öeldakse, et funktsioon (2.9) on antud võrrandiga (2.8) *ilmutamata kujul*.

**Teoreem 2.3.** *Eeldame, et*

- (1)  $(m + 1)$  muutuja funktsioon  $u = F(x_1, \dots, x_m, y)$  on määratud mingis risttahukas  $\mathcal{D}$  keskpunktiga  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0, y_0)$ :

$$\mathcal{D} := (x_1^0 - \alpha_1, x_1^0 + \alpha_1) \times \dots \times (x_m^0 - \alpha_m, x_m^0 + \alpha_m) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$$

$$(siin \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta > 0);$$

- (2)  $F(P_0) = 0$ ;

- (3) osatuletised  $F'_{x_1}, \dots, F'_{x_m}$  ja  $F'_y$  eksisteerivad ja on pidevad risttahukas  $\mathcal{D}$ ;

- (4)  $F'_y(P_0) \neq 0$ .

*Siis*

- (a) punkti  $P_0$  teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab võrrand

$$F(x_1, \dots, x_m, y) = 0$$

muutuja  $y$  muutujate  $x_1, \dots, x_m$  (ühese) funktsioonina  $y = y(x_1, \dots, x_m)$ ;

- (b)  $y(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_0$ ;

- (c) funktsioon  $y = y(x_1, \dots, x_m)$  on punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidev;

**NB!** Väide (c) järeldeb väitest (d).

- (d) funktsioonil  $y = y(x_1, \dots, x_m)$  eksisteerivad punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised  $y'_{x_1}, \dots, y'_{x_m}$ , kusjuures selles ümbruses

$$y'_{x_i}(x_1, \dots, x_m) = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m))}{F'_y(x_1, \dots, x_m, y(x_1, \dots, x_m))}; \quad (2.10)$$

niisiis

$$y'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_m^0) = -\frac{F'_{x_i}(P_0)}{F'_y(P_0)}.$$

Teoreemi 2.3 tõestus on täiesti analoogiline teoreemi 2.2 tõestusega (seejuures väidete (a)–(c) tõestus kasutab teoreemi 2.1 analoogi mitme muutuja ilmutamata funktsioonide jaoks – mille tõestus on jällegi täiesti analoogiline teoreemi 2.1 tõestusega), seepärast jätame ta siin ära toomata.

**Märkus 2.2.** Kui lisaks teoreemi 2.3 eelduste täidetusele funktsioon  $F$  on kaks korda diferentseeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis liitfunktsiooni diferentseerimise reegli (teoreemi II.1.8) põhjal funktsioon  $y = y(x_1, \dots, x_m)$  on kaks korda diferentseeruv punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses; seejuures tema teist järku osatuletised saab leida võttes osatuletised (punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses kehtivate) samasuste (2.10) mõlemast poolest.

**Näide 2.4.** Leiame võrrandiga

$$x^3 z^2 - y z^3 - x = 2 \quad (2.11)$$

punkti  $(1, 2, -1)$  ümbruses määratud funktsiooni  $z = z(x, y)$  esimest ja teist järku osatuletised punktis  $(x, y) = (1, 2)$ .

Selleks märgime, et võrrand (2.11) on samaväärne võrrandiga  $F(x, y, z) = 0$ , kus

$$F(x, y, z) = x^3 z^2 - y z^3 - x - 2.$$

Leiame funktsiooni  $F$  osatuletised:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 z^2 - 1, \quad F'_y(x, y, z) = -z^3, \quad F'_z(x, y, z) = 2x^3 z - 3y z^2.$$

Näeme, et funktsiooni  $F$  osatuletised on kogu ruumis  $\mathbb{R}^3$  pidevad, kusjuures

$$F'_z(1, 2, -1) = -8 \neq 0,$$

järelikult (arvestades, et  $F(1, 2, -1) = 0$ ) teoreemi 2.3 põhjal punkti  $(1, 2, -1)$  teatavas ümbruses võrrand (2.11) määrab muutuja  $z$  muutujate  $x$  ja  $y$  diferentseeruva funktsioonina  $z = z(x, y)$ ; seejuures, märkides edasises lihtsuse mõttes  $z := z(x, y)$ , valemi (2.10) põhjal

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{-3x^2 z^2 + 1}{2x^3 z - 3y z^2}, \\ z'_y &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{z^3}{2x^3 z - 3y z^2} = \frac{z^2}{2x^3 - 3y z}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

millest, arvestades, et  $z(1, 2) = -1$ , saame

$$z'_x(1, 2) = \frac{-3 + 1}{-2 - 6} = \frac{1}{4}, \quad z'_y(1, 2) = \frac{1}{2 + 6} = \frac{1}{8}.$$

Kuna punkti  $(x, y) = (1, 2)$  teatavas ümbruses kehtivate **samasuste** (2.12) paremad pooled on diferentseeruvad (sest funktsioon  $z = z(x, y)$  on selles ümbruses diferentseeruv), siis neid **samasusi** diferentseerides saame

$$\begin{aligned}
 z''_{x^2} &= \left( \frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2} \right)'_x = \frac{(-3x^2z^2 + 1)'_x(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z - 3yz^2)'_x}{(2x^3z - 3yz^2)^2} \\
 &= \frac{(-6xz^2 - 6x^2zz'_x)(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(6x^2z + 2x^3z'_x - 6yzz'_x)}{(2x^3z - 3yz^2)^2}, \\
 z''_{xy} &= \left( \frac{-3x^2z^2 + 1}{2x^3z - 3yz^2} \right)'_y = \frac{(-3x^2z^2 + 1)'_y(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z - 3yz^2)'_y}{(2x^3z - 3yz^2)^2} \\
 &= \frac{(-6x^2zz'_y)(2x^3z - 3yz^2) - (-3x^2z^2 + 1)(2x^3z'_y - 3z^2 - 6yzz'_y)}{(2x^3z - 3yz^2)^2}, \\
 z''_{yx} &= \left( \frac{z^2}{2x^3 - 3yz} \right)'_x = \frac{(z^2)'_x(2x^3 - 3yz) - z^2(2x^3 - 3yz)'_x}{(2x^3 - 3yz)^2} \\
 &= \frac{2zz'_x(2x^3 - 3yz) - z^2(6x^2 - 3yz'_x)}{(2x^3 - 3yz)^2}, \\
 z''_{y^2} &= \left( \frac{z^2}{2x^3 - 3yz} \right)'_y = \frac{(z^2)'_y(2x^3 - 3yz) - z^2(2x^3 - 3yz)'_y}{(2x^3 - 3yz)^2} \\
 &= \frac{2zz'_y(2x^3 - 3yz) - z^2(-3z - 3yz'_y)}{(2x^3 - 3yz)^2},
 \end{aligned}$$

millest, arvestades, et  $z(1, 2) = -1$ ,  $z'_x(1, 2) = \frac{1}{4}$ ,  $z'_y(1, 2) = \frac{1}{8}$ ,

$$\begin{aligned}
 z''_{x^2}(1, 2) &= \frac{(-6 + \frac{6}{4})(-8) - (-3 + 1)(-6 + \frac{2}{4} + \frac{12}{4})}{(-2 - 6)^2} = \frac{31}{64}, \\
 z''_{xy}(1, 2) &= \frac{\frac{6}{8}(-8) - (-3 + 1)(\frac{2}{8} - 3 + \frac{12}{8})}{(-2 - 6)^2} = -\frac{17}{128}, \\
 z''_{yx}(1, 2) &= \frac{-\frac{2}{4}(2 + 6) - (6 - \frac{6}{4})}{(2 + 6)^2} = -\frac{17}{128}, \\
 z''_{y^2}(1, 2) &= \frac{-\frac{2}{8}(2 + 6) - (3 - \frac{6}{8})}{(2 + 6)^2} = -\frac{17}{256}.
 \end{aligned}$$

Eelnevas võinuksime ühe osatuletistest  $z''_{xy}$  ja  $z''_{yx}$  rehkendamata jätta – **samasustest** (2.12) näeme, et funktsiooni  $z$  osatuletised on punkti  $(x, y) = (1, 2)$  teatavas ümbruses diferentseeruvad, s.t. funktsioon  $z$  on kaks korda diferentseeruv selles ümbruses ning järelikult selles ümbruses funktsiooni  $z$  teist järku segaosatuletised ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.



$$(2) F_j(P_0) = 0, \quad j = 1, \dots, n;$$

(3) iga  $k \in \{1, \dots, n\}$  korral osatuletised  $\frac{\partial F_k}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial x_m}$  ja  $\frac{\partial F_k}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial y_n}$  eksisteerivad ning on pidevad risttahukas  $\mathcal{D}$ ;

$$(4) \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(P_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n}(P_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(P_0) & \frac{\partial F_n}{\partial y_2}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

*Siis*

- (a) punkti  $P_0$  teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab süsteem (3.2) muutujad  $y_1, \dots, y_n$  muutujate  $x_1, \dots, x_m$  (üheste) funktsioonidena (3.3);
- (b)  $y_j(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_j^0, \quad j = 1, \dots, n$ ;
- (c) funktsioonid (3.3) on punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad;
- (d) funktsioonidel (3.3) eksisteerivad punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide  $j \in \{1, \dots, n\}$  ja  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m) = - \frac{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(x_1, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \dots, y_n)}{\frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}} \quad (3.4)$$

(siin võrdusmärgist paremal olevates determinantides arvutatakse osatuletised  $\frac{\partial F_k}{\partial x_i}$  ja  $\frac{\partial F_k}{\partial y_l}$  punktis  $(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m))$ ).

**TÕESTUS.** Viime tõestuse läbi induktioonina võrrandite arvu  $n$  järgi süsteemis (3.2). Juhul  $n = 1$  on meil teoreem tõestatud – see on teoreem 2.3. Eeldame nüüd, et kehtib teoreemi analoog  $n - 1$  võrrandist koosnevate süsteemide jaoks ning näitame, et sel juhul kehtib teoreem ka  $n$  võrrandist koosnevate süsteemide jaoks.

Eelduse (4) põhjal erineb vähemalt üks korrutistest

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n)}(P_0) \frac{\partial F_n}{\partial y_j}(P_0), \quad j = 1, \dots, n,$$

nullist (PÕHJENDADA!). Konkreetsuse mõttes oletame, et

$$\frac{D(F_1, \dots, F_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(P_0) \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0) \neq 0.$$



$\{1, \dots, n-1\}$  ja  $A = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \Delta_0$  korral

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}(A) &= \frac{\partial F_k}{\partial x_i}(P) + \frac{\partial F_k}{\partial y_n}(P) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(A), \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_j}(A) &= \frac{\partial F_k}{\partial y_j}(P) + \frac{\partial F_k}{\partial y_n}(P) \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(A),\end{aligned}$$

kus  $P := (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_{n-1}, \phi(A)) \in \mathcal{D}_0$ .

(4) Veendume, et

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0$$

(siin ja edaspidi võetakse kõik osatuletised  $\frac{\partial F_k}{\partial y_j}$  punktis  $P_0$  ja kõik osatuletised  $\frac{\partial \phi}{\partial y_j}$  punktis  $A_0$ ). Selleks tähistame

$$J(P_0) := \frac{D(F_1, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial F_n} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial F_n} & \frac{\partial y_n}{\partial F_n} \end{vmatrix}.$$

Liites viimases determinandis iga  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  korral  $j$ -ndale veerule  $\frac{\partial \phi}{\partial y_j}$ -kordse viimase veeru, saame

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_1}{\partial F_n} + \frac{\partial y_n}{\partial F_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial y_{n-1}}{\partial F_n} + \frac{\partial y_n}{\partial F_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial y_n}{\partial F_n} \end{vmatrix}.$$

Paneme tähele, et viimase determinandi viimase rea  $n-1$  esimest elementi on nullid: tõepoolest, need elemendid on saadud (punkti  $A_0$  ümbruses kehtiva) **samasuse** (3.6)

diferentseerimisel vastavalt muutujate  $y_1, \dots, y_{n-1}$  järgi. Seega

$$J(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \frac{\partial \phi}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0) \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(P_0).$$

Kuna eelduse põhjal  $J(P_0) \neq 0$ , siis ka  $\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}(A_0) \neq 0$ , nagu soovitud.

Tehtud eelduse põhjal teoreemi analoogi kehtivuse kohta  $n - 1$  võrrandist koosnevate süsteemide jaoks

- (a) punkti  $A_0$  teatavas risttahukakujulises ümbruses määrab süsteem (3.7) muutujad  $y_1, \dots, y_{n-1}$  muutujate  $x_1, \dots, x_m$  (üheste) funktsioonidena

$$y_1 = y_1(x_1, \dots, x_m), \quad \dots, \quad y_{n-1} = y_{n-1}(x_1, \dots, x_m); \quad (3.8)$$

- (b)  $y_j(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_j^0$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ ;  
(c) funktsioonid (3.8) on punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad;  
(d) funktsioonidel (3.8) eksisteerivad punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide järgi, kusjuures selles ümbruses kõikide  $j \in \{1, \dots, n - 1\}$  ja  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$(y_j)_{x_i}'(x_1, \dots, x_m) = - \frac{\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{j-1}, x_i, y_{j+1}, \dots, y_{n-1})}}{\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_{n-1})}{D(y_1, \dots, y_{n-1})}}.$$

Defineerides täiendavalt funktsiooni

$$y_n(x_1, \dots, x_m) := \phi(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_{n-1}(x_1, \dots, x_m)),$$

näeme, et teoreemi väited (a)–(c) ilmselt kehtivad **(PÕHJENDADA!)**; lisaks eksisteerivad funktsioonidel  $y_1, \dots, y_n$  punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised kõigi argumentide  $x_1, \dots, x_m$  järgi. Jääb veenduda vaid valemi(te) (3.4) kehtivuses. Selleks märgime, et punkti  $(x_1^0, \dots, x_m^0)$  teatavas ümbruses kehtib iga  $k \in \{1, \dots, n\}$  korral **samasus**

$$F_k(x_1, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)) = 0,$$



**Märkus 3.1.** Funktsioonide (3.12) osatuletised võib leida järgmise mõttekäigu abil. Süsteemi (3.12) poolt määratud kujutus  $\mathcal{D}_0 \rightarrow \Delta_0$  on süsteemi (3.9) poolt määratud kujutuse  $\Delta_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  pöördkujutus, seega nende kujutuste  $\Delta_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  ja  $\mathcal{D}_0 \rightarrow \Delta_0$  korrutis on hulga  $\Delta_0$  ühikteisendus; järelikult teoreemi 1.1 põhjal nende süsteemide Jacobi maatriksite korrutis on hulga  $\Delta_0$  ühikteisenduse Jacobi maatriks, s.t. ühikmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Siin süsteemi (3.9) Jacobi maatriks arvutatakse punktides  $Q = (u_1, \dots, u_m) \in \Delta_0$  ja süsteemi (3.12) Jacobi maatriks vastavates punktides  $P = (x_1(Q), \dots, x_m(Q)) \in \mathcal{D}_0$ . Niisiis süsteemi (3.12) Jacobi maatriks on süsteemi (3.9) Jacobi maatriksi pöördmaatriks:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}^{-1},$$

s.t. mis tahes  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  korral

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = (-1)^{j+i} \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_{j-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{j+1}} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_{j-1}} & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_{j+1}} & \cdots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_{i+1}} & \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_{i+1}} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} & \frac{\partial u_{j+1}}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_{j-1}} & \frac{\partial x_m}{\partial u_{j+1}} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}}.$$

Siin, arvutades osatuletisi  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  punktis  $P = (x_1(Q), \dots, x_m(Q)) \in \mathcal{D}_0$ , kus  $Q \in \Delta_0$ , tuleb osatuletised  $\frac{\partial x_k}{\partial u_l}$  arvutada punktis  $Q$  ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  punktis  $P \in \mathcal{D}_0$ , tuleb osatuletised  $\frac{\partial x_k}{\partial u_l}$  arvutada vastavas punktis  $Q = (u_1(P), \dots, u_m(P)) \in \Delta_0$ .



**Teoreem 3.4.** *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$\begin{cases} x = x(Q) = x(u, v), \\ y = y(Q) = y(u, v) \end{cases} \quad (3.15)$$

pidevad osatuletised punkti  $Q_0 := (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$  mingis ümbruses.

Kui süsteemi (3.15) jakobiaan

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

erineb nullist punktis  $Q_0$ , siis leiduvad punkti  $Q_0$  lahtine ümbrus  $\Delta_0 \subset \mathbb{R}^2$  ja punkti  $P_0 := (x_0, y_0) := (x(Q_0), y(Q_0)) \in \mathbb{R}^2$  lahtine ümbrus  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^2$  nii, et süsteem (3.15) määrab pööratava kujutuse

$$\Delta_0 \ni (u, v) = Q \longmapsto (x(Q), y(Q)) \in \mathcal{D}_0,$$

kusjuures selle kujutuse pöördkujutust  $\mathcal{D}_0 \rightarrow \Delta_0$  määravatel funktsioonidel

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (3.17)$$

eksisteerivad hulgas  $\mathcal{D}_0$  pidevad osatuletised; seejuures

$$u'_x = \frac{y'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \quad u'_y = \frac{-x'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \quad v'_x = \frac{-y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \quad v'_y = \frac{x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}$$

(siin osatuletiste  $u'_x, u'_y, v'_x, v'_y$ , arvutamisel punktis  $P \in \mathcal{D}_0$  arvutatakse osatuletised  $x'_u, x'_v, y'_u, y'_v$  punktis  $Q = (u(P), v(P)) \in \Delta_0$ ).

TÕESTUS. Olgu jakobiaan (3.16) nullist erinev punktis  $Q_0$ . Vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) := -x + x(u, v) = 0, \\ F_2(x, y, u, v) := -y + y(u, v) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Funktsioonidel  $F_1$  ja  $F_2$  eksisteerivad punkti  $R_0 := (x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^4$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix} (F_1)'_x & (F_1)'_y & (F_1)'_u & (F_1)'_v \\ (F_2)'_x & (F_2)'_y & (F_2)'_u & (F_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & x'_u & x'_v \\ 0 & -1 & y'_u & y'_v \end{pmatrix};$$

(siin osatuletised  $x'_u, x'_v, y'_u$  ja  $y'_v$  arvutatakse punktides  $(u, v)$ ). Kuna punktis  $R_0$

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$$

(siin osatuletised  $x'_u$ ,  $x'_v$ ,  $y'_u$  ja  $y'_v$  arvutatakse punktis  $(u_0, v_0) = Q_0$ ), kusjuures  $F_1(R_0) = F_2(R_0) = 0$ , siis teoreemi 3.1 põhjal leidub punkti  $R_0$  risttahukakujuline ümbrus  $\mathcal{D}_1 \times \Delta_1$ , kus  $\mathcal{D}_1$  ja  $\Delta_1$  on vastavalt punktide  $P_0$  ja  $Q_0$  ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.18) määrab muutujad  $u$  ja  $v$  muutujate  $x$  ja  $y$  ühese funktsioonidena (3.17), millel eksisteerivad ristkülikus  $\mathcal{D}_1$  pidevad osatuletised

$$\begin{aligned} u'_x &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(x, v)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & x'_v \\ 0 & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{y'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \\ u'_y &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, v)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & x'_v \\ -1 & y'_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{-x'_v}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \\ v'_x &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, x)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & -1 \\ y'_u & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{-y'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}}, \\ v'_y &= -\frac{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, y)}}{\frac{D(F_1, F_2)}{D(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} x'_u & 0 \\ y'_u & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \frac{x'_u}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} \end{aligned}$$

(siin, arvutades osatuletisi  $u'_x$ ,  $v'_x$ ,  $u'_y$  ja  $v'_y$  punktis  $(x, y)$ , tuleb osatuletised  $x'_u$ ,  $x'_v$ ,  $y'_u$  ja  $y'_v$  arvutada punktis  $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ ).

Märgime, et mis tahes  $P = (x, y) \in \mathcal{D}_1$  korral

$$\begin{cases} x = x(u(x, y), v(x, y)), \\ y = y(u(x, y), v(x, y)), \end{cases}$$

seega kui  $\Phi: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $\Psi: \mathcal{D}_1 \rightarrow \Delta_1$  on vastavalt süsteemidega (3.15) ja (3.17) määratud kujutused, s.t.

$$\Phi(Q) = (x(Q), y(Q)), \quad Q \in \Delta_1, \quad \text{ja} \quad \Psi(P) = (u(P), v(P)), \quad P \in \mathcal{D}_1,$$

siis

$$P = \Phi\Psi(P) \quad \text{iga } P \in \mathcal{D}_1 \text{ korral.} \quad (3.19)$$

Nüüd vaatleme süsteemi

$$\begin{cases} G_1(x, y, u, v) := -u + u(x, y) = 0, \\ G_2(x, y, u, v) := -v + v(x, y) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Funktsioonidel  $G_1$  ja  $G_2$  eksisteerivad punkti  $R_0$  teatavas ümbruses pidevad osatuletised, kusjuures selle süsteemi Jacobi maatriks on

$$\begin{pmatrix} (G_1)'_x & (G_1)'_y & (G_1)'_u & (G_1)'_v \\ (G_2)'_x & (G_2)'_y & (G_2)'_u & (G_2)'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y & -1 & 0 \\ v'_x & v'_y & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

(siin osatuletised  $u'_x, u'_y, v'_x$  ja  $v'_y$  arvutatakse punktides  $(x, y)$ ). Kuna järelduse 1.3 põhjal punktis  $R_0$

$$\frac{D(\Psi_1, \Psi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} \neq 0$$

(siin osatuletised  $u'_x, u'_y, v'_x$  ja  $v'_y$  arvutatakse punktis  $(x_0, y_0) = P_0$  ning osatuletised  $x'_u, x'_v, y'_u$  ja  $y'_v$  vastavas punktis  $(u_0, v_0) = Q_0$ ), kusjuures  $\Psi_1(R_0) = \Psi_2(R_0) = 0$  (PÕHJENDADA!), siis leidub punkti  $R_0$  risttahukakujuline ümbrus  $\mathcal{D}_2 \times \Delta_2$ , kus  $\mathcal{D}_2$  ja  $\Delta_2$  on vastavalt punktide  $P_0$  ja  $Q_0$  ristkülikukujulised ümbrused, milles süsteem (3.20) määrab muutujad  $x$  ja  $y$  muutujate  $u$  ja  $v$  ühese funktsioonidena

$$\begin{cases} x = \hat{x}(u, v), \\ y = \hat{y}(u, v). \end{cases} \quad (3.21)$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et ristkülikud  $\mathcal{D}_2$  ja  $\Delta_2$  on lahtised, kusjuures  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$  ja  $\Delta_2 \subset \Delta_1$  (PÕHJENDADA!). Mis tahes  $Q = (u, v) \in \Delta_2$  korral

$$\begin{cases} u = u(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v)), \\ v = v(\hat{x}(u, v), \hat{y}(u, v)), \end{cases}$$

seega kui  $\hat{\Phi}: \Delta_2 \rightarrow \mathcal{D}_2$  on süsteemi (3.21) poolt määratud kujutus, s.t.  $\hat{\Phi}(Q) = (\hat{x}(Q), \hat{y}(Q))$ ,  $Q \in \Delta_2$ , siis

$$Q = \Psi\hat{\Phi}(Q) \quad \text{iga } Q \in \Delta_2 \text{ korral.} \quad (3.22)$$

Paneme tähele, et mis tahes  $Q \in \Delta_2$  korral  $\Phi(Q) = \hat{\Phi}(Q)$ , sest ühelt poolt (3.22) põhjal

$$\Phi\Psi\hat{\Phi}(Q) = \Phi(\Psi\hat{\Phi}(Q)) = \Phi(Q),$$

teiselt poolt (arvestades, et  $\hat{\Phi}(Q) \in \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$ ) tingimuse (3.19) põhjal

$$\Phi\Psi\hat{\Phi}(Q) = \Phi\Psi(\hat{\Phi}(Q)) = \hat{\Phi}(Q).$$

Tähistame  $\Delta_0 := \Delta_2$  ja  $\mathcal{D}_0 := \Phi(\Delta_0) = \{\Phi(Q): Q \in \Delta_0 = \Delta_2\} \subset \mathcal{D}_2$ ; siis kujutuse  $\Phi$  ahend  $\Phi|_{\Delta_0}: \Delta_0 \rightarrow \mathcal{D}_0$  on pealekujutus, kusjuures  $\Phi|_{\Delta_0}$  on ka üksühene, sest kui  $Q_1, Q_2 \in \Delta_0 = \Delta_2$  on sellised, et  $\Phi(Q_1) = \Phi(Q_2)$ , siis

$$Q_1 = \Psi\hat{\Phi}(Q_1) = \Psi(\hat{\Phi}(Q_1)) = \Psi(\Phi(Q_1)) = \Psi(\Phi(Q_2)) = \Psi(\hat{\Phi}(Q_2)) = \Psi\hat{\Phi}(Q_2) = Q_2.$$

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et  $\mathcal{D}_0$  on lahtine hulk ruumis  $\mathbb{R}^2$ . Olgu  $P_1 \in \mathcal{D}_0$ , s.t.  $P_1 = \Phi(Q_1)$  mingi  $Q_1 \in \Delta_0$  korral. Hulga  $\Delta_0$  lahtisuse tõttu leidub punkti  $Q_1$  ümbrus  $\mathcal{V} \subset \Delta_0$ . Lemma 3.3 põhjal leidub punkti  $P_1$  ümbrus  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_1$  nii, et

$$\Psi(\mathcal{U}) = \{\Psi(P): P \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{V}.$$

Nüüd mis tahes  $P \in \mathcal{U}$  korral (arvestades, et  $\Psi(P) \in \mathcal{V}$ )

$$P = \Phi\Psi(P) = \Phi(\Psi(P)) \in \Phi(\mathcal{V}) \subset \Phi(\Delta_0) = \mathcal{D}_0,$$

seega  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}_0$ , järelikult  $P_1$  on hulga  $\mathcal{D}_0$  sisepunkt; niisiis hulk  $\mathcal{D}$  on lahtine.  $\square$

**NB!** Siin me kasutame eeldust hulga  $\mathcal{D}_2$  lahtisust!

**Märkus 3.3.** Eelnevas tõestuses võinuksime osatuletised  $u'_x, u'_y, v'_x$  ja  $v'_y$  välja rehkendada ka märkusele 3.1 tuginedes, s.t. arvestades, et süsteemi (3.17) Jacobi maatriks on süsteemi (3.15) Jacobi maatriksi pöördmaatriks. Siin, arvutades osatuletisi  $u'_x, u'_y, v'_x$  ja  $v'_y$  punktis  $P = (x, y) \in \mathcal{D}_0$ , tuleb osatuletised  $x'_u, x'_v, y'_u$  ja  $y'_v$  süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis  $Q = (u(P), v(P)) \in \Delta_0$  ehk, sümmeetriliselt, arvutades osatuletisi  $u'_x, u'_y, v'_x$  ja  $v'_y$  punktis  $P = (x(Q), y(Q)) \in \mathcal{D}_0$ , kus  $Q \in \Delta_0$ , tuleb osatuletised  $x'_u, x'_v, y'_u$  ja  $y'_v$  süsteemi (3.15) Jacobi maatriksis arvutada vastavas punktis  $Q$ .

**Järeldus 3.5.** Eksisteerigu funktsioonidel (3.9) pidevad osatuletised lahtises hulgas  $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ , kusjuures hulga  $\Delta$  igas punktis jakobiaan (3.10) erineb nullist. Siis süsteemiga (3.9) määratud kujutuse  $\Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$  kujutishulk

$$\mathcal{D} := \{(x_1(Q), \dots, x_m(Q)) : Q \in \Delta\} \subset \mathbb{R}^m$$

on lahtine.

**TÕESTUS.** Järelduse tõestuseks tuleb näidata, et hulga  $\mathcal{D}$  iga punkt on tema sisepunkt. Olgu  $P_0 \in \mathcal{D}$ , s.t. mingi  $Q_0 \in \Delta$  korral  $P_0 = (x_1(Q_0), \dots, x_m(Q_0))$ . Teoreemi 3.2 põhjal leiduvad punkti  $Q_0$  lahtine ümbrus  $\Delta_0 \subset \Delta$  ja punkti  $P_0$  lahtine ümbrus  $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$  nii, et süsteem (3.9) määrab pööratava kujutuse (3.11), aga siit järeldub, et punkti  $P_0$  lahtine ümbrus  $\mathcal{D}_0$  sisaldub kujutishulgas  $\mathcal{D}$ ; niisis  $P_0$  on hulga  $\mathcal{D}$  sisepunkt, nagu soovitud.  $\square$



## IV peatükk.

# Mitme muutuja funktsiooni ekstreemumid

## § 1. Mitme muutuja funktsiooni lokaalsed ekstreemumid

### 1.1. Lokaalse ekstreemumi mõiste. Tarvilik tingimus lokaalse ekstreemumi olemasoluks

Olgu funktsioon  $u = f(P)$  määratud punkti  $P_0 \in \mathbb{R}^m$  mingis ümbruses.

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$

- *lokaalne maksimum*, kui punktis  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U}$  nii, et

$$f(P) \leq f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral;}$$

- *lokaalne miinimum*, kui punktis  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U}$  nii, et

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures punkti  $P_0$  nimetatakse vastavalt funktsiooni  $f$  *lokaalseks maksimumpunktiks* ja *lokaalseks miinimumpunktiks*.

Teisisõnu, funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  lokaalne maksimum (või, vastavalt, lokaalne miinimum), kui sellel punktis leidub ümbrus, milles  $f(P_0)$  on selle funktsiooni suurim väärtus (või, vastavalt, vähim väärtus).

Lokaalset maksimumi ja lokaalset miinimumi nimetatakse *lokaalseteks ekstreemumiteks*.

**Definitsioon 1.2.** Öeldakse, et funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$

- *range lokaalne maksimum*, kui punktis  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U}$  nii, et

$$f(P) < f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral;}$$

**NB!** Võib-olla, tuleks siin eksplitsiitselt rõhutada, et lok. maksimumi ja miinimumi all mõeldakse funktsiooni väärtusi?

- *range lokaalne miinimum*, kui punktil  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U}$  nii, et

$$f(P) > f(P_0) \quad \text{iga } P \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\} \text{ korral.}$$

Ranget lokaalset maksimumi ja ranget lokaalset miinimumi nimetatakse *range-teks lokaalseteks ekstreemumiteks*.

**Teoreem 1.1.** Eksisteerigu funktsioonil  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$  lõplikud esimest järku osatuletised kõigi argumentide järgi. Kui funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  lokaalne ekstreemum, siis selle funktsiooni kõik esimest järku osatuletised punktis  $P_0$  on võrdsed nulliga, s.t.

$$f'_{x_i}(P_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

TÕESTUS. Konkreetseuse mõttes eeldame, et funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  lokaalne miinimum (juhtu, kus funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  lokaalne maksimum, käsitletakse analoogiliselt), s.t. leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  nii, et

$$f(P) \geq f(P_0) \quad \text{iga } P \in U_\varepsilon(P_0) \text{ korral.}$$

Olgu  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Vaatleme funktsiooni

$$g(t) = f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0).$$

Paneme tähele, et

- (1) funktsioon  $g$  on määratud vahemikus  $(x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$ ;
- (2) funktsioonil  $g$  on punktis  $t = x_i^0$  lokaalne miinimum;
- (3) funktsioon  $g$  on diferentseeruv punktis  $t = x_i^0$ , kusjuures  $g'(x_i^0) = f'_{x_i}(P_0)$ .

Tõepoolest, tähistame iga  $t \in \mathbb{R}$  korral  $Q_t := (x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_m^0)$ ; siis iga  $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$  korral  $d(Q_t, P_0) = |t - x_i^0| < \varepsilon$ , s.t.  $Q_t \in U_\varepsilon(P_0)$ , seega  $Q_t$  kuulub funktsiooni  $f$  määramispiirkonda ehk, teisisõnu, funktsioon  $g$  on määratud punktis  $t$ . Seejuures iga  $t \in (x_i^0 - \varepsilon, x_i^0 + \varepsilon)$  korral

$$g(t) = f(Q_t) \geq f(P_0) = g(x_i^0);$$

niisiis, funktsioonil  $g$  on punktis  $x_i^0$  lokaalne miinimum.

Väidetest (3) ja (2) järeldub Fermat' teoreemi põhjal, et  $f'_{x_i}(P_0) = g'(x_i^0) = 0$ , nagu soovitud.  $\square$

**NB!** Siinne kontekst ütleb implitsiitselt, et funktsiooni kriitilised punktid on tema määramispiirkonna sisepunktid.

**Definitsioon 1.3.** Öeldakse, et punkt  $P_0$  on funktsiooni  $f$

- *statsionaarne punkt*, kui sellel funktsioonil eksisteerivad selles punktis osatuletised kõikide muutujate järgi, kusjuures kõik need osatuletised on võrdsed nulliga;
- *kriitiline punkt*, kui see punkt on kas funktsiooni  $f$  statsionaarne punkt või selle funktsiooni mingi osatuletis selles punktis kas ei eksisteeri või on lõpmatu.

Teoreemist 1.1 järeldub, et

- *mis tahes funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni kriitilises punktis;*
- *diferentseeruv funktsioonil saab lokaalne ekstreemum esineda vaid selle funktsiooni statsionaarses punktis.*

**NB!** Siin piisaks vähemastki kui diferentseeruvusest (piisaks lõplike osatuletiste olemasolust.)

**Märkus 1.1.** Punkti statsionaarsus ei ole piisav tingimus funktsiooni lokaalse ekstreemumi olemasoluks selles punktis (isegi juhul, kui funktsioon on diferentseeruv selles statsionaarses punktis).

**Näide 1.1.** Veendume, et funktsioonil  $z = f(x, y) := xy$  ei ole lokaalset ekstreemumit tema statsionaarses punktis  $(0, 0)$ .

Kõigepealt märgime, et punkt  $(0, 0)$  on tõepoolest funktsiooni  $f$  statsionaarne punkt, sest selle funktsiooni osatuletised on

$$f'_x(x, y) = (xy)'_x = y \quad \text{ja} \quad f'_y(x, y) = (xy)'_y = x$$

ning seega  $f'_x(0, 0) = 0$  ja  $f'_y(0, 0) = 0$ . Lisaks, funktsioon  $f$  on diferentseeruv kogu tasandil  $\mathbb{R}^2$ , sest tema osatuletised on pidevad kogu tasandil.

Veendumaks, et funktsioonil  $f$  ei ole punktis  $(0, 0)$  lokaalset ekstreemumit, märgime, et punkti  $(0, 0)$  mis tahes ümbrus sisaldab punkte  $(x, y)$ , kus  $x$  ja  $y$  on nullist erinevad ja samamärgilised ning seega  $f(x, y) = xy > 0 = f(0, 0)$ , samuti punkte  $(x, y)$ , kus  $x$  ja  $y$  on nullist erinevad ja erimärgilised ning seega  $f(x, y) = xy < 0 = f(0, 0)$ .

## 1.2. Piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks

### 1.2.1. Ruutvormi mõiste ja määratus

**Definitsioon 1.4.** Olgu  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ . Summat

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} z_i z_j =: \Phi(z_1, \dots, z_m) \quad (1.1)$$

nimetatakse *ruutvormiks* muutujatest  $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}$ . Arvusi  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ , nimetatakse selle ruutvormi *kordajateks*.

**Definitsioon 1.5.** Öeldakse, et ruutvorm (1.1) on

- *positiivselt määratud*, kui

$$\Phi(z_1, \dots, z_m) > 0 \quad \text{kõikide } z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}, z_1^2 + \dots + z_m^2 \neq 0, \text{ korral;}$$

- *negatiivselt määratud*, kui

$$\Phi(z_1, \dots, z_m) < 0 \quad \text{kõikide } z_1, \dots, z_m \in \mathbb{R}, z_1^2 + \dots + z_m^2 \neq 0, \text{ korral.}$$

Positiivselt määratud ja negatiivselt määratud ruutvorme nimetatakse *määratud ruutvormideks*.

Ruutvormi (1.1) nimetatakse *määramata ruutvormiks*, kui tal esineb nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi.

**Definitsioon 1.6.** Maatriksit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} =: (a_{ij})_{i,j=1}^m$$

nimetatakse *ruutvormi (1.1) maatriksiks*.

Determinante

$$A_1 := a_{11}, \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

nimetatakse ruutvormi (1.1) *peamiinoriteks*.

Järgnev algebra kursusest tuttav teoreem võimaldab teha kindlaks ruutvormi määratuse selle ruutvormi peamiinorite märkide põhjal.

**Teoreem 1.2** (Sylvesteri<sup>1</sup> tunnus). (a) *Ruutvorm (1.1) on positiivselt määratud parajasti siis, kui kõik tema peamiinorid on positiivsed, s.t.*

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad A_m > 0.$$

(b) *Ruutvorm (1.1) on negatiivselt määratud parajasti siis, kui tema peamiinorite märgid vahelduvad, kusjuures  $A_1 < 0$ , s.t.*

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \dots$$

### 1.2.2. Üldine (s.t. $m$ muutuja funktsiooni) juht

Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  kaks korda diferentseeruv punktis  $P_0 \in \mathbb{R}$ .

**Definitsioon 1.7.** Ruutvormi

$$\sum_{i,j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0) z_i z_j \quad (1.2)$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  *Hesse<sup>2</sup> (ruut)vormiks* (punktis  $P_0$ ) (muutujatest  $z_1, \dots, z_m$ ). Selle ruutvormi maatriksit  $(f''_{x_i x_j}(P_0))_{i,j=1}^m$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *Hesse maatriksiks* (punktis  $P_0$ ).

Nii Hesse ruutvormile kui ka Hesse maatriksile viidatakse terminiga *hessiaan*.

<sup>1</sup>James Joseph Sylvester (1814 – 1897) – inglise matemaatik

<sup>2</sup>Ludwig Otto Hesse (1811–1874) – saksa matemaatik.

**NB!** Rõhutada, et lisaks määratud ja määramata ruutvormidele on olemas ka poolmääratud ruutvormid!

**NB!** “Peamiinor” või “juhtmiinor”? [Курш, стр. 181] ütleb: “главный минор”.

**NB!** “Sylvesteri tunnus” või “Sylvesteri teoreem”? Abel&Kaasik ütleb, et “tunnus”.

**Märkus 1.2.** Siinkohal on oluline märkida, et funktsiooni  $f$  Hesse maatriks on sümmeetriline, s.t. mis tahes  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  korral  $f''_{x_i x_j}(P_0) = f''_{x_j x_i}(P_0)$  (see järgdub teoreemi II.3.3 põhjal eeldusest, et funktsioon  $f$  on kaks korda diferentseeruv punktis  $P_0$ .)

Funktsiooni  $f$  teist järku täisdiferentsiaali

$$d^2u(P_0) = \sum_{i,j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0) dx_i dx_j$$

võib tõlgendada kui selle funktsiooni hessiaani punktis  $P_0$  (muutujatest  $dx_1, \dots, dx_m$ ), mistõttu sobivas kontekstis viidatakse sellele diferentsiaalile kui hessiaanile.

Järgnev teoreem annab piisavad tingimused lokaalse ekstreemumi olemasoluks ja mitteolemasoluks kaks korda diferentseeruva funktsiooni statsionaarses punktis.

**Teoreem 1.3.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ .

- (a) Kui funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne miinimum.
- (b) Kui funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne maksimum.
- (c) Kui funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  on määramata ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  ei ole lokaalset ekstreemumit punktis  $P_0$ .

**TÕESTUS.** Olgu reaalarv  $\delta > 0$  selline, et funktsioon  $f$  on määratud punkti  $P_0$   $\delta$ -ümbruses  $\mathcal{U}$ . Kui  $P = (x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \in \mathcal{U} \setminus \{P_0\}$ , siis Tayloriga valemi põhjal (jääkliikmega Peano kujul; vt. teoreemi II.4.2)

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \alpha = \frac{1}{2} d^2 f(P_0) + \alpha$$

(siin arvestasime, et kuna  $P_0$  on funktsiooni  $f$  statsionaarne punkt, siis  $df(P_0) = \sum_{i=1}^n f'_{x_i}(P_0) dx_i = 0$ ), kus diferentsiaalide  $df(P_0)$  ja  $d^2 f(P_0)$  avaldistes  $dx_i = \Delta x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ning funktsioon  $\alpha = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  rahuldab tingimust  $\alpha = o(\rho^2)$  protsessis  $\rho \rightarrow 0$ , kus  $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2} = d(P, P_0)$ . Tähistame

$$a_{ij} := f''_{x_i x_j}(P_0), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

ja  $h_i := \frac{\Delta x_i}{\rho}$ ,  $i = 1, \dots, m$  (märgime, et  $h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1$ ); siis

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= \frac{1}{2} d^2 u(P_0) + \alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m f''_{x_i x_j}(P_0) \Delta x_i \Delta x_j + \alpha \\ &= \frac{\rho^2}{2} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

(a). Eeldame, et funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  (s.t ruutvorm (1.2)) on positiivselt määratud ruutvorm. Siis

$$\Phi(h_1, \dots, h_m) := \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h_i h_j > 0, \quad \text{kui} \quad h_1^2 + \dots + h_m^2 \neq 0.$$

Funktsioon  $\Phi = \Phi(h_1, \dots, h_m)$  on pidev tõkestatud kinnises hulgas

$$S := \{(h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m : h_1^2 + \dots + h_m^2 = 1\},$$

järelikult Weierstrassi teise teoreemi I.4.8 põhjal leidub punkt  $(h_1^0, \dots, h_m^0) \in S$ , milles see funktsioon  $\Phi$  saavutab oma miinimumi hulgas  $S$ . Seejuures

$$\mu := \min_{(h_1, \dots, h_m) \in S} \Phi(h_1, \dots, h_m) = \Phi(h_1^0, \dots, h_m^0) > 0.$$

Mis tahes  $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$  korral (mille puhul  $0 < \rho < \delta$ )

$$f(P) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h_i h_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) \geq \frac{\rho^2}{2} \left( \mu - \frac{2|\alpha|}{\rho^2} \right).$$

Seega, valides reaalarvu  $\varepsilon$  nii, et  $0 < \varepsilon < \delta$  ja

$$0 < \rho < \varepsilon \implies \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{\mu}{4},$$

saame mis tahes  $P \in U_\varepsilon(P_0) \setminus \{P_0\}$  korral (sel juhul  $\rho = d(P, P_0) < \varepsilon$ )

$$f(P) - f(P_0) \geq \frac{\rho^2}{2} \left( \mu - \frac{2|\alpha|}{\rho^2} \right) > \frac{\rho^2}{2} \left( \mu - \frac{\mu}{2} \right) = \frac{\mu \rho^2}{4} > 0,$$

järelikult funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne miinimum.

Väite (b) tõestus on analoogiline väite (a) tõestusega.

(c). Eeldame nüüd, et hessiaan (1.2) on määramata ruutvorm, s.t. leiduvad reaalarvud  $h'_1, \dots, h'_m$  ja  $h''_1, \dots, h''_m$  nii, et

$$q' := \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h'_i h'_j > 0 \quad \text{ja} \quad q'' := \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h''_i h''_j < 0.$$

Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $h_1'^2 + \dots + h_m'^2 = 1$  ja  $h_1''^2 + \dots + h_m''^2 = 1$  (PÕHJENDADA!). Tähistame iga reaalarvu  $\rho > 0$  korral

$$P'_\rho := (x_1^0 + \rho h'_1, \dots, x_m^0 + \rho h'_m) \quad \text{ja} \quad P''_\rho := (x_1^0 + \rho h''_1, \dots, x_m^0 + \rho h''_m).$$

Kui  $\rho < \delta$ , siis  $P'_\rho, P''_\rho \in \mathcal{U}$  (sest  $d(P'_\rho, P_0) = d(P''_\rho, P_0) = \rho$ ) ning valemi (1.3) põhjal

**NB!** Kas Weierstrassi teoreemidele ikka viidatakse kui "esimesele" ja "teisele"? Jah, nii  $[\Phi]$  kui ka  $[\Pi]$  teevad nii!

**NB!** Lihtsam on järeldada väide (b) väitest (a): kui funktsiooni  $f$  hessiaan punktis  $P_0$  on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsiooni  $-f$  hessiaan selles punktis on positiivselt määratud ruutvorm, seega väite (a) põhjal on funktsioonil  $-f$  selles punktis range lokaalne maksimum ning järelikult funktsioonil  $f$  on selles punktis range lokaalne miinimum.

(võttes tõestuse alguse arutelus vastavalt  $\Delta x_i = \rho h'_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $\Delta x_i = \rho h''_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ )

$$f(P'_\rho) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h'_i h'_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2}{2} \left( q' + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) \geq \frac{\rho^2}{2} \left( q' - \frac{2|\alpha|}{\rho^2} \right),$$

$$f(P''_\rho) - f(P_0) = \frac{\rho^2}{2} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} h''_i h''_j + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right) = \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{2\alpha}{\rho^2} - |q''| \right) \leq \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{2|\alpha|}{\rho^2} - |q''| \right)$$

(PÕHJENDADA!). Valides reaalarvu  $\varepsilon$  nii, et  $0 < \varepsilon < \delta$  ja (kasutades tähistust  $\rho := \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ )

$$0 < \rho < \varepsilon \implies \frac{|\alpha|}{\rho^2} < \frac{1}{4} \min\{q', |q''|\},$$

saame mis tahes positiivse reaalarvu  $\rho < \varepsilon$  korral

$$f(P'_\rho) - f(P_0) > \frac{\rho^2}{2} \left( q' - \frac{q'}{2} \right) = \frac{\rho^2 q'}{4} > 0$$

ja

$$f(P''_\rho) - f(P_0) < \frac{\rho^2}{2} \left( \frac{|q''|}{2} - |q''| \right) = -\frac{\rho^2 |q''|}{4} < 0,$$

seega funktsioonil  $f$  ei ole punktis  $P_0$  lokaalset ekstreemumit (PÕHJENDADA!).  $\square$

Järgnev teoreem on vahetu järeldus teoreemidest 1.2 (s.t. Sylvesteri tunnusest) ja 1.3.

**Teoreem 1.4.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^m$ . Tähistame

$$a_{ij} := f''_{x_i x_j}(P_0), \quad i, j = 1, \dots, m,$$

ja

$$A_1 := a_{11}, \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad A_m := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

(a) Kui kõik miinorid  $A_1, \dots, A_m$  on positiivsed, s.t. kui

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad A_m > 0,$$

siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne miinimum.

(b) Kui miinorite  $A_1, \dots, A_m$  märgid vahelduvad, kusjuures  $A_1$  on negatiivne, s.t. kui

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \dots,$$

siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne maksimum.

### 1.2.3. Kahe muutuja funktsiooni juht

**Teoreem 1.5.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x, y)$  kaks korda diferentseeruv oma statsionaarses punktis  $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Tähistame

$$a_{11} := f''_{xx}(P_0), \quad a_{22} := f''_{yy}(P_0), \quad a_{12} := a_{21} := f''_{xy}(P_0) = f''_{yx}(P_0)$$

ning

$$A_1 := a_{11} \quad \text{ja} \quad A_2 := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2.$$

- (a) Kui  $A_1 > 0$  ja  $A_2 > 0$ , siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne miinimum.
- (b) Kui  $A_1 < 0$  ja  $A_2 > 0$ , siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range lokaalne maksimum.
- (c) Kui  $A_2 < 0$ , siis funktsioonil  $f$  ei ole punktis  $P_0$  lokaalset ekstreemumit.

TÕESTUS. (a) ja (b) järelduvad vahetult teoreemi 1.4 vastavatest väidetest.

(c). Olgu  $A_2 < 0$ . Lokaalse ekstreemumi puudumiseks punktis  $P_0$  piisab teoreemi 1.3, (c), põhjal näidata, et hessiaan

$$a_{11} z_1^2 + 2a_{12} z_1 z_2 + a_{22} z_2^2 =: \Phi(z_1, z_2)$$

on määramata ruutvorm (muutujate  $z_1$  ja  $z_2$  suhtes).

Vaatleme kõigepealt juhtu, kus  $a_{11} \neq 0$ . Sel juhul, kui võtta  $z_1 = 1$  ja  $z_2 = 0$ , siis  $\text{sgn } \Phi(z_1, z_2) = \text{sgn } a_{11}$ . Teiselt poolt, kui võtta  $z_1 = a_{12}$  ja  $z_2 = -a_{11}$ , siis

$$\Phi(z_1, z_2) = a_{11} a_{12}^2 - 2a_{11} a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{22} = a_{11}(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) = a_{11} A_2$$

ning seega  $\text{sgn } \Phi(z_1, z_2) = -\text{sgn } a_{11}$ . Niisiis,  $\Phi(z_1, z_2)$  on määramata ruutvorm.

Nüüd eeldame, et  $a_{11} = 0$ . Paneme tähele, et  $a_{12} \neq 0$  (sest vastasel juhul oleks  $A_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ). Kui  $z_2 \neq 0$ , siis

$$\Phi(z_1, z_2) = 2a_{12} z_1 z_2 + a_{22} z_2^2 = z_2^2 \left( 2a_{12} \frac{z_1}{z_2} + a_{22} \right).$$

Kui lisaks  $z_1 \neq 0$ , siis “piisavalt väikeste” positiivsete muutuja  $z_2$  väärtuste korral on avaldise  $\Phi(z_1, z_2)$  väärtusel sama märk, mis korrutisel  $2a_{12} z_1$  (PÕHJENDADA!), järelikult see avaldis omandab nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi ehk, teisisõnu, hessiaan  $\Phi(z_1, z_2)$  on määramata ruutvorm.  $\square$

**Näide 1.2.** Leiame funktsiooni  $z = x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2$  lokaalsed ekstreemumid.

Teoreemi 1.1 põhjal saab funktsioonil lokaalne ekstreemum esineda ainult tema kriitilistes punktides. Leiame funktsiooni  $z$  osatuletised:

$$\begin{aligned} z'_x &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2)'_x = 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy, \\ z'_y &= (x^4 + x^3 - 3x - 2x^2y + y^2)'_y = -2x^2 + 2y; \end{aligned}$$

seega funktsiooni  $z$  statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy = 0, \\ -2x^2 + 2y = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi teisest võrrandist tundmatu  $y$  väärtuse  $y = x^2$  esimesse võrrandisse, saame, et  $3x^2 = 3$  ehk  $x^2 = 1$ , millest  $x = -1$  või  $x = 1$ . Selle süsteemi lahendid (ja ühtlasi funktsiooni  $z$  statsionaarsed punktid ning funktsiooni  $z$  diferentseeruvuse tõttu ainsad selle funktsiooni kriitilised punktid) on  $(-1, 1)$  ja  $(1, 1)$ .

Leiame funktsiooni  $z$  teist järku osatuletised:

$$\begin{aligned} z''_{x^2} &= (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_x = 12x^2 + 6x - 4y, \\ z''_{xy} &= z''_{yx} = (4x^3 + 3x^2 - 3 - 4xy)'_y = -4x, \\ z''_{y^2} &= (-2x^2 + 2y)'_y = 2 \end{aligned}$$

ning tähistame

$$A_1 := z''_{x^2} = 12x^2 + 6x - 4y, \quad A_2 := \begin{vmatrix} z''_{x^2} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 + 6x - 4y & -4x \\ -4x & 2 \end{vmatrix}.$$

Statsionaarses punktis  $(-1, 1)$

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0,$$

seega (teoreemi 1.5, (c), põhjal) funktsioonil  $z$  ei ole punktis  $(-1, 1)$  lokaalset ekstreemumit.

Statsionaarses punktis  $(1, 1)$

$$A_1 = 14 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

seega (teoreemi 1.5, (a), põhjal) funktsioonil  $z$  on punktis  $(1, 1)$  range lokaalne miinimum  $z(1, 1) = -2$ .

## § 2. Mitme muutuja funktsiooni globaalsed ekstreemumid

**NB!** Kas siin tuleks öelda, et  $\mathcal{D}$  on funktsiooni  $f$  määramispiirkonna alamhulk? (Sest tegelikult me peame siin silmas just nimelt seda.)

Olgu funktsioon  $f$  määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ .

**Definitsioon 2.1.** Funktsiooni  $f$

- suurimat väärtust hulgas  $\mathcal{D}$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *globaalseks maksimumiks* (hulgas  $\mathcal{D}$ );
- vähimat väärtust hulgas  $\mathcal{D}$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *globaalseks miinimumiks* (hulgas  $\mathcal{D}$ ).

Teisisõnu, funktsiooni  $f$  globaalne maksimum ja globaalne miinimum hulgas  $\mathcal{D}$  on vastavalt väärtused  $\max_{P \in \mathcal{D}} f(P)$  ja  $\min_{P \in \mathcal{D}} f(P)$ .

Globaalset maksimumi ja globaalset miinimumi nimetatakse ühise nimetusega *globaalsed ekstreemumid*.

Pole raske tuua näiteid (isegi pidevate ühe muutuja funktsioonide kohta), kus funktsioonil puuduvad (tema määramispiirkonna mingis alamhulgas) globaalsed ekstreemumid. Teiselt poolt, Weierstrassi teisest teoreemist I.4.8 järeldub, et *tõkestatud kinnises hulgas pideval funktsioonil eksisteerivad selles hulgas globaalsed ekstreemumid*.

Kui funktsioonil  $f$  eksisteerib tema määramispiirkonna alamhulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  mingi globaalne ekstreemum, siis see globaalne ekstreemum võib olla hulga  $\mathcal{D}$  sisepunktis või hulga  $\mathcal{D}$  rajapunktis; seejuures, kui see globaalne ekstreemum saavutatakse hulga  $\mathcal{D}$  sisepunktis, siis selles punktis on funktsioonil  $f$  ka vastav lokaalne ekstreemum, järelikult see punkt on funktsiooni  $f$  kriitiline punkt. Seega, kui me teame, et funktsioonil  $f$  eksisteerivad tema määramispiirkonna alamhulgas  $\mathcal{D}$  globaalsed ekstreemumid, siis nende globaalsete ekstreemumite leidmiseks võime kasutada järgmist eeskirja:

**NB!** Eelnevalt defineeritu põhjal on funktsiooni kriitilised punktid tema määramispiirkonna sisepunktid.

- (1) leiame funktsiooni  $f$  väärtused tema kriitilistes punktides (hulga  $\mathcal{D}$  sisemuses);
- (2) leiame funktsiooni  $f$  väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides hulga  $\mathcal{D}$  rajal;
- (3) neist leitud väärtustest suurim on funktsiooni  $f$  globaalne maksimum hulgas  $\mathcal{D}$  ning vähim on funktsiooni  $f$  globaalne miinimum hulgas  $\mathcal{D}$ .

**NB!** Kas on arusaadav, mis on võimalikud ekstreemumpunktid?

**Näide 2.1.** Leiame funktsiooni  $z = x^3 + y^3 - 3xy$  suurima ja vähima väärtuse ristkülikus

$$\mathcal{D} := [0, 2] \times [-1, 2] := \{(x, y) : x \in [0, 2], y \in [-1, 2]\}.$$

Kõigepealt märgime, et kuna funktsioon  $z$  on pidev ning hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine ja tõkestatud, siis Weierstrassi **teise** teoreemi I.4.8 põhjal eksisteerivad funktsioonil  $f$  hulgas  $\mathcal{D}$  globaalsed ekstreemumid.

Leiame funktsiooni  $z$  kriitilised punktid hulga  $\mathcal{D}$  sisemuses  $\mathcal{D}^\circ$ . Kuna funktsioon  $z$  on diferentseeruv kogu tasandil  $\mathbb{R}^2$ , siis tema ainsad kriitilised punktid on statsionaarsed punktid. Leiame funktsiooni  $z$  osatuletised:

$$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x;$$

seega funktsiooni  $z$  statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Asendades selle süsteemi esimesest võrrandist tundmatu  $y$  väärtuse  $y = x^2$  teise võrrandisse, saame, et  $x^4 - x = 0$  ehk  $x(x^3 - 1) = 0$ , millest  $x = 0$  või  $x = 1$ . Selle süsteemi lahendid on seega  $(0, 0)$  ja  $(1, 1)$ . Kuna  $(0, 0) \notin \mathcal{D}^\circ$ , siis funktsiooni  $z$  ainus statsionaarne (ning seega ka ainus kriitiline) punkt hulga  $\mathcal{D}$  sisemuses  $\mathcal{D}^\circ$  on  $(1, 1)$ ; seejuures

$$z(1, 1) = -1.$$

Hulga  $\mathcal{D}$  rajajoon  $\partial\mathcal{D}$  esitub ühendina

$$\partial\mathcal{D} = \{(0, -1), (2, -1), (2, 2), (0, 2)\} \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4,$$

kus

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{(x, y) : x \in (0, 2), y = -1\}, & L_2 &:= \{(x, y) : x = 2, y \in (-1, 2)\}, \\ L_3 &:= \{(x, y) : x \in (0, 2), y = 2\}, & L_4 &:= \{(x, y) : x = 0, y \in (-1, 2)\}. \end{aligned}$$

Rajajoone osal  $L_1$  omandab funktsioon  $z$  kuju

$$z = x^3 - 1 + 3x =: f_1(x), \quad x \in (0, 2).$$

Kui funktsioonil  $z$  oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa  $L_1$  punktis  $(x, y)$ , siis funktsioonil  $f_1$  oleks punktis  $x$  lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni  $f_1$  diferentseeruvuse tõttu peaks  $x$  olema funktsiooni  $f_1$  statsionaarne punkt, s.t.  $f'_1(x) = 0$ . Leiame funktsiooni  $f_1$  tuletise:

$$f'_1(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Näeme, et tuletisel  $f'_1$  nullkohti pole, seega rajajoone osal  $L_1$  funktsioonil  $z$  globaalseid ekstreemumeid ei ole.

Rajajoone osal  $L_3$  omandab funktsioon  $z$  kuju

$$z = x^3 + 8 - 6x =: f_3(x), \quad x \in (0, 2).$$

Leiame funktsiooni  $f_3$  tuletise:

$$f'_3(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise  $f'_3$  nullkohad on  $x = -\sqrt{2}$  ja  $x = \sqrt{2}$ , kusjuures  $-\sqrt{2} \notin (0, 2)$ ; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal  $L_3$  on  $(\sqrt{2}, 2)$ ; seejuures

$$z(\sqrt{2}, 2) = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil  $z$  oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa  $L_3$  punktis  $(x, y)$ , siis funktsioonil  $f_3$  oleks punktis  $x$  lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni  $f_3$  diferentseeruvuse tõttu peaks  $x$  olema funktsiooni  $f_3$  statsionaarne punkt, s.t.  $f'_3(y) = 0$ .)

Rajajoone osal  $L_2$  omandab funktsioon  $z$  kuju

$$z = 8 + y^3 - 6y =: f_2(y), \quad y \in (-1, 2).$$

**NB!** Misasi on  
rajajoone? Siin me  
mõistame selle  
rajajoone all  
hulga  $\mathcal{D}$  raja.

Leiame funktsiooni  $f_2$  tuletise:

$$f_2'(y) = 3y^2 - 6 = 3(y^2 - 2).$$

Näeme, et tuletise  $f_2'$  nullkohad on  $y = -\sqrt{2}$  ja  $y = \sqrt{2}$ , kusjuures  $-\sqrt{2} \notin (-1, 2)$ ; seega ainus võimalik ekstreemumpunkt rajajoone osal  $L_2$  on  $(2, \sqrt{2})$ ; seejuures

$$z(2, \sqrt{2}) = 8 + 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2}.$$

(Siin jällegi, kui funktsioonil  $z$  oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa  $L_2$  punktis  $(x, y)$ , siis funktsioonil  $f_2$  oleks punktis  $y$  lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni  $f_2$  diferentseeruvuse tõttu peaks  $y$  olema funktsiooni  $f_2$  statsionaarne punkt, s.t.  $f_2'(y) = 0$ .)

Rajajoone osal  $L_4$  omandab funktsioon  $z$  kuju

$$z = y^3 =: f_4(y), \quad y \in (-1, 2).$$

Funktsioon  $f_4$  on kasvav vahemikus  $(-1, 2)$ , seega rajajoone osal  $L_4$  võimalikke ekstreemumpunkte ei ole. (Siin jällegi, kui funktsioonil  $z$  oleks globaalne ekstreemum rajajoone osa  $L_4$  punktis  $(x, y)$ , siis funktsioonil  $f_4$  oleks punktis  $y \in (-1, 2)$  lokaalne ekstreemum; kuna aga funktsioon  $f_4$  on kasvav vahemikus  $(-1, 2)$ , siis tal selles vahemikus lokaalseid ekstreemumeid ei ole, seega rajajoone osal  $L_4$  funktsioonil  $z$  globaalseid ekstreemumeid ei ole.)

Leiame funktsiooni  $z$  väärtused rajajoone  $\partial\mathcal{D}$  ülejäänud võimalikes ekstreemumpunktides:

$$z(0, -1) = -1, \quad z(2, -1) = 8 - 1 + 6 = 13, \quad z(2, 2) = 8 + 8 - 12 = 4, \quad z(0, 2) = 8.$$

Valides eelnevas leitud võimalikest ekstreemumitest suurima ja vähima, saame

$$\max_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(2, -1) = 13 \quad \text{ja} \quad \min_{P \in \mathcal{D}} z(P) = z(1, 1) = z(0, -1) = -1.$$

Mõnikord võib globaalsete ekstreemumite leidmisel olla abi järgnevast teoreemist.

**Teoreem 2.1.** Olgu funktsioon  $u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m)$  kaks korda diferentseeruv lahtise kumera hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  igas punktis ning olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$  funktsiooni  $f$  statsionaarne punkt, s.t.

$$f'_{x_1}(P_0) = \dots = f'_{x_m}(P_0) = 0. \quad (2.1)$$

- (a) Kui iga punkti  $Q \in \mathcal{D}$  korral hessiaan  $d^2f(Q)$  on positiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range globaalne miinimum (s.t.  $f(P) > f(P_0)$  iga  $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$  korral).
- (b) Kui iga punkti  $Q \in \mathcal{D}$  korral hessiaan  $d^2f(Q)$  on negatiivselt määratud ruutvorm, siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range globaalne maksimum (s.t.  $f(P) < f(P_0)$  iga  $P \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$  korral).

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS, MIS TOETUB TAYLORI VALEMILE. (a). Eeldame, et iga  $Q \in \mathcal{D}$  korral teist järku täisdiferentsiaal  $d^2f(Q)$  on positiivselt määratud ruutvorm (argumentide diferentsiaalide  $dx_1, \dots, dx_m$  suhtes). Tayloriga valemil põhjal jääkliikme-ga Lagrange'i kujul (s.t. teoreemi II.4.4 põhjal) mis tahes punkti  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D} \setminus \{P_0\}$  korral

$$f(P) - f(P_0) = df(P_0) + \frac{d^2f(Q)}{2},$$

kus diferentsiaalide  $df(P_0)$  ja  $d^2f(Q)$  avaldistes  $dx_i = \Delta x_i := x_i - x_i^0$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ning  $Q$  on mingi punkt punkte  $P_0$  ja  $P$  ühendavalt sirglõigult. Kuna  $P_0$  on funktsiooni  $f$  statsionaarne punkt, siis

$$df(P_0) = f'_{x_1}(P_0) \Delta x_1 + \dots + f'_{x_m}(P_0) \Delta x_m = 0 \Delta x_1 + \dots + 0 \Delta x_m = 0;$$

kuna tehtud eelduse põhjal on  $d^2f(Q)$  positiivselt määratud ruutvorm, siis  $d^2f(Q) > 0$ ; seega  $f(P) - f(P_0) = \frac{d^2f(Q)}{2} > 0$ , järelikult  $f(P) > f(P_0)$ ; niisiis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  range globaalne miinimum. Teoreemi väide (a) on tõestatud.

Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

□

## § 3. Tinglikud ekstreemumid

Kõikjal selles paragrahvis eeldame, et  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m > n$ , ning et funktsioonid

$$u = f(P) = f(x_1, \dots, x_m) \quad (3.1)$$

ja

$$u_j = F_j(P) = F_j(x_1, \dots, x_m), \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

on määratud hulgas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ .

### 3.1. Tingliku lokaalse ekstreemumi mõiste

Olgu  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{D}$  hulga  $\mathcal{D}$  sisepunkt.

**Definitsioon 3.1.** (a) Öeldakse, et funktsioonil (3.1) on punktis  $P_0$  *tinglik lokaalne maksimum lisatingimus(t)el*

$$F_1(P) = F_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad \dots, \quad F_n(P) = F_n(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (3.3)$$

kui

$$F_1(P_0) = 0, \quad \dots, \quad F_n(P_0) = 0 \quad (3.4)$$

ning punktil  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$  nii, et iga punkti  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$  korral, mis rahuldab tingimust (3.3), kehtib võrratus

$$f(P_0) \geq f(P).$$

Punkti  $P_0$  nimetatakse seejuures (funktsiooni  $f$ ) *tinglikuks lokaalseks maksimum-punktiks* (lisatingimus(t)el (3.3)).

(b) Öeldakse, et funktsioonil (3.1) on punktis  $P_0$  *tinglik lokaalne miinimum lisatingimus(t)el* (3.3), kui punkt  $P_0$  rahuldab tingimust (3.4) ning punktil  $P_0$  leidub ümbrus  $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$  nii, et iga punkti  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{U}$  korral, mis rahuldab tingimust (3.3), kehtib võrratus

$$f(P_0) \leq f(P).$$

Punkti  $P_0$  nimetatakse seejuures (funktsiooni  $f$ ) *tinglikuks lokaalseks miinimum-punktiks* (lisatingimus(t)el (3.3)).

Tinglikku lokaalset maksimumi ja tinglikku lokaalset miinimumi nimetatakse *tinglikeks lokaalseteks ekstreemumiteks*.

Järgnevas kahes jaotises uurime, kuidas leida funktsiooni  $f$  tinglikke lokaalseid ekstreemume.

### 3.2. Taandamine harilikule ekstreemumile

Kõikjal selles jaotises eeldame, et leidub lahtine risttahukas

$$\mathcal{R} := I_1 \times \cdots \times I_m \subset \mathcal{D}$$

(siin  $I_1, \dots, I_m \subset \mathbb{R}$  on mingid lahtised intervallid), milles võrrandid (3.3) määravad mingid  $n$  muutujat muutujatest  $x_1, \dots, x_m$  ülejäänud  $m - n$  muutuja (üheste) pidevate funktsioonidena. Konkreetseuse mõttes eeldame, et need  $n$  muutujat on  $x_{m-n+1}, \dots, x_m$ . Niisiis, risttahukas  $\mathcal{R}$  esitavad võrrandid (3.3) muutujad  $x_{m-n+1}, \dots, x_m$  muutujate  $x_1, \dots, x_{m-n}$  (üheste) pidevate funktsioonidena:

$$x_j = x_j(x_1, \dots, x_{m-n}), \quad j = m - n + 1, \dots, m. \quad (3.5)$$

Rõhutame, et funktsioonide (3.5) määramispiirkond on risttahukas

$$\mathcal{W} := I_1 \times \cdots \times I_{m-n}. \quad (3.6)$$

Defineerime ( $m - n$  muutuja) funktsiooni  $h: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega

$$h(x_1, \dots, x_{m-n}) = f(x_1, \dots, x_{m-n}, x_{m-n+1}(x_1, \dots, x_{m-n}), \dots, x_m(x_1, \dots, x_{m-n})). \quad (3.7)$$

Paneme tähele, et nende punktide  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{R}$  korral, mis rahuldavad tingimust (3.3), kehtivad võrdused (3.5) (PÕHJENDADA!) ning seega, tähistades  $A := (x_1, \dots, x_{m-n})$ ,

$$\begin{aligned} f(P) &= f(x_1, \dots, x_m) \\ &= f(x_1, \dots, x_{m-n}, x_{m-n+1}(x_1, \dots, x_{m-n}), \dots, x_m(x_1, \dots, x_{m-n})) \\ &= h(x_1, \dots, x_{m-n}) = h(A). \end{aligned}$$

**Lause 3.1.** *Rahuldagu punkt  $P_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathcal{R}$  tingimust (3.4). Siis funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  tinglik lokaalne ekstreemum lisatingimus(t)el (3.3) parajasti siis, kui funktsioonil  $h$  on punktis  $A_0 := (x_1^0, \dots, x_{m-n}^0)$  vastav “harilik” lokaalne ekstreemum.*

**TÕESTUS.** Tõestame lause ainult lokaalse maksimumi juhtude jaoks. Lokaalse miinimumi juhtudel on tõestus analoogiline.

**Tarvilikkus.** Olgu funktsioonil  $f$  punktis  $P_0$  tinglik lokaalne maksimum lisatingimus(t)el (3.3). Siis leidub punkti  $P_0$  kuubikujuline ümbrus  $\mathcal{C}$  nii, et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$  ning iga punkti  $P \in \mathcal{C}$  korral, mis rahuldab tingimust (3.3), kehtib võrratus  $f(P) \leq f(P_0)$  (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE KUUBIKUJULINE ÜMBRUS LEIDUB!). Olgu positiivne reaalarv  $\delta$  selline, et

$$\mathcal{C} = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_m^0 - \delta, x_m^0 + \delta).$$

Kuna funktsioonid (3.5) on pidevad punktis  $A_0$ , siis leidub selle punkti ümbrus  $\mathcal{W}_0$  (ruumis  $\mathbb{R}^{m-n}$ ) nii, et  $\mathcal{W}_0 \subset (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \cdots \times (x_{m-n}^0 - \delta, x_{m-n}^0 + \delta)$  ning iga  $j \in \{m - n + 1, \dots, m\}$  korral

$$x_j(A) \in (x_j^0 - \delta, x_j^0 + \delta) \quad \text{iga } A \in \mathcal{W}_0 \text{ korral}$$

(siin me arvestasime, et iga  $j \in \{m - n + 1, \dots, m\}$  korral  $x_j(A_0) = x_j^0$  (PÕHJENDADA!)) (PÕHJENDADA, MIKS PUNKTIL  $A_0$  LEIDUB SELLINE ÜMBRUS  $\mathcal{W}_0$ !). Nüüd mis tahes punkti  $A = (x_1, \dots, x_{m-n}) \in \mathcal{W}_0$  korral

$$P := (x_1, \dots, x_{m-n}, x_{m-n+1}(x_1, \dots, x_{m-n}), \dots, x_m(x_1, \dots, x_{m-n})) \in \mathcal{C}$$

(PÕHJENDADA!), niisiis (arvestades, et selline punkt  $P$  rahuldab tingimust (3.3))

$$h(A) = f(P) \leq f(P_0) = h(A_0) \quad (\text{PÕHJENDADA!}).$$

Kuna  $\mathcal{W}_0$  on punkti  $A_0$  ümbrus, siis järeldub siit, et funktsioonil  $h$  on punktis  $A_0$  lokaalne maksimum.

*Piisavus.* Olgu funktsioonil  $h$  punktis  $A_0$  lokaalne maksimum. Siis leidub punkti  $A_0$  kuubikujuline ümbrus  $\mathcal{W}_0$  nii, et  $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$  ning iga punkti  $A \in \mathcal{W}_0$  korral  $h(A) \leq h(A_0)$  (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE KUUBIKUJULINE ÜMBRUS LEIDUB!). Olgu positiivne reaalarv  $\delta$  selline, et

$$\mathcal{W}_0 = (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_{m-n}^0 - \delta, x_{m-n}^0 + \delta).$$

Tähistame

$$\mathcal{C} := (x_1^0 - \delta, x_1^0 + \delta) \times \dots \times (x_{m-n}^0 - \delta, x_{m-n}^0 + \delta) \times I_{m-n+1} \times \dots \times I_m;$$

siis  $\mathcal{C}$  on punkti  $P_0$  ümbrus, kusjuures iga punkti  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{C}$  korral, mis rahuldab tingimust (3.3), kehtivad võrdused (3.5) (vt. lausele 3.1 eelnevat lõiku) ning seega, tähistades  $A := (x_1, \dots, x_{m-n})$ ,

$$f(P) = h(A) \leq h(A_0) = f(P_0) \quad (\text{PÕHJENDADA!}).$$

Eelnevast järeldub, et funktsioonil  $f$  on punktis  $P_0$  tinglik lokaalne maksimum lisatingimus(t)el (3.3) (PÕHJENDADA!).  $\square$

BLA-BLA-BLA...

Kirjeldatud “harilikule lokaalsele ekstreemumile taandamise meetodil” tingliku ekstreemumi leidmiseks on üks oluline puudus: muutujate  $x_1, \dots, x_m$  seast  $n$  muutuja avaldamine ülejäänud  $m - n$  muutuja kaudu võrranditest (3.3) (seda on vaja funktsiooni (3.7) esitamiseks) võib konkreetsetel juhtudel osutuda ülejõu käivaks ülesandeks. Lisaks juhime tähelepanu ühele veealusele karile: BLA-BLA-BLA...



Järgnev teoreem annab tarviliku tingimuse funktsiooni (3.1) tingliku lokaalse ekstreemumi olemasoluks lisatingimustel (3.3) (seda eeldusel (#)).

**Teoreem 3.2.** *Funktsioonil (3.1) saab tinglik lokaalne ekstreemum (lisatingimustel (3.3)) esineda ainult tema tinglikes statsionaarsetes punktides (lisatingimuste (3.3) suhtes).*

TÕESTUS. KÄESOLEVAS KURSUSES ME SEDA TEOREEMI EI TÕESTA. □

**Märkus 3.1.** Üldiselt, funktsiooni  $f$  tinglikke statsionaarseid punkte (lisatingimuste (3.3) suhtes) ning tingimust (3.3) rahuldavaid punkte  $P \in \mathcal{D}$ , mille igas ümbruses funktsioonide (3.1) või (3.2) mingi osatuletis pole pidev või siis maatriksi (3.8) kõik  $n$ -ndat järku miinorid on nullid, nimetame funktsiooni  $f$  *tinglikeks kriitilisteks punktideks* (lisatingimuste (3.3) suhtes). (Teisisõnu, funktsiooni  $f$  tinglikud kriitilised punktid on tema tinglikud statsionaarsed punktid ning tingimust (3.3) rahuldavad punktid  $P \in \mathcal{D}$ , milles vähemalt üks käesoleva jaotise esimes lõigus toodud eeldustest on rikutud.)

Eelnevast järeldub, et (loobudes käesoleva jaotise esimeses lõigus toodud eeldustest) *funktsioonil (3.1) saab tinglik lokaalne ekstreemum (lisatingimustel (3.3)) esineda ainult tema tinglikes kriitilistetes punktides (lisatingimuste (3.3) suhtes).*

Järgnev teoreem annab piisava tingimuse funktsiooni  $f$  tingliku lokaalse ekstreemumi olemasoluks tema tinglikus statsionaarses punktis.

**Teoreem 3.3.** *Olgu  $P_0$  funktsiooni (3.1) tinglik statsionaarne punkt (lisatingimuste (3.3) suhtes) ning olgu  $\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0$  punktile  $P_0$  vastavad Lagrange'i kordajad. Kui Lagrange'i funktsioonil (3.9) on kordajate  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  väärtuste*

$$\lambda_1 = \lambda_1^0, \quad \dots, \quad \lambda_n = \lambda_n^0 \quad (3.11)$$

*korral punktis  $P_0$  range lokaalne ekstreemum (siin me tõlgendame Lagrange funktsiooni (3.9) kui  $m$  muutuja  $x_1, \dots, x_m$  funktsiooni; argumentide  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  väärtused (3.11) on fikseeritud), siis funktsioonil (3.1) on punktis  $P_0$  vastav tinglik lokaalne ekstreemum (lisatingimustel (3.3)).*

TÕESTUS. KÄESOLEVAS KURSUSES ME SEDA TEOREEMI EI TÕESTA. □

V peatükk.

## Kordsed integraalid

### § 1. Kahekordne integraal üle ristküliku

#### 1.1. Riemanni integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Jaotame lõigud  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  omakorda mingiteks  $m$  ja  $n$  osalõiguks

$$[x_0, x_1], \dots, [x_{m-1}, x_m] \quad \text{ja} \quad [y_0, y_1], \dots, [y_{n-1}, y_n], \quad (1.1)$$

kus  $m, n \in \mathbb{N}$  ning

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d. \quad (1.2)$$

Siis ristkülik  $\mathcal{D}$  jaotub  $mn$  ristkülikuks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (1.3)$$

(vt. joonist 1.1). Ristküliku  $\mathcal{D}$  *jaotusviisi* ristkülikuteks (1.3) tähistame tähega  $T$ . Punktidele (1.2) viitame järgnevas kui *jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele* ning lõikudele (1.1) kui *jaotusviisi  $T$  määravatele lõikudele*.

Kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t.  $\Delta x_i$  ja  $\Delta y_j$  on osaristküliku  $\mathcal{D}_{ij}$  külgede pikkused, ning

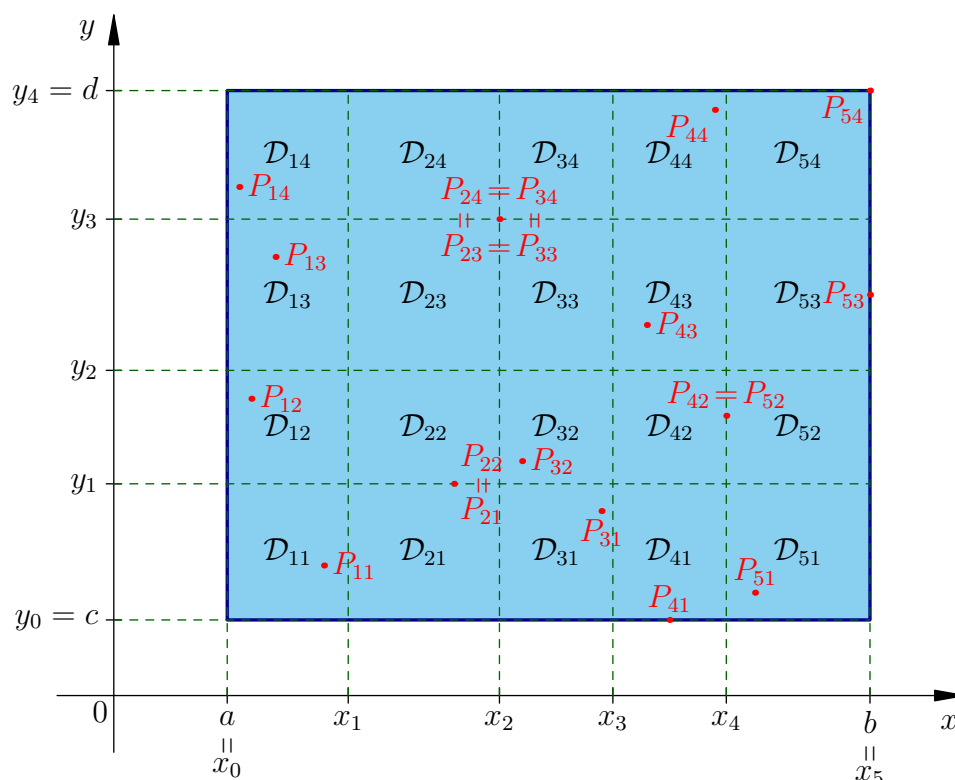
$$\Delta(T) := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\},$$

s.t.  $\Delta(T)$  on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11}, \dots, P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n}, \dots, P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1}, \dots, P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn}, \quad (1.4)$$

s.t. kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral valime mingi punkti  $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$  (vt. joonist 1.1).



JOONIS 1.1. Sellel joonisel  $m = 5$  ja  $n = 4$ . Märgime, et üldjuhul ei tarvitse ristkülik  $\mathcal{D}$  paikneda koordinaattasandi esimeses veerandis (meie paigutasime oma joonisel – ja paigutame ka paljudel järgnevatel joonistel – ristküliku  $\mathcal{D}$  koordinaattasandi esimesse veerandisse seepärast, et kui mingi koordinaattelgedest lõikaks seda ristkülikut, siis muutuks see joonis oluliselt ebaselgemaks).

### Definitsioon 1.1. Summat

$$\begin{aligned}\sigma &:= \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{mn}) := \sigma_f(T, (P_{ij})_{i,j=1}^{m,n}) \\ &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j\end{aligned}$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  *integraalsummaks* ehk *Riemanni summaks*, mis vastab ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisile  $T$  ja punktide valikule (1.4).

Juhime tähelepanu, et korrutis  $\Delta x_i \Delta y_j$  Riemanni summa definitsioonis on ristküliku  $\mathcal{D}_{ij}$  pindala.

**Definitsioon 1.2.** Arvu  $I \in \mathbb{R}$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ) ja kirjutatakse

$$\lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sigma = I \quad \text{või lihtsalt} \quad \lim \sigma_f = I \quad \text{või} \quad \lim \sigma = I,$$

kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni  $f$  integraalsumma  $\sigma$  korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad \implies \quad |\sigma - I| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui  $\delta$ , erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni  $f$  integraalsummad arvust  $I$  vähem kui  $\varepsilon$  (sõltumata punktide valikust (1.4) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

**Definitsioon 1.3.** Kui funktsiooni  $f$  integraalsummadel on olemas piirväärtus ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on *Riemanni mõttes integreeruv* (ehk lihtsalt *integreeruv*) ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures tema integraalsummade piirväärtust

$$\lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sigma =: R\text{-} \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy =: \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

nimetatakse (*kahekordseks*) *Riemanni integraaliks* (ehk lihtsalt (*kahekordseks*) *integraaliks*) funktsioonist  $f$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$ .

**Märkus 1.1.** Sageli esitatakse integraalsummade piirväärtuse definitsioon (ehk siis sisuliselt Riemanni integraali definitsioon) definitsioonist 1.2 mõnevõrra erineval, kuid sellega siiski samaväärsel moel. See “erinev” definitsioon kasutab hulga diameetri mõistet.

**Definitsioon 1.4.** Olgu  $m \in \mathbb{N}$  ning olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$  tõkestatud hulk. Hulga  $\mathcal{D}$  *diameetrik*s nimetatakse selle hulga punktide vaheliste kauguste hulga ülemist raja.

Hulga  $\mathcal{D}$  diameetrit tähistatakse sümboliga  $\text{diam } \mathcal{D}$ ; niisiis vastavalt definitsioonile

$$\text{diam } \mathcal{D} = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}} d(P, Q).$$

Esitame nüüd selle “definitsioonist 1.2 mõnevõrra erineva” integraalsummade piirväärtuse definitsiooni. Jaotusviisi  $T$  ristkülikute maksimaalse diameetri tähistame sümboliga  $d(T)$ .

**Definitsioon 1.5.** Arvu  $I \in \mathbb{R}$  nimetatakse funktsiooni  $f$  *integraalsummade piirväärtuseks* (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ), kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni  $f$  integraalsumma  $\sigma$  korral)

$$d(T) < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon,$$

s.t. ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral, mille osaristkülikute maksimaalne diameeter on väiksem kui  $\delta$ , erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni  $f$  integraalsummad arvust  $I$  vähem kui  $\varepsilon$  (sõltumata punktide valikust (1.4) selle jaotusviisi osaristkülikutest).

Pole raske näha, et definitsioonid 1.2 ja 1.5 on samaväärsed (s.t. arv  $I$  on funktsiooni  $f$  integraalsummade piirväärtus neist definitsioonidest ühe järgi parajasti siis, kui ta on seda teise definitsiooni järgi).

**Ülesanne 1.1.** Tõestada, et definitsioonid 1.2 ja 1.5 on samaväärsed.

**NÄPUNÄIDE.** Panna tähele, et ristküliku diameeter on selle ristküliku diagonaali pikkus.

**Näide 1.1.** Ristkülikus  $\mathcal{D}$  määratud konstantne kahe muutuja funktsioon  $f(x, y) = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) on integreeruv selles ristkülikus, kusjuures

$$\iint_{\mathcal{D}} \alpha dx dy = \alpha (b - a) (d - c) = \alpha S_{\mathcal{D}} \quad (1.5)$$

(sümbol  $S_{\mathcal{D}}$  tähistab ristküliku  $\mathcal{D}$  pindala).

Tõepoolest, konstantse funktsiooni  $f(x, y) = \alpha$  mis tahes integraalsumma

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha \Delta x_i \Delta y_j = \alpha \sum_{i=1}^m \Delta x_i \sum_{j=1}^n \Delta y_j \\ &= \alpha \sum_{i=1}^m \Delta x_i (d - c) = \alpha (d - c) \sum_{i=1}^m \Delta x_i = \alpha (d - c) (b - a) = \alpha S_{\mathcal{D}},\end{aligned}$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on  $\alpha S_{\mathcal{D}}$ , s.t. kehtib (1.5).

Järgnev teoreem ütleb, et *antud ristkülikus Riemanni mõttes integreeruv funktsioon on tõkestatud selles ristkülikus.*

**Teoreem 1.1.** *Ristkülikus  $\mathcal{D}$  tõkestamata funktsioon ei ole Riemanni mõttes integreeruv selles ristkülikus.*

**TÕESTUS.** Olgu funktsioon  $f$  tõkestamata ristkülikus  $\mathcal{D}$  ning olgu selle ristküliku jaotusviis  $T$  määratud punktidega (1.2). Tähistame kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $\Delta_{ij} := \Delta x_i \Delta y_j$ . Veendumaks, et funktsioon  $f$  pole integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , piisab näidata, et

( $\circ$ ) iga reaalarvu  $M \geq 0$  korral leiduvad punktid (1.4) selliselt, et

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij}) \Delta_{ij} \right| > M.$$

Tõepoolest, kehtigu väide ( $\circ$ ). Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon  $f$  on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Tähistame  $I := R\text{-}\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ . Siis funktsiooni  $f$  mis tahes integraalsumma  $\sigma$  korral, mis vastab ristküliku  $\mathcal{D}$  mingile piisavalt “peenele” jaotusviisile,

$$|\sigma - I| < 1 \quad \text{ehk, teisiti öeldes,} \quad I - 1 < \sigma < I + 1$$

ning seega

$$|\sigma| < \max\{|I - 1|, |I + 1|\}.$$

Oleme saanud vastuolu väitega ( $\circ$ ).

Jääb veel tõestada väide ( $\circ$ ). Fikseerime vabalt reaalarvu  $M \geq 0$ . Kuna funktsioon  $f$  on tõkestamata ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis ta on tõkestamata mingis osaristkülikus  $\mathcal{D}_{kl}$ . Valime iga  $(i, j) \in \left( \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \right) \setminus \{(k, l)\}$  korral mingi punkti  $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$  ja tähistame

$$\alpha := \left| \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (k,l)}}^{m,n} f(P_{ij}) \Delta_{ij} \right|.$$

Siis mis tahes  $P \in \mathcal{D}_{kl}$  korral

$$\left| f(P) \Delta_{kl} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (k,l)}}^{m,n} f(P_{ij}) \Delta_{ij} \right| \geq |f(P) \Delta_{kl}| - \left| \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq (k,l)}}^{m,n} f(P_{ij}) \Delta_{ij} \right| = |f(P)| \Delta_{kl} - \alpha.$$

Järelikult, kui valida punkt  $P_{kl} \in \mathcal{D}_{kl}$  nii, et

$$|f(P_{kl})| > \frac{M + \alpha}{\Delta_{kl}}$$

(niisugune valik on võimalik, sest funktsioon  $f$  on tõkestamata osaristkülikus  $\mathcal{D}_{kl}$ ), siis

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m,n} f(P_{ij}) \Delta_{ij} \right| \geq |f(P_{kl})| \Delta_{kl} - \alpha > \frac{M + \alpha}{\Delta_{kl}} \Delta_{kl} - \alpha = M.$$

□

## 1.2. Darboux' summad. Darboux' integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  tõkestatud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d].$$

Järgides jaotise 1.1 tähistusi, tähistame tähega  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n,$$

kus  $m, n \in \mathbb{N}$  ning

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d. \quad (1.6)$$

Tähistame kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}, \quad M_{ij} := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P).$$

**Definitsioon 1.6.** Summasid

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{ja} \quad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

nimetatakse funktsiooni  $f$  Darboux' ülemsummaks ja Darboux' alamsummaks, mis vastavad ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisile  $T$ .

Kõneldes järgnevas Darboux' ülem- ja alamsummadest, mõistame me selle all funktsiooni  $f$  Darboux' summasid, mis vastavad ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisidele.

Vahetult vastavatest definitsioonidest järeldeb

**Lause 1.2.** Olgu funktsioon  $f$  tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Siis ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisile  $T$  vastavad funktsiooni  $f$  Darboux' ülemsumma  $S(T)$  ja alamsumma  $s(T)$  on sellele jaotusviisile vastavate funktsiooni  $f$  integraalsummade ülemine ja alumine raja:

$$S(T) = \sup \sigma \quad \text{ja} \quad s(T) = \inf \sigma,$$

kus supremum ja infimum võetakse üle kõikvõimalike jaotusviisile  $T$  vastavate integraalsummade  $\sigma$ , s.t. üle kõikvõimalike punktide valikute (1.4).

Tõestame mõned lihtsad Darboux' summade omadused.

**Ülesanne 1.2.** Olgu  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tõkestatud funktsioon ning olgu  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tõestada, et

- (a)  $S_{(-f)}(T) = -s_f(T)$  ja  $s_{(-f)}(T) = -S_f(T)$ ;
- (b)  $s_{\alpha f}(T) = \alpha s_f(T)$  ja  $S_{\alpha f}(T) = \alpha S_f(T)$ , kui  $\alpha \geq 0$ , ning  $s_{\alpha f}(T) = \alpha S_f(T)$  ja  $S_{\alpha f}(T) = \alpha s_f(T)$ , kui  $\alpha < 0$ ;
- (c)  $s_f(T) + s_g(T) \leq s_{f+g}(T)$  ja  $S_{f+g}(T) \leq S_f(T) + S_g(T)$ ;
- (d) kui  $f(P) \leq g(P)$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral, siis  $s_f(T) \leq s_g(T)$  ja  $S_f(T) \leq S_g(T)$ .

**Lause 1.3.** (a) Kui ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T'$  on saadud jaotusviisi  $T$  määravate lõikude (1.1) edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks, siis

$$S(T') \leq S(T) \quad \text{ja} \quad s(T') \geq s(T),$$

s.t. jaotusviisi peenendamisel Darboux' ülemsummad ei kasva ning Darboux' alamsummad ei kahane.

- (b) Ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviiside  $T$  ja  $T'$  korral

$$S(T) \geq s(T'),$$

s.t. ükski Darboux' ülemsumma pole väiksem mitte ühestki Darboux' alamsummast.

- (c) Funktsiooni  $f$  kõikvõimalike Darboux' ülemsummade hulk on alt tõkestatud ning Darboux' alamsummade hulk on ülalt tõkestatud.

**TÕESTUS.** (a). Väite tõestuseks üldisel juhul piisab tõestada väide juhu jaoks, kus jaotusviisi  $T'$  on saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.6) ühe uue punkti  $u \in [a, b]$  või  $v \in [c, d]$  lisamise teel. Oletame konkreetsuse mõttes, et jaotusviisi  $T'$  on saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.6) uue punkti  $u \in [a, b]$  lisamisel, kusjuures see uus punkt kuulub lõigu  $[a, b]$   $k$ -ndasse osalõiku:  $u \in [x_{k-1}, x_k]$ , kus  $k \in \{1, \dots, m\}$ , s.t. jaotusviisi  $T'$  on saadud jaotusviisist  $T$  ristkülikute

$$\mathcal{D}_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \dots, n,$$

asendamisel uute ristkülikutega

$$\mathcal{D}'_{kj} = [x_{k-1}, u] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}''_{kj} = [u, x_k] \times [y_{j-1}, y_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

Jaotusviisile  $T'$  vastav Darboux' ülemsumma on

$$S(T') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{j=1}^n (M'_{kj} \Delta x'_k \Delta y_j + M''_{kj} \Delta x''_k \Delta y_j), \quad (1.7)$$

kus  $\Delta x'_k := u - x_{k-1}$  ja  $\Delta x''_k := x_k - u$  ning ning iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$M'_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}'_{kj}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}''_{kj}} f(P).$$

Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral, arvestades, et  $M'_{kj} \leq M_{kj}$  ja  $M''_{kj} \leq M_{kj}$  (sest  $\mathcal{D}'_{kj} \subset \mathcal{D}_{kj}$  ja  $\mathcal{D}''_{kj} \subset \mathcal{D}_{kj}$ ),

$$\begin{aligned} M'_{kj} \Delta x'_k \Delta y_j + M''_{kj} \Delta x''_k \Delta y_j &\leq M_{kj} \Delta x'_k \Delta y_j + M_{kj} \Delta x''_k \Delta y_j \\ &= M_{kj} (\Delta x'_k + \Delta x''_k) \Delta y_j = M_{kj} \Delta x_k \Delta y_j. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Valemitest (1.8) ja (1.7) saame, et

$$S(T') \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{j=1}^n M_{kj} \Delta x_k \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = S(T).$$

Ülesandest 1.2, (a), järeldub nüüd, et

$$s(T') = -S_{(-f)}(T') \geq -S_{(-f)}(T) = s(T).$$

(b). Tähistame sümboliga  $T''$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi, mis on saadud jaotusviisi  $T$  määravate osalõikude (1.1) edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi  $T'$  määravate punktidega; siis väite (a) põhjal  $S(T) \geq S(T'')$ . Jaotusviis  $T''$  on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi  $T'$  määravate osalõikude edasisel jaotamisel uuteks osalõikudeks jaotusviisi  $T$  määravate punktidega (1.6); järelikult väite (a) põhjal  $s(T'') \geq s(T')$ . Seega

$$S(T) \geq S(T'') \geq s(T'') \geq s(T').$$

(c). Väite (b) põhjal

- funktsiooni  $f$  mis tahes Darboux' alamsumma on selle funktsiooni Darboux' ülemsummade hulga alumine tõke;
- funktsiooni  $f$  mis tahes Darboux' ülemsumma on selle funktsiooni Darboux' alamsummade hulga ülemine tõke.

□

**Definitsioon 1.7.** Funktsiooni  $f$  (ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisidele vastavate) Darboux' ülemsummade alumist raja nimetatakse *Darboux' ülemiseks integraaliks* funktsioonist  $f$  (üle ristküliku  $\mathcal{D}$ ) ja tähistatakse sümboliga  $\bar{I}_{\mathcal{D}}f$ :

$$\bar{I}_{\mathcal{D}}f := \inf\{S(T) : T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\}.$$

Funktsiooni  $f$  (ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisidele vastavate) Darboux' alamsummade ülemist raja nimetatakse *Darboux' alumiseks integraaliks* funktsioonist  $f$  (üle ristküliku  $\mathcal{D}$ ) ja tähistatakse sümboliga  $\underline{I}_{\mathcal{D}}f$ :

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f := \sup\{s(T) : T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\}.$$

Darboux' integraalide olemasolu järeldub lausest 1.3, (c), pidevuse aksioomi põhjal; seejuures lausest 1.3, (b), järeldub, et

$$\bar{I}_{\mathcal{D}}f \geq \underline{I}_{\mathcal{D}}f.$$

**Ülesanne 1.3.** Olgu  $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tõkestatud funktsioon ning olgu  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tõestada, et

- (a)  $\bar{I}_{\mathcal{D}}(-f) = -\underline{I}_{\mathcal{D}}f$  ja  $\underline{I}_{\mathcal{D}}(-f) = -\bar{I}_{\mathcal{D}}f$ ;
- (b)  $\underline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \underline{I}_{\mathcal{D}}f$  ja  $\bar{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \bar{I}_{\mathcal{D}}f$ , kui  $\alpha \geq 0$ , ning  $\underline{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \bar{I}_{\mathcal{D}}f$  ja  $\bar{I}_{\mathcal{D}}(\alpha f) = \alpha \underline{I}_{\mathcal{D}}f$ , kui  $\alpha < 0$ ;
- (c)  $\underline{I}_{\mathcal{D}}f + \underline{I}_{\mathcal{D}}g \leq \underline{I}_{\mathcal{D}}(f + g)$  ja  $\bar{I}_{\mathcal{D}}(f + g) \leq \bar{I}_{\mathcal{D}}f + \bar{I}_{\mathcal{D}}g$ ;
- (d) kui  $f(P) \leq g(P)$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral, siis  $\underline{I}_{\mathcal{D}}f \leq \underline{I}_{\mathcal{D}}g$  ja  $\bar{I}_{\mathcal{D}}f \leq \bar{I}_{\mathcal{D}}g$ .

**Definitsioon 1.8.** Kui Darboux' ülemine ja alumine integraal funktsioonist  $f$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$  on võrdsed, siis öeldakse, et funktsioon  $f$  on ristkülikus  $\mathcal{D}$  *Darboux' mõttes integreeruv*. Seejuures funktsiooni  $f$  Darboux' ülemise ja alumise integraalide ühist väärtust

$$I_{\mathcal{D}}f := \bar{I}_{\mathcal{D}}f = \underline{I}_{\mathcal{D}}f$$

nimetatakse *Darboux' integraaliks* funktsioonist  $f$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$ .

### 1.3. Darboux' summade piirväärtus. Darboux' lemma

Eeldame endiselt, et kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  on tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$ .

Ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T$  puhul osaristkülikuteks, mis on määratud punktidega

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d, \quad (1.9)$$

tähistame  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ning

$$\Delta(T) := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\},$$

s.t.  $\Delta(T)$  on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

**Definitsioon 1.9.** Arvu  $I \in \mathbb{R}$  nimetatakse funktsiooni  $f$

- *Darboux' ülemsummade piirväärtuseks* (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ) ja kirjutatakse

$$I = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim S(T),$$

kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \implies \quad |S(T) - I| < \varepsilon$$

(s.t. ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui  $\delta$ , erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust  $I$  vähem kui  $\varepsilon$ );

- *Darboux' alamsummade piirväärtuseks* (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ) ja kirjutatakse

$$I = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} s(T) \quad \text{või lihtsalt} \quad I = \lim s(T),$$

kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \implies |s(T) - I| < \varepsilon$$

(s.t. ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral, mille osaristkülikute maksimaalne küljepikkus on väiksem kui  $\delta$ , erineb vastav Darboux' ülemsumma arvust  $I$  vähem kui  $\varepsilon$ ).

Järgnevast teoreemist järeldub, et Darboux' summadel eksisteerib alati piirväärtus.

**Teoreem 1.4** (Darboux' lemma). (a) *Darboux' ülemine integraal funktsioonist  $f$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$  on funktsiooni  $f$  Darboux' ülemsummade piirväärtus (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ):*

$$\bar{I}_{\mathcal{D}}f = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S(T).$$

(b) *Darboux' alumine integraal funktsioonist  $f$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$  on funktsiooni  $f$  Darboux' alamsummade piirväärtus (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ):*

$$\underline{I}_{\mathcal{D}}f = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} s(T).$$

Darboux' lemma tõestus toetub järgmisele abitulemusele.

**Lemma 1.5.** *Olgu ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T'$  saadud selle ristküliku jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.9)  $p$  uue punkti lisamise teel ( $p \in \mathbb{N}$ ). Tähistame*

$$\beta := \sup_{P \in \mathcal{D}} f(P), \quad \alpha := \inf_{P \in \mathcal{D}} f(P) \quad \text{ja} \quad \lambda := \max\{b-a, d-c\}.$$

*Siis*

$$0 \leq S(T) - S(T') \leq p(\beta - \alpha) \lambda \Delta(T).$$

**Ülesanne 1.4.** Järeldada lemmast 1.5, et selle lemma eeldustel  $0 \leq s(T') - s(T) \leq p(\beta - \alpha) \lambda \Delta(T)$ .

LEMMA 1.5 TÕESTUS. Lemma tõestuseks piisab näidata, et

(o) kui ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T''$  on saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.9) ühe uue punkti lisamise teel, siis

$$0 \leq S(T) - S(T'') \leq (\beta - \alpha) \lambda \Delta(T).$$

Tõepoolest, kehtigu väide (o) ning olgu jaotusviis  $T'$  saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.9) uute punktide  $u_1, \dots, u_p$  lisamise teel (siin iga  $r \in \{1, \dots, p\}$  korral punkt  $u_r$  lisatakse punktidele  $x_0, \dots, x_m$  või punktidele  $y_0, \dots, y_n$ ). Tähistame  $T_0 := T$  ning, edasi, iga  $r \in \{1, \dots, p\}$  korral tähistame sümboliga  $T_r$  jaotusviisi,

mis on saadud jaotusviisi  $T_{r-1}$  määravatele punktidele punkti  $u_r$  lisamise teel. Siis jaotusviisi  $T_p$  langeb kokku jaotusviisiga  $T'$  ning seega väite (○) põhjal

$$\begin{aligned} 0 \leq S(T) - S(T') &= S(T_0) - S(T_p) = \sum_{r=1}^p (S(T_{r-1}) - S(T_r)) \\ &\leq \sum_{r=1}^p (\beta - \alpha) \lambda \Delta(T_{r-1}) \leq \sum_{r=1}^p (\beta - \alpha) \lambda \Delta(T) = p(\beta - \alpha) \lambda \Delta(T). \end{aligned}$$

Jääb veel tõestada väide (○). Olgu risküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T''$  saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.9) ühe uue punkti  $u$  lisamise teel, kusjuures oletame konkreetsuse mõttes, et see uus punkt on lisatud lõigu  $[a, b]$   $k$ -ndasse osalõiku:  $u \in [x_{k-1}, x_k]$ , kus  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Tähistame  $\Delta x'_k := u - x_{k-1}$  ja  $\Delta x''_k := x_k - u$  ning iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\mathcal{D}'_{kj} := [x_{k-1}, u] \times [y_{j-1}, y_j] \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}''_{kj} := [u, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$$

**NB!** Siin võiks olla viide lause 1.3, (a), tõestuse (praeguse seisuga puuduolevale) joonisele.

(vt. **joonist ???**) ja

$$M'_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}'_{kj}} f(P) \quad \text{ja} \quad M''_{kj} = \sup_{P \in \mathcal{D}''_{kj}} f(P).$$

Siis

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \\ &\quad - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - \sum_{j=1}^n M'_{kj} \Delta x'_k \Delta y_j - \sum_{j=1}^n M''_{kj} \Delta x''_k \Delta y_j \\ &= \sum_{j=1}^n M_{kj} \Delta x_k \Delta y_j - \sum_{j=1}^n M'_{kj} \Delta x'_k \Delta y_j - \sum_{j=1}^n M''_{kj} \Delta x''_k \Delta y_j \\ &= \sum_{j=1}^n (M_{kj} \Delta x_k - M'_{kj} \Delta x'_k - M''_{kj} \Delta x''_k) \Delta y_j. \end{aligned}$$

Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\begin{aligned} M_{kj} \Delta x_k - M'_{kj} \Delta x'_k - M''_{kj} \Delta x''_k &= M_{kj} (\Delta x'_k + \Delta x''_k) - M'_{kj} \Delta x'_k - M''_{kj} \Delta x''_k \\ &= (M_{kj} - M'_{kj}) \Delta x'_k + (M_{kj} - M''_{kj}) \Delta x''_k \\ &\leq (\beta - \alpha) \Delta x'_k + (\beta - \alpha) \Delta x''_k \\ &= (\beta - \alpha) (\Delta x'_k + \Delta x''_k) = (\beta - \alpha) \Delta x_k \\ &\leq (\beta - \alpha) \Delta(T); \end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned} S(T) - S(T') &\leq \sum_{j=1}^n (\beta - \alpha) \Delta(T) \Delta y_j = (\beta - \alpha) \Delta(T) \sum_{j=1}^n \Delta y_j \\ &= (\beta - \alpha) \Delta(T) (d - c) \leq (\beta - \alpha) \lambda \Delta(T). \end{aligned}$$

□

TEOREEMI 1.4 TÕESTUS. (a). Tähistame  $\bar{I} := \bar{I}_{\mathcal{D}}f$ . Väite tõestuseks peame näitama, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \implies \bar{I} - \varepsilon < S(T) < \bar{I} + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Kuna ristküliku  $\mathcal{D}$  iga jaotusviisi  $T$  korral  $\bar{I} \leq S(T)$  (sest  $\bar{I}$  on ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisidele  $T$  vastavate Darboux' ülemsummade  $S(T)$  alumine raja), siis piisab väite tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \implies S(T) < \bar{I} + \varepsilon. \quad (1.10)$$

Valime ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T''$  selliselt, et

$$S(T'') < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu nüüd  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  suvaline jaotusviis. Olgu  $T'$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis, mis on saadud jaotusviisi  $T$  määravatele punktidele (1.9) jaotusviisi  $T''$  määravate punktide juurdelisamise teel. Nende juurdelisatavate punktide arv on ülimalt  $p := p_1 + p_2 - 2$ , kus  $p_1$  ja  $p_2$  vastavalt jaotusviisi  $T''$  määravate lõigu  $[a, b]$  osalõikude ja lõigu  $[c, d]$  osalõikude arv; niisiis lemma 1.5 põhjal

$$S(T) \leq S(T') + p(\beta - \alpha)\lambda\Delta(T).$$

Jaotusviis  $T'$  on tõlgendatav jaotusviisina, mis on saadud jaotusviisi  $T''$  määravatele punktidele teatavate uute (jaotusviisi  $T$  määravate) punktide juurdelisamise teel (või äärmisel juhul jaotusviisid  $T'$  ja  $T''$  ühtivad), seega  $S(T') \leq S(T'')$  ning järeltult

$$S(T) \leq S(T'') + p(\beta - \alpha)\lambda\Delta(T) < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2} + p(\beta - \alpha)\lambda\Delta(T).$$

Näeme, et kui ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$  rahuldab tingimust  $p(\beta - \alpha)\lambda\Delta(T) < \frac{\varepsilon}{2}$ , siis  $S(T) < \bar{I} + \varepsilon$ . Seega, tähistades  $\delta := \frac{\varepsilon}{2p(\beta - \alpha)\lambda}$ , kehtib (1.10).

(b). Kuna ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral ülesannete 1.2, (a), ja 1.3, (a), põhjal

$$|s_f(T) - \underline{I}_{\mathcal{D}}f| = |-S_{(-f)}(T) + \bar{I}_{\mathcal{D}}(-f)| = |S_{(-f)}(T) - \bar{I}_{\mathcal{D}}(-f)|,$$

siis piisab väite tõestuseks veenduda, et  $\bar{I}_{\mathcal{D}}(-f) = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S_{(-f)}(T)$ , mis kehtib juba tõestatud väite (a) põhjal.  $\square$

#### 1.4. Riemanni ja Darboux' mõttes integreeruvuse samaväärsus. Tarvilikke ja piisavaid tingimusi integreeruvuseks

Darboux' lemma võimaldab tõestada Riemanni ja Darboux' mõttes integreeruvuse samaväärsuse ning nende integraalide võrdsuse ning ühtlasi anda mitu kasulikku tarvilikku ja piisavat tingimust funktsiooni integreeruvuseks.

**Teoreem 1.6.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsioon  $f$  on Riemanni mõttes integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ ;
- (ii) funktsioon  $f$  on Darboux' mõttes integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ ;
- (iii) funktsiooni  $f$  Darboux' ülemsummade piirväärtus ja Darboux' alamsummade piirväärtus ristkülikus  $\mathcal{D}$  on võrdsed, s.t

$$\lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} s(T) =: J; \quad (1.11)$$

- (iv) iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et

$$\Delta(T) < \delta \implies S(T) - s(T) < \varepsilon \quad (1.12)$$

(s.t. ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral, mis rahuldab tingimust  $\Delta(T) < \delta$ , erinevad sellele jaotusviisile vastavad Darboux' summad teineteisest vähem kui  $\varepsilon$ ); teisisõnu,

$$\lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} (S(T) - s(T)) = 0;$$

- (v) iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$ , mille korral

$$S(T) - s(T) < \varepsilon; \quad (1.13)$$

teisisõnu,  $\inf \{S(T) - s(T) : T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis}\} = 0$ .

Seejuures, kui kehtib ükskõik milline väidetest (i)–(v) (sel juhul eelneva põhjal kehtivad kõik need väited), siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy \stackrel{(1)}{=} \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} S_f(T) \stackrel{(2)}{=} \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} s_f(T) \stackrel{(3)}{=} \underline{I}_{\mathcal{D}} f \stackrel{(4)}{=} \overline{I}_{\mathcal{D}} f \stackrel{(5)}{=} I_{\mathcal{D}} f; \quad (1.14)$$

muuhulgas Riemanni integraal ja Darboux' integraal funktsioonist  $f$  (üle ristküliku  $\mathcal{D}$ ) on võrdsed:  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = I_{\mathcal{D}} f$ .

**Märkus 1.2.** Kuna (jaotise 1.2 alguses tutvustatud tähistusi kasutades)

$$\begin{aligned} S(T) - s(T) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (M_{ij} - m_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \end{aligned}$$

kus kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &:= M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) \\ &= \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} (f(P) - f(Q)) = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} |f(P) - f(Q)| \end{aligned}$$

(arvu  $\omega_{ij}$  nimetatakse funktsiooni  $f$  võnkumiseks osaristkülikus  $\mathcal{D}_{ij}$ ), siis võib teoreemi 1.6 väited (iv) ja (v) formuleerida ka järgmisel (sagedasti kasutataval) kujul:

$$(iv') \quad \lim_{\Delta(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = 0;$$

$$(v') \quad \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j : T \text{ on ristküliku } \mathcal{D} \text{ jaotusviis} \right\} = 0.$$

TEOREEMI 1.6 TÕESTUS. (ii) $\Rightarrow$  [(iii)&(1.14)<sup>(2)-(5)</sup>]. Kui kehtib (ii), siis vastavalt definitsioonile kehtivad (1.14)<sup>(4)-(5)</sup>, järelikult Darboux' lemma põhjal kehtivad ka (1.14)<sup>(2)-(3)</sup>; muuhulgas kehtib ka (iii).

(iii) $\Rightarrow$  [(i)&(1.14)<sup>(1)-(2)</sup>]. Kehtigu (iii) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Implikatsiooni tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava Riemanni summa  $\sigma$  korral

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad J - \varepsilon < \sigma < J + \varepsilon. \quad (1.15)$$

Võrduste (1.11) tõttu leiduvad reaalarvud  $\delta_1, \delta_2 > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad s(T) > J - \varepsilon \quad \text{ja} \quad \Delta(T) < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad S(T) < J + \varepsilon.$$

Kuna iga jaotusviisile  $T$  vastava Riemanni summa  $\sigma$  korral  $s(T) \leq \sigma \leq S(T)$ , siis, tähistades  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , kehtib (1.15).

(i) $\Rightarrow$ (iv). Kehtigu (i); tähistame  $I := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ . Olgu  $\varepsilon > 0$ . Siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ja mis tahes sellele jaotusviisile vastava Riemanni summa  $\sigma$  korral

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma < I + \frac{\varepsilon}{4};$$

seega lause 1.2 põhjal (märgime, et teoreemi 1.1 põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D}$ )

$$\Delta(T) < \delta \quad \Longrightarrow \quad I - \frac{\varepsilon}{4} \leq s(T) \leq S(T) \leq I + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Kuna eelneva implikatsiooni paremast poolest järeldub, et  $S(T) - s(T) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ , siis kehtib implikatsioon (1.12).

(iv) $\Rightarrow$ (v) on ilmne.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (v) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Eelduse (v) põhjal leidub ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$ , mis rahuldab tingimust (1.13). Arvestades, et

$$s(T) \leq \underline{I}_{\mathcal{D}} f \leq \bar{I}_{\mathcal{D}} f \leq S(T),$$

järeldub tingimusest (1.13), et

$$|\bar{I}_{\mathcal{D}} f - \underline{I}_{\mathcal{D}} f| \leq S(T) - s(T) < \varepsilon,$$

millest arvu  $\varepsilon > 0$  suvalisuse tõttu järeldub, et  $\bar{I}_{\mathcal{D}} f = \underline{I}_{\mathcal{D}} f$ , s.t. funktsioon  $f$  on Darboux' mõttes integreeruv.  $\square$

## 1.5. Täiendavaid ülesandeid

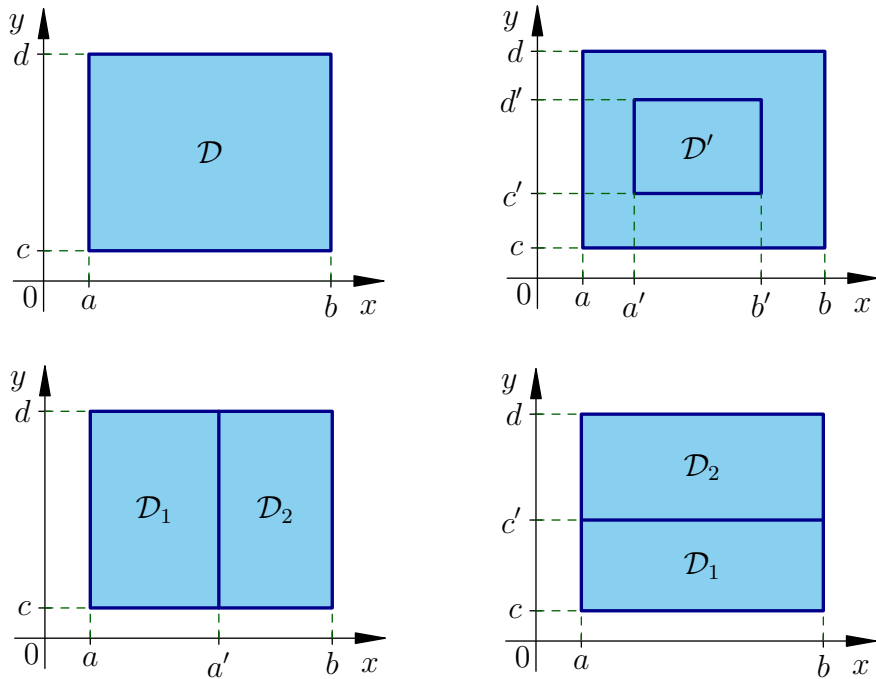
**Ülesanne 1.5.** Olgu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , kusjuures  $a < b$  ja  $c < d$ . Tähistame  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$  (vt. joonise 1.2 ülemist vasakpoolset teljestikku). Olgu  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**NB!** Ülesannet 1.5 kasutatakse jaotises 2.1 integraali (ülemis tahes tõkestatud hulga) definitsiooni korrektsuse põhjendamisel.

- (a) Olgu  $a \leq a' < b' \leq b$  ja  $c \leq c' < d' \leq d$ . Tähistame  $\mathcal{D}' := [a', b'] \times [c', d']$  (vt. joonise 1.2 ülemist parempoolset teljestikku). Tõestada, et kui funktsioon  $f$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis  $f$  on integreeruv ka ristkülikus  $\mathcal{D}'$ .
- (b) Olgu  $a < a' < b$ . Tähistame  $\mathcal{D}_1 := [a, a'] \times [c, d]$  ja  $\mathcal{D}_2 := [a', b] \times [c, d]$  (vt. joonise 1.2 alumist vasakpoolset teljestikku). Tõestada, et kui funktsioon  $f$  on integreeruv ristkülikutes  $\mathcal{D}_1$  ja  $\mathcal{D}_2$ , siis  $f$  on integreeruv ka ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x, y) dx dy. \quad (1.16)$$

- (c) Olgu  $c < c' < d$ . Tähistame  $\mathcal{D}_1 := [a, b] \times [c, c']$  ja  $\mathcal{D}_2 := [a, b] \times [c', d]$  (vt. joonise 1.2 alumist parempoolset teljestikku). Tõestada, et kui funktsioon  $f$  on integreeruv ristkülikutes  $\mathcal{D}_1$  ja  $\mathcal{D}_2$ , siis  $f$  on integreeruv ka ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures kehtib võrdus (1.16).
- (d) Tõestada, et kui funktsioon  $f$  on tõkestatud, kusjuures tema väärtused ristküliku  $\mathcal{D}$  sismuses on nullid (s.t.  $f(x, y) = 0$  iga  $(x, y) \in (a, b) \times (c, d)$  korral), siis  $f$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = 0$ .



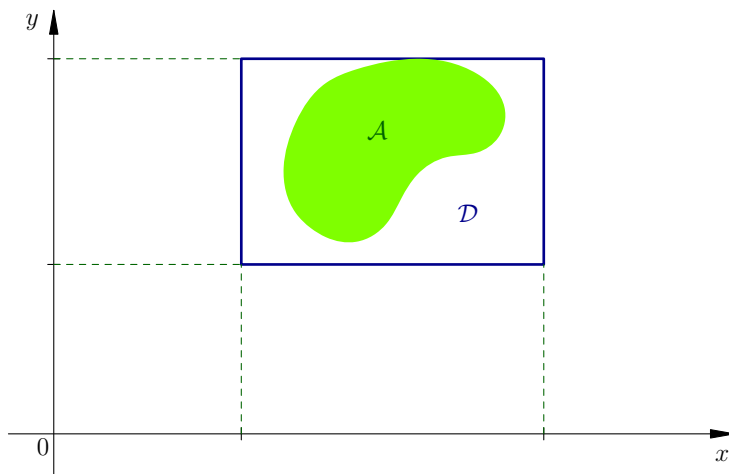
JOONIS 1.2

## § 2. Kahekordne integraal üle mis tahes tõkestatud hulga

### 2.1. Integraali definitsioon

Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  määratud tõkestatud hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definitsioon 2.1.** Sisaldagu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  hulka  $\mathcal{A}$ , s.t.  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$  (vt. joonist 2.1).



JOONIS 2.1. Hulk  $\mathcal{A}$  on joonisel värvitud heleroheliseks, ristkülik  $\mathcal{D}$  on ääristatud tumesinise joonega.

Õeldakse, et funktsioon  $f$  on (*Riemanni mõttes*) *integreeruv hulgas*  $\mathcal{A}$ , kui kahe muutuja funktsioon  $z = \hat{f}(x, y) = \hat{f}(P)$ , kus

$$\hat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \quad (2.1)$$

on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Seejuures integraali

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy := \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy$$

nimetatakse (*kahekordseks*) (*Riemanni*) *integraaliks funktsioonist*  $f$  *üle hulga*  $\mathcal{A}$ .

Siinkohal kerkib loomulik küsimus eelneva definitsiooni korrektsusest, nimelt: kas funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  ja integraali  $\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy$  väärtus on sõltumatu (hulka  $\mathcal{A}$  sisaldava) ristküliku  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  valikust? Vastus sellele küsimusele on: jah, on küll sõltumatu; seega on eelnev definitsioon korrektne. Veendumaks selles, piisab, eeldades, et  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathbb{R}^2$  on hulka  $\mathcal{A}$  sisaldavad ristkülikud ning funktsioonid  $\hat{f}_1: \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\hat{f}_2: \mathcal{D}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  on defineeritud võrdustega

$$\hat{f}_1(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_1 \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \hat{f}_2(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{A}, \end{cases}$$

näidata, et

(1) funktsioon  $\hat{f}_1$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_1$  parajasti siis, kui funktsioon  $\hat{f}_2$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_2$ ;

(2) kehtib võrdus

$$\iint_{\mathcal{D}_1} \hat{f}_1(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_2} \hat{f}_2(x, y) dx dy \quad (2.2)$$

(seda muidugi funktsioonide  $\hat{f}_1$  ja  $\hat{f}_2$  integreeruvuse korral).

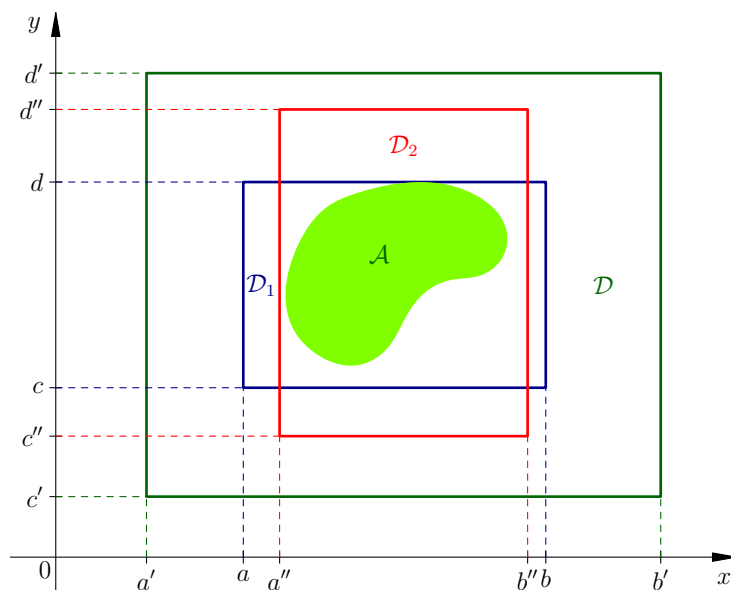
Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et funktsioon  $f$  on tõkestatud (sest vastasel juhul on ka funktsioonid  $\hat{f}_1$  ja  $\hat{f}_2$  tõkestamata ning seega teoreemi 1.1 põhjal pole kumbki neist funktsioonidest integreeruv) ning et  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2^\circ$  (s.t. ristkülik  $\mathcal{D}_1$  sisaldub ristküliku  $\mathcal{D}_2$  sisemuses (PÕHJENDADA!)).

See põhjendus on järgmine. Eeldame, et väited (1) ja (2) kehtivad lisaeldusel  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2^\circ$  ning et  $\mathcal{D}_1$  ja  $\mathcal{D}_2$  on *suvalised* hulka  $\mathcal{A}$  sisaldavad ristkülikud tasandil  $\mathbb{R}^2$ . Valime ristküliku  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selliselt, et  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}^\circ$  ja  $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}^\circ$  (s.t. ristkülikud  $\mathcal{D}_1$  ja  $\mathcal{D}_2$  sisalduvad ristküliku  $\mathcal{D}$  sisemuses; vt. joonist 2.2), ning defineerime funktsiooni  $\hat{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega (2.1).

Kui funktsioon  $\hat{f}_1$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_1$ , siis tehtud eelduse põhjal on funktsioon  $\hat{f}$  integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures  $\iint_{\mathcal{D}_1} \hat{f}_1(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy$ ; seega, jällegi tehtud eelduse põhjal on funktsioon  $\hat{f}_2$  integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_2$ , kusjuures  $\iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_2} \hat{f}_2(x, y) dx dy$ ; niisiis kehtib ka võrdus (2.2).

Sümmeetria põhjal saame, et kui funktsioon  $\hat{f}_2$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_2$ , siis funktsioon  $\hat{f}_1$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_1$ , kusjuures kehtib võrdus (2.2).

Oleme näidanud, et väidete (1) ja (2) kehtivusest lisaeldusel  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2^\circ$  järeldeb nende väidete kehtivus üldjuhul.



JOONIS 2.2. Ristkülikud  $\mathcal{D}_1 := [a, b] \times [c, d]$ ,  $\mathcal{D}_2 := [a'', b''] \times [c'', d'']$  ja  $\mathcal{D} := [a', b'] \times [c', d']$  on joonisel ääristatud vastavalt tumesinise, punase ja tumerohelise joonega.

Niisiis, eeldame, et funktsioon  $f$  on tõkestatud ning et  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2^\circ$ . Olgu  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ , kus  $a' < a < b < b'$  ja  $c' < c < d < d'$ , sellised, et  $\mathcal{D}_1 = [a, b] \times [c, d]$  ja  $\mathcal{D}_2 = [a', b'] \times [c', d']$ . Defineerime ristkülikud

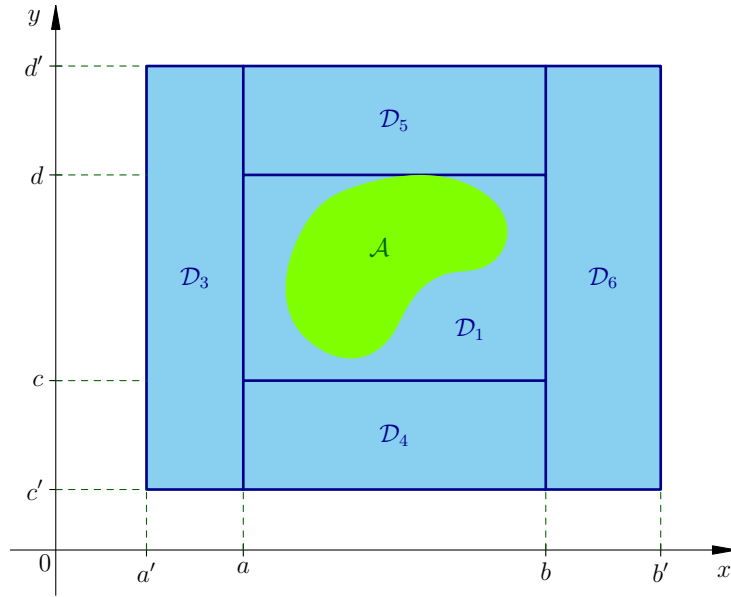
$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 &:= [a', a] \times [c', d'], & \mathcal{D}_4 &:= [a, b] \times [c', c], & \mathcal{D}_5 &:= [a, b] \times [d, d'], \\ \mathcal{D}_6 &:= [b, b'] \times [c', d']\end{aligned}$$

(vt. joonist 2.3) ning iga  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$  korral defineerime funktsiooni  $\hat{f}_i: \mathcal{D}_i \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega

$$\hat{f}_i(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{D}_i \cap \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D}_i \setminus \mathcal{A}; \end{cases}$$

siis funktsioon  $\hat{f}_i$  on tõkestatud (sest tehtud eelduse põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud), kusjuures tema väärtused ristküliku  $\mathcal{D}_i$  sisemuses on nullid, seega ülesande 1.5, (d), põhjal on funktsioon  $\hat{f}_i$  integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_i$ , kusjuures

$$\iint_{\mathcal{D}_i} \hat{f}_i(x, y) dx dy = 0.$$



JOONIS 2.3. Hulk  $\mathcal{A}$  on joonisel kujutatud helerohelisega, ristkülik  $\mathcal{D}_2$  on värvitud helesiniseks, ristkülikud  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_5$  ja  $\mathcal{D}_6$  on ääristatud tumesinisega.

Oletame nüüd, et funktsioon  $\hat{f}_1$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_1$ . Kuna ka iga  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$  korral on funktsioon  $\hat{f}_i$  integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_i$ , siis, arvestades, et iga  $i \in \{1, \dots, 6\}$  korral  $\hat{f}_2|_{\mathcal{D}_i} = \hat{f}_i$ , on funktsioon  $\hat{f}_2$  integreeruv ristkülikutes  $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_5$  ja  $\mathcal{D}_6$ , seega ülesande 1.5, (b) ja (c), põhjal on funktsioon  $\hat{f}_2$  integreeruv ka ristkülikus  $\mathcal{D}_2$  (PÕHJENDADA!), kusjuures, märkides üleskirjutuste lihtsustamiseks

iga  $i \in \{1, \dots, 6\}$  korral  $I_i := \iint_{\mathcal{D}_i} \hat{f}_i(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}_i} \hat{f}_2(x, y) dx dy$  ning arvestades, et iga  $i \in \{3, 4, 5, 6\}$  korral  $I_i = 0$ ,

$$\iint_{\mathcal{D}_2} \hat{f}_2(x, y) dx dy = I_2 = I_3 + I_4 + I_1 + I_5 + I_6 = I_1 = \iint_{\mathcal{D}_1} \hat{f}_1(x, y) dx dy \quad (2.3)$$

(PÕHJENDADA!) .

Teiselt poolt, oletame, et funktsioon  $\hat{f}_2$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}_2$ . Siis ülesande 1.5, (a), põhjal on funktsioon  $\hat{f}_2$  integreeruv ka ristkülikutes  $\mathcal{D}_3$ ,  $\mathcal{D}_4$ ,  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_5$  ja  $\mathcal{D}_6$ , kusjuures (ülesande 1.5, (b) ja (c) põhjal) kehtivad võrdused (2.3).

Väited (1) ja (2) on tõestatud ning ühes sellega on põhjendatud definitsiooni 2.1 korrektsus.

Jaotise lõpetuseks tõestame ühe olulise tarviliku tingimuse funktsiooni integreeruvuseks.

**Lause 2.1.** *Hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  integreeruv kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y) = f(P)$  on tõkestatud selles hulgas.*

**TÕESTUS.** Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab võrdusega (2.1) defineeritud funktsiooni  $\hat{f}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Funktsiooni  $\hat{f}$  integreeruvusest ristkülikus  $\mathcal{D}$  järeldub teoreemi 1.1 põhjal tema tõkestatus selles ristkülikus, millest omakorda järeldub funktsiooni  $f$  tõkestatus hulgas  $\mathcal{A}$ .  $\square$

## 2.2. Hulga mõõtuvus Jordani mõttes

Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definitsioon 2.2.** Funktsiooni  $\chi_{\mathcal{A}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , kus

$$\chi_{\mathcal{A}}(P) = \begin{cases} 1, & \text{kui } P \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } P \in (\mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{A}, \end{cases}$$

nimetatakse hulga  $\mathcal{A}$  *karakteristlikuks funktsiooniks* või ka (eriti tõenäosusteoorias) hulga  $\mathcal{A}$  *indikaatorfunktsiooniks*.

Eeldame nüüd, et hulk  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  on tõkestatud.

**Definitsioon 2.3.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{A}$  on *Jordani mõttes mõõtuv*, kui tema karakteristik funktsioon  $\chi_{\mathcal{A}}$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , s.t., valides ristküliku  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  nii, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ , karakteristik funktsioon  $\chi_{\mathcal{A}}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Seejuures integraali

$$\mu(\mathcal{A}) := S_{\mathcal{A}} := \iint_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy$$

nimetatakse hulga  $\mathcal{A}$  *Jordani mõõduks* ehk *pindalaks*.

Kõneldes selle peatüki paragrahvides 2–6 edaspidi lihtsalt *mõõtuvatest* hulkadest, mõistame me selle all Jordani mõttes mõõtuvaid hulki tasandil  $\mathbb{R}^2$ .

Rõhutame, et eelnevas punktis tõestatu põhjal ei sõltu karakteristliku funktsiooni  $\chi_{\mathcal{A}}$  integreeruvus ja integraal  $\iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy$  ning seega ka hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuvus ja Jordani mõõt hulga  $\mathcal{A}$  sisaldava ristküliku  $\mathcal{D}$  valikust definitsioonis 2.3. Rõhutame samuti, et hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõõdust (ehk, teisisõnu, pindalast) saame kõnelda vaid Jordani mõttes mõõtuva hulga  $\mathcal{A}$  puhul.

**Märkus 2.1.** Eelnev Jordani mõõdu definitsioon ei lähtu vahetult meie eelmateemaatilise arusaamast pindalast. Seosed nimetatud definitsiooni ja arusaama vahel hakkavad selginema, kui analüüsida hulga karakteristliku funktsiooni integreeruvust Darboux' summade terminites. On mõistlik lükata see analüüs edasi paragrahvi 4, kus meie käsutuses on oluliselt rohkem teadmisi integraalist ja Jordani mõõdust. Paragrahvis 4 tõestame hulga Jordani mõttes mõõtuvuse jaoks ühe tarviliku ja piisava tingimuse (teoreemi 4.2), mis selgitab (vt. märkust 4.1), et *eelnev Jordani mõõdu definitsioon 2.3 on igati kooskõlas meie eelmateemaatilise arusaamaga pindalast.*

**Näide 2.1.** Ristkülik  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  on Jordani mõttes mõõtuv hulk, kusjuures tema Jordani mõõt

$$\mu(\mathcal{D}) = (b - a)(d - c),$$

s.t. ristküliku Jordani mõõt on võrdne tema elementaargeomeetrilistest kaalutlustest lähtudes arvutatud pindalaga.

Tõepoolest, ristküliku  $\mathcal{D}$  Jordani mõttes mõõtuvuse tõestuseks piisab (võttes definitsioonis 2.3 nii hulga  $\mathcal{A}$  kui ka teda sisaldava ristküliku  $\mathcal{D}$  rolli meie vaadeldava ristküliku  $\mathcal{D}$  enda), veenduda, et selle ristküliku karakteristlik funktsioon  $\chi_{\mathcal{D}}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , aga see järeldub näitest 1.1 (sest karakteristlik funktsioon  $\chi_{\mathcal{D}}$  on selles ristkülikus konstantne:  $(\chi_{\mathcal{D}})|_{\mathcal{D}} = 1$ ); seejuures (jällegi näites 1.1 leitu põhjal)

$$\mu(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{D}}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} 1 dx dy = (b - a)(d - c).$$

Järgnevad näide 2.2 ja lause 2.4 annavad näiteid *nullmõõduga hulkadest* tasandil, s.t. niisugustest Jordani mõttes mõõtuvatest hulkadest (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ), mille Jordani mõõt on null. Eelnevalt on otstarbekas tõestada järgnevad kaks tulemust, millest lemma 2.2 annab tarvilikke ja piisavaid tingimusi hulga nullmõõdulisuseks (mida nende lihtsuse tõttu kasutame edaspidi sageli ilma sellele lemmale viitamata) ning lause 2.3 ütleb, et nullmõõduga hulkade lõplik ühend on nullmõõduga hulk.

**Lemma 2.2.** Olgu (tõkestatud) hulk  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  ja ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  sellised, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $\mathcal{A}$  on nullmõõduga hulk;
- (ii)  $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}} = 0$ ;
- (iii)  $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}} \leq 0$ ;
- (iv) iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$  nii, et  $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$  (sümbol  $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$  tähistab karakteristliku funktsiooni  $\chi_{\mathcal{A}}$  Darboux' ülemsummat (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ), mis vastab jaotusviisile  $T$ );

**NB!** Kas vaja selgitada tähistust  $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}$ ? See on Darboux' ülemine integraal hulga  $\mathcal{A}$  karakteristlikust funktsioonist  $\chi_{\mathcal{A}}$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$ .

- (v) iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub risküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$ , mille korral hulka  $\mathcal{A}$  lõikavate osaristkülikute pindalade summa on väiksem kui  $\varepsilon$ , s.t., tähistades  $\hat{\Gamma} := \{(i, j) \in \Gamma : \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ , kehtib võrratus

$$\sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \mu(\mathcal{D}_{ij}) = \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon.$$

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Hulga  $\mathcal{A}$  nullmõõdulisus tähendab, et tema karakteristiklik funktsioon  $\chi_{\mathcal{A}}$  on integreeruv riskülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures integraal temast üle selle risküliku on null, aga sellisel juhul  $\bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy = 0$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) on ilmne.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (iii). Siis  $0 \leq \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} \leq \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} \leq 0$  (selle ahela esimene võrratus järeldub karakteristikliku funktsiooni  $\chi_{\mathcal{A}}$  mittenegatiivsusest), seega  $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = 0$ . See tähendab, et karakteristiklik funktsioon  $\chi_{\mathcal{A}}$  on integreeruv riskülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures integraal temast üle selle risküliku on null; see omakorda aga tähendab, et hulk  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures tema Jordani mõõt on null.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) on ilmne.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) on ilmne, sest risküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisile  $T$  vastav karakteristikliku funktsiooni  $\chi_{\mathcal{A}}$  Darboux' ülemsumma  $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)$  on selle jaotusviisi selliste osaristkülikute pindalade summa, mis lõikavad hulka  $\mathcal{A}$ .  $\square$

Järgnevat lauset vajame me näites 2.2 tõestamiseks, et lõplik hulk (tasandil) on nullmõõduline, aga samuti jaotises 2.3 (koos teoreemiga 2.5 ja lausega 2.4) lause 2.7 – pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapetsi mõõtuvuse – tõestamiseks.

**Lause 2.3.** Nullmõõduga hulkade lõplik ühend (tasandil) on nullmõõduga hulk.

LAUSE 2.3 TÕESTUS. Olgu  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  nullmõõduga hulgad. Lause tõestuseks piisab näidata, et ühend  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  on nullmõõduga hulk. Selleks, valides risküliku  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  nii, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , piisab veenduda, et  $\bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \leq 0$ .

Kuna  $\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \leq \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}$ , siis ülesande 1.3, (d) ja (c), põhjal

$$\bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \leq \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}(\chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}) \leq \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} + \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{B}} = 0,$$

sest hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$  nullmõõdulisuse tõttu  $\bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}} = \bar{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{B}} = 0$ .  $\square$

Lause 2.3 tõestus lihtsustuks veelgi, kui selles kasutada lauset 3.7. Niisugune tõestus on esitatud jaotises 3.4 lk. 181 lause 3.7 tõestuse järel.

**Näide 2.2.** Lõplik hulk tasandil  $\mathbb{R}^2$  on nullmõõduga hulk. Kuna iga mittetühi lõplik hulk on ühepunktliste hulkade lõplik ühend, siis lause 2.3 põhjal piisab lõpliku hulga nullmõõdulisuseks veenduda, et ühepunktiline hulk tasandil  $\mathbb{R}^2$  on nullmõõduga hulk. Olgu  $P \in \mathbb{R}^2$  ja olgu riskülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \{P\}$  (ehk teisisõnu  $P \in \mathcal{D}$ ), ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Lemma 2.2 põhjal piisab hulga  $\{P\}$  nullmõõdulisuseks leida risküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$ , mille korral punkti  $P$  sisaldavate osaristkülikute pindalade summa on väiksem kui  $\varepsilon$ . Sellise jaotusviisi olemasolu on ilmne.

**Lause 2.4.** (a) *Lõigus  $[a, b]$  pideva funktsiooni  $y = f(x)$  graafik*

$$L := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = f(x)\}$$

*on nullmõõduga hulk ruumis  $\mathbb{R}^2$ .*

(b) *Lõigus  $[c, d]$  pideva funktsiooni  $x = g(y)$  graafik*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], x = g(y)\}$$

*on nullmõõduga hulk ruumis  $\mathbb{R}^2$ .*

Lause 2.4 (mis on ka eraldi vaadelduna huvipakkuv) leiab rakendust jaotise 2.3 lõpus lause 2.7 – pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapetsi mõõtuvuse – tõestamisel.

Järgnevas tõestuses, kõneldes ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisist  $T$ , toetume me konseptis läbivalt kasutatavatele kokkulepetele/tähistustele, mida on tutvustatud näiteks jaotise 1.2 alguses lk. 149. Lisaks tähistame  $\Gamma := \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  ja  $\hat{\Gamma}_L := \{(i, j) \in \Gamma : \mathcal{D}_{ij} \cap L \neq \emptyset\}$ .

LAUSE 2.4 TÕESTUS. (a). Weierstrassi teoreemi ?? põhjal leiduvad arvud  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c < d$ , nii, et  $c \leq f(x) \leq d$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Tähistame  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$ ; siis  $\mathcal{D} \supset L$ . Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Lemma 2.2 põhjal piisab graafiku  $L$  nullmõõdulisuse tõestuseks leida ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$ , mille korral  $\sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}_L} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon$ .

Jaotame lõigu  $[c, d]$  punktidega  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ , kus  $n \in \mathbb{N}$ , võrdse pikkusega osalõikudeks  $[y_{j-1}, y_j]$ , mille pikkused  $\delta_0$  on väiksemad kui  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ , s.t.  $\delta_0 := \Delta y_1 = \dots = \Delta y_n < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ . Cantori teoreemi ?? põhjal leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \delta_0.$$

Jaotame lõigu  $[a, b]$  punktidega  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ , kus  $m \in \mathbb{N}$ , osalõikudeks  $[x_{i-1}, x_i]$ , mille pikkused on väiksemad kui  $\delta$ . Iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral tähistame  $\Gamma_i := \{j \in \{1, \dots, n\} : L \cap \mathcal{D}_{ij} \neq \emptyset\}$  (s.t.  $\Gamma_i$  on nende indeksite  $j \in \{1, \dots, n\}$  hulk, mille korral graafik  $L$  lõikab osaristkülikut  $\mathcal{D}_{ij}$ ) ning sümbooliga  $|\Gamma_i|$  tähistame hulga  $\Gamma_i$  elementide arvu; siis  $|\Gamma_i| \leq 2$  (s.t. lõigus  $[x_{i-1}, x_i]$  lõikab graafik  $L$  ülimalt kahte ristkülikut  $\mathcal{D}_{ij}$ ) (PÕHJENDADA!).

**NB!** JOONIS!  
(Kuhu täpselt?)

Tõepoolest, oletame vastuväiteliselt, et mingi  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral  $|\Gamma_i| \geq 3$ . Siis mingite  $j, k \in \Gamma_i$  korral  $j+1 < k$ . Olgu  $x, x' \in [x_{i-1}, x_i]$  sellised, et  $(x, f(x)) \in \mathcal{D}_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$  ja  $(x', f(x')) \in \mathcal{D}_{ik} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$ ; siis  $x - x' \leq \Delta x_i < \delta$ , kuid  $f(x) \leq y_j < y_{k-1} \leq f(x')$  ning seega

$$|f(x) - f(x')| \geq f(x') - f(x) \geq y_{k-1} - y_j \geq y_{j+1} - y_j = \delta_0.$$

Jõudsime vastuoluni.

Aga nüüd (tähistades tähega  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi, mis on määratud punktidega  $x_0, x_1, \dots, x_m$  ja  $y_0, y_1, \dots, y_n$ )

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}_L} \Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \Gamma_i} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \Delta x_i \sum_{j \in \Gamma_i} \Delta y_j = \sum_{i=1}^m \Delta x_i |\Gamma_i| \delta_0 \\ &\leq \sum_{i=1}^m \Delta x_i 2\delta_0 = 2\delta_0 \sum_{i=1}^m \Delta x_i = 2(b-a)\delta_0 < 2(b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(b). Väite tõestus on sümmeetriline väite (a) tõestusega. □

### 2.3. Tarvilik ja piisav tingimus hulga Jordani mõttes mõõtuvuseks tema raja nullmõõdulisuse kaudu

**Teoreem 2.5.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv;
- (ii)  $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$ , s.t. hulga  $\mathcal{A}$  raja  $\partial\mathcal{A}$  Jordani mõõt on null.

Teoreemi 2.5 tõestuses on mugav toetuda järgnevale abitulemusele.

**Lemma 2.6.** Olgu hulk  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  ja ristkülik  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  sellised, et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ . Tähistame tähega  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

kus  $m, n \in \mathbb{N}$  ning  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  ja  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ . Tähistame  $\Gamma := \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  ning

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &:= \{(i, j) \in \Gamma : \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}, & \check{\Gamma} &:= \{(i, j) \in \Gamma : \mathcal{D}_{ij} \subset \mathcal{A}\}, \\ \bar{\Gamma} &:= \hat{\Gamma} \setminus \check{\Gamma}, & \tilde{\Gamma} &:= \{(i, j) \in \Gamma : \mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Siis

- (a)  $S_{\chi\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j, \quad s_{\chi\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$
- (b)  $S_{\chi\mathcal{A}}(T) - s_{\chi\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j) \in \bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$
- (c)  $S_{\chi\partial\mathcal{A}}(T) = \sum_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j;$
- (d)  $\bar{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}.$

Kui  $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$  (s.t. hulga  $\mathcal{A}$  sulund sisaldub ristküliku  $\mathcal{D}$  sisemuses), siis ka

- (e)  $\partial\mathcal{A} \subset \bigcup_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \mathcal{D}_{ij};$

- (f)  $|\tilde{\Gamma}| \leq 9|\bar{\Gamma}|$ , kus sümbolid  $|\tilde{\Gamma}|$  ja  $|\bar{\Gamma}|$  tähistavad vastavalt hulkade  $\tilde{\Gamma}$  ja  $\bar{\Gamma}$  elementide arvu.

TÕESTUS. (a). Mis tahes  $(i, j) \in \Gamma$  korral

$$M_{ij}(\chi_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset, \text{ s.t. } (i, j) \in \hat{\Gamma}; \\ 0, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} = \emptyset, \text{ s.t. } (i, j) \in \Gamma \setminus \hat{\Gamma}, \end{cases}$$

$$m_{ij}(\chi_{\mathcal{A}}) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \subset \mathcal{A}, \text{ s.t. } (i, j) \in \check{\Gamma}; \\ 0, & \text{kui } \mathcal{D}_{ij} \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}) \neq \emptyset, \text{ s.t. } (i, j) \in \Gamma \setminus \check{\Gamma}. \end{cases}$$

Tõestatavad võrdused on nüüd ilmsed.

(b). Tõestatav võrdus järeldub vahetult väitest (a).

(c). Tõestatav võrdus järeldub väite (a) esimesest võrdusest.

(d). Olgu  $(i, j) \in \bar{\Gamma}$ . Siis  $\mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$ , seega leidub  $P \in \mathcal{D}_{ij}$  nii, et  $P \in \mathcal{A}$ . Teiselt poolt, kuna  $(i, j) \notin \check{\Gamma}$ , siis  $\mathcal{D}_{ij} \not\subset \mathcal{A}$ , seega leidub  $Q \in \mathcal{D}_{ij}$  nii, et  $Q \notin \mathcal{A}$ . Nüüd punkte  $P$  ja  $Q$  ühendaval sirglõigul leidub punkt  $R \in \partial\mathcal{A}$  (vt. ülesande I.1.5 näpunäidet; siin me eeldame üldisust kitsendamata, et  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ). Kuna punkte  $P$  ja  $Q$  ühendav sirglõik sisaldub ristkülikus  $\mathcal{D}_{ij}$ , siis  $R \in \mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A}$  ning seega  $\mathcal{D}_{ij} \cap \partial\mathcal{A} \neq \emptyset$ , s.t.  $(i, j) \in \tilde{\Gamma}$ . Oleme näidanud, et  $\bar{\Gamma} \subset \tilde{\Gamma}$ .

Eeldame järgnevas täiendavalt, et  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$ .

(e). Olgu  $P \in \partial\mathcal{A}$ . Tähistame  $\Gamma_P := \{(i, j) \in \Gamma : P \in \mathcal{D}_{ij}\}$ . Siis hulk  $\mathcal{U} := \bigcup_{(i, j) \in \Gamma_P} \mathcal{D}_{ij}$  on punkti  $P$  ümbrus (PÕHJENDADA!) (siin me kasutasime eeldust, et  $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$ ), järelikult, arvestades, et  $P$  on hulga  $\mathcal{A}$  rajapunkt, leiduvad  $(k, l), (r, s) \in \Gamma_P$  nii, et  $\mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$  ja  $\mathcal{D}_{rs} \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}) \neq \emptyset$  (PÕHJENDADA!). Nüüd, kui  $P \in \mathcal{A}$ , siis  $(r, s) \in \bar{\Gamma}$ , kui aga  $P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$ , siis  $(k, l) \in \bar{\Gamma}$  (PÕHJENDADA!). Siit näeme, et igal juhul  $P \in \bigcup_{(i, j) \in \bar{\Gamma}} \mathcal{D}_{ij}$  (PÕHJENDADA!).

(f). Kõikjal väite tõestuses kasutame järgnevaid tähistusi. Kui  $\Gamma_0 \subset \Gamma$ , siis sümbol  $|\Gamma_0|$  tähistab hulga  $\Gamma_0$  elementide arvu. Iga  $(i, j) \in \Gamma$  korral tähistame  $\Gamma_{ij} := \{(k, l) \in \Gamma : \mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{D}_{ij} \neq \emptyset\}$ ; siis ilmselt  $|\Gamma_{ij}| \leq 9$ .

Väite tõestuseks piisab näidata, et  $\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{(i, j) \in \bar{\Gamma}} \Gamma_{ij}$ , sest selle sisalduvuse kehtides

$$|\tilde{\Gamma}| \leq \left| \bigcup_{(i, j) \in \bar{\Gamma}} \Gamma_{ij} \right| \leq \sum_{(i, j) \in \bar{\Gamma}} |\Gamma_{ij}| \leq 9|\bar{\Gamma}|$$

(PÕHJENDADA!). Tõestame sisalduvuse  $\tilde{\Gamma} \subset \bigcup_{(i, j) \in \bar{\Gamma}} \Gamma_{ij}$ . Olgu  $(k, l) \in \tilde{\Gamma}$ ; siis leidub  $P \in \mathcal{D}_{kl} \cap \partial\mathcal{A}$ . Väite (e) põhjal leidub  $(i, j) \in \bar{\Gamma}$  nii, et  $P \in \mathcal{D}_{ij}$ ; niisiis  $P \in \mathcal{D}_{kl} \cap \mathcal{D}_{ij}$  ja seega  $(k, l) \in \Gamma_{ij}$ .  $\square$

TEOREEMI 2.5 TÕESTUS. Olgu ristkülik  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i). Olgu  $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$  ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuvuseks piisab leida ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$  selliselt, et  $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$ .

Kuna  $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$ , siis saame jaotusviisi  $T$  valida selliselt, et  $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$  (PÕHJENDADA!). Lemma 2.6, (b), (d) ja (c), põhjal

$$S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) = \sum_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j \leq \sum_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu hulk  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuv ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Implikatsiooni tõestuseks (s.t. võrduseks  $\mu(\partial\mathcal{A}) = 0$ ) piisab leida risküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T$  selliselt, et  $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$  (PÕHJENDADA!). Seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et riskülik  $\mathcal{D}$  on ruut, kusjuures  $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{D}^\circ$  (PÕHJENDADA!).

Olgu  $T$  ruudu  $\mathcal{D}$  niisugune jaotusviis, mille kõik osaristikülikud on võrdse küljepikkusega ruudud; olgu nende osaruutude küljepikkus  $\kappa$ . Siis lemma 2.6, (c), (f) ja (b), põhjal

$$S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) = \sum_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = |\tilde{\Gamma}| \kappa^2 \leq 9 |\tilde{\Gamma}| \kappa^2 = 9 \sum_{(i,j) \in \tilde{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = 9(S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T)).$$

Kuna hulk  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv, siis saame ruudu  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T$  võrdse küljepikkusega osaruutudeks valida nii, et  $S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) - s_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{9}$  (PÕHJENDADA!), aga niisuguse jaotusviisi  $T$  korral  $S_{\chi_{\partial\mathcal{A}}}(T) < \varepsilon$ , nagu soovitud.  $\square$

Jaotise lõpetuseks tõestame järeldusena teoreemist 2.5 (ning lausetest 2.3 ja 2.4), et pidevate funktsioonidega määratud kõvertrapets on Jordani mõttes mõõtuv hulk.

**Lause 2.7.** (a) Olgu  $y = \alpha(x)$  ja  $y = \beta(x)$  lõigus  $[a, b]$  pidevad funktsioonid, kusjuures  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Siis kõvertrapets

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

on Jordani mõttes mõõtuv hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ).

(b) Olgu  $x = \gamma(y)$  ja  $x = \delta(y)$  lõigus  $[c, d]$  pidevad funktsioonid, kusjuures  $\gamma(y) \leq \delta(y)$  iga  $y \in [c, d]$  korral. Siis kõvertrapets

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$$

on Jordani mõttes mõõtuv hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ).

LAUSE 2.7 TÕESTUS. (a). Teoreemi 2.5 põhjal piisab kõvertrapetsi  $\mathcal{A}$  mõõtuvuseks näidata, et tema rajajoon  $\partial\mathcal{A}$  on nullmõõduline. Rajajoon  $\partial\mathcal{A}$  esitub ühendina  $\partial\mathcal{A} = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ , kus

$$L_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = \alpha(x)\}, \quad L_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a, \alpha(a) \leq y \leq \beta(a)\}, \\ L_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = \beta(x)\}, \quad L_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = b, \alpha(b) \leq y \leq \beta(b)\},$$

seega lause 2.3 põhjal piisab tema nullmõõdulisuseks näidata, et hulgad  $L_1, L_2, L_3$  ja  $L_4$  on nullmõõdulised. Hulkade  $L_1$  ja  $L_2$  ning  $L_3$  ja  $L_4$  nullmõõdulisus järeldub vastavalt lausest 2.4, (a) ning (b) (on võimalik ka juht, kus üks või mõlemad hulkadest  $L_3$  ja  $L_4$  on ühepunktilised, aga ühepunktiline hulk on nullmõõduline näite 2.2 põhjal).

(b). Väite tõestus on sümmeetriline väite (a) tõestusega.  $\square$

## 2.4. Mõõtuvas kinnises hulgas pideva kahe muutuva funktsiooni integreeruvus

Kõiki selles jaotises kasutatavaid tähistusi (nt.  $\Gamma$ ,  $\hat{\Gamma}$ ,  $\check{\Gamma}$ ,  $\bar{\Gamma}$ ,  $\tilde{\Gamma}$ ) on selgitatud lemmas 2.6.

**Teoreem 2.8.** *Jordani mõttes mõõtuvas kinnises hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  pidev kahe muutuva funktsioon on integreeruv selles hulgas.*

**TÕESTUS.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuv kinnine hulk ning olgu  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  pidev funktsioon. Kuna Jordani mõttes mõõtuv hulk on tõkestatud, siis leidub ristkülik  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  nii, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab lk. 159 valemiga (2.1) defineeritud funktsiooni  $\hat{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Seega, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab teoreemi tõestuseks leida ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$  nii, et, tähistades  $\omega_{ij} := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} \hat{f}(P) - \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} \hat{f}(P)$ ,

$$S_{\hat{f}}(T) - s_{\hat{f}}(T) = \sum_{(i,j) \in \Gamma} \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon.$$

Olgu  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  suvaline jaotusviis. Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud hulgas  $\mathcal{A}$ , seega funktsioon  $\hat{f}$  on tõkestatud, s.t. leidub reaalarv  $M > 0$  nii, et  $|\hat{f}(P)| \leq M$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral. Arvestades, et iga  $(i, j) \in \Gamma \setminus \hat{\Gamma}$  korral  $\omega_{ij} = 0$  ning et iga  $(i, j) \in \Gamma$  korral  $\omega_{ij} \leq 2M$  (PÕHJENDADA!),

**NB!** Kas lugeja mäletab, mis on  $\mu(\mathcal{D})$ ?

$$\begin{aligned} S_{\hat{f}}(T) - s_{\hat{f}}(T) &= \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{(i,j) \in \bar{\Gamma}} \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j + \sum_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq 2M \sum_{(i,j) \in \bar{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j + \max_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \omega_{ij} \sum_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j \\ &\leq 2M \sum_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j + \max_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \omega_{ij} \mu(\mathcal{D}) \\ &= 2M S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) + \max_{(i,j) \in \check{\Gamma}} \omega_{ij} \mu(\mathcal{D}). \end{aligned}$$

Hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuvuse tõttu on tema raja nullmõõduga hulk (vt. teoreemi 2.5), seega leidub reaalarv  $\delta_1 > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \implies S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Cantori teoreemi I.4.9 põhjal kinnises tõkestatud hulgas pideva funktsiooni ühtlasest pidevusest leidub reaalarv  $\delta_2 > 0$  nii, et

$$P, P' \in \mathcal{A}, d(P, P') < \delta_2 \implies |f(P) - f(P')| < \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})}.$$

Kui nüüd  $\Delta(T) < \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}$ , siis mis tahes  $(i, j) \in \check{\Gamma}$  ja mis tahes  $P, P' \in \mathcal{D}_{ij}$  korral  $d(P, P') < \delta_2$  (PÕHJENDADA!) ning seega  $\omega_{ij} \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})}$ . Niisiis, kui  $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \frac{\delta_2}{\sqrt{2}}\}$ , siis

$$S_{\hat{f}}(T) - s_{\hat{f}}(T) < 2M \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{D})} \mu(\mathcal{D}) = \varepsilon,$$

nagu soovitud. □

## 2.5. Integraal üle nullmõõduga hulga

**NB!** Kus on selle jaotise parim koht? Teoreemi 2.9 tõestus ei vaja jaotise 2.3 teoreemi 2.5.

**Teoreem 2.9.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes nullmõõduga hulk ning olgu  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tõkestatud funktsioon. Siis funktsioon  $f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = 0.$$

**NB!** Kuskil öelda, et kui me räägime hulgas  $\mathcal{A}$  integreeruvast funktsioonist, siis me mõistame implitsiitselt, et hulk  $\mathcal{A}$  on tõkestatud.

**TÕESTUS.** Olgu ristkülik  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Me kasutame standardseid tähistusi: kõneldes ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisist  $T$ , mõistame me selle all jaotusviisi, mis on määratud punktidega  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  ja  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ); kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame  $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$  ja  $\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ . Lisaks tähistame  $\Gamma := \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$  ja  $\hat{\Gamma} := \{(i, j) \in \Gamma: \mathcal{D}_{ij} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ .

Olgu funktsioon  $\hat{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  defineeritud valemiga (2.1) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et kui ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviis  $T$  rahuldab tingimust  $\Delta(T) < \delta$  (meenutame, et  $\Delta(T)$  tähistab jaotusviisi  $T$  osaristkülikute maksimaalset küljepikkust), siis mis tahes sellele jaotusviisile vastav funktsiooni  $\hat{f}$  Riemanni summa  $\sigma$  rahuldab tingimust  $|\sigma| < \varepsilon$ .

Olgu  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  suvaline jaotusviis ning olgu

$$P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Tähistame  $\sigma := \sum_{(i,j) \in \Gamma} \hat{f}(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$ . Funktsiooni  $f$  tõkestatuse tõttu on ka funktsioon  $\hat{f}$  tõkestatud, s.t. leidub reaalarv  $M > 0$  nii, et  $|\hat{f}(P)| \leq M$  iga  $P \in \mathcal{D}$  korral. Seega, arvestades, et  $\hat{f}(P_{ij}) = 0$  iga  $(i, j) \in \Gamma \setminus \hat{\Gamma}$  korral,

$$|\sigma| = \left| \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \hat{f}(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j \right| \leq \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} |\hat{f}(P_{ij})| \Delta x_i \Delta y_j \leq M \sum_{(i,j) \in \hat{\Gamma}} \Delta x_i \Delta y_j = M S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T).$$

Kuna  $\mathcal{A}$  on nullmõõduga hulk, s.t.  $\iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy = 0$ , siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \implies S_{\chi_{\mathcal{A}}}(T) < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Eelnevast näeme, et kui jaotusviis  $T$  rahuldab tingimust  $\Delta(T) < \delta$ , siis mis tahes punktide valiku (2.4) korral integraalsumma  $\sigma$  rahuldab tingimust  $|\sigma| < \varepsilon$ , nagu soovitud.  $\square$

Siinkohal on sobilik juhtida tähelepanu jaotise 3.1 lõpus tõestatavale järeldusele 3.3 (teoreemidest 2.9 ja 3.1, (b)), mis ütleb, et kui muuta integreeruva funktsiooni väärtusi nullmõõduga hulgal, jääb see “muudetud” funktsioon endiselt integreeruvaks ning selle “muudetud” funktsiooni integraali väärtus jääb samaks, mis esialgsel.

### § 3. Kahekordse integraali omadusi

Olgu kahe muutuja funktsioon  $u = f(x, y) = f(P)$  määratud ristkülikus

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Järgides eelmiste paragrahvide tähistusi, tähistame tähega  $T$  ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi osaristkülikuteks

$$\mathcal{D}_{ij} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

kus  $m, n \in \mathbb{N}$  ning

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d.$$

Kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1},$$

s.t.  $\Delta x_i$  ja  $\Delta y_j$  on osaristküliku  $\mathcal{D}_{ij}$  külgede pikkused, ning

$$\Delta(T) := \max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\},$$

s.t.  $\Delta(T)$  on selle jaotusviisi osaristkülikute maksimaalne küljepikkus.

Valime mingid punktid

$$P_{11} \in \mathcal{D}_{11}, \dots, P_{1n} \in \mathcal{D}_{1n}, \dots, P_{m1} \in \mathcal{D}_{m1}, \dots, P_{mn} \in \mathcal{D}_{mn} \quad (3.1)$$

(s.t. kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral valime mingi punkti  $P_{ij} \in \mathcal{D}_{ij}$ ).

Me tähistame

$$\sigma := \sigma_f := \sigma_f(T; P_{11}, \dots, P_{1n}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{mn}) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

s.t.  $\sigma = \sigma_f$  on funktsiooni  $f$  integraalsumma (ehk Riemanni summa), mis vastab ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisile  $T$  ja punktide valikule (3.1).

Kui funktsioon  $u = f(x, y) = f(P)$  on tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis tähistame kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$M_{ij} := M_{ij}(f) := \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P), \quad m_{ij} := m_{ij}(f) := \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P)$$

ja

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &:= \omega_{ij}(f) := M_{ij} - m_{ij} = \sup_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) - \inf_{P \in \mathcal{D}_{ij}} f(P) \\ &= \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} (f(P) - f(Q)) = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} |f(P) - f(Q)| \end{aligned}$$

ning

$$S(T) := S_f(T) := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \quad \text{ja} \quad s(T) := s_f(T) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

s.t.  $S(T) = S_f(T)$  ja  $s(T) = s_f(T)$  on vastavalt funktsiooni  $f$  Darboux' ülemsumma ja Darboux' alamsumma, mis vastavad risküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisile  $T$ .

Hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$  määratud kahe muutuja funktsiooni  $z = f(x, y) = f(P)$  korral defineerime funktsiooni  $\hat{f}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdustega

$$\hat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}. \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud aritmeetiliste tehetega

**Teoreem 3.1.** *Olgu kahe muutuja funktsioonid  $u = f(x, y) = f(P)$  ja  $v = g(x, y) = g(P)$  integreeruvad hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  ning olgu  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Siis*

(a) *korutis  $\alpha f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy;$$

(b) *funktsioonide  $f$  ja  $g$  summa  $f + g$  ja vahe  $f - g$  on integreeruvad hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy;$$

(c) *funktsioon  $\alpha f + \beta g$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy;$$

(d) *funktsioonide  $f$  ja  $g$  korutis  $fg$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ .*

Omadustele (a), (b) (summa kohta) ja (c) teoreemist 3.1 viidatakse vastavalt kui kahekordse integraali *homogeensusele*, *aditiivsusele* ja *lineaarsusele*.

Enne teoreemi 3.1 tõestamist toome ära ühe olulise järelduse tema väitest (a).

**Järeldus 3.2.** *Mõõtuvas hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  määratud konstantne kahe muutuja funktsioon  $f(x, y) = \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) on integreeruv selles hulgas, kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha dx dy = \alpha \mu(\mathcal{A})$$

(sümbol  $\mu(\mathcal{A})$  tähistab hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõõtu ehk pindala).

TÕESTUS. Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Antud juhul  $\hat{f} = \alpha \chi_{\mathcal{A}}$  ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Hulga  $\mathcal{A}$  mõõtuvuse tõttu tema karakteristik funktsioon  $\chi_{\mathcal{A}}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , seega teoreemi 3.1 väite (a) põhjal ka funktsioon  $\alpha \chi_{\mathcal{A}} = \hat{f}$  on integreeruv selles ristkülikus, s.t. funktsioon  $f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ ; seejuures

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} \alpha \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \alpha \chi_{\mathcal{A}}(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) \, dx \, dy = \alpha \mu(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

□

TEOREEMI 3.1 TÕESTUS. Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Tähistame

$$I := I_f := \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ja} \quad I_g := \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) \, dx \, dy.$$

(a). Vaatleme alguses juhtu, kus  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  (s.t.  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab väite tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni  $\alpha f$  integraalsumma  $\sigma_{\alpha f}$  korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad \implies \quad |\sigma_{\alpha f} - \alpha I| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned} |\sigma_{\alpha f} - \alpha I| &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - \alpha I \right| = |\alpha| \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I \right| \\ &= |\alpha| |\sigma_f - I|. \end{aligned}$$

Juhul, kui  $\alpha = 0$ , on järelduse väite kehtivus ilmne. Eeldame järgnevas, et  $\alpha \neq 0$ . Siis funktsiooni  $f$  integreeruvuse tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta \quad \implies \quad |\sigma_f - I| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|},$$

aga nüüd võrratuse  $\Delta(T) < \delta$  kehtides  $|\sigma_{\alpha f} - \alpha I| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$ , nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ). Sel juhul, arvestades, et funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab funktsiooni  $\hat{f}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ , ülaltõestatu põhjal funktsioon  $\alpha \hat{f} = \widehat{\alpha f}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , aga see tähendab, et funktsioon  $\alpha f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ ; seejuures

$$\iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} \alpha \hat{f}(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

(b). Vaatleme alguses juhtu, kus  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  (s.t.  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab väite tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava funktsiooni  $f \pm g$  integraalsumma  $\sigma_{f \pm g}$  korral)

$$\Delta(T) < \delta \quad \implies \quad |\sigma_{f \pm g} - (I_f \pm I_g)| < \varepsilon.$$

Selleks märgime kõigepealt, et

$$\begin{aligned} |\sigma_{f \pm g} - (I_f \pm I_g)| &= \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f(P_{ij}) \pm g(P_{ij})) \Delta x_i \Delta y_j - (I_f \pm I_g) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I_f \right) \pm \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I_g \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I_f \right| + \left| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n g(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I_g \right| \\ &= |\sigma_f - I_f| + |\sigma_g - I_g|. \end{aligned}$$

Funktsioonide  $f$  ja  $g$  integreeruvuse tõttu leiduvad reaalarvud  $\delta_1, \delta_2 > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \quad \implies \quad |\sigma_f - I_f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \Delta(T) < \delta_2 \quad \implies \quad |\sigma_g - I_g| < \frac{\varepsilon}{2};$$

niisiis võrratuse  $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$  kehtides  $|\sigma_{f \pm g} - (I_f \pm I_g)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , nagu soovitud.

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ). Sel juhul, arvestades, et funktsioonide  $f$  ja  $g$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab vastavalt funktsioonide  $\hat{f}$  ja  $\hat{g}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ , üaltõestatu põhjal funktsioon  $\hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , aga see tähendab, et funktsioon  $f + g$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ ; seejuures

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}} (\hat{f}(x, y) \pm \hat{g}(x, y)) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) \, dx \, dy \pm \iint_{\mathcal{D}} \hat{g}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy \pm \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

nagu soovitud.

(c). Väite (a) põhjal on funktsioonid  $\alpha f$  ja  $\beta g$  integreeruvad hulgas  $\mathcal{A}$ , seega

väite (b) põhjal on ka summa  $\alpha f + \beta g$  integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ ; seejures

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy &= \iint_{\mathcal{A}} \alpha f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{A}} \beta g(x, y) dx dy \\ &= \alpha \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

(d). Vaatleme alguses juhtu, kus  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  (s.t.  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab teoreemi 1.6 põhjal (vt. märkust 1.2) väite tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  korral)

$$\Delta(T) < \delta \implies \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(fg) \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et et ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$ , mis tahes  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  ning mis tahes  $P, Q \in \mathcal{D}_{ij}$  korral

$$\begin{aligned} f(P)g(P) - f(Q)g(Q) &= f(P)(g(P) - g(Q)) + g(Q)(f(P) - f(Q)) \\ &\leq |f(P)| |g(P) - g(Q)| + |g(Q)| |f(P) - f(Q)| \\ &\leq L_f \omega_{ij}(g) + L_g \omega_{ij}(f), \end{aligned}$$

kus  $L_f := \sup_{P \in \mathcal{D}} |f(P)|$  ja  $L_g := \sup_{P \in \mathcal{D}} |g(P)|$  (märgime, et funktsioonid  $f$  ja  $g$  on teoreemi 1.1 põhjal tõkestatud), järelikult  $\omega_{ij}(fg) \leq L_f \omega_{ij}(g) + L_g \omega_{ij}(f)$ . Seega

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(fg) \Delta x_i \Delta y_j \leq L_f \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(g) \Delta x_i \Delta y_j + L_g \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Eeldades üldisust kitsendamata, et  $L_f, L_g \neq 0$  (vastasel korral oleks  $f$  või  $g$  nullfunktsioon ning seega ka nende korrutis oleks nullfunktsioon), leiduvad funktsioonide  $f$  ja  $g$  integreeruvuse tõttu teoreemi 1.6 põhjal (vt. märkust 1.2) reaalarvud  $\delta_1, \delta_2 > 0$  nii, et

$$\Delta(T) < \delta_1 \implies \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2L_g}$$

ja

$$\Delta(T) < \delta_2 \implies \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(g) \Delta x_i \Delta y_j < \frac{\varepsilon}{2L_f}.$$

Niisiis, kui  $\Delta(T) < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ , siis

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(fg) \Delta x_i \Delta y_j < L_f \frac{\varepsilon}{2L_f} + L_g \frac{\varepsilon}{2L_g} = \varepsilon.$$

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ). Sel juhul, arvestades, et funktsioonide  $f$  ja  $g$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab vastavalt funktsioonide  $\hat{f}$  ja  $\hat{g}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ , ülalttõestatu põhjal funktsioon  $\hat{f}\hat{g} = \widehat{fg}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , aga see tähendab, et funktsioon  $fg$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ .  $\square$

**Märkus 3.1.** Teoreemi 3.1 väidete (a), (b) ja (d) tõestusi saanuks lühendada juhtude, kus  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  ning kus see võrdus ei tarvitse kehtida, eraldi vaatlemise arvelt. Nimelt, nende väidete tõestusteks võinuksime järgida tõestust juhul  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ , kuid võtta funktsioonide  $\alpha f$ ,  $f + g$  ja  $fg$  rolli vastavalt funktsioonid  $\widehat{\alpha f} = \alpha \hat{f}$ ,  $\widehat{f + g} = \hat{f} + \hat{g}$  ja  $\widehat{fg} = \hat{f}\hat{g}$ .

Selle punkti lõpetuseks tõestame jaotise 2.5 lõpus väljareklaamitud järelduse 3.3 (teoreemidest 2.9 ja 3.1, (b)), mis ütleb, et kui muuta integreeruva funktsiooni väärtusi nullmõõduga hulgal, jääb see “muudetud” funktsioon endiselt integreeruvaks ning selle “muudetud” funktsiooni integraali väärtus jääb samaks, mis esialgsel.

**Järeldus 3.3.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk, olgu  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  integreeruv funktsioon ning olgu  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$  (Jordani mõttes) nullmõõduga hulk ja  $g: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  tõkestatud funktsioon, kusjuures  $g(P) = f(P)$  iga  $P \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_0$  korral. Siis ka funktsioon  $g$  on integreeruv, kusjuures  $\int_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy$ .

**TÕESTUS.** Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Defineerime funktsiooni  $h_0 := (g - f)|_{\mathcal{A}_0}$  ning funktsioonid  $\hat{f}, \hat{g}, \hat{h}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  vastavalt võrdustega (2.1) ja

$$\hat{g}(P) = \begin{cases} g(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \hat{h}(P) = \begin{cases} h(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}_0, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}_0. \end{cases}$$

Teoreemi 2.9 põhjal on funktsioon  $h_0$  integreeruv hulgas  $\mathcal{A}_0$ , s.t. funktsioon  $\hat{h}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures  $\iint_{\mathcal{D}} \hat{h}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}_0} h_0(x, y) dx dy = 0$ . Kuna ka funktsioon  $\hat{f}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , siis teoreemi 3.1, (b), põhjal on funktsioon  $\hat{g} = \hat{f} + \hat{h}$  integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , s.t. funktsioon  $g$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{g}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{D}} \hat{h}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

$\square$

## 3.2. Kahekordse integraali omadused, mis on seotud järjestusega

**Teoreem 3.4.** Olgu kahe muutuja funktsioonid  $u = f(x, y) = f(P)$  ja  $v = g(x, y) = g(P)$  integreeruvad hulgas  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ .

(a) Kui  $f(P) \geq 0$  iga  $P \in \mathcal{A}$  korral, siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy \geq 0.$$

(b) Kui  $f(P) \geq g(P)$  iga  $P \in \mathcal{A}$  korral, siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy \geq \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy. \quad (3.3)$$

(c) Funktsiooni  $f$  absoluutväärtus  $|f|$  (s.t. funktsioon  $w = |f(x, y)| = |f(P)|$ ) on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\left| \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_{\mathcal{A}} |f(x, y)| dx dy. \quad (3.4)$$

(d) (Kahekordse integraali keskvaartusteoreem.) Olgu hulk  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõduv. Siis leidub arv  $\gamma \in \mathbb{R}$  nii, et

$$\inf_{P \in \mathcal{A}} f(P) =: \alpha \leq \gamma \leq \beta := \sup_{P \in \mathcal{A}} f(P) \quad (3.5)$$

ja

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = \gamma \mu(\mathcal{A}) \quad (3.6)$$

( $\mu(\mathcal{A})$  tähistab hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõõtu); kui hulk  $\mathcal{A}$  on kinnine ja sidus ning funktsioon  $f$  on pidev hulgas  $\mathcal{A}$ , siis leidub punkt  $C \in \mathcal{A}$  nii, et

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = f(C) \mu(\mathcal{A}). \quad (3.7)$$

Omadustele (a) ja (b) teoreemist 3.4 viidatakse kui kahekordse integraali *monotoonsusele*.

TEOREEMI 3.4 TÕESTUS. Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ .

(a). Kui  $f(P) \geq 0$  iga  $P \in \mathcal{A}$  korral, siis funktsiooni  $\hat{f}$  kõik Darboux' summad on mittenegatiivsed, järelikult

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy = \inf_T S_{\hat{f}}(T) \geq 0,$$

kus infimum on võetud üle ristküliku  $\mathcal{D}$  kõikvõimalike jaotusviiside  $T$  osaristkülikuteks ja  $S_{\hat{f}}(T)$  tähistab jaotusviisile  $T$  vastavat funktsiooni  $\hat{f}$  Darboux' ülemsummat.

(b). Kui  $f(P) \geq g(P)$  iga  $P \in \mathcal{A}$  korral, siis  $f(P) - g(P) \geq 0$  iga  $P \in \mathcal{A}$  korral, seega teoreemi 3.1, (b), ja väite (a) põhjal

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} (f(x, y) - g(x, y)) dx dy \geq 0,$$

millest järeldub (3.3).

(c). Veendume kõigepealt, et funktsioon  $|f|$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ .

Vaatleme alguses juhtu, kus  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$  (s.t.  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$  on ristkülik). Sel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab teoreemi 1.6 põhjal (vt. märkust 1.2) funktsiooni  $|f|$  integreeruvuseks hulgas  $\mathcal{A}$  leida ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T$  nii, et

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(|f|) \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon. \quad (3.8)$$

Selleks märgime, et ristküliku  $\mathcal{D}$  mis tahes jaotusviisi  $T$  ning mis tahes  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\omega_{ij}(|f|) = \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} (|f(P)| - |f(Q)|) \leq \sup_{P, Q \in \mathcal{D}_{ij}} |f(P) - f(Q)| = \omega_{ij}(f). \quad (3.9)$$

Funktsiooni  $f$  integreeruvuse tõttu saame teoreemi 1.6 põhjal (vt. märkust 1.2) leida ristküliku  $\mathcal{D}$  jaotusviisi  $T$  nii, et

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij}(f) \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon,$$

aga võrratuse (3.9) põhjal rahuldab selline jaotusviis  $T$  ka tingimust (3.8).

Vaatleme nüüd üldist juhtu (s.t. me ei eelda enam, et  $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ ). Sel juhul, arvestades, et funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{A}$  tähendab funktsiooni  $\hat{f}$  integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ , ülaltõestatu põhjal funktsioon  $|\hat{f}| = \widehat{|f|}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , aga see tähendab, et funktsioon  $|f|$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ .

Võrratus (3.4) on samaväärne võrratusteahelaga

$$-\iint_{\mathcal{A}} |f(x, y)| dx dy \leq \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathcal{A}} |f(x, y)| dx dy. \quad (3.10)$$

Selle ahela esimene võrratus on samaväärne võrratusega

$$-\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} (-f(x, y)) dx dy \leq \iint_{\mathcal{A}} |f(x, y)| dx dy,$$

mis, samuti nagu ka võrratusteahela (3.10) teine võrratus, järeldub väitest (b), sest

$$-f(x, y) \leq |f(x, y)| \quad \text{ja} \quad f(x, y) \leq |f(x, y)| \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

(d). Väite tõestus sarnaneb ühe muutuja funktsiooni Riemanni integraali kesk-  
väärtusteoreemi tõestusega. Järelduse 3.2 ja väite (b) põhjal

$$\alpha \mu(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} \alpha \, dx \, dy \leq \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{\mathcal{A}} \beta \, dx \, dy = \beta \mu(\mathcal{A}).$$

Siit näeme, et kui  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ , siis ka  $\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy = 0$  ning seega sobib arvu  $\gamma$   
rolli mis tahes arv arvude  $\alpha$  ja  $\beta$  vahelt; kui aga  $\mu(\mathcal{A}) \neq 0$ , siis tähistades

$$\gamma := \frac{\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy}{\mu(\mathcal{A})},$$

kehtivad (3.5) ja (3.6).

Eeldame nüüd lisaks, et hulk  $\mathcal{A}$  on kinnine ja sidus ning et funktsioon  $f$  on pidev  
hulgas  $\mathcal{A}$ . Rahuldagu arv  $\gamma \in \mathbb{R}$  tingimusi (3.5) ja (3.6) (sellise arvu  $\gamma$  olemasolu  
oleme juba tõestanud). Kuna hulk  $\mathcal{A}$  on kinnine, siis Weierstrassi teoreemi I.4.8  
põhjal leiduvad punktid  $A, B \in \mathcal{A}$  nii, et

$$f(A) = \inf_{P \in \mathcal{A}} f(P) = \alpha \quad \text{ja} \quad f(B) = \sup_{P \in \mathcal{A}} f(P) = \beta.$$

Kuna hulk  $\mathcal{A}$  on sidus, siis Bolzano–Cauchy teoreemi I.4.6 põhjal, arvestades, et  
 $f(A) \leq \gamma \leq f(B)$ , leidub punkt  $C \in \mathcal{A}$  nii, et  $f(C) = \gamma$ , aga nüüd kehtib (3.7).  $\square$

### 3.3. Kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi

**Teoreem 3.5.** *Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk, olgu funktsioon  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  integreeruv  
(hulgas  $\mathcal{A}$ ) ning olgu  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuv alamhulk. Siis funktsioon  $f$  on  
integreeruv ka hulgas  $\mathcal{C}$  (s.t. ahend  $f|_{\mathcal{C}}$  on integreeruv (hulgas  $\mathcal{C}$ )).*

**TÕESTUS.** Olgu riskülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Defineerime funktsioonid  
 $\hat{f}, \hat{f}_{\mathcal{C}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdustega

$$\hat{f}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}, \end{cases} \quad \text{ja} \quad \hat{f}_{\mathcal{C}}(P) = \begin{cases} f(P), & \text{kui } P \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{kui } P \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}. \end{cases}$$

Siis funktsiooni  $f$  integreeruvus hulgas  $\mathcal{C}$  tähendab funktsiooni  $\hat{f}_{\mathcal{C}}$  integreeruvust  
riskülikus  $\mathcal{D}$ . Kuna funktsioon  $f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , siis funktsioon  $\hat{f}$  on  
integreeruv riskülikus  $\mathcal{D}$ ; kuna hulk  $\mathcal{C}$  on Jordani mõttes mõõtuv, siis tema karak-  
teristlik funktsioon  $\chi_{\mathcal{C}}$  on integreeruv riskülikus  $\mathcal{D}$ ; seega teoreemi 3.1, (d), põhjal  
on korrutis  $\hat{f}\chi_{\mathcal{C}}$  integreeruv riskülikus  $\mathcal{D}$ . Teoreemi tõestuseks jääb nüüd vaid mär-  
kida, et  $\hat{f}_{\mathcal{C}} = \hat{f}\chi_{\mathcal{C}}$ .  $\square$

**Teoreem 3.6** (kahekordse integraali aditiivsus piirkonna järgi). *Olgu  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$   
tõkestatud hulgad, kusjuures nende ühisosa  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  Jordani mõõt on null, ning olgu  
funktsioon  $f: \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  integreeruv hulkades  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$ . Siis funktsioon  $f$  on integ-  
reeruv ka ühendis  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , kusjuures*

$$\iint_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{B}} f(x, y) \, dx \, dy.$$

TÕESTUS. Kuna hulgad  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$  on tõkestatud, siis ka ühend  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  on tõkestatud, seega leidub ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  nii, et  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ . Kõikjal tõestuses kasutame järgnevat tähistust: kui  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , siis funktsioon  $\hat{f}_{\mathcal{C}}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  on defineeritud võrdusega

$$\hat{f}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{C}, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}. \end{cases}$$

Kõneldes funktsiooni  $\hat{f}_{\mathcal{C}}$  integreeruvusest, peame me silmas tema integreeruvust ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Funktsiooni  $f$  integreeruvus ühendis  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  tähendab selle tähistuse kohaselt funktsiooni  $\hat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$  integreeruvust (ristkülikus  $\mathcal{D}$ ).

Paneme tähele, et  $\hat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \hat{f}_{\mathcal{A}} + \hat{f}_{\mathcal{B}} - \hat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$ . Kuna funktsioonid  $\hat{f}_{\mathcal{A}}$ ,  $\hat{f}_{\mathcal{B}}$  ning  $\hat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$  on integreeruvad (sest funktsiooni  $f$  integreeruvus hulkades  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$  tähendab vastavalt funktsioonide  $\hat{f}_{\mathcal{A}}$  ja  $\hat{f}_{\mathcal{B}}$  integreeruvust ning funktsioon  $\hat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$  on integreeruv teoreemi 2.9 põhjal), siis funktsioon  $\hat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}$  on integreeruv (sest teoreemi 3.1, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide summa ja vahe integreeruvad), s.t. funktsioon  $f$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Seejuures (jällegi teoreemi 3.1, (b), põhjal)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} f(x, y) dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} (\hat{f}_{\mathcal{A}}(x, y) + \hat{f}_{\mathcal{B}}(x, y) - \hat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x, y)) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}_{\mathcal{A}}(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}_{\mathcal{B}}(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{B}} f(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} f(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{B}} f(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

sest teoreemi 2.9 põhjal  $\iint_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} f(x, y) dx dy = 0$ . □

### 3.4. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade põhiomadused

#### 3.4.1. Jordani mõttes mõõtuvate hulkade omadused, mis on seotud hulgateoreetiliste tehetega

**Lause 3.7.** Olgu  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuvad hulgad. Siis ka nende hulka-de ühend  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ , ühisosa  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  ja hulgateoreetiline vahe  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  on Jordani mõttes mõõtuvad. Seejuures

- (a) kui  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ , siis  $\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B})$ ;
- (b) kui  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , siis  $\mu(\mathcal{A}) \leq \mu(\mathcal{B})$ ;
- (c) kui  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , siis  $\mu(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$ ;
- (d)  $\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B})$ .

Omadustele (a)–(d) viidatakse vastavalt kui Jordani mõõdu *aditiivsusele*, *monotoonsusele*, *subtraktiivsusele* ja *subaditiivsusele*.

LAUSE 3.7 TÕESTUS. Olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ . Kuna  $\chi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}} \chi_{\mathcal{B}}$ , siis funktsioon  $\chi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$  (sest hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$  mõõtuvus tähendab vastavalt karakteristlike funktsioonide  $\chi_{\mathcal{A}}$  ja  $\chi_{\mathcal{B}}$  integreeruvust ning teoreemi 3.1, (d), põhjal on integreeruvate funktsioonide korrutis integreeruv); see aga tähendab, et hulk  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$  on Jordani mõttes mõõtuv.

Edasi, kuna  $\chi_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}} = \chi_{\mathcal{D}} - \chi_{\mathcal{A}}$ , siis funktsioon  $\chi_{\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}}$  on integreeruv (sest teoreemi 3.1, (b), põhjal on integreeruvate funktsioonide vahe integreeruv), see aga tähendab, et hulk  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}$  on mõõtuv. Siit järeldub, et ka hulk  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$  on mõõtuv.

Kuna  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{B})$ , siis eelneva põhjal on hulk  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$  mõõtuv (sest vahe  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$  on mõõtuv ning mõõtuvate hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{B}$  ühisosa on mõõtuv).

Lõpuks, De Morgani valemite põhjal

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (\mathcal{D} \setminus (\mathcal{D} \setminus \mathcal{A})) \cup (\mathcal{D} \setminus (\mathcal{D} \setminus \mathcal{B})) = \mathcal{D} \setminus ((\mathcal{D} \setminus \mathcal{A}) \cap (\mathcal{D} \setminus \mathcal{B})),$$

seega eelneva põhjal on hulk  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  mõõtuv.

Tõestame nüüd väited (a)–(d).

(a). Olgu  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ . Siis  $\chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = \chi_{\mathcal{A}} + \chi_{\mathcal{B}}$  ning seega teoreemi 3.1, (b), põhjal

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) &= \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} (\chi_{\mathcal{A}}(x, y) + \chi_{\mathcal{B}}(x, y)) \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{A}}(x, y) \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}} \chi_{\mathcal{B}}(x, y) \, dx \, dy = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

(b) ja (c). Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ . Kuna  $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ , kusjuures  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$ , siis väite (a) põhjal

$$\mu(\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) \geq \mu(\mathcal{A}).$$

Eelnevast näeme ka, et  $\mu(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{B}) - \mu(\mathcal{A})$ .

(d). Kuna  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$ , kusjuures  $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) = \emptyset$ , ja  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ , siis väidete (a) ja (b) põhjal

$$\mu(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \mu(\mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})) = \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B} \setminus \mathcal{A}) \leq \mu(\mathcal{A}) + \mu(\mathcal{B}).$$

□

**Ülesanne 3.1.** Olgu  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuvad hulgad. Tõestada, et ka hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{B}$  sümmeetriline vahe  $\mathcal{A} \triangle \mathcal{B} := (\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}) \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{A})$  on Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures  $|\mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{B})| \leq \mu(\mathcal{A} \triangle \mathcal{B})$ .

LAUSE 2.3 TÕESTUS, MIS TOETUB LAUSELE 3.7. Olgu  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subset \mathbb{R}^2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) nullmõõduga hulgad, (s.t. Jordani mõttes mõõtuvad hulgad, mille Jordani mõõt on null). Lause 3.7 põhjal on ka ühend  $\mathcal{A} := \bigcup_{k=1}^n \mathcal{A}_k$  Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures Jordani mõõdu subaditiivsuse (lause 3.7, (d)) põhjal  $\mu(\mathcal{A}) \leq \sum_{k=1}^n \mu(\mathcal{A}_k) = 0$ . Kuna hulga Jordani mõõt ei saa olla negatiivne, siis järeldub siit, et  $\mu(\mathcal{A}) = 0$ . □

### 3.4.2. Jordani mõõdu invariantisus nihke suhtes

Meenutame, et ruum  $\mathbb{R}^m$  on vektorruum (üle korpuse  $\mathbb{R}$ ): kui  $P = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $Q = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$  ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , siis summa  $P + Q \in \mathbb{R}^m$  ja kordne  $\alpha P \in \mathbb{R}^m$  on defineeritud võrdustega

$$P + Q := (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m) \quad \text{ja} \quad \alpha P := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m).$$

Kui  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^m$  ning  $Q \in \mathbb{R}^m$  ja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , siis hulga  $\mathcal{A}$  nihe  $\mathcal{A} + Q$  ja kordne  $\alpha \mathcal{A}$  on defineeritud võrdustega

$$\mathcal{A} + Q := \{P + Q : P \in \mathcal{A}\} \quad \text{ja} \quad \alpha \mathcal{A} := \{\alpha P : P \in \mathcal{A}\}.$$

**Teoreem 3.8.** *Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ . Kui hulk  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv, siis*

- (a) *mis tahes punkti  $Q \in \mathbb{R}^2$  korral on ka nihe  $\mathcal{A} + Q$  Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures*

$$\mu(\mathcal{A} + Q) = \mu(\mathcal{A});$$

- (b) *mis tahes arvu  $\alpha \in \mathbb{R}$  korral on ka kordne  $\alpha \mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuv, kusjuures*

$$\mu(\alpha \mathcal{A}) = |\alpha| \mu(\mathcal{A}).$$

Jordani mõttes mõõtuvate hulkade  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  omadusele (a) teoreemist 3.8 viidatakse kui *Jordani mõõdu invariantisusele nihke suhtes*.

TEOREEMI 3.8 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA.

□

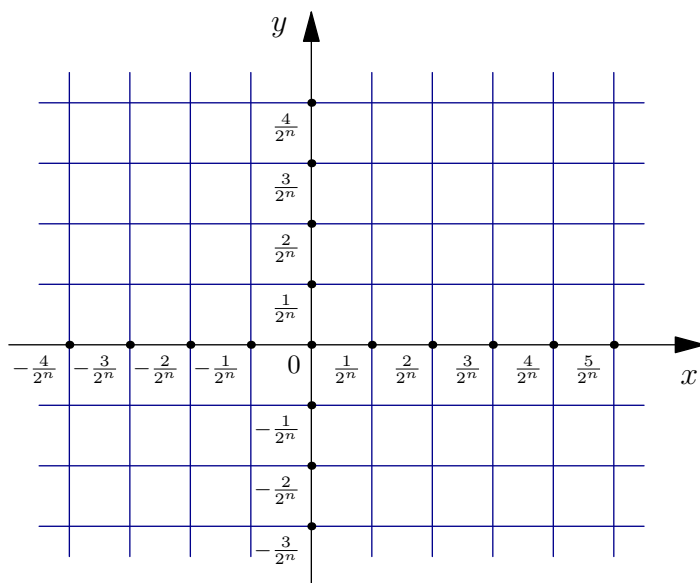
## § 4. Teine vaatenurk Jordani mõõdule ja kahekordsele integraalile

### 4.1. Jordani mõõdu alternatiivne (samaväärne) definitsioon

Tähistame iga  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  korral

$$\mathfrak{C}_n := \left\{ I \times J \subset \mathbb{R}^2 : I = \left[ \frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right] \text{ ja } J = \left[ \frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right] \text{ mingite } i, j \in \mathbb{Z} \text{ korral} \right\}.$$

Kogumi  $\mathfrak{C}_n$  hulkadele viitame kui *diaadilistele ruutudele* küljepikkusega  $\frac{1}{2^n}$ .



JOONIS 4.1. Joonisel kujutatud ruudustik koosneb diaadilistest ruutudest küljepikkusega  $\frac{1}{2^n}$ .

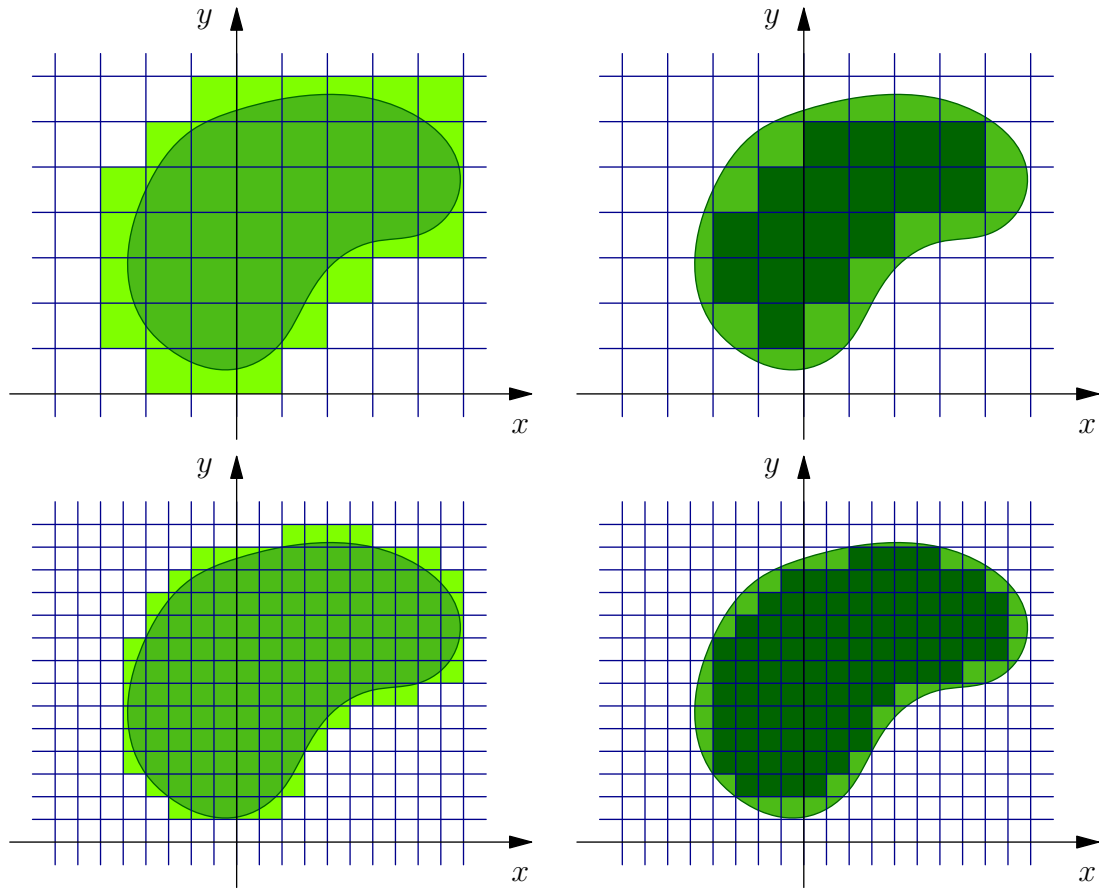
Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk. Tähistame iga  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$  korral

$$\hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{C \in \mathfrak{C}_n : C \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\} \quad \text{ja} \quad \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{C \in \mathfrak{C}_n : C \subset \mathcal{A}\},$$

ning

$$\hat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{C \in \hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} C \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} C.$$

(vt. joonist 4.2). Sümbolitega  $S(\hat{\mathcal{A}}_n)$  ja  $S(\check{\mathcal{A}}_n)$  tähistame vastavalt hulkade  $\hat{\mathcal{A}}_n$  ja  $\check{\mathcal{A}}_n$  pindalad: need hulgad esituvad paarikaupa lõikumatu sisemustega (diaadiliste) ruutude ühenditena; nende hulkade pindalad defineerime kui vastavate ruutude pindalade summad; ruudu pindala defineerime kui tema küljepikkuse ruudu. Arvestades, et hulgad  $\hat{\mathcal{A}}_n$  ja  $\check{\mathcal{A}}_n$  on vastavalt kogumite  $\hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  ja  $\check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  ruutude ühendid, kusjuures nimetatud kogumite ruutude sisemused on paarikaupa lõikumatud ning nende



JOONIS 4.2. Kahes ülemises teljestikus kujutatud ruudustikud koosnevad diaadilistest ruutudest küljepikkusega  $\frac{1}{2^n}$  (teatava  $n \in \mathbb{N}$  korral); kahes alumises teljestikus kujutatud ruudustikud koosnevad diaadilistest ruutudest küljepikkusega  $\frac{1}{2^{n+1}}$ . Rohelisega kujutatud neerukujuline hulk igas teljestikus on meie hulk  $\mathcal{A}$ . Kahes vasakpoolses teljestikus heleroheliseks värvitud ruudud (koos hulgaga  $\mathcal{A}$ ) moodustavad vastavalt hulgad  $\hat{\mathcal{A}}_n$  ja  $\hat{\mathcal{A}}_{n+1}$ ; kahes parempoolses teljestikus tumeroheliseks värvitud ruudud moodustavad vastavalt hulgad  $\check{\mathcal{A}}_n$  ja  $\check{\mathcal{A}}_{n+1}$ . Must-valge televisiooni vaatajad siin neid hulki (hele/tume)rohelisena ei näe!

ruutude küljepikkused on  $\frac{1}{2^n}$  ja pindalad seega  $\frac{1}{2^{2n}}$ , saame, et

$$\begin{aligned} S(\hat{\mathcal{A}}_n) &= \frac{1}{2^{2n}} \times \text{ruutude arv kogumis } \hat{\mathcal{C}}_n(\mathcal{A}), \\ S(\check{\mathcal{A}}_n) &= \frac{1}{2^{2n}} \times \text{ruutude arv kogumis } \check{\mathcal{C}}_n(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\hat{\mathcal{A}}_0 \supset \hat{\mathcal{A}}_1 \supset \hat{\mathcal{A}}_2 \supset \dots \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_0 \subset \check{\mathcal{A}}_1 \subset \check{\mathcal{A}}_2 \subset \dots \quad (4.1)$$

(intuitiivselt on see aimatav jooniselt 4.2) ning järelikult

$$S(\hat{\mathcal{A}}_0) \geq S(\hat{\mathcal{A}}_1) \geq S(\hat{\mathcal{A}}_2) \geq \dots \quad \text{ja} \quad S(\check{\mathcal{A}}_0) \leq S(\check{\mathcal{A}}_1) \leq S(\check{\mathcal{A}}_2) \leq \dots \quad (4.2)$$

**Ülesanne 4.1.** Tõestada sisalduvused (4.1) ja võrratused (4.2).

Seega eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\hat{\mathcal{A}}_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} S(\hat{\mathcal{A}}_n) =: \mu^*(\mathcal{A}) \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S(\check{\mathcal{A}}_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} S(\check{\mathcal{A}}_n) =: \mu_*(\mathcal{A});$$

seejuures

$$\mu^*(\mathcal{A}) \geq \mu_*(\mathcal{A}).$$

Neid piirväärtusi (ehk, teisisõnu, rajasid)  $\mu^*(\mathcal{A})$  ja  $\mu_*(\mathcal{A})$  nimetatakse vastavalt hulga  $\mathcal{A}$  Jordani välismõõduks ja hulga  $\mathcal{A}$  Jordani sisemõõduks.

**Teoreem 4.1.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk ning olgu ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  selline, et  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ . Siis

- (a)  $\mu^*(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$ , s.t. hulga  $\mathcal{A}$  Jordani välismõõtu  $\mu^*(\mathcal{A})$  on võrdne Darboux' ülemise integraaliga  $\overline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$  tema karakteristikust funktsioonist  $\chi_{\mathcal{A}}$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$ ;
- (b)  $\mu_*(\mathcal{A}) = \underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$ , s.t. hulga  $\mathcal{A}$  Jordani sisemõõtu  $\mu_*(\mathcal{A})$  on võrdne Darboux' alumise integraaliga  $\underline{\mathcal{I}}_{\mathcal{D}}\chi_{\mathcal{A}}$  tema karakteristikust funktsioonist  $\chi_{\mathcal{A}}$  üle ristküliku  $\mathcal{D}$ .

TEOREEMI 4.1 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

Järgnev teoreem on vahetu järeldus Jordani mõttes mõõtuvuse definitsioonist 2.3 ja teoreemist 4.1.

**Teoreem 4.2.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) hulk  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv;
- (ii) hulk  $\mathcal{A}$  on kvadreeruv, s.t. tema Jordani sisemõõtu  $\mu_*(\mathcal{A})$  ja Jordani välismõõtu  $\mu^*(\mathcal{A})$  on võrdsed:  $\mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A})$ .

Seejuures (s.t. hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuvuse juhul) hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõõtu  $\mu(\mathcal{A})$  (ehk, teisisõnu, pindala  $S_{\mathcal{A}}$ ) on võrdne tema Jordani sisemõõdu  $\mu_*(\mathcal{A})$  ja Jordani välismõõdu  $\mu^*(\mathcal{A})$  ühise väärtusega:

$$S_{\mathcal{A}} = \mu(\mathcal{A}) = \mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A}). \quad (4.3)$$

Jaotise lõpetuseks demonstreerime veel üht võimalust Jordani välis- ja sisemõõdu defineerimiseks (loomulikult eelnevaga samaväärsel moel). Selleks toome kõigepealt sisse ristküliksumma ja selle pindala mõisted.

*Ristküliksumma* all mõistame me järgnevas (koordinaat)ristkülikute lõplikku ühendit. Teisisõnu, ristküliksumma on hulk  $\mathcal{Q}$  ruumis  $\mathbb{R}^2$ , mis esitub kujul

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j] \times [c_j, d_j],$$

kus  $n \in \mathbb{N}$  ning  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ , kusjuures  $a_j < b_j$  ja  $c_j < d_j$  iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral.

Iga ristküliksumma  $\mathcal{Q}$  esitub paarikaupa lõikumatu sisemustega ristkülikute lõpliku ühendina. Ristküliksumma  $\mathcal{Q}$  pindala  $S(\mathcal{Q})$  defineeritakse kui niisuguste (paarikaupa lõikumatu sisemustega) ristkülikute pindalade summa. (Ristküliku  $\mathcal{R} := [a, b] \times [c, d]$  pindala  $S(\mathcal{R})$  defineeritakse kui tema külgede pikkuste korrutis:  $S(\mathcal{R}) = (b - a)(d - c)$ .)

**Teoreem 4.3.** *Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk.*

- (a) *Hulga  $\mathcal{A}$  Jordani välismõõt on seda hulka sisaldavate ristküliksummade pindalade hulga alumine raja:*

$$\mu^*(\mathcal{A}) = \inf \left\{ S(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2 \text{ on ristküliksumma, } \mathcal{Q} \supset \mathcal{A} \right\}. \quad (4.4)$$

- (b) *Hulga  $\mathcal{A}$  Jordani sisemõõt on selles hulgas sisalduvate ristküliksummade pindalade hulga ülemine raja; seejuures, kui hulk  $\mathcal{A}$  ei sisalda ühtegi ristküliksummat (niisugune olukord leiab aset parajasti siis, kui hulga  $\mathcal{A}$  sisemus  $\mathcal{A}^\circ$  on tühi hulk), on hulga  $\mathcal{A}$  Jordani sisemõõt võrdne nulliga:*

$$\mu_*(\mathcal{A}) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \mathcal{A}^\circ = \emptyset; \\ \sup \left\{ S(\mathcal{Q}) : \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^2 \text{ on ristküliksumma, } \mathcal{Q} \subset \mathcal{A} \right\}, & \text{kui } \mathcal{A}^\circ \neq \emptyset. \end{cases} \quad (4.5)$$

Teoreem 4.3 esitab veel ühe viisi Jordani välis- ja sisemõõdu defineerimiseks (eelnevaga samaväärsel moel): tõkestatud hulga  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani välis- ja sisemõõt defineeritakse kirjanduses sageli kui vastavalt võrduste (4.4) ja (4.4) parem pool.

**TEOREEMI 4.3 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA.** □

**Märkus 4.1.** Kui me hakkaksime defineerima tõkestatud hulga  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  pindala  $S_{\mathcal{A}}$  lähtudes oma eelmatemaatilistest arusaamadest, siis oleks loomulik nõuda, et iga hulgas  $\mathcal{A}$  sisalduva ristküliksumma  $\check{\mathcal{Q}}$  ja iga hulga  $\mathcal{A}$  sisaldava ristküliksumma  $\hat{\mathcal{Q}}$  korral  $S_{\check{\mathcal{Q}}} \leq S_{\mathcal{A}} \leq S_{\hat{\mathcal{Q}}}$  (sümbolid  $S_{\check{\mathcal{Q}}}$  ja  $S_{\hat{\mathcal{Q}}}$  tähistavad vastavalt ristküliksummade  $\check{\mathcal{Q}}$  ja  $\hat{\mathcal{Q}}$  pindalasid – ristküliksumma pindala on meil “loomulikult viisil” defineeritud). Arvuhulga rajade definitsiooni põhjal peaksid seega kehtima võrratused  $\mu_*(\mathcal{A}) \leq S_{\mathcal{A}} \leq \mu^*(\mathcal{A})$ , s.t. hulga  $\mathcal{A}$  pindala  $S_{\mathcal{A}}$  peaks olema mingi arv hulga  $\mathcal{A}$  Jordani sisemõõdu  $\mu_*(\mathcal{A})$  ja välismõõdu  $\mu^*(\mathcal{A})$  vahel. Jääb lahtiseks küsimus: millise arvu väärtuste  $\mu_*(\mathcal{A})$  ja  $\mu^*(\mathcal{A})$  vahelt me ikkagi peaksime pindalaks  $S_{\mathcal{A}}$  valima? Igati loomulik on “to play it safe” ning defineerida pindala  $S_{\mathcal{A}}$  ainult selliste hulkade  $\mathcal{A}$  jaoks, mille Jordani sisemõõt ja välismõõt on võrdsed, kusjuures niisugusel juhul defineerida hulga  $\mathcal{A}$  pindala kui nende sisemõõdu ja välismõõdu ühine väärtus. Teoreem 4.2 ütleb, et just niimoodi (tõsi küll, implitsiitselt) me hulga  $\mathcal{A}$  pindala defineerisimegi.

Kirjanduses tavaliselt defineeritaksegi tõkestatud hulga  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuvus kui tema *kvadreeruvus* (vt. teoreemi 4.2 tingimust (ii)), kusjuures hulga  $\mathcal{A}$  Jordani mõõt  $\mu(\mathcal{A})$  (ehk pindala  $S_{\mathcal{A}}$ ) defineeritakse võrdusega (4.3).

## 4.2. Kahekordse integraali alternatiivne (samaväärne) definitsioon

Paljudes allikates defineeritakse kahe muutuja funktsiooni Riemanni mõttes integreeruvus ja (kahekordne) Riemanni integraal käesolevas konspektis toodust erineval moel. Selles punktis toome ära ühe niisuguse alternatiivse, kuid käesolevas konspektis tooduga samaväärse definitsiooni. Täpsemalt, eeldades, et  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  on Jordani mõttes mõõtuv hulk ning  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ , defineerime me funktsiooni  $f$   $R$ -integreeruvuse ja  $R$ -integraali temast üle hulga  $\mathcal{A}$  ning näitame, et need  $R$ -integreeruvus ja  $R$ -integraal on täpselt sama, mis käesoleva peatüki paragrahvis 2 defineeritud Riemanni mõttes integreeruvus ja Riemanni integraal (üle hulga  $\mathcal{A}$ ). Niisiis, need  $R$ -integreeruvuse ja  $R$ -integraali definitsioonid ongi üks võimalik versioon Riemanni mõttes integreeruvuse ja Riemanni integraali alternatiivsetest, kuid käesolevas konspektis tooduga samaväärsetest definitsioonidest.

Niisiis, olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuv hulk ning olgu  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Jaotame hulga  $\mathcal{A}$  lõplikuks arvuks paarikaupa lõikumatute sisemustega Jordani mõttes mõõtuvateks hulkadeks  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{A}_j, \quad \text{kus } \mathcal{A}_j^\circ \cap \mathcal{A}_k^\circ = \emptyset, \text{ kui } j \neq k. \quad (4.6)$$

Hulga  $\mathcal{A}$  esitusele (4.6) viitame kui hulga  $\mathcal{A}$  *jaotusviisile* (4.6) ((Jordani mõttes mõõtuvateks) hulkadeks  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ). Hulkadele  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  viitame kui selle jaotusviisi hulkadele. Fikseerime iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral mingi punkti  $P_j \in \mathcal{A}_j$ . Summale

$$\sigma := \sigma(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n; P_1, \dots, P_n) := \sum_{j=1}^n f(P_j) \mu(\mathcal{A}_j)$$

viitame kui funktsiooni  $f$   *$R$ -integraalsummale* (hulgas  $\mathcal{A}$ ), mis vastab hulga  $\mathcal{A}$  jaotusviisile (4.6) ja punktide valikule  $P_j \in \mathcal{A}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Defineerimaks  $R$ -integreeruvuse ja  $R$ -integraali mõistet, on otstarbekas kõigepealt eraldi defineerida  $R$ -integraalsummade piirväärtuse mõiste. See definitsioon kasutab hulga diameetri mõistet, mis defineeriti definitsioonis 1.4.

**Definitsioon 4.1.** Me ütleme, et arv  $I \in \mathbb{R}$  on funktsiooni  $f$   *$R$ -integraalsummade piirväärtus* (hulgas  $\mathcal{A}$ ), kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et hulga  $\mathcal{A}$  mis tahes jaotusviisi (4.6) korral, mille hulkade diameetrid on kõik väiksemad kui  $\delta$ , s.t.

$$\max_{1 \leq j \leq n} \text{diam } \mathcal{A}_j < \delta,$$

erinevad kõik sellele jaotusviisile vastavad funktsiooni  $f$   $R$ -integraalsummad arvust  $I$  vähem kui  $\varepsilon$ , s.t.

$$\left| \sum_{j=1}^n f(P_j) \mu(\mathcal{A}_j) - I \right| < \varepsilon \quad \text{mis tahes punktide } P_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, \dots, n, \text{ korral.}$$

**Definitsioon 4.2.** Kui funktsiooni  $f$   $R$ -integraalsummadel (hulgas  $\mathcal{A}$ ) eksisteerib piirväärtus  $I \in \mathbb{R}$ , siis me ütleme, et funktsioon  $f$  on  $R$ -integreeruv (hulgas  $\mathcal{A}$ ). Seejuures  $R$ -integraalsummade piirväärtust  $I$  nimetame me  $R$ -integraaliks funktsioonist  $f$  üle hulga  $\mathcal{A}$  ja tähistame sümboliga  $R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy$ :

$$R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy := I.$$

Järgnev teoreem ütleb, et  $R$ -integreeruvus ja  $R$ -integraal on sama, mis Riemanni mõttes integreeruvus ja (kahekordne) Riemanni integraal; niisiis võinuksime Riemanni mõttes integreeruvuse ja (kahekordne) Riemanni integraali definitsioonina kasutada ( $R$ -integreeruvus ja  $R$  integraali) definitsiooni 4.2 (selleks pidanuksime muidugi eelnevalt defineerima hulga Jordani mõttes mõõtuvuse, näiteks tema Jordani välis- ja sisemõõdu võrduse kaudu).

**Teoreem 4.4.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuv hulk ning olgu  $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ . Siis funktsioon  $f$  on  $R$ -integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$  parajasti siis, kui ta on Riemanni mõttes integreeruv selles hulgas; seejuures (s.t. funktsiooni  $f$   $R$ -integreeruvuse juhul)  $R$ -integraal funktsioonist  $f$  üle hulga  $\mathcal{A}$  on võrdne (kahekordse) Riemanni integraaliga funktsioonist  $f$  üle hulga  $\mathcal{A}$ :

$$R\text{-}\int_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy.$$

TEOREEMI 4.4 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA.

□

## § 5. Kahekordse integraali arvutamine

Kõikjal selles paragrahvis kasutame eelmistes paragrahvides kasutatuga sarnaseid tähistusi. Muuhulgas, kui

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \quad (5.1)$$

ja

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d, \quad (5.2)$$

siis tähistame kõikide  $i \in \{1, \dots, m\}$  ja  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\Delta x_i := x_i - x_{i-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}.$$

### 5.1. Kahekordse integraali arvutamine üle ristküliku

**Teoreem 5.1.** *Olgu kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  integreeruv ristkülikus*

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2.$$

(a) *Eksisteerigu iga  $x \in [a, b]$  korral integraal*

$$g(x) := \int_c^d f(x, y) dy.$$

*Siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

(b) *Eksisteerigu iga  $y \in [c, d]$  korral integraal*

$$h(y) := \int_a^b f(x, y) dx.$$

*Siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d h(y) dy.$$

**TÕESTUS.** Tõestame ainult väite (a). Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.

Tähistame

$$I := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$$

ja fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Väite (a) tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et alati kui punktid (5.1) rahuldavad tingimust

$$\max_{1 \leq i \leq m} \Delta x_i < \delta, \quad (5.3)$$

siis mis tahes punktide  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , korral

$$\left| I - \sum_{i=1}^m \left( \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Selleks paneme tähele, et mis tahes punktide (5.1) ja (5.2) ning  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ja  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , korral

$$\begin{aligned} & \left| I - \sum_{i=1}^m \left( \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x_i \right| \\ & \leq \left| I - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \right| + \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right| \Delta x_i. \end{aligned}$$

Funktsiooni  $f$  integreeruvuse tõttu riskülikus  $\mathcal{D}$  leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\max\{\Delta x_1, \dots, \Delta x_m, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n\} < \delta \implies \left| I - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Rahuldagu nüüd punktid (5.1) tingimust (5.3) ning olgu punktid  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, m$ , suvalised. Kuna funktsioonid  $\psi_i(y) := f(\xi_i, y)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , on integreeruvad lõigul  $[c, d]$ , siis iga  $i \in \{1, \dots, m\}$  korral leidub reaalarv  $\delta_i > 0$  nii, et kui punktid (5.2) rahuldavad tingimust  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta y_j < \delta_i$ , siis mis tahes  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , korral

$$\left| \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j - \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Niisiis, kui valida punktid (5.2) nii, et  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta y_j < \min\{\delta_1, \dots, \delta_m, \delta\}$ , ning valida vabalt  $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ ,  $j = 1, \dots, n$ , siis

$$\left| I - \sum_{i=1}^m \left( \int_c^d f(\xi_i, y) dy \right) \Delta x_i \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

□

## 5.2. Kahekordse integraali arvutamine üle kõvertrapetsi

**Teoreem 5.2.** (a) Olgu funktsioonid

$$\alpha = \alpha(x) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x), \quad x \in [a, b], \quad (5.4)$$

tõkestatud lõigul  $[a, b]$ , kusjuures

$$\alpha(x) \leq \beta(x) \quad \text{iga } x \in [a, b] \text{ korral.} \quad (5.5)$$

**NB!** Tavaliselt nimetatakse hulka (5.6) (ja hulka (5.11)) kõvertrapetsiks lisaeldusel, et funktsioonid (5.4) on pidevad lõigus  $[a, b]$  (ja funktsioonid (5.9) on pidevad lõigus  $[c, d]$ ). Meie siin kõvertrapetsilt selle lisaelduse täidetust ei nõua.

Kui kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}, \quad (5.6)$$

kusjuures iga  $x \in [a, b]$  korral eksisteerib integraal

$$g(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy, \quad (5.7)$$

siis

$$\iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (5.8)$$

(b) Olgu funktsioonid

$$\gamma = \gamma(y) \quad \text{ja} \quad \delta = \delta(y), \quad y \in [c, d], \quad (5.9)$$

tõkestatud lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\gamma(y) \leq \delta(y) \quad \text{iga } y \in [c, d] \text{ korral.} \quad (5.10)$$

Kui kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on integreeruv kõvertrapetsis

$$\mathcal{B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}, \quad (5.11)$$

kusjuures iga  $y \in [c, d]$  korral eksisteerib integraal

$$h(y) := \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx, \quad (5.12)$$

siis

$$\iint_{\mathcal{B}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d h(y) dy. \quad (5.13)$$

Enne teoreemi 5.2 tõestamist toome välja järelduse temast juhtude jaoks, kus väites (a) on funktsioonid  $\alpha$  ja  $\beta$  ning  $f$  pidevad ning väites (b) on funktsioonid  $\gamma$  ja  $\delta$  ning  $f$  pidevad.

**Järeldus 5.3.** (a) Olgu funktsioonid (5.4) pidevad lõigus  $[a, b]$ , kusjuures kehtib (5.5). Kui kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev kõvertrapetsis (5.6), siis funktsioon  $f$  on integreeruv selles kõvertrapetsis, kusjuures iga  $x \in [a, b]$  korral eksisteerib integraal (5.7) ja kehtib (5.8).

(b) Olgu funktsioonid (5.9) pidevad lõigus  $[c, d]$ , kusjuures kehtib (5.10). Kui kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev kõvertrapetsis (5.11), siis funktsioon  $f$  on integreeruv selles kõvertrapetsis, kusjuures iga  $y \in [c, d]$  korral eksisteerib integraal (5.12) ja kehtib (5.13).

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Kõigepealt paneme tähele, et kõvertrapets  $\mathcal{A}$  on kinnine hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ) (PÕHJENDADA!). Edasi, lause 2.7, (a), põhjal on kõvertrapets  $\mathcal{A}$  mõõtuv hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ). Eeldame nüüd, et kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev kõvertrapetsis  $\mathcal{A}$ . Siis teoreemi 2.8 põhjal on funktsioon  $f$  integreeruv selles kõvertrapetsis. Iga  $x \in [a, b]$  korral on funktsioon  $f(x, \cdot)$  pidev lõigus  $[\alpha(x), \beta(x)]$  ja seega integraal (5.7) eksisteerib. Nüüd teoreemi 5.2 põhjal kehtib (5.8).  $\square$

TEOREEMI 5.2 TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) tõestatakse analoogiliselt).

Funktsioonide  $\alpha$  ja  $\beta$  tõkestamise tõttu leiduvad arvud  $c, d \in \mathbb{R}$ ,  $c < d$ , nii, et  $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Tähistame  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$ ; siis  $\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$ .

Olgu funktsioon  $f$  integreeruv kõvertrapetsis  $\mathcal{A}$ , kusjuures iga  $x \in [a, b]$  korral eksisteerib integraal (5.7). Siis (lk. 172 valemiga (3.2) defineeritud) funktsioon  $\hat{f}$  on integreeruv ristkülikus  $\mathcal{D}$ , kusjuures iga  $x \in [a, b]$  korral eksisteerib integraal

$$\int_c^d \hat{f}(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Seega teoreemi 5.1 väite (a) põhjal

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{A}} f(x, y) dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d \hat{f}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

nagu soovitud.  $\square$

### 5.3. Muutujate vahetus kahekordses integraalis

#### 5.3.1. Regulaarsed teisendused ruumis $\mathbb{R}^m$

Kujutusi  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , nimetame *teisendusteks*<sup>1</sup> ruumis  $\mathbb{R}^m$ .

Paragrahvis III.1 veendusime, et teisendused  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , ja hulgas  $\mathcal{U}$  määratud funktsioonide süsteemid

$$x_i = x_i(Q) = x_i(u_1, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.14)$$

on üksüheses vastavuses: süsteem (5.14) määrab kujutuse  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus

$$\Phi(Q) = (x_1(Q), \dots, x_m(Q)) \in \mathbb{R}^m, \quad Q \in \mathcal{U}; \quad (5.15)$$

<sup>1</sup>Tavaliselt mõistetakse mingi hulga teisenduste all kujutusi sellest hulgast sellesse samasse hulka. Meie nimetame teisendusteks ruumis  $\mathbb{R}^m$  kujutusi ruumi  $\mathbb{R}^m$  alamhulkadest ruumi  $\mathbb{R}^m$ .

teiselt poolt, mis tahes kujutus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  määrab ühesel viisil funktsioonid (5.14), mis rahuldavad tingimust (5.15): sellise omadusega funktsioonid (5.14) on defineeritud võrdustega

$$x_i(Q) = x_i, \quad Q \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{kus } \Phi(Q) = (x_1, \dots, x_m).$$

Edasises, viidates võrrandite süsteemile (5.14) kui teisendusele (5.14), mõistame me selle teisenduse all selle süsteemiga määratud teisendust  $\mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

**Definitsioon 5.1.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk. Öeldakse, et süsteemiga (5.14) määratud teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *regulaarne*, kui

- (1) teisendus  $\Phi$  on üksühene;
- (2) teisendust  $\Phi$  määravatel funktsioonidel (5.14) eksisteerivad hulgas  $\mathcal{U}$  pidevad esimest järku osatuletised;
- (3) selle teisenduse jakobiaani väärtus erineb hulgas  $\mathcal{U}$  nullist, s.t.

$$\det \Phi'(Q) := \frac{D(x_1, \dots, x_m)}{D(u_1, \dots, u_m)}(Q) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(Q) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m}(Q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1}(Q) & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m}(Q) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{iga } Q \in \mathcal{U} \text{ korral.}$$

Seejuures, kui  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  ja  $\mathcal{D} = \Phi[\mathcal{A}] := \{\Phi(Q) : Q \in \mathcal{A}\}$ , siis öeldakse, et  $\Phi$  kujutab hulga  $\mathcal{A}$  regulaarselt hulgaks  $\mathcal{D}$ .

### 5.3.2. Üldine muutujate vahetuse valem kahekordses integraalis

Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  lahtine hulk ning olgu teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  määratud süsteemiga

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \quad (5.16)$$

Tähistame

$$J(u, v) := \det \Phi'(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & x'_v(u, v) \\ y'_u(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix},$$

s.t.  $J(u, v)$  on selle süsteemi jakobiaan punktis  $(u, v)$ .

Järgnev teoreem esitab üldise muutujate vahetuse valemi kahekordse (Riemanni) integraali jaoks.

**Teoreem 5.4.** *Kui*

- (1) võrranditega (5.16) määratud teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  on regulaarne;
- (2)  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  on (Jordani mõttes) mõõtv (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ) kinnine alamhulk;
- (3) kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev kujutishulgas  $\Phi[\mathcal{A}]$  ( $xy$ -tasandil),

siis

$$\iint_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (5.17)$$

Lükkame teoreemi 5.4 tõestamise edasi alajaotisse 5.3.5; selle tõestuse mugavaks esitamiseks toome vahepealsetes alajaotistes välja regulaarsete teisenduste olulisemad omadused.

Alajaotise lõpetuseks esitame muutujate vahetuse teoreemi 5.4 rakendamiseks sobivamal kujul ning toome ühe näite selle rakendamisest. Nimelt, tüübilises olukorras on meil vaja etteantud mõõtuva kinnise hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  ja pideva funktsiooni  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  korral leida kahekordne integraal  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$ . Kui hulk  $\mathcal{D}$  on “ebamugava” struktuuriga, nii et teoreemides 5.1 ja 5.2 antud arvutusvalemeid pole võimalik rakendada (või see on ebamugav), siis on sageli abiks muutujate vahetuse teoreem 5.4: kui meil õnnestub leida regulaarne teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kus  $\mathcal{U}$  on ruumi  $\mathbb{R}^2$  lahtine alamhulk, ja “lihtsa struktuuriga” kinnine mõõtuv alamhulk  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  (näiteks kõvertrapets) nii, et  $\Phi[\mathcal{A}] = \mathcal{D}$ , siis integraali  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy$  saame leida valemist (5.17), kus võrrandid (5.16) on teisendust  $\Phi$  esitavad võrrandid.

### Teoreem 5.5. Kui

- (1) kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev ( $xy$ -tasandi) mõõtuvas kinnises hulgas  $\mathcal{D}$ ;
- (2) võrrandid (5.16) määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab ( $uv$ -tasandi) mõõtuva kinnise hulga  $\mathcal{A}$  hulgaks  $\mathcal{D}$ ,

siis

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| \, du \, dv. \quad (5.18)$$

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 161, ül. 879; samuti ülesannete brošüüri 2024. a. sügissemestri versiooni ül. 86, a.

**Näide 5.1.** Leiame kahekordse integraali

$$\iint_{\mathcal{D}} (3x + 2y - 4)^2 \, dx \, dy,$$

kus  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq x - y \leq 3, -2 \leq 3x + 2y \leq 8\}$ .

Kõigepealt märgime, et kuigi hulk  $\mathcal{D}$  on oma struktuurilt kõvertrapets (vt. joonist 5.1), on küsitud integraali leidmine kasutades valemit teoreemist 5.2, (a) (s.t. valemit kahekordse integraali leidmiseks üle kõvertrapetsi), tülikas, sest hulka  $\mathcal{D}$  alt ja ülalt piiravate joonte võrrandid on lõikudes  $x \in [-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}]$ ,  $x \in [\frac{4}{5}, \frac{6}{5}]$  ja  $x \in [\frac{6}{5}, \frac{14}{5}]$  paarikaupa erinevad: me peaksime esitama küsitud integraali kolme integraali summana –

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{D}} (3x + 2y - 4)^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_{\mathcal{D}_1} (3x + 2y - 4)^2 \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_2} (3x + 2y - 4)^2 \, dx \, dy + \iint_{\mathcal{D}_3} (3x + 2y - 4)^2 \, dx \, dy, \end{aligned} \quad (5.19)$$

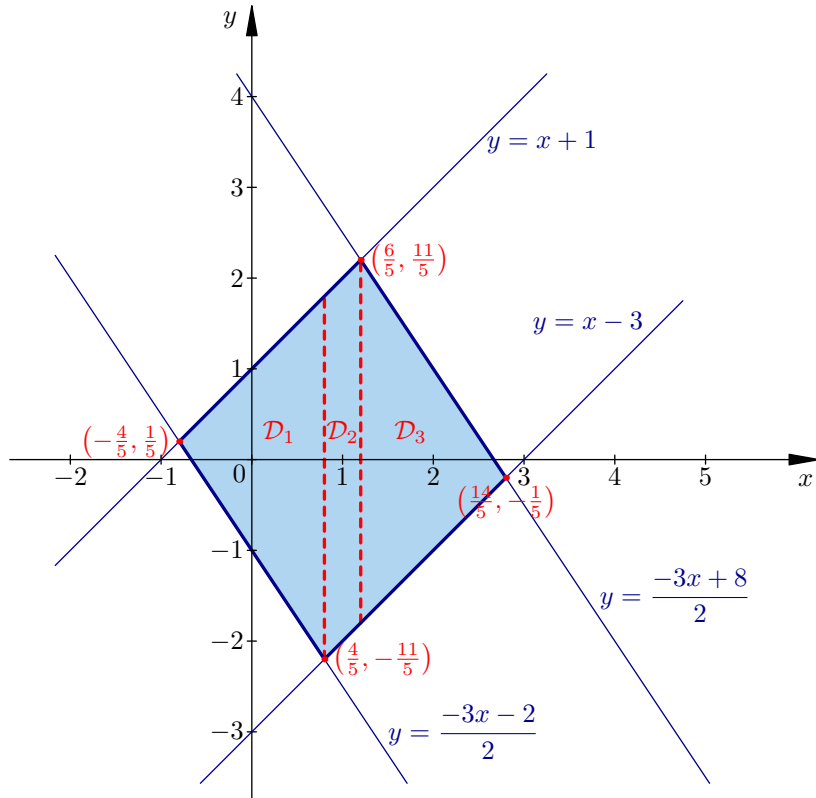
**NB!** Eelduste (1) ja (2) kehtides on hulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  lause 5.6, (ab) ja (bd), põhjal kinnine ja mõõtuv, seega valemis (5.17) vasakul pool võrdusmärgi olev integraal eksisteerib teoreemi 2.8 põhjal.

**NB!** Siin me kulutame hulga aega ja trükiarumi sellele, et selgitada, miks me valime integraali arvutamiseks just sellise strateegia, nagu me valime. Tudengitel on mõistlik kodu- ja kontrolltööde vormistamisel see etapp lahendustest ära jätta ning asuda kohe “asja kallale”.

kus

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right], \frac{-3x-2}{2} \leq y \leq x+1 \right\}, \\ \mathcal{D}_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right], x-3 \leq y \leq x+1 \right\} \\ \text{ja} \quad \mathcal{D}_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in \left[\frac{6}{5}, \frac{14}{5}\right], x-3 \leq y \leq \frac{-3x+8}{2} \right\},\end{aligned}$$

– ning leidma iga võrduses (5.19) paremal pool võrdusmärgi oleva integraali selle valemi järgi eraldi. Seepärast on mõistlik püüda leida küsitud integraal sobiva muutujate vahetuse abil (või, täpsemalt, teostada enne kahekordse integraali arvutusvalemi rakendamist sobiv muutujate vahetus).



JOONIS 5.1. Hulk  $\mathcal{D}$  on joonisel värvitud helesiniseks.

Teisendus  $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , mis on antud võrranditega

$$u = x - y, \quad v = 3x + 2y, \quad (5.20)$$

on pööratav, kusjuures tema pöördteisendus  $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  on

$$x = \frac{2u + v}{5}, \quad y = \frac{-3u + v}{5}. \quad (5.21)$$

Teisendus (5.20) kujutab hulga  $\mathcal{D}$   $uv$ -tasandi ristkülikuks

$$\mathcal{D}' := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: -1 \leq u \leq 3, -2 \leq v \leq 8\},$$

järelikult (pöörd)teisendus (5.21) kujutab  $uv$ -tasandi ristküliku  $\mathcal{D}'$  hulgaks  $\mathcal{D}$ . Veendume, et (pöörd)teisendus (5.21) on regulaarne. Selleks leiame tema jakobiaani  $J(u, v)$ :

$$\begin{aligned}x'_u &= \frac{2}{5}, & x'_v &= \frac{1}{5}, \\y'_u &= \frac{-3}{5}, & y'_v &= \frac{1}{5},\end{aligned}$$

seega

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} - \frac{-3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5};$$

niisiis (pöörd)teisendus (5.21) on tõepoolest regulaarne. Nüüd (muutujate vahetuse valemi põhjal kahekordse integraali jaoks teoreemist 5.5; arvestades, et  $3x + 2y = v$ )

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} (3x + 2y - 4)^2 dx dy &= \iint_{\mathcal{D}'} (v - 4)^2 |J(u, v)| du dv = \iint_{\mathcal{D}'} (v - 4)^2 \frac{1}{5} du dv \\&= \int_{-1}^3 \left( \int_{-2}^8 \frac{(v - 4)^2}{5} dv \right) du \stackrel{(*)}{=} \left( \int_{-2}^8 \frac{(v - 4)^2}{5} dv \right) \cdot \left( \int_{-1}^3 du \right) \\&= \left( \frac{(v - 4)^3}{15} \Big|_{-2}^8 \right) \cdot 4 = 4 \left( \frac{4^3}{15} - \frac{(-6)^3}{15} \right) = \frac{4(64 + 216)}{15} = \frac{4 \cdot 280}{15} \\&= \frac{4 \cdot 56}{3} = \frac{224}{3}.\end{aligned}$$

Siin võrduse (\*) põhjenduseks märgime, et integraal  $\int_{-2}^8 \frac{(v-4)^2}{5} dv$  on sõltumatu muutujast  $u$ , niisiis see integraal käitub integraali  $\int_{-1}^3 \dots du$  märgi all nagu konstant ja seega me võime integraali  $\int_{-2}^8 \frac{(v-4)^2}{5} dv$  integraali  $\int_{-1}^3 \dots du$  märgi alt välja tuua.

**Märkus 5.1.** Eelnevas näites 5.1 võinuksime veenduda teisenduse (5.20) pööratavuses ja pöörde teisenduse (5.21) regulaarsuses ning leida pöörde teisenduse (5.21) jakobiaani  $J(u, v)$  ka ilma seda pöörde teisendust ennast välja rehkendamata. Selleks tuleks kõigepealt meenutada lineaaralgebra kursuses õpitut.

Olgu  $m \in \mathbb{N}$ . Nagu tavaks, tõlgendame järgnevas järjendeid  $(u_1, \dots, u_m)$  ja  $(x_1, \dots, x_m)$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  sobival juhul vastavalt veeurvektoritena (s.t.  $(m \times 1)$ -maatriksitena)  $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$  ja  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ .

Olgu  $\Phi: \mathbb{R}^m \ni (u_1, \dots, u_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  *linearteisendus* (ehk, teisistõnu, *maatriksteisendus*), s.t. leidub (reaalarvuliste elementidega) maatriks

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

nii, et teisendus  $\Phi$  esitub süsteemiga

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_m) := \sum_{j=1}^m a_{ij} u_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.22)$$

s.t. iga  $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$  korral

$$\Phi(u_1, \dots, u_m) = \left( \sum_{j=1}^m a_{1j} u_j, \dots, \sum_{j=1}^m a_{mj} u_j \right)$$

ehk, teisisõnu,

$$\Phi(u_1, \dots, u_m) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1m}u_m \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2m}u_m \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m2}u_2 + \dots + a_{mm}u_m \end{pmatrix},$$

s.t. kujutis  $\Phi(u_1, \dots, u_m)$ , tõlgendatuna veeruvektorina, saadakse järjendi  $(u_1, \dots, u_m)$ , tõlgendatuna veeruvektorina, korrutamisel maatriksiga  $A$  (vasakult). Lineaaralgebra kursusest teame, et

( $\sharp$ ) järgmised väited on samaväärsed:

- (i)  $\Phi$  on pööratav;
- (ii)  $\Phi$  on üksühene;
- (iii)  $\Phi$  on pealekujutus;
- (iv)  $\det A \neq 0$  (s.t. maatriksi  $A$  determinant erineb nullist).

Süsteemis (5.22)

$$(x_i)'_{u_j} = a_{ij} \quad \text{iga } i \in \{1, \dots, m\} \text{ ja iga } j \in \{1, \dots, m\} \text{ korral,}$$

seega teisenduse  $\Phi$  Jacobi maatriks on  $A$ ; niisiis

- (b) teisenduse  $\Phi$  jakobiaan on  $\det A$  (s.t. maatriksi  $A$  determinant) ning teisendus  $\Phi$  on regulaarne parajasti siis, kui  $\det A \neq 0$  (PÕHJENDADA!).

Kasutame nüüd eelnevas refereeritud tarkust näites 5.1 teisenduse (5.20) pööratavuse põhjendamisel ning selle teisenduse pöördteisenduse regulaarsuse põhjendamisel ja selle pöördteisenduse jakobiaani väljaarvutamisel.

Teisendus (5.20) on lineaarteisendus, mida esitav maatriks on  $B := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , s.t. see teisendus kujutab mis tahes punkti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  punktiks  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , kus

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Kuna

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 5,$$

siis väite ( $\sharp$ ) samaväärsuse (i)  $\Leftrightarrow$  (iv) põhjal on teisendus (5.20) pööratav. Teisenduse (5.20) pöördteisendust esitav maatriks on teisendust (5.20) esitava maatriksi  $B$  pöördmaatriks  $B^{-1}$ , seega väite (b) põhjal on teisenduse (5.20) pöördteisendus  $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  regulaarne, kusjuures selle pöördteisenduse jakobiaan on

$$J(u, v) = \det(B^{-1}) = \frac{1}{\det B} = \frac{1}{5}.$$

### 5.3.3. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.4 tõestuseks I – regulaarse teisenduse omadusi

Ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktide märkimiseks kasutame kompaktsuse eesmärgil standardset tähistust  $(u_j)_{j=1}^m := (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$ .

**Lause 5.6.** Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  lahtine hulk ning olgu regulaarne teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  määratud süsteemiga (5.14). Tähistame  $\mathcal{V} := \Phi[\mathcal{U}] = \{\Phi(Q): Q \in \mathcal{U}\} \subset \mathbb{R}^m$ . Siis, tõlgendades teisendust  $\Phi$  kujutusena  $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , võime vaadelda pöördteisendust  $\Phi^{-1}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  kinnine tõkestatud alamhulk.

(a) (aa) Teisendus  $\Phi$  kujutab hulga  $\mathcal{U}$  lahtised alamhulgad hulga  $\mathcal{V}$  lahtisteks alamhulkadeks; muuhulgas ka hulk  $\mathcal{V}$  ise on lahtine. Pöördteisendus  $\Phi^{-1}: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^m$  on regulaarne. Seejuures iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral pöördteisenduse  $\Phi^{-1}$  Jacobi maatriks punktis  $\Phi(Q) \in \mathcal{V}$  on teisenduse  $\Phi$  Jacobi maatriksi punktis  $Q$  pöördmaatriks.

(ab) Kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on kinnine ja tõkestatud.

(ac)  $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$  ja  $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial(\Phi[\mathcal{A}])$ , s.t.  $\Phi$  kujutab hulga  $\mathcal{A}$  sisemuse kujutishulga  $\Phi[\mathcal{A}]$  sisemuseks ja hulga  $\mathcal{A}$  raja kujutishulga  $\Phi[\mathcal{A}]$  rajaks.

(b) Olgu  $m = 2$ . Tähistame iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $\hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n: \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\}$ , kus  $\mathfrak{C}_n$  tähistab kõikvõimalike selliste diaadiliste ruutude kogumit, mille küljepikkus on  $\frac{1}{2^n}$  (vt. jaotise 4.1 algust lk. 183), ning  $\hat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C}$ .

(ba) Leidub arv  $N \in \mathbb{N}$  nii, et  $\hat{\mathcal{A}}_N \subset \mathcal{U}$ .

(bb) Leidub reaalarv  $\varkappa > 0$  nii, et

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leq \varkappa \mu^*(\mathcal{B}) \quad \text{iga alamhulga } \mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}_N \text{ korral} \quad (5.23)$$

(siin  $\hat{\mathcal{A}}_N$  on hulk väitest (ba) ning  $\mu^*(\mathcal{B})$  ja  $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}])$  tähistavad vastavalt hulga  $\mathcal{B}$  ja kujutishulga  $\Phi[\mathcal{B}]$  Jordani välismõõtu).

(bc) Kui hulk  $\mathcal{A}$  on nullmõõduline, siis ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on nullmõõduline.

(bd) Kui hulk  $\mathcal{A}$  on Jordani mõttes mõõtuv, siis ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on Jordani mõttes mõõtuv.

(c) Tähistame iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral  $A_Q := \Phi'(Q)$ , s.t.  $A_Q: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  on lineaarne kujutus, mis on esitatud maatriksiga

$$\left( \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right)_{i,j=1}^m := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1}(Q) & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_m}(Q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1}(Q) & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_m}(Q) \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

s.t.

$$A_Q(R) = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \eta_j \right)_{i=1}^m \quad \text{iga } R = (\eta_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

(ca) Iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral on kujutus  $A_Q$  pööratav. Seejuures pöördkujutust  $(A_Q)^{-1}$  esitav maatriks on pöördteisenduse  $\Phi^{-1}$  Jacobi maatriks punktis  $\Phi(Q)$ .

**NB!** Kas me kasutame kuskil kujutishulga  $\Phi[\mathcal{A}]$  tõkestatust? Kasutame tema mõõtuvuskriteeriumi rakedamisel.

(cb) Leiduvad reaalarvud  $\alpha, \beta > 0$  nii, et iga  $Q \in \mathcal{A}$  korral

$$\alpha d(Q_1, Q_2) \leq d(A_Q(Q_1), A_Q(Q_2)) \leq \beta d(Q_1, Q_2) \quad \text{mis tahes } Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

(cc) Tähistame punktide  $Q = (u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$  ja  $\Delta Q = (\Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$  korral  $Q + \Delta Q := (u_j + \Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$  (see tähistus on igati kooskõlas ruumi  $\mathbb{R}^m$  vektorruumistruktuuriga) ja  $\rho := \sqrt{\Delta u_1^2 + \cdots + \Delta u_m^2}$ . Siis

$$\frac{d(\Phi(Q + \Delta Q) - \Phi(Q), A_Q(\Delta Q))}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \text{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \text{ suhtes.}$$

**Märkus 5.2.** Lause 5.6 tõestusest nähtub, et väited (ab) ning (ba), (bb) ja (bc) jäävad kehtima, kui jätta ära eeldus teisenduse  $\Phi$  regulaarsuse kohta, nõudes sellel teisenduselt vaid, et funktsioonidel (5.14) eksisteeriks hulgas  $\mathcal{U}$  pidevad osatuletised (seejuures väide (ab) jääb kehtima ka siis, kui nõuda teisenduselt  $\Phi$  vaid, et funktsioonid (5.14) oleksid pidevad). Seda tähelepanekut kasutab teoreemi 5.8 tõestus.

**LAUSE 5.6 TÕESTUS.** (aa). Väide on tõestatud järelduses III.3.5, teoreemis III.3.2 ja märkuses III.3.1).

(ab). Kujutishulga  $\Phi[\mathcal{A}]$  kinnisuseks piisab näidata, et  $\overline{\Phi[\mathcal{A}]} \subset \Phi[\mathcal{A}]$  (s.t. selle kujutishulga sulund  $\overline{\Phi[\mathcal{A}]}$  sisaldub selles kujutishulgas).

**Ülesanne 5.1.** Tõestada, et  $\overline{\Phi[\mathcal{A}]} \subset \Phi[\mathcal{A}]$ .

**NÄPUNÄIDE.** Kasutada Bolzano–Weierstrassi teoreemi I.2.5 ja fakti, et koonduvus ruumis  $\mathbb{R}^m$  on samaväärne koordinaaditi koonduvusega (vt. lauset I.2.1).

Väite tõestuseks jääb näidata, et kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on tõkestatud.

**Ülesanne 5.2.** Tõestada, et kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on tõkestatud.

**NÄPUNÄIDE.** Kasutada Weierstrassi teoreemi I.4.7.

(ac). Võrdus  $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$  järeldub järgnevast ülesandest.

**Ülesanne 5.3.** Olgu  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$ . Tõestada, et  $\Phi[\mathcal{E}^\circ] = (\Phi[\mathcal{E}])^\circ$ .

**NÄPUNÄIDE.** Kasutada väites (aa) tõestatud fakte, et  $\Phi$  kujutab hulga  $\mathcal{U}$  lahtised alamhulgad hulga  $\mathcal{V}$  lahtisteks alamhulkadeks, ning et pöördteisendus  $\Phi^{-1}$  on samuti regulaarne.

Väite tõestuseks jääb näidata, et  $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial(\Phi[\mathcal{A}])$ .

**Ülesanne 5.4.** Tõestada, et  $\Phi[\partial\mathcal{A}] = \partial(\Phi[\mathcal{A}])$ .

**NÄPUNÄIDE.** Kasutada hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\Phi[\mathcal{A}]$  kinnisust, teisenduse  $\Phi$  üksühesust ja võrdust  $\Phi[\mathcal{A}^\circ] = (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$ .

(ba). Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise ringi keskpunktiga  $Q \in \mathbb{R}^2$  ja raadiusega  $\delta > 0$  sümboliga  $B(Q, \delta)$ , s.t.  $B(Q, \delta) := \{R \in \mathbb{R}^2 : d(Q, R) < \delta\}$ .

Olgu reaalarv  $\delta > 0$  selline, et iga  $Q \in \mathcal{A}$  korral  $B(Q, \delta) \subset \mathcal{U}$  (sellise reaalarvu  $\gamma > 0$  olemasolu on tõestatud ülesandes I.2.6). Valime arvu  $N \in \mathbb{N}$  nii, et  $\frac{\sqrt{2}}{2N} < \delta$ . Nüüd alati, kui  $Q \in \mathcal{A}$  ja  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_N$  on sellised, et  $Q \in \mathcal{C}$ , siis  $\mathcal{C} \subset B(Q, \delta) \subset \mathcal{U}$  (PÕHJENDADA!). Siit järeldub, et  $\hat{\mathcal{A}}_N \subset \mathcal{U}$ .

(bb). Kõikjal selle väite tõestuses kirjutame funktsioonide  $x_1 = x_1(u_1, u_2)$  ja  $x_2 = x_2(u_1, u_2)$  asemel vastavalt  $x = x(u, v)$  ja  $y = y(u, v)$ , s.t. me loeme, et teisendus  $\Phi$  on määratud süsteemiga (5.16).

Väite tõestuseks piisab leida reaalarv  $\varkappa > 0$  nii, et tingimus (5.23) kehtib lisaeldusel, et  $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$  ning näidata seejärel, et (sellise  $\varkappa$  olemasolu korral)  $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) = 0$  alati, kui alamhulga  $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  Jordani mõõt on null, s.t.  $\mu^*(\mathcal{B}) = 0$ .

Olgu alamhulk  $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  selline, et  $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$ . Siis leiduvad naturaalarv  $n \geq N$  ja (lõplik) alamhulk  $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{C}_n$  nii, et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R} := \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  ja  $\mu(\mathcal{R}) \leq 2\mu^*(\mathcal{B})$  (PÕHJENDADA!). Olgu  $\mathcal{C} \in \mathfrak{F}$  suvaline ning olgu  $P \in \Phi[\mathcal{C}]$ . Siis  $P = (x(Q), y(Q))$  mingi  $Q = (u, v) \in \mathcal{C}$  korral. Olgu  $Q_{\mathcal{C}} = (u_{\mathcal{C}}, v_{\mathcal{C}})$  ruudu  $\mathcal{C}$  keskpunkt; siis  $\mathcal{C} = [u_{\mathcal{C}} - \frac{1}{2^{n+1}}, u_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2^{n+1}}] \times [v_{\mathcal{C}} - \frac{1}{2^{n+1}}, v_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2^{n+1}}]$ . Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal mitme muutuja funktsioonide jaoks (vt. järeldust II.1.10) leiduvad punkte  $Q_{\mathcal{C}}$  ja  $Q$  ühendaval sirglõigul punktid  $R_1$  ja  $R_2$  nii, et

$$\begin{aligned} x(Q) - x(Q_{\mathcal{C}}) &= \frac{\partial x}{\partial u}(R_1)(u - u_{\mathcal{C}}) + \frac{\partial x}{\partial v}(R_1)(v - v_{\mathcal{C}}), \\ y(Q) - y(Q_{\mathcal{C}}) &= \frac{\partial y}{\partial u}(R_2)(u - u_{\mathcal{C}}) + \frac{\partial y}{\partial v}(R_2)(v - v_{\mathcal{C}}). \end{aligned}$$

Arvestades, et  $|u - u_{\mathcal{C}}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  ja  $|v - v_{\mathcal{C}}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$  ning et  $R_1, R_2 \in \mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$ ,

$$|x(Q) - x(Q_{\mathcal{C}})| \leq \left| \frac{\partial x}{\partial u}(R_1) \right| |u - u_{\mathcal{C}}| + \left| \frac{\partial x}{\partial v}(R_1) \right| |v - v_{\mathcal{C}}| \leq \frac{M}{2^n}$$

ning, analoogiliselt,  $|y(Q) - y(Q_{\mathcal{C}})| \leq \frac{M}{2^n}$ , kus

$$M := \max \left\{ \max_{R \in \hat{\mathcal{A}}_N} \left| \frac{\partial x}{\partial u}(R) \right|, \max_{R \in \hat{\mathcal{A}}_N} \left| \frac{\partial x}{\partial v}(R) \right|, \max_{R \in \hat{\mathcal{A}}_N} \left| \frac{\partial y}{\partial u}(R) \right|, \max_{R \in \hat{\mathcal{A}}_N} \left| \frac{\partial y}{\partial v}(R) \right| \right\}$$

(PÕHJENDADA! MUUHULGAS PÕHJENDADA, MIKS NEED MAKSIMUMID EKSISTEERIVAD!). Sellega oleme näidanud, et kujutishulk  $\Phi[\mathcal{C}]$  sisaldub (kinnises) ruudus  $\mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  keskpunktiga  $\Phi(Q_{\mathcal{C}}) = (x(Q_{\mathcal{C}}), y(Q_{\mathcal{C}}))$  ja küljepikkusega  $\frac{M}{2^{n-1}}$  (PÕHJENDADA!). Seega  $\Phi[\mathcal{B}] \subset \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \Phi[\mathcal{C}] \subset \bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{D}_{\mathcal{C}}$  ning järelikult

$$\begin{aligned} \mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) &\leq \mu\left(\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mathcal{D}_{\mathcal{C}}\right) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mu(\mathcal{D}_{\mathcal{C}}) = \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \frac{M^2}{2^{2(n-1)}} = 4M^2 \sum_{\mathcal{C} \in \mathfrak{F}} \mu(\mathcal{C}) = 4M^2 \mu(\mathcal{R}) \\ &\leq 8M^2 \mu^*(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Saadud hinnang  $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leq 8M^2 \mu^*(\mathcal{B})$  kehtib iga alamhulga  $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  korral, mis rahuldab tingimust  $\mu^*(\mathcal{B}) > 0$ . Niisiis me võime võtta  $\varkappa = 8M^2$ .

Olgu nüüd alamhulk  $\mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  selline, et  $\mu^*(\mathcal{B}) = 0$ , ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Siis leidub ristküliksumma  $\mathcal{R} \subset \hat{\mathcal{A}}_N$  nii, et  $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$  ja  $\mu^*(\mathcal{R}) = \mu(\mathcal{R}) < \varepsilon$ . Nüüd ka  $\Phi[\mathcal{B}] \subset \Phi[\mathcal{R}]$  ning seega, arvestades, et  $\mu^*(\mathcal{R}) > 0$ , eelnevalt tõestatu põhjal

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leq \mu^*(\Phi[\mathcal{R}]) \leq \varkappa \mu^*(\mathcal{R}) < \varkappa \varepsilon.$$

Kuna arv  $\varepsilon > 0$  oli vabalt fikseeritud, siis järeldub siit, et  $\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) = 0$ , nagu soovitud.

**NB!** Siin esime-  
ne võrdus järeldub  
lausest 3.7, (a)!

(bc).

**Ülesanne 5.5.** Olgu hulk  $\mathcal{A}$  nullmõõduline. Tõestada, et siis ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on nullmõõduline.

NÄPUNÄIDE. Kasutada väidet (bb).

(bd).

**Ülesanne 5.6.** Olgu hulk  $\mathcal{A}$  Jordani mõttes mõõtuv. Tõestada, et siis ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on Jordani mõttes mõõtuv.

NÄPUNÄIDE. Kasutada teoreemi 2.5 ning väiteid (ab), (ac) ja (bc).

(ca). Algebra kursusest teame (või vähemalt peaksime teadma), et etteantud  $m \times m$ -maatriksiga esitatud kujutuse  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  pööratavuseks on tarvilik ja piisav, et selle maatriksi determinant erineks nullist. Antud juhul iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral maatriksi (5.24) determinant erineb nullist teisenduse  $\Phi$  regulaarsuse tõttu.

Pöördkujutust  $(A_Q)^{-1}$  esitav maatriks on kujutust  $A_Q$  esitava maatriksi pöördmaatriks. Väite (aa) põhjal on see pöördmaatriks pöördteisenduse  $\Phi^{-1}$  Jacobi maatriks punktis  $\Phi(Q)$ .

(cb). Veendume kõigepealt soovitud omadustega arvu  $\beta$  olemasolus. Mis tahes punktide  $Q_1 = (u_j^1)_{j=1}^m, Q_2 = (u_j^2)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$  korral

$$A_Q(Q_k) = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) u_j^k \right)_{i=1}^m, \quad k = 1, 2,$$

seega Rogers–Hölder'i võrratuse põhjal (vt. teoreemi I.1.2)

$$\begin{aligned} d(A_Q(Q_1), A_Q(Q_2)) &= \sqrt{\left| \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) u_j^1 - \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) u_j^2 \right|^2 \right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right| |u_j^1 - u_j^2| \right)^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \left( \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right|^2 \right) \left( \sum_{j=1}^m |u_j^1 - u_j^2|^2 \right) \right)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right|^2} d(Q_1, Q_2) \\ &\leq \beta d(Q_1, Q_2), \end{aligned}$$

kus  $\beta := \sup_{Q \in \mathcal{A}} \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right|^2}$ . Märgime, et see supreemum on lõplik, sest osa-

tuletisfunktsioonide  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$  pidevuse tõttu on funktsioon  $Q \mapsto \sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \right|^2}$  pidev

hulgas  $\mathcal{A}$  ning seega Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal on see funktsioon tõkestatud hulgas  $\mathcal{A}$ . Seejuures  $\beta > 0$ , sest mis tahes  $Q \in \mathcal{A}$  korral erineb vähemalt üks osatuletistest  $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q)$  nullist – vastasel korral oleks teisenduse  $\Phi$  jakobiaani väärtus punktis  $Q$  null.

Kuna iga  $Q \in \mathcal{A}$  korral on kujutus  $A_Q$  pööratav, siis soovitud omadusega arvu  $\alpha$  olemasoluks piisab leida reaalarv  $\gamma > 0$  nii, et iga  $Q \in \mathcal{A}$  korral

$$d((A_Q)^{-1}(P_1), (A_Q)^{-1}(P_2)) \leq \gamma d(P_1, P_2) \quad \text{mis tahes } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

Tähistame iga  $P \in \mathcal{V}$  korral  $B_P = (\Phi^{-1})'(P)$ , s.t.  $B_P: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  on lineaarne kujutus, mis on esitatud pöördteisenduse  $\Phi^{-1}$  Jacobi maatriksiga punktis  $P$ . Siis iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral  $(A_Q)^{-1} = B_{\Phi(Q)}$  (vt. väidet (ca)). Seega jääb väite tõestuseks veenduda sellise reaalarvu  $\gamma > 0$  olemasolus, et iga  $P \in \Phi[\mathcal{A}]$  korral

$$d(B_P(P_1), B_P(P_2)) \leq \gamma d(P_1, P_2) \quad \text{mis tahes } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^m \text{ korral.}$$

Arvestades, et  $\Phi^{-1}$  on regulaarne teisendus ning et (väite (ab) põhjal) hulk  $\Phi[\mathcal{A}]$  on kinnine ja tõkestatatud, järeldub sellise reaalarvu  $\gamma$  olemasolu ülaltõestatud väitest eespoolkirjeldatud omadustega reaalarvu  $\beta$  olemasolu kohta.

(cc). Nagu kõikjal eelnevas, tähistame lahtise kera keskpunktiga  $Q \in \mathbb{R}^m$  ja raadiusega  $\delta > 0$  sümboliga  $B(Q, \delta)$ , s.t.  $B(Q, \delta) := \{R \in \mathbb{R}^m: d(Q, R) < \delta\}$ .

Olgu reaalarv  $\delta > 0$  selline, et iga  $Q \in \mathcal{A}$  korral  $B(Q, \delta) \subset \mathcal{U}$  (sellise reaalarvu  $\gamma$  olemasolu on tõestatud ülesandes I.2.6). Kui punkt  $\Delta Q = (\Delta u_j)_{j=1}^m \in \mathbb{R}^m$  rahuldab

tingimust  $\rho = \sqrt{\sum_{j=1}^m |\Delta u_j|^2} < \delta$ , siis mis tahes punkti  $Q \in \mathcal{A}$  korral  $Q + \Delta Q \in \mathcal{U}$ , seejuures funktsioonide (5.14) diferentseeruvuse tõttu

$$\Phi(Q + \Delta Q) - \Phi(Q) = (x_i(Q + \Delta Q) - x_i(Q))_{i=1}^m = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \Delta u_j + \alpha_i(Q, \Delta Q) \right)_{i=1}^m,$$

kus teoreemi II.1.11 põhjal funktsioonid  $\alpha_i = \alpha_i(Q, \Delta Q)$  rahuldavad tingimust

$$\frac{\alpha_i(Q, \Delta Q)}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \text{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \text{ suhtes.}$$

Teiselt poolt,  $A_Q(\Delta Q) = \left( \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial u_j}(Q) \Delta u_j \right)_{i=1}^m$ , seega

$$\begin{aligned} \frac{d(\Phi(Q + \Delta Q) - \Phi(Q), A_Q(\Delta Q))}{\rho} &= \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^m \alpha_i(Q, \Delta Q)^2}}{\rho} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\alpha_i(Q, \Delta Q)}{\rho} \right)^2} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0 \quad \text{ühtlaselt } Q \in \mathcal{A} \text{ suhtes} \end{aligned}$$

(PÕHJENDADA!) .

□

### 5.3.4. Abistavaid tulemusi teoreemi 5.4 tõestuseks II – lineaarteisenduse $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ “skaleerimistegur”

Olgu  $\Phi: \mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$  lineaarteisendus, s.t. teisendus, mis esitub mingi (reaalarvuliste elementidega) maatriksiga

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

s.t. iga  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  korral

$$\Phi(u, v) = (a_{11}u + a_{12}v, a_{21}u + a_{22}v)$$

ehk, teisisõnu, teisendus  $\Phi$  esitub süsteemiga

$$x = a_{11}u + a_{12}v, \quad y = a_{21}u + a_{22}v, \quad (5.25)$$

s.t., samastades järjendid  $(x, y)$  ja  $(u, v)$  vastavalt veeruvektoritega  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ja  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  (s.t. lugedes nad vastavalt üheks ja samaks objektiks), iga  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  korral

$$\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u + a_{12}v \\ a_{21}u + a_{22}v \end{pmatrix}.$$

Kuna süsteemis (5.25)

$$\begin{aligned} x'_u &= a_{11}, & x'_v &= a_{12}, \\ y'_u &= a_{21}, & y'_v &= a_{22}, \end{aligned}$$

siis teisenduse  $\Phi$  Jacobi maatriks on  $A$ ; niisiis see teisendus on regulaarne parajasti siis, kui  $\det A \neq 0$  (PÕHJENDADA!).

Järgnev teoreem aitab selgitada jakobiaani absoluutväärtuse  $|J(u, v)|$  rolli valemis (5.17) (ja valemis (5.18)).

**Teoreem 5.7.** *Mis tahes mõõtuva alamhulga  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  korral on ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{A}] \subset \mathbb{R}^2$  mõõtuv; seejuures selle kujutishulga Jordani mõõt on*

$$\mu(\Phi[\mathcal{A}]) = |\det A| \mu(\mathcal{A}).$$

SEDA TOOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA. □

### 5.3.5. Teoreemi 5.4 tõestus

TOOREEMI 5.4 TÕESTUS. Kehtigu tingimused (1)–(3). *First things first*: mõlemad võrdused (5.17) esinevad integraalid eksisteerivad (PÕHJENDADA!). Tähistame iga  $n \in \mathbb{N}$  korral

$$\widehat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n : \mathcal{C} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\} \quad \text{ja} \quad \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A}) := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_n : \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\},$$

kus  $\mathfrak{C}_n$  tähistab kõikvõimalike selliste diaadiliste ruutude kogumit, mille küljepikkus on  $\frac{1}{2^n}$  (vt. jaotise 4.1 algust lk. 183), ning

$$\hat{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \hat{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C} \quad \text{ja} \quad \check{\mathcal{A}}_n := \bigcup_{\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mathcal{C}.$$

Lause 5.6, (ba), põhjal leidub  $N_0 \in \mathbb{N}$  nii, et  $\hat{\mathcal{A}}_{N_0} \subset \mathcal{U}$ . Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal leiduvad reaalarvud  $M, L \geq 0$  nii, et  $|f(P)| \leq M$  iga  $P \in \Phi[\mathcal{A}]$  korral ning  $|J(u, v)| \leq L$  iga  $(u, v) \in \mathcal{A}$  korral (PÕHJENDADA!).

Teoreemi tõestuseks piisab veenduda, et iga naturaalarvu  $N \geq N_0$  korral kehtib võrdus (5.17), kus hulk  $\mathcal{A}$  on asendatud hulga  $\check{\mathcal{A}}_N$ , sest sellisel juhul, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$  ja valides naturaalarvu  $N \geq N_0$  nii, et  $\mu(\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N) < \varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{A}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \right| \\ & \leq \iint_{\Phi[\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N]} |f(x, y)| dx dy + \iint_{\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N} |f(x(u, v), y(u, v))| |J(u, v)| du dv \\ & \leq M\mu(\Phi[\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N]) + ML\mu(\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N) \leq M\kappa\mu(\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N) + ML\mu(\mathcal{A} \setminus \check{\mathcal{A}}_N) \\ & < M(L + \kappa)\varepsilon \end{aligned}$$

(siin arv  $\kappa$  pärineb lausest 5.6, (bb), kus hulga  $A_N$  rollis on meie hulk  $A_{N_0}$ ) (PÕHJENDADA!), millest arvu  $\varepsilon > 0$  suvalisuse tõttu järeldub soovitud võrdus (5.17).

Fikseerime vabalt naturaalarvu  $N \geq N_0$ . Nagu veendusime, piisab teoreemi tõestuseks tõestada võrdus (5.17) lisaeeldusel, et  $\mathcal{A} = \check{\mathcal{A}}_N$ . Eeldamegi järgnevas, et  $\mathcal{A} = \check{\mathcal{A}}_N$ . Võrduse (5.17) tõestuseks tähistame iga  $n \geq N$  ja iga  $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  korral sümboliga  $Q_{\mathcal{C}}$  diaadilise ruudu  $\mathcal{C}$  keskpunkti ning, järgides lause 5.6, (c), tähistusi,  $A_{\mathcal{C}} := A_{Q_{\mathcal{C}}} = \Phi'(Q_{\mathcal{C}})$ , kus iga  $Q \in \mathcal{U}$  korral  $A_Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  on lineaarne kujutus, mis on esitatud maatriksiga

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(Q) & \frac{\partial x}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(Q) & \frac{\partial y}{\partial v}(Q) \end{pmatrix},$$

s.t. iga  $R = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  korral  $A_Q(R) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(Q)\xi + \frac{\partial x}{\partial v}(Q)\eta, \frac{\partial y}{\partial u}(Q)\xi + \frac{\partial y}{\partial v}(Q)\eta \right)$ . Arvestades, et

$$\sum_{\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f(\Phi(Q_{\mathcal{C}})) \mu(\Phi[\mathcal{C}]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{\Phi[\mathcal{A}]} f(x, y) dx dy$$

ja

$$\sum_{\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f(\Phi(Q_{\mathcal{C}})) |J(Q_{\mathcal{C}})| \mu(\mathcal{C}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_{\mathcal{A}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

**NB!** Kas lugeja teab, mis on ruudu keskpunkt? Risttahuka keskpunkt on defineeritud lk. 7.

(PÕHJENDADA!) , kusjuures teoreemi 5.7 põhjal  $|J(Q_C)|\mu(C) = |\det A_C|\mu(C) = \mu(A_C[C])$ , piisab võrduse (5.17) (ja ühtlasi teoreemi) tõestuseks näidata, et

$$\sum_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f(\Phi(Q_C)) \mu(\Phi[C]) - \sum_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} f(\Phi(Q_C)) \mu(A_C[C]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(PÕHJENDADA!) , milleks omakorda piisab veenduda, et

$$\sum_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} |\mu(\Phi[C]) - \mu(A_C[C])| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (5.26)$$

(PÕHJENDADA!) . Tähistame iga  $n \geq N$  ja iga  $C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  korral  $\Delta_n := \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right] \times \left[-\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}}\right]$  (niisiis  $\Delta_n$  on ruut keskpunktiga  $(0, 0)$  ja küljepikkusega  $\frac{1}{2^n}$ ) ja  $\mathcal{D}_C := \Phi(Q_C) + A_C[\Delta_n]$ ; märgime, et siis  $\mu(\mathcal{D}_C) = \mu(A_C[C])$  (PÕHJENDADA!) . Koonduvuseks (5.26) piisab nüüd leida arvud  $\theta_n > 0$ ,  $n = N, N+1, \dots$ , nii, et  $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ning iga  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq N$ , ja iga  $C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  korral

**NB!** Siin põhjendamise juures tuleb märgu Jordani mõõdu invariantsus nihke suhtes.

$$\check{\mathcal{D}}_C := \Phi(Q_C) + A_C[(1 - \theta_n)\Delta_n] \subset \Phi[C] \subset \Phi(Q_C) + A_C[(1 + \theta_n)\Delta_n] =: \hat{\mathcal{D}}_C.$$

Selgitame hulkade  $\mathcal{D}_C$ ,  $\check{\mathcal{D}}_C$  ja  $\hat{\mathcal{D}}_C$  struktuuri. Tähistame  $R_C := A_C^{-1}(\Phi(Q_C))$ ; siis  $A_C(R_C) = \Phi(Q_C)$  ning

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_C &= A_C(R_C) + A_C[\Delta_n] = A_C[R_C + \Delta_n], \\ \check{\mathcal{D}}_C &= A_C(R_C) + A_C[(1 - \theta_n)\Delta_n] = A_C[R_C + (1 - \theta_n)\Delta_n], \\ \hat{\mathcal{D}}_C &= A_C(R_C) + A_C[(1 + \theta_n)\Delta_n] = A_C[R_C + (1 + \theta_n)\Delta_n]. \end{aligned}$$

Märgime, et hulgad  $R_C + \Delta_n$ ,  $R_C + (1 - \theta_n)\Delta_n$  ja  $R_C + (1 + \theta_n)\Delta_n$  on ruudud keskpunktiga  $R_C$  ja küljepikkustega vastavalt  $\frac{1}{2^n}$ ,  $\frac{1 - \theta_n}{2^n}$  ja  $\frac{1 + \theta_n}{2^n}$ ; hulgad  $\mathcal{D}_C$ ,  $\check{\mathcal{D}}_C$  ja  $\hat{\mathcal{D}}_C$  on rööpküliligid (vt. joonist ???).

Tõepoolest, selliste arvude  $\theta_n$  olemasolu juhul iga naturaalarvu  $n \geq N$  ja iga  $C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  korral

$$\begin{aligned} |\mu(\Phi[C]) - \mu(A_C[C])| &= |\mu(\Phi[C]) - \mu(\mathcal{D}_C)| \leq \mu(\hat{\mathcal{D}}_C) - \mu(\check{\mathcal{D}}_C) \\ &= \mu(A_C[(1 + \theta_n)\Delta_n]) - \mu(A_C[(1 - \theta_n)\Delta_n]) \\ &= |\det A_C| \mu((1 + \theta_n)\Delta_n) - |\det A_C| \mu((1 - \theta_n)\Delta_n) \\ &\leq L \frac{(1 + \theta_n)^2 - (1 - \theta_n)^2}{2^{2n}} = 4L\theta_n \mu(C) \end{aligned}$$

ning seega (5.26) kehtib, sest

$$\sum_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} |\mu(\Phi[C]) - \mu(A_C[C])| \leq 4L\theta_n \sum_{C \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})} \mu(C) = 4L\theta_n \mu(\mathcal{A}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Tähistame iga naturaalarvu  $n \geq N$  korral

$$\theta_n := \frac{2}{\alpha} \sup_{\substack{(u,v) \in \mathcal{A} \\ \max\{|\Delta u|, |\Delta v|\} = \frac{1}{2^{n+1}}}} \frac{d(\Phi(u + \Delta u, v + \Delta v), \Phi(u, v) + A_{(u,v)}(\Delta u, \Delta v))}{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

(siin arv  $\alpha$  pärineb lausest 5.6, (cb)); siis lause 5.6, (cc), põhjal  $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (PÕH-JENDADA!). Paneme tähele, et iga naturaalarvu  $n \geq N$  ja iga  $\mathcal{C} \in \check{\mathfrak{C}}_n(\mathcal{A})$  korral

- (1) kujutishulga  $\Phi[\mathcal{C}]$  mis tahes rajapunkti kaugus hulga  $\mathcal{D}_C$  rajast ei ületa arvu  $\frac{\alpha \theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}$ ;
- (2) hulga  $\check{\mathcal{D}}_C$  punktide ja hulka  $\hat{\mathcal{D}}_C$  mittekuuluvate punktide kaugused hulga  $\mathcal{D}_C$  rajast on mitte väiksemad kui  $\frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}$ .

**NB!** Kas siia tuleb veel üks joonis teha?

Tõestame väited (1) ja (2). Kirjutame  $Q_C = (u, v)$ .

(1). Olgu  $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$  (s.t.  $P$  on hulga  $\Phi[\mathcal{C}]$  rajapunkt). Siis lause 5.6, (ac), põhjal  $P = \Phi(Q)$  mingi  $Q \in \partial\mathcal{C}$  korral. Me saame kirjutada  $Q = (u + \Delta u, v + \Delta v)$ , kus  $\Delta u$  ja  $\Delta v$  rahuldavad tingimust  $\max\{|\Delta u|, |\Delta v|\} = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Nüüd  $(\Delta u, \Delta v) \in \partial\Delta_n$ , seega lause 5.6, (ac), põhjal  $A_C(\Delta u, \Delta v) \in \partial(A_C[\Delta_n])$  ning järelikult  $P_0 := \Phi(Q_C) + A_C(\Delta u, \Delta v) \in \partial(\Phi(Q_C) + A_C[\Delta_n]) = \partial\mathcal{D}_C$ . Seejuures arvu  $\theta_n$  definitsiooni põhjal

$$d(P, \partial\mathcal{D}_C) \leq d(P, P_0) = d(\Phi(u + \Delta u, v + \Delta v), \Phi(u, v) + A_C(\Delta u, \Delta v)) \leq \frac{\alpha \theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}.$$

(2). Olgu  $P_1 \in \check{\mathcal{D}}_C$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{\mathcal{D}}_C$  ja  $P_0 \in \partial\mathcal{D}_C$ . Väite (2) tõestuseks peame näitama, et  $d(P_1, P_0) \geq \frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}$  ja  $d(P_2, P_0) \geq \frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}$ . Selleks märgime, et

$$P_1 = A_C(R_C + R_1), \quad P_2 = A_C(R_C + R_2), \quad \text{ja} \quad P_0 = A_C(R_C + R_0) \quad (5.27)$$

mingite  $R_1 \in (1 - \theta_n)\Delta_n$ ,  $R_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus ((1 + \theta_n)\Delta_n)$  ja  $R_0 \in \partial\Delta_n$  korral (PÕHJENDADA!). Kuna  $d(R_1, R_0) \geq \frac{\theta_n}{2^{n+1}}$  ja  $d(R_2, R_0) \geq \frac{\theta_n}{2^{n+1}}$  (PÕHJENDADA!), siis mõlema  $i \in \{1, 2\}$  korral

$$d(P_i, P_0) = d(A_C(R_C + R_i), A_C(R_C + R_0)) \geq \alpha d(R_C + R_i, R_C + R_0) = \alpha d(R_i, R_0) \geq \frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}.$$

Soovitud sisalduvused  $\check{\mathcal{D}}_C \subset \Phi[\mathcal{C}] \subset \hat{\mathcal{D}}_C$  järelduvad väidetest (1) ja (2).

Olgu  $P_1 \in \check{\mathcal{D}}_C$  ja  $P_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \hat{\mathcal{D}}_C$ . Sisalduvuste  $\check{\mathcal{D}}_C \subset \Phi[\mathcal{C}] \subset \hat{\mathcal{D}}_C$  tõestuseks piisab näidata, et  $P_1 \in \Phi[\mathcal{C}]$  ja  $P_2 \notin \Phi[\mathcal{C}]$ . Selleks tähistame  $P_C := \Phi(Q_C)$  ja esitame punktid  $P_1$  ja  $P_2$  valemite (5.27) antud kujul, kus  $R_1 \in (1 - \theta_n)\Delta_n$  ja  $R_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus ((1 + \theta_n)\Delta_n)$ .

Oletame vastuväiteliselt, et  $P_1 \notin \Phi[\mathcal{C}]$ . Kuna  $P_C \in \Phi[\mathcal{C}]$ , siis punkte  $P_C$  ja  $P_1$  ühendaval sirglõigul leidub punkt  $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$  (vt. ülesande I.1.5 näpunäidet). Väite (1) põhjal  $d(P, \partial\mathcal{D}_C) \leq \frac{\alpha \theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}$ . Teiselt poolt, kuna  $P_C = A_C(R_C)$  ja  $P_1 = A_C(R_C + R_1)$ , siis kujutuse  $A_C$  linearsuse tõttu leidub punkt  $R$  punkte  $R_C$  ja  $R_C + R_1$  ühendavalt sirglõigult nii, et  $P = A_C(R) \in \check{\mathcal{D}}_C$  (siin viimase kuuluvuse põhjenduseks märgime, et  $R = R_C + tR_1$  mingi  $t \in [0, 1]$  korral ning seega  $R \in R_C + (1 - \theta_n)\Delta_n$ ). Väite (2) põhjal  $d(P, \partial\mathcal{D}_C) \geq \frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}$ , vastuolu.

Oletame nüüd vastuväiteliselt, et  $P_2 \in \Phi[\mathcal{C}]$ . Kuna hulk  $\Phi[\mathcal{C}]$  on tõkestatud, siis leidub punkte  $P_C$  ja  $P_2$  ühendaval sirgel selline punkt  $P_3 \in \mathbb{R}^2 \setminus \Phi[\mathcal{C}]$ , et punkt  $P_2$  jääb punktide  $P_C$  ja  $P_3$  vahele. Punkte  $P_2$  ja  $P_3$  ühendaval sirglõigul leidub punkt  $P \in \partial(\Phi[\mathcal{C}])$  (vt. ülesande I.1.5 näpunäidet). Väite (1) põhjal  $d(P, \partial\mathcal{D}_C) \leq \frac{\alpha \theta_n}{2 \cdot 2^{n+1}}$ . Teiselt poolt, kuna  $P_C = A_C(R_C)$  ja  $P_2 = A_C(R_C + R_2)$ , siis kujutuse  $A_C$  linearsuse tõttu leidub punkt  $R$  punkte  $R_C$  ja  $R_C + R_2$  ühendavalt sirgelt nii, et  $P = A_C(R) \notin \hat{\mathcal{D}}_C$  (siin viimase mittekuuluvuse põhjenduseks märgime, et  $R = R_C + tR_2$  mingi  $t \geq 1$  korral ning seega  $R \notin R_C + (1 + \theta_n)\Delta_n$ ). Väite (2) põhjal  $d(P, \partial\mathcal{D}_C) \geq \frac{\alpha \theta_n}{2^{n+1}}$ , vastuolu.  $\square$

### 5.3.6. Üks teoreemi 5.4 tugevdus

Teoreem 5.4 jääb kehtima, kui temas teisenduse regulaarsuse eeldust mõnevõrra nõrgendada, nagu seda on tehtud järgnevas teoreemis.

**Teoreem 5.8.** Olgu  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  ning olgu  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  pidev funktsioon. Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$  lahtine hulk ning olgu teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$  antud süsteemiga

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (5.28)$$

kus funktsioonidel (5.28) eksisteerivad hulgas  $\mathcal{U}$  pidevad osatuletised. Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$  ruumis  $\mathbb{R}^2$  mõõtuv kinnine alamhulk, mille teisendus  $\Phi$  kujutab hulgaks  $\mathcal{D}$ , s.t.  $\Phi[\mathcal{A}] = \mathcal{D}$ . Siis hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine ja tõkestatud. Kui leidub nullmõõduga alamhulk  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$  nii, et

(1) ahend  $\Phi|_{\mathcal{A}^\circ \setminus \mathcal{K}}$  on üksühene (sümbol  $\mathcal{A}^\circ$  tähistab hulga  $\mathcal{A}$  sisemust);

(2)  $J(u, v) := \frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u, v) \neq 0$  iga  $(u, v) \in \mathcal{A}^\circ \setminus \mathcal{K}$  korral,

siis hulk  $\mathcal{D}$  on mõõtuv, kusjuures

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (5.29)$$

**TÕESTUS.** Hulk  $\mathcal{D}$  on kinnine ja tõkestatud lause 5.6, (ab), põhjal (vt. märkust 5.2).

Leidugu nullmõõduga alamhulk  $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ , mis rahuldab tingimusi (1) ja (2). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et hulk  $\mathcal{K}$  on kinnine ruumis  $\mathbb{R}^2$ , kusjuures  $\mathcal{K} \supset \partial \mathcal{A}$ , s.t. hulk  $\mathcal{K}$  sisaldab hulga  $\mathcal{A}$  raja (PÕHJENDADA!). Tähistame  $\mathcal{W} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}$ ; siis  $\mathcal{W}$  on lahtine hulk (sest  $\mathcal{A} \setminus \mathcal{K} = \mathcal{A}^\circ \setminus \mathcal{K}$  (PÕHJENDADA!)), kusjuures ahend  $\Phi|_{\mathcal{W}}: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^2$  on regulaarne teisendus (PÕHJENDADA!). Lause 5.6, (aa), põhjal on kujutishulk  $\Phi[\mathcal{W}]$  lahtine, seega  $\Phi[\mathcal{W}] \subset (\Phi[\mathcal{A}])^\circ$  (PÕHJENDADA!).

Teoreemi 2.5 põhjal piisab hulga  $\mathcal{D}$  mõõtuvuse tõestuseks näidata, et tema raja  $\partial \mathcal{D}$  on nullmõõduline. Selleks paneme tähele, et

$$\partial \mathcal{D} = \partial(\Phi[\mathcal{A}]) \stackrel{(1)}{=} \Phi[\mathcal{A}] \setminus (\Phi[\mathcal{A}])^\circ \subset \Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{W}] \subset \Phi[\mathcal{A} \setminus \mathcal{W}] = \Phi[\mathcal{K}]$$

(siin võrdus (1) kehtib hulga  $\Phi[\mathcal{A}]$  kinnisuse tõttu; sisalduvus (2) järeldub sisalduvusest  $(\Phi[\mathcal{A}])^\circ \supset \Phi[\mathcal{W}]$ ). Kuna hulk  $\mathcal{K}$  on nullmõõduline, siis lause 5.6, (bc), põhjal (vt. märkust 5.2) on ka kujutishulk  $\Phi[\mathcal{K}]$  nullmõõduline. Niisiis, raja  $\partial \mathcal{D}$  on nullmõõdulise hulga  $\Phi[\mathcal{K}]$  alamhulk, seega ka see raja ise on nullmõõduline, nagu soovitud.

Mis tahes mõõtuvate alamhulkade  $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$  ja  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  korral tähistame

$$I_{\mathcal{E}} = \iint_{\mathcal{E}} f(x, y) dx dy \quad \text{ja} \quad J_{\mathcal{B}} = \iint_{\mathcal{B}} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Teoreemi tõestuseks peame näitama, et  $I_{\mathcal{D}} = J_{\mathcal{A}}$ .

**NB!** Kas vajab põhjendamist, miks need integraalid alati eksisteerivad? Näiteks teoreemi 3.5 põhjal!

Funktsiooni  $f$  ja funktsioonide (5.28) osatuletisfunktsioonide pidevuse tõttu hulgas  $\mathcal{A}$  leidub Weierstrassi teoreemi I.4.7 põhjal reaalarv  $M \geq 0$  nii, et

$$|f(u, v)| \leq M, \quad \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \right| \leq M, \\ \left| \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right| \leq M \quad \text{iga } (u, v) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Ilmselt  $|J(u, v)| \leq 2M^2$  iga  $(u, v) \in \mathcal{A}$  korral (PÕHJENDADA!). Lause 5.6, (ba) ja (bb), põhjal (vt. märkust 5.2) leidub reaalarv  $\varkappa > 0$  nii, et

$$\mu^*(\Phi[\mathcal{B}]) \leq \varkappa \mu^*(\mathcal{B}) \quad \text{iga alamhulga } \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Olgu  $\varepsilon > 0$  suvaline (positiivne) reaalarv. Hulga  $\mathcal{W}$  mõõtuvuse tõttu leidub kinnine mõõtuv alamhulk  $\mathcal{L} \subset \mathcal{W}$  nii, et  $\mu(\mathcal{W}) - \mu(\mathcal{L}) < \varepsilon$  (sellise kinnise mõõtuva hulga  $\mathcal{L}$  rolli sobib näiteks teatav diaadiliste ruutude ühend – vt. teoreemi 4.2).

Kuna teoreemi 5.4 põhjal  $I_{\Phi[\mathcal{L}]} = J_{\mathcal{L}}$ , siis

$$|I_{\mathcal{D}} - J_{\mathcal{A}}| = |(I_{\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}]} + I_{\Phi[\mathcal{L}]}) - (J_{\mathcal{L}} + J_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}})| \\ \leq |I_{\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}]}| + |J_{\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}}| \\ \leq M \mu(\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}]) + M 2M^2 \mu(\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}).$$

Kuna  $\mu(\mathcal{W}) = \mu(\mathcal{W}) + \mu(\mathcal{K}) = \mu(\mathcal{A})$ , siis

$$\mu(\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}) = \mu(\mathcal{A}) - \mu(\mathcal{L}) = \mu(\mathcal{W}) - \mu(\mathcal{L}) < \varepsilon.$$

Kuna  $\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}] \subset \Phi[\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}]$ , siis

$$\mu(\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}]) = \mu^*(\Phi[\mathcal{A}] \setminus \Phi[\mathcal{L}]) \leq \mu^*(\Phi[\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}]) \leq \varkappa \mu^*(\mathcal{A} \setminus \mathcal{L}) < \varkappa \varepsilon.$$

Seega

$$|I_{\mathcal{D}} - J_{\mathcal{A}}| \leq M \varkappa \varepsilon + 2M^3 \varepsilon = (M \varkappa + 2M^3) \varepsilon.$$

Kuna arvu  $\varepsilon > 0$  võisime eelnevas arutelus valida suvaliselt, siis järeldub siit, et  $I_{\mathcal{D}} = J_{\mathcal{A}}$ , nagu soovitud.  $\square$

### 5.3.7. Üleminek polaarkoordinaatidele kahekordses integraalis

Vaatleme teisendust  $\mathbb{R}^2 \ni (r, \phi) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mis on määratud süsteemiga

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi. \quad (5.30)$$

See teisendus seab igale  $r\phi$ -tasandi punktile  $(r, \phi)$ , kus  $r \geq 0$ , vastavusse  $xy$ -tasandi punkti, mille polaarraadius on  $r$  ja polaarnurk on  $\phi$ , s.t. punkti, mille polaarkoordinaadid on  $r$  ja  $\phi$  (siin me loeme pooluseks koordinaatide alguspunkti ja polaarteljeks  $x$ -telje positiivse osa). Selle teisenduse puhul

$$x'_r = \cos \phi, \quad x'_\phi = -r \sin \phi, \\ y'_r = \sin \phi, \quad y'_\phi = r \cos \phi;$$

seega tema jakobiaan

$$J(r, \phi) := \frac{D(x, y)}{D(r, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.$$

Näeme, et teisendus (5.30) kujutab  $r\phi$ -tasandi hulga

$$\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (5.31)$$

sisemuse

$$\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r > 0, \phi \in (0, 2\pi)\} \quad (5.32)$$

regulaarselt  $xy$ -tasandiks, millest on välja lõigatud  $x$ -telje positiivne osa (koos punktiga  $(0, 0)$ ); hulga (5.31) raja (s.t. selle hulga osa, kus  $r = 0$  või  $\phi \in \{0, 2\pi\}$ ) kujutab see teisendus  $x$ -telje positiivseks osaks (koos punktiga  $(0, 0)$ ). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 5.8, kui seal võtta teisenduse (5.28) rolli teisendus (5.30) ning hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{K}$  rolli vastavalt hulk  $\Delta$  ja tema raja  $\partial\Delta$ . Teoreemi 5.8 tingimused (1) ja (2) on sel juhul rahuldatud, sest hulga  $\Delta$  sisemus sisaldub hulga (5.31) sisemuses (5.32).

**Teoreem 5.9.** *Kui*

- (1) *kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev  $xy$ -tasandi kinnises mõõtuvas hulgas  $\mathcal{D}$ ;*
- (2) *teisendus (5.30) kujutab hulgas (5.31) sisalduva kinnise mõõtuva hulga  $\Delta$  hulgaks  $\mathcal{D}$ ,*

*siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \phi, r \sin \phi) r dr d\phi. \quad (5.33)$$

**Märkus 5.3.** Teoreem 5.9 jääb kehtima, kui temas asendada hulk (5.31) hulgaga

$$\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r \geq 0, \phi \in [-\pi, \pi]\}, \quad (5.34)$$

kusjuures ka selle teoreemi tõestus jääb niisugusel juhul peaaegu sõna-sõnalt samaks: ainus erinevus tõestuses on, et hulga (5.31) ja tema sisemuse (5.32) asemel tuleb kõikjal vaadelda vastavalt hulka (5.34) ja tema sisemust

$$\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r > 0, \phi \in (-\pi, \pi)\}. \quad (5.35)$$

Märgime, et teisendus (5.30) kujutab hulga (5.34) sisemuse (5.35) regulaarselt  $xy$ -tasandiks, millest on välja lõigatud  $x$ -telje negatiivne osa (koos punktiga  $(0, 0)$ ); hulga (5.34) raja (s.t. selle hulga osa, kus  $r = 0$  või  $\phi \in \{-\pi, \pi\}$ ) kujutab see teisendus  $x$ -telje negatiivseks osaks (koos punktiga  $(0, 0)$ ).

Analooiline arutelu näitab, et teoreem 5.9 jääb kehtima ka siis, kui temas asendada hulk (5.31) mis tahes hulgaga  $\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r \geq 0, \phi \in [\alpha, \alpha + 2\pi]\}$ , kus  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Alajaotise lõpetuseks toome kaks näidet polaarkoordinaatidele ülemineku valemi (5.33) rakendamisest kahekordse integraali arvutamisel.

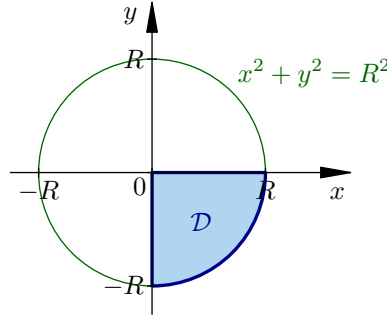
**NB!** See on ülesannete brošüüri 2024. a. sügissemestri versiooni ül. 87, a.

**Näide 5.2.** Leiame kahekordse integraali

$$\iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) \, dx \, dy,$$

kui  $\mathcal{D}$  on määratud võrratustega  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$  ja  $x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Võrratus  $x^2 + y^2 \leq R^2$  määrab kinnise ringi keskpunktiga  $(0, 0)$  ja raadiusega  $R$ , seega  $\mathcal{D}$  on selle ringi sektor, kus  $x \geq 0$  ja  $y \leq 0$  (vt. joonist 5.2).



JOONIS 5.2. Hulk  $\mathcal{D}$  on joonisel värvitud helesiniseks.

Teisendus

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

(üleminek polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele  $xy$ -tasandil) kujutab hulgaks  $\mathcal{D}$   $r\phi$ -tasandi ristküliku

$$\Delta := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \phi \in [-\frac{\pi}{2}, 0], r \in [0, R]\}.$$

(Teisisõnu, hulga  $\mathcal{D}$  esitus polaarkoordinaatides on  $r\phi$ -tasandi ristkülik  $\Delta$ .) Seega polaarkoordinaatidele ülemineku valemi (5.33) põhjal kahekordses integraalis **teoreemist 5.9** (vt. märkust 5.3)

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x^2 - y^2) \, dx \, dy &= \iint_{\Delta} (r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi) r \, dr \, d\phi = \iint_{\Delta} r^3 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \, dr \, d\phi \\ &= \iint_{\Delta} r^3 \cos 2\phi \, dr \, d\phi = \int_0^R \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 r^3 \cos 2\phi \, d\phi \right) dr = \int_0^R r^3 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2\phi \, d\phi \right) dr \\ &= \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2\phi \, d\phi \right) \cdot \left( \int_0^R r^3 \, dr \right) = \left( \frac{\sin 2\phi}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 \right) \cdot \left( \frac{r^4}{4} \Big|_0^R \right) = 0 \cdot \frac{R^4}{4} = 0. \end{aligned}$$

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 161, ül. 875; samuti ülesannete brošüüri 2024. a. sügissemestri versiooni ül. 87, d.

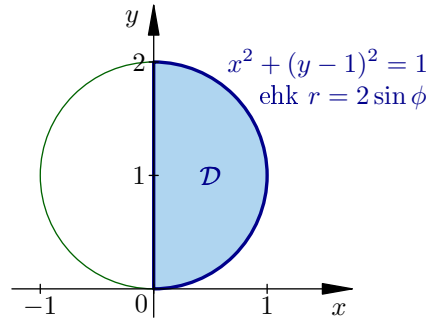
**Näide 5.3.** Leiame kahekordse integraali

$$\iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy,$$

kus  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

Võrratus  $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$  määrab kinnise ringi keskpunktiga  $(0, 1)$  ja raadiusega 1, seega  $\mathcal{D}$  on selle ringi osa, kus  $x \geq 0$  (vt. joonist 5.3). Arvestades, et  $xy$ -tasandi mis tahes punkti  $(x, y)$  ristkoordinaadid  $x$  ja  $y$  ning polaarkoordinaadid  $r$  ja  $\phi$  on seotud võrranditega

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \tag{5.36}$$

JOONIS 5.3. Hulk  $\mathcal{D}$  on joonisel värvitud helesiniseks.

saame, et

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 \leq 1 &\iff x^2 + y^2 - 2y + 1 \leq 1 \iff x^2 + y^2 \leq 2y \\ &\iff r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi \leq 2r \sin \phi \iff r^2 \leq 2r \sin \phi \iff r \leq 2 \sin \phi \end{aligned}$$

(s.t. ring  $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$   $xy$ -tasandil esitub polaarkoordinaatides võrratusega  $r \leq 2 \sin \phi$ ). Seega teisendus (5.36) (üleminek polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele  $xy$ -tasandil) kujutab hulga  $\mathcal{D}$   $r\phi$ -tasandi kõvertrapetsi

$$\Delta := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], r \in [0, 2 \sin \phi]\}.$$

Teisisõnu, hulga  $\mathcal{D}$  esitus polaarkoordinaatides on  $r\phi$ -tasandi kõvertrapets  $\Delta$ . Tõepoolest, hulga  $\mathcal{D}$  punktide polaarnurgad omandavad parajasti kõikvõimalikke väärtusi lõigust  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ; iga  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  korral nende hulga  $\mathcal{D}$  punktide puhul, mille polaarnurk on  $\phi$ , omandavad polaarraadiused parajasti kõikvõimalikke väärtusi lõigust  $[0, 2 \sin \phi]$ .

Kahekordses integraalis polaarkoordinaatidele ülemineku valemi (5.33) põhjal teoreemist 5.9

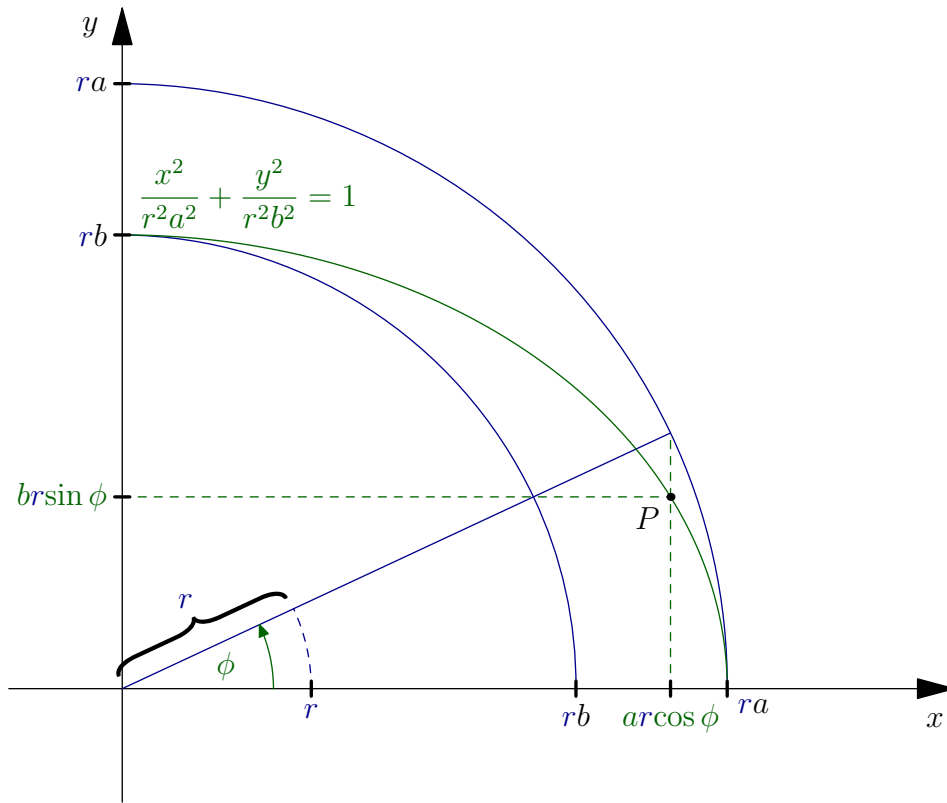
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} x \, dx \, dy &= \iint_{\Delta} (r \cos \phi) r \, dr \, d\phi = \iint_{\Delta} r^2 \cos \phi \, dr \, d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2 \sin \phi} r^2 \cos \phi \, dr \right) d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \left( \int_0^{2 \sin \phi} r^2 \, dr \right) d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \sin \phi} \right) d\phi = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \cos \phi \, d\phi \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \phi \, d(\sin \phi) = \frac{8}{3} \cdot \left( \frac{\sin^4 \phi}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

### 5.3.8. Üleminek elliptilistele polaarkoordinaatidele kahekordses integraalis

Olgu  $a > 0$  ja  $b > 0$ . Vaatleme teisendust  $\mathbb{R}^2 \ni (r, \phi) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , mis on määratud süsteemiga

$$x = ar \cos \phi, \quad y = br \sin \phi. \quad (5.37)$$

Kui punkt  $(r, \phi) \in \mathbb{R}^2$ , kus  $r \geq 0$ , kujutub teisendusega (5.37) punktiks  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , siis arvudele  $r$  ja  $\phi$  viidatakse kui punkti  $(x, y)$  *elliptilistele polaarkoordinaatidele*. Seost punkti  $P = (x, y)$  ristkoordinaatide  $x$  ja  $y$  ning tema elliptiliste polaarkoordinaatide  $r$  ja  $\phi$  vahel selgitab joonis 5.4 (juhime tähelepanu, et punkti  $(x, y)$



JOONIS 5.4. Punkti  $P$  ristkoordinaadid  $x$  ja  $y$  ning elliptilised polaarkoordinaadid  $r$  ja  $\phi$  on seotud võrdustega (5.37).

elliptilised polaarkoordinaadid ei ole üheselt määratud). Nimetus “elliptilised polaarkoordinaadid” on siin “õigustatud” asjaoluga, et (elliptilistes polaaarkoordinaatides antud) võrrand  $r = 1$  esitab ( $xy$ -tasandi) ellipsi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; võrratus  $r \leq 1$  esitab ellipsi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ . (Meenutame, et nii tasandilist joont  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  kui ka selle joonega piiratud tasandilist kujundit  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  nimetatakse ellipsiks.)

Tõepoolest, arvestades seost (5.37)  $xy$ -tasandi punkti  $(x, y)$  ristkoordinaatide  $x$  ja  $y$  ning elliptiliste polaarkoordinaatide  $r$  ja  $\phi$  vahel,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\iff \frac{a^2 r^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \phi}{b^2} = 1 \iff r^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 1 \\ &\iff r^2 = 1 \iff r = 1 \end{aligned}$$

ning, analoogiliselt,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \iff r \leq 1.$$

Märgime, et teisendus (5.37) kujutab  $r\phi$ -tasandi ristküliku  $\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: r \in [0, 1], \phi \in [0, 2\pi]\}$  ellipsiks  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$   $xy$ -tasandil.

Teisenduse (5.37) puhul

$$\begin{aligned}x'_r &= a \cos \phi, & x'_\phi &= -ar \sin \phi, \\y'_r &= b \sin \phi, & y'_\phi &= br \cos \phi;\end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned}J(r, \phi) &:= \frac{D(x, y)}{D(r, \phi)} = \begin{vmatrix} a \cos \phi & -ar \sin \phi \\ b \sin \phi & br \cos \phi \end{vmatrix} = abr \cos^2 \phi + abr \sin^2 \phi \\&= abr(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = abr.\end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (5.37) kujutab  $r\phi$ -tasandi hulga (5.31) sisemuse (5.32) regulaarselt  $xy$ -tasandiks, millest on välja lõigatud  $x$ -telje positiivne osa (koos punktiga  $(0, 0)$ ); hulga (5.31) raja (s.t. selle hulga osa, kus  $r = 0$  või  $\phi \in \{0, 2\pi\}$ ) kujutab see teisendus  $x$ -telje positiivseks osaks (koos punktiga  $(0, 0)$ ).

Järgneva teoreemi tõestus kordab sõna-sõnalt teoreemi 5.9 tõestust ainsa erinevusega, et teisenduse (5.30) asemel vaadeldakse kõikjal teisendust (5.37).

**Teoreem 5.10.** *Kui*

- (1) *kahe muutuja funktsioon  $z = f(x, y)$  on pidev  $xy$ -tasandi kinnises mõõtuvas hulgas  $\mathcal{D}$ ;*
- (2) *teisendus (5.37) kujutab hulgas (5.31) sisalduva kinnise mõõtuva hulga  $\Delta$  hulgaks  $\mathcal{D}$ ,*

*siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = ab \iint_{\Delta} f(aar \cos \phi, br \sin \phi) r dr d\phi. \quad (5.38)$$

Alajaotise lõpetuseks toome ühe näite elliptilistele polaarkoordinaatidele ülemineku valemi (5.38) rakendamisest kahekordse integraali arvutamisel.

**Näide 5.4.** Leiame kahekordse integraali

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2} dx dy,$$

kui  $\mathcal{D}$  on määratud võrratusega  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1$ .

Hulk  $\mathcal{D}$  on ellips pooltelgedega  $a := \sqrt{3}$  ja  $b := \sqrt{2}$ . Teisendus

$$x = \sqrt{3}r \cos \phi, \quad y = \sqrt{2}r \sin \phi$$

(üleminek elliptilistelt polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele  $xy$ -tasandil) kujutab ellipsiks  $\mathcal{D}$   $r\phi$ -tasandi ristküliku

$$\Delta := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2: \phi \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}.$$

**NB!** See on Reimersi ül.-kogu, II, lk. 161, ül. 872; samuti ülesannete brošüüri 2024. a. sügissemestri versiooni ül. 87, i.

Elliptilistele polaarkoordinaatidele ülemineku valemi (5.38) põhjal kahekordses integraalis **teoreem 5.10**

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2} \, dx \, dy &= \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \iint_{\Delta} \sqrt{6 - 2 \cdot 3r^2 \cos^2 \phi - 3 \cdot 2r^2 \sin^2 \phi} \, r \, dr \, d\phi \\
 &= \sqrt{6} \cdot \iint_{\Delta} \sqrt{6 - 6r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} \, r \, dr \, d\phi = 6 \cdot \iint_{\Delta} \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr \, d\phi \\
 &= 6 \cdot \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr \right) d\phi = 6 \cdot \left( \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \, r \, dr \right) \cdot \left( \int_0^{2\pi} d\phi \right) \\
 &= 6 \cdot \left( -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} \, d(1 - r^2) \right) \cdot 2\pi = 6\pi \cdot \left( \frac{(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 \right) = 4\pi.
 \end{aligned}$$

## § 6. Kahekordse integraali rakendusi

### 6.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Järgnev teoreem sisaldub Jordani mõõdu definitsioonis 2.3.

**Teoreem 6.1.** *Olgu  $\mathcal{D}$  mõõtuv hulk  $xy$ -tasandil. Siis tema pindala  $S_{\mathcal{D}}$  avaldub valemiga*

$$S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} dx dy.$$

**Järeldus 6.2.** *Olgu  $y = \alpha(x)$  ja  $y = \beta(x)$  lõigus  $[a, b]$  pidevad funktsioonid, kusjuures  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral. Siis kõvertrapets*

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

*on mõõtuv hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ), kusjuures tema pindala  $S_{\mathcal{A}}$  avaldub valemiga*

$$S_{\mathcal{A}} = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

**TÕESTUS.** Kõvertrapetsi  $\mathcal{A}$  mõõtuvus on tõestatud lauses 2.7. Teoreemi 6.1 põhjal (kasutades kahekordse integraali arvutusvalemit üle kõvertrapetsi teoreemist 5.2, (a))

$$S_{\mathcal{A}} = \iint_{\mathcal{A}} dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \right) dx = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx.$$

□

**Järeldus 6.3.** *Olgu  $r = r(\phi)$  lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon, kus  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ . Siis (polaarkoordinaatides antud) kõversektor*

$$\{(r, \phi) \in \mathbb{R}^2 : \phi \in [\alpha, \beta], 0 \leq r \leq r(\phi)\} \quad (6.1)$$

*on mõõtuv hulk (tasandil  $\mathbb{R}^2$ ), kusjuures tema pindala  $S$  avaldub valemiga*

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\phi)^2 d\phi.$$

**TÕESTUS.** Tähistame hulga (6.1) tõlgendatuna kõversektorina  $xy$ -tasandil tähega  $\mathcal{D}$ ; hulga (6.1) tõlgendatuna kõvertrapetsina  $r\phi$ -tasandil tähistame tähega  $\Delta$ . Siis kõversektori  $\mathcal{D}$  mõõtuvus järeldub teoreemist 5.8, kui seal võtta teisenduse (5.28) rolli teisendus (5.30) ning hulkade  $\mathcal{A}$  ja  $\mathcal{K}$  rolli vastavalt hulk  $\Delta$  ja tema raja  $\partial\Delta$ .

Tõepoolest, teoreemi 5.8 tingimused (1) ja (2) on sel juhul rahuldatud, sest hulga  $\Delta$  sisemus sisaldub hulga (5.31) sisemuses (5.32) (vt. alajaotist 5.3.7).

Teoreemi 6.1 põhjal, kasutades polaarkoordinaatidele ülemineku valemit (5.33) kahekordses integraalis teoreemist 5.9 ja kahekordse integraali arvutusvalemit üle kõvertrapetsi teoreemist 5.2, (a),

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\Delta} r dr d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_0^{r(\phi)} r dr \right) d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{r^2}{2} \Big|_0^{r(\phi)} \right) d\phi = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r(\phi)^2}{2} d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\phi)^2 d\phi. \end{aligned}$$

□

**Märkus 6.1.** Järeldus 6.3 jääb kehtima, kui temas eeldus  $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$  asendada eeldusega  $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$ , kusjuures ka selle järelduse tõestus jääb niisugusel juhul peaaegu sõna-sõnalt samaks: ainus erinevus tõestuses on, et hulga (5.31) ja tema sisemuse (5.32) asemel tuleb kõikjal vaadelda vastavalt hulka (5.34) ja tema sisemust (5.35) (vt. märkust 5.3).

## 6.2. Kõversilindri ruumala arvutamine

Selles punktis anname arvutusvalemi kõversilindri ruumala arvutamiseks. Keha<sup>2</sup> ruumala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri; rõhutame vaid, et ruumala matemaatiliselt range definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga ruumalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale. Täpsemalt, analoogiliselt kahekordse (Riemanni) integraaliga (ruumi  $\mathbb{R}^2$  alamhulgal määratud funktsioonist) defineeritakse kolmekordne (Riemanni) integraal (ruumi  $\mathbb{R}^3$  alamhulgal määratud funktsioonist); analoogiliselt Jordani mõõduga ruumis  $\mathbb{R}^2$  defineeritakse Jordani mõõt ruumis  $\mathbb{R}^3$  – öeldakse, et ruumi  $\mathbb{R}^3$  alamhulk on Jordani mõttes mõõtuv, kui tema karakteristik funktsioon on (Riemanni mõttes) integreeruv selles hulgas; seejuures integraali selle hulga karakteristikust funktsioonist üle selle hulga nimetatakse tema Jordani mõõduks ehk ruumalaks.

**NB!** Tavaliselt nimetatakse hulka  $\mathcal{C}$  teoreemist 6.4 kõversilindriks eeldustel, et hulk  $\mathcal{A}$  on mõõtuv kinnine piirkond tasandil  $\mathbb{R}^2$  ja funktsioonid  $\alpha$  ja  $\beta$  on pidevad hulgas  $\mathcal{A}$ . Meie mõistame käesolevas konspektis kõversilindrit laiemas tähenduses, nõudes siin hulgalt  $\mathcal{A}$  ainult tõkestatust ning funktsioonidelt  $\alpha$  ja  $\beta$  tõkestatust ja tingimuse " $\alpha(x, y) \leq \beta(x, y)$  iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral" täidetust.

**Teoreem 6.4.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  mõõtuv kinnine hulk ning olgu funktsioonid

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{A},$$

pidevad hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\alpha(x, y) \leq \beta(x, y) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Siis kõversilinder

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{A}, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

on mõõtuv hulk ruumis  $\mathbb{R}^3$ , kusjuures tema ruumala  $V_{\mathcal{C}}$  avaldub valemiga

$$V_{\mathcal{C}} = \iint_{\mathcal{A}} (\beta(x, y) - \alpha(x, y)) dx dy.$$

Teoreemi 6.4 tõestame käesolevas konspektis (järgmises) paragrahvis 7 järelduse 7.11 nime all: teoreem 6.4 ja järeldus 7.11 on sõna-sõnalt samad.

<sup>2</sup>Keha ehk ruumilise kujundi all mõistame me ruumi  $\mathbb{R}^3$  alamhulki.

### 6.3. Ruumilise pinnatüki pindala arvutamine

Selles punktis anname mõned arvutusvalemid ruumilise pinnatüki pindala arvutamiseks. Ruumilise pinnatüki pindala mõistet me käesolevas kursuses ei defineeri – see matemaatiliselt range definitsioon on üsna keeruline – rõhutame vaid, et see definitsioon on kooskõlas meie eelmatemaatilise arusaamaga pindalast, nii et edasises võime rahulikult toetuda nimetatud eelmatemaatilisele arusaamale.

**Teoreem 6.5.** *Eksisteerigu funktsioonidel*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

*pidevad osatuletised  $uv$ -tasandi mõõtuvas kinnises piirkonnas  $\Delta$ , kusjuures*

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad \text{piirkonnas } \Delta,$$

*kus*

$$A := \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B := \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C := \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}.$$

*Siis parameetriliste võrranditega*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Delta,$$

*antud pinnatüki  $\Sigma$  pindala  $S_\Sigma$  esitub valemiga*

$$S_\Sigma = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv.$$

SEDA TOOREEMI ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA . □

**Järeldus 6.6.** *Eksisteerigu funktsioonil  $z = f(x, y)$  pidevad osatuletised mõõtuvas kinnises piirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Siis selle funktsiooni graafiku osa*

$$\Sigma := \left\{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in \mathcal{D} \right\}$$

*pindala  $S_\Sigma$  avaldub valemiga*

$$S_\Sigma := \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2 + 1} \, dx \, dy.$$

TÕESTUS. Graafiku osa (pinnatükk)  $\Sigma$  esitub parameetriselt võrranditega

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v), \quad (u, v) \in \mathcal{D}. \quad (6.2)$$

Seda pinnatükki esitavatel funktsioonidel (6.2) eksisteerivad hulgas  $\mathcal{D}$  pidevad osatuletised, kusjuures

$$\begin{aligned} x'_u &= 1, & x'_v &= 0, \\ y'_u &= 0, & y'_v &= 1, \\ z'_u &= f'_x, & z'_v &= f'_y, \end{aligned}$$

seega teoreemi 6.5 tähistusi kasutades

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

järelikult teoreemi 6.5 põhjal

$$S_\Sigma = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{f'_x(u, v)^2 + f'_y(u, v)^2 + 1} \, du \, dv,$$

nagu soovitud. □

## § 7. Kolmekordne integraal

### 7.1. Kolmekordse integraali mõiste

Kolmekordne integraal

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz$$

kolme muutuja funktsioonist  $u = f(x, y, z)$  üle hulga  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraaliga (kahe muutuja funktsioonist üle hulga  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ). Kui kahekordse integraali defineerimisel lähtuti ristküliku jaotusviisist osaristkülikuteks, siis kolmekordse integraali puhul lähtutakse risttahuka jaotusviisist osaristtahukateks; kõik teooriaarenduseks vajalikud mõisted – Riemanni summad, Riemanni integraal, Darboux' summad, Darboux' integraalid, integreeruvus, Darboux' summade piirväärtus, – defineeritakse analoogiliselt kahekordse integraali juhuga; seejuures kolmekordse integraali olemasoluks tarvilikud ja piisavad tingimused ning kolmekordse integraali omadused on kahekordse integraali vastavate tingimuste ja omaduste ilmsed analoogid. Seepärast piirdume käesolevas konspektis kolmekordse integraali osas vaid olulisemate arvutusvalemite äratoomisega.

### 7.2. Kolmekordse integraali arvutamine

**Teoreem 7.1.** *Olgu kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  integreeruv risttahukas  $\mathcal{E} := [a, b] \times [c, d] \times [e, l]$ . Tähistame  $\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d]$ .*

(a) *Kui iga  $(x, y) \in \mathcal{D}$  korral eksisteerib integraal*

$$g(x, y) := \int_e^l f(x, y, z) dz,$$

*siis*

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left( \int_e^l f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} g(x, y) dx dy.$$

(b) *Kui iga  $z \in [e, l]$  korral eksisteerib integraal*

$$h(z) := \iint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy,$$

*siis*

$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^l \left( \iint_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy \right) dz = \int_e^l h(z) dz.$$

TEOREEMI 7.1 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA .

□

**Teoreem 7.2.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  tõkestatud hulk ning olgu funktsioonid

$$\gamma = \gamma(x, y) \quad \text{ja} \quad \delta = \delta(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{A}, \quad (7.1)$$

tõkestatud hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\gamma(x, y) \leq \delta(x, y) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.} \quad (7.2)$$

Kui kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on integreeruv kõversilindris

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{A}, \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}, \quad (7.3)$$

kusjuures iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral eksisteerib integraal

$$g(x, y) := \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz, \quad (7.4)$$

siis

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{A}} \left( \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy. \quad (7.5)$$

**TEOREEMI 7.2 TÕESTUS.** Hulga  $\mathcal{A}$  tõkestamise tõttu leidub kinnine (koordinaat)ristkülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  nii, et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ . Olgu arvud  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , kus  $a < b$  ja  $c < d$ , sellised, et  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ . Funktsioonide  $\gamma$  ja  $\delta$  tõkestamise tõttu leiduvad arvud  $e, l \in \mathbb{R}$  nii, et  $e < l$  ja  $e \leq \gamma(x, y) \leq \delta(x, y) \leq l$  iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral. Tähistame  $\mathcal{E} := [a, b] \times [c, d] \times [e, l]$ ; siis  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ .

Eeldame nüüd, et funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on integreeruv kõversilindris  $\mathcal{C}$ , kusjuures iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral eksisteerib integraal (7.4). Defineerime funktsiooni  $\hat{f}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega

$$\hat{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{kui } (x, y, z) \in \mathcal{C}; \\ 0, & \text{kui } (x, y, z) \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{C}. \end{cases} \quad (7.6)$$

Siis (funktsiooni  $f$  integreeruvuse tõttu hulgas  $\mathcal{C}$ ) on funktsioon  $\hat{f}$  integreeruv risttahukas  $\mathcal{E}$ , kusjuures iga  $(x, y) \in \mathcal{D}$  korral (eelduse põhjal integraali (7.4) olemasolust) eksisteerib integraal

$$\tilde{g}(x, y) := \int_e^l \hat{f}(x, y, z) dz = \begin{cases} \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz, & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A}. \end{cases}$$

Seega teoreemi 7.1, (a), põhjal

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{E}} \hat{f}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \left( \int_e^l \hat{f}(x, y, z) dz \right) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \tilde{g}(x, y) dx dy.$$

Defineerime funktsiooni  $\hat{g}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega

$$\hat{g}(x, y) := \begin{cases} g(x, y), & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{A}; \\ 0, & \text{kui } (x, y) \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{A} \end{cases}$$

(siin funktsioon  $g$  on defineeritud võrdusega (7.4)); siis  $\hat{g} = \tilde{g}$ , seega funktsioon  $\hat{g}$  on integreeruv

ristkülikus  $\mathcal{D}$ , järelikult funktsioon  $g$  on integreeruv hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{D}} \tilde{g}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}} \hat{g}(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy.$$

□

**Järeldus 7.3.** Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  mõõtuv kinnine hulk ning olgu funktsioonid (7.1) pidevad hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures kehtib (7.2). Kui kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on pidev kõversilindris (7.3), siis funktsioon  $f$  on integreeruv selles kõversilindris, kusjuures iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral eksisteerib integraal (7.4) ja kehtib (7.5).

#### JÄRELDUST 7.3 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA .

Esitame järelduse 7.3 tõestuse skeemi. Kehtib lause 2.7 analoog, mille kohaselt meie eeldustel on kõversilinder  $\mathcal{C}$  Jordani mõttes mõõtuv hulk ruumis  $\mathbb{R}^3$ . (See lause 2.7 analoog järeldub teoreemi 2.5 analoogist, mille kohaselt tõkestatud hulk ruumis  $\mathbb{R}^3$  on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui tema raja on nullmõõduline, kasutades lause 2.4 analoogi, mille kohaselt ruumi  $\mathbb{R}^2$  mõõtuvas kinnises alamhulgas määratud pideva funktsiooni graafik on nullmõõduline, ja teoreemi 2.5). Eeldame nüüd, et kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on pidev kõversilindris  $\mathcal{C}$ . Kehtib teoreemi 2.8 analoog, mis ütleb, et ruumi  $\mathbb{R}^3$  mõõtuvas kinnises alamhulgas pidev (kolme muutuja) funktsioon on (Riemanni mõttes) integreeruv selles hulgas; niisiis meie funktsioon  $f$  on (Riemanni mõttes) integreeruv kõversilindris  $\mathcal{C}$ . Iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral on funktsioon  $f(x, y, \cdot)$  pidev lõigus  $[\alpha(x, y), \beta(x, y)]$  ja seega integraal (7.4) eksisteerib. Nüüd teoreemi 7.2 põhjal kehtib (7.5).

□

**Järeldus 7.4.** Olgu funktsioonid  $\alpha = \alpha(x)$  ja  $\beta = \beta(x)$  pidevad lõigus  $[a, b]$ , kusjuures  $\alpha(x) \leq \beta(x)$  iga  $x \in [a, b]$  korral, ning olgu funktsioonid  $\gamma = \gamma(x, y)$  ja  $\delta = \delta(x, y)$  pidevad kõvertrapetsis

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

kusjuures  $\gamma(x, y) \leq \delta(x, y)$  iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral.

Kui funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on pidev kõversilindris

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{A}, \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}, \end{aligned}$$

siis funktsioon  $f$  on integreeruv selles kõversilindris, kusjuures

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left( \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

JÄRELDUSE 7.4 TÕESTUS. Kõigepealt paneme tähele, et kõvertrapets  $\mathcal{A}$  on kinnine hulk tasandil  $\mathbb{R}^2$  (PÕHJENDADA!). Lause 2.7 põhjal on  $\mathcal{A}$  tasandi  $\mathbb{R}^2$  Jordani mõttes mõõtuv alamhulk. Eeldame nüüd, et kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  on pidev kõversilindris  $\mathcal{C}$ . Järelduse 7.3 põhjal on funktsioon  $f$  integreeruv selles kõversilindris, kusjuures iga  $(x, y) \in \mathcal{A}$  korral eksisteerib integraal (7.4) ja kehtib (7.5). Järelduse tõestuseks piisab nüüd näidata, et

(o) funktsioon  $g$  on pidev kõvertrapetsis  $\mathcal{A}$ ,

sest väite (o) kehtides on iga  $x \in [a, b]$  korral funktsioon  $g(x, \cdot)$  pidev lõigus  $[\alpha(x), \beta(x)]$  ja seega eksisteerib integraal  $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y) dy$ , niisiis kahekordse integraali arvutusvalemi põhjal üle kõvertrapetsi teoreemist 5.2, (a),

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\mathcal{A}} g(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} g(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left( \int_{\gamma(x, y)}^{\delta(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx. \end{aligned}$$

**Ülesanne 7.1.** Tõestada väide (o).

□

**Teoreem 7.5.** Olgu kolme muutuja funktsioon  $u = f(x, y, z)$  integreeruv hulgas

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [e, l], (x, y) \in \mathcal{A}(z)\},$$

kus iga  $z \in [e, l]$  korral  $\mathcal{A}(z)$  on mingi hulk  $xy$ -tasandil. Kui iga  $z \in [e, l]$  korral eksisteerib integraal

$$h(z) := \iint_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z) dx dy, \quad (7.7)$$

siis

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_e^l \left( \iint_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz = \int_e^l h(z) dz.$$

TEOREEMI 7.5 TÕESTUS. Eeldusest funktsiooni  $f$  integreeruvuse kohta hulgas  $\mathcal{C}$  järeldub implitsiitselt, et hulk  $\mathcal{C}$  on tõkestatud, järelikult leidub kinnine koordinaatistikülik  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$  nii, et  $\mathcal{A}(z) \subset \mathcal{D}$  iga  $z \in [e, l]$  korral. Olgu  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , kus  $a < b$  ja  $c < d$ , sellised, et  $\mathcal{D} = [a, b] \times [c, d]$ . Tähistame  $\mathcal{E} := [a, b] \times [c, d] \times [e, l]$ ; siis  $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}$ .

Defineerime funktsiooni  $\hat{f}: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega (7.6). Siis (funktsiooni  $f$  integreeruvuse tõttu hulgas  $\mathcal{C}$ ) on funktsioon  $\hat{f}$  integreeruv risttahukas  $\mathcal{E}$ , kusjuures iga  $z \in [e, l]$  korral (eelduse põhjal integraali (7.7) olemasolust) eksisteerib integraal

$$\iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y, z) dx dy = \iint_{\mathcal{A}(z)} f(x, y, z) dx dy = h(z).$$

Seega teoreemi 7.1, (b), põhjal

$$\iiint_{\mathcal{C}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{E}} \hat{f}(x, y, z) dx dy dz = \int_e^l \left( \iint_{\mathcal{D}} \hat{f}(x, y, z) dx dy \right) dz = \int_e^l h(z) dz.$$

□

### 7.3. Muutujate vahetus kolmekordses integraalis

#### 7.3.1. Üldine muutujate vahetuse valem kolmekordse integraali jaoks

Vaatleme teisendust ruumis  $\mathbb{R}^3$ , mis on määratud süsteemiga

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w). \quad (7.8)$$

Tähistame

$$J(u, v, w) := \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & x'_v(u, v, w) & x'_w(u, v, w) \\ y'_u(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & y'_w(u, v, w) \\ z'_u(u, v, w) & z'_v(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix},$$

s.t.  $J(u, v, w)$  on süsteemi (7.8) jakobiaan punktis  $(u, v, w)$ .

**Teoreem 7.6.** *Kui*

- (1) kolme muutuja funktsioon  $t = f(x, y, z)$  on pidev ( $xyz$ -ruumi) mõõtuvas kinnises hulgas  $\mathcal{E}$ ;
- (2) võrrandid (7.8) määravad regulaarse teisenduse, mis kujutab ( $uvw$ -ruumi) mõõtuva kinnise hulga  $\Delta$  hulgaks  $\mathcal{E}$ ,

siis

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz \\ = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (7.9)$$

TEOREEMI 7.6 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA.

□

#### 7.3.2. Üks teoreemi 7.6 tugevdus

Teoreem 7.6 jääb kehtima, kui temas teisenduse regulaarsuse eeldust mõnevõrra nõrgendada, nagu seda on tehtud järgnevas teoreemis (mis on teoreemi 5.8 loomulik analoog).

**Teoreem 7.7.** Olgu  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  ning olgu  $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  pidev funktsioon. Olgu  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$  lahtine hulk ning olgu teisendus  $\Phi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  antud süsteemiga (7.8), kus funktsioonidel (7.8) eksisteerivad hulgas  $\mathcal{U}$  pidevad osatuletised. Olgu  $\Delta \subset \mathcal{U}$  ruumis  $\mathbb{R}^3$  mõõtuv kinnine alamhulk, mille teisendus  $\Phi$  kujutab hulgaks  $\mathcal{E}$ , s.t.  $\Phi[\Delta] = \mathcal{E}$ . Siis hulk  $\mathcal{E}$  on kinnine ja tõkestatud. Kui leidub nullmõõduga alamhulk  $\mathcal{K} \subset \Delta$  nii, et

(1) ahend  $\Phi|_{\Delta \setminus \mathcal{K}}$  on üksühene (sümbol  $\Delta^\circ$  tähistab hulga  $\Delta$  sisemust);

(2)  $J(u, v, w) := \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}(u, v, w) \neq 0$  iga  $(u, v, w) \in \Delta^\circ \setminus \mathcal{K}$  korral,

siis hulk  $\mathcal{E}$  on mõõtuv, kusjuures kehtib valem (7.9).

TEOREEMI 7.7 ME KÄESOLEVAS KURSUSES EI TÕESTA.

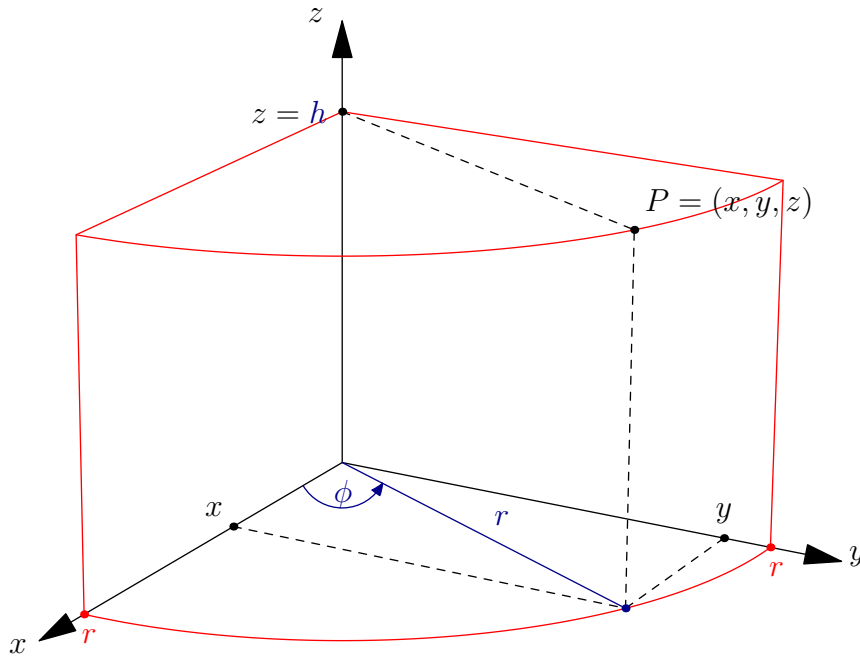
□

### 7.3.3. Üleminek silindrilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust  $\mathbb{R}^3 \ni (r, \phi, h) \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , mis on määratud süsteemiga

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = h. \quad (7.10)$$

See teisendus seab igale  $r\phi h$ -ruumi punktile  $(r, \phi, h)$ , kus  $r \geq 0$ , vastavusse  $xyz$ -ruumi punkti, mille silindrilised koordinaadid on  $r$ ,  $\phi$  ja  $h$  (vt. joonist 7.1).



JOONIS 7.1. Punkti  $P$  ristkoordinaadid  $x, y$  ja  $z$  ning silindrilised koordinaadid  $r, \phi$  ja  $h$  on seotud võrdustega (7.10).

Selle teisenduse puhul

$$\begin{aligned}x'_r &= \cos \phi, & x'_\phi &= -r \sin \phi, & x'_h &= 0, \\y'_r &= \sin \phi, & y'_\phi &= r \cos \phi, & y'_h &= 0, \\z'_r &= 0, & z'_\phi &= 0, & z'_h &= 1,\end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned}J(r, \phi, h) &:= \frac{D(x, y, z)}{D(r, \phi, h)} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= r \cos^2 \phi + r \sin^2 \phi = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r.\end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (7.10) kujutab  $r\phi h$ -ruumi hulga

$$\{(r, \phi, h) \in \mathbb{R}^3 : r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi], h \in \mathbb{R}\} \quad (7.11)$$

sisemuse

$$\{(r, \phi, h) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, \phi \in (0, 2\pi), h \in \mathbb{R}\}$$

regulaarselt  $xyz$ -ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x \geq 0\} \quad (7.12)$$

(s.t.  $zx$ -tasandi osa, kus  $x \geq 0$ ); hulga (7.11) raja (s.t. selle hulga osa, kus  $r = 0$  või  $\phi \in \{0, 2\pi\}$ ) kujutab see teisendus pooltasandiks (7.12). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 7.7.

**Teoreem 7.8.** *Kui*

- (1) kolme muutuja funktsioon  $t = f(x, y, z)$  on pidev  $xyz$ -ruumi mõõtuvas kinnises hulgas  $\mathcal{E}$ ;
- (2) teisendus (7.10) kujutab hulgas (7.11) sisalduva mõõtuva kinnise hulga  $\Delta$  hulgaks  $\mathcal{E}$ ,

siis

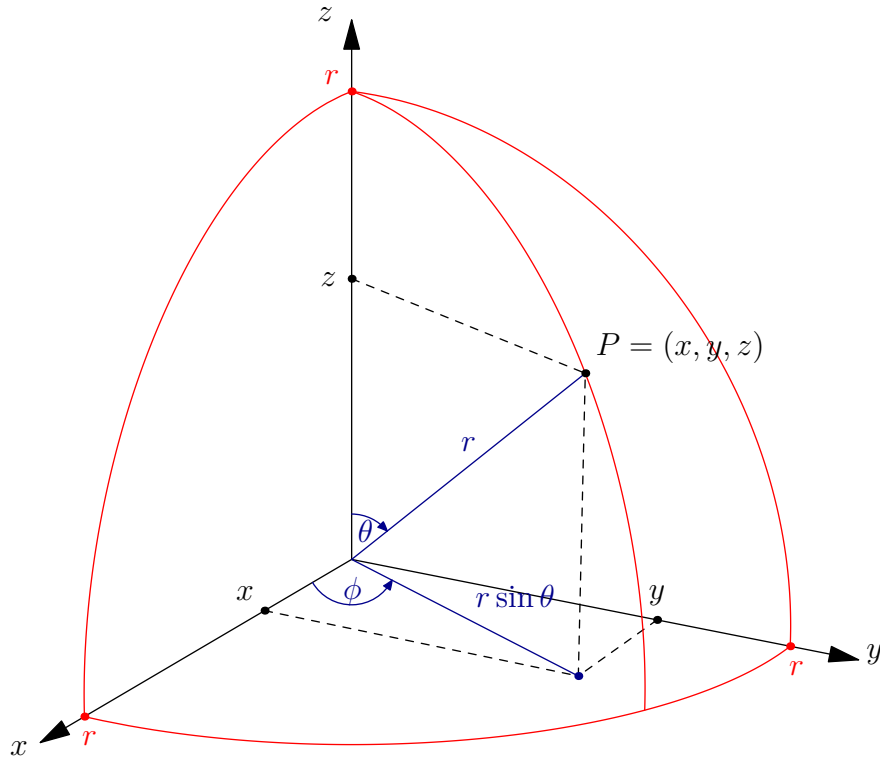
$$\iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \phi, r \sin \phi, h) r dr d\phi dh.$$

### 7.3.4. Üleminek sfäärilistele koordinaatidele kolmekordses integraalis

Vaatleme teisendust  $\mathbb{R}^3 \ni (r, \theta, \phi) \mapsto (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , mis on määratud süsteemiga

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta. \quad (7.13)$$

See teisendus seab igale  $r\theta\phi$ -ruumi punktile  $(r, \theta, \phi)$ , kus  $r \geq 0$  ja  $\theta \in [0, \pi]$ , vastavusse  $xyz$ -ruumi punkti, mille sfäärilised koordinaadid on  $r$ ,  $\theta$  ja  $\phi$  (vt. joonist 7.2). Selle teisenduse puhul



JOONIS 7.2. Punkti  $P$  ristkoordinaadid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ning sfäärilised koordinaadid  $r$ ,  $\theta$  ja  $\phi$  on seotud võrdustega (7.13).

$$\begin{aligned} x'_r &= \sin \theta \cos \phi, & x'_\theta &= r \cos \theta \cos \phi, & x'_\phi &= -r \sin \theta \sin \phi, \\ y'_r &= \sin \theta \sin \phi, & y'_\theta &= r \cos \theta \sin \phi, & y'_\phi &= r \sin \theta \cos \phi, \\ z'_r &= \cos \theta, & z'_\theta &= -r \sin \theta, & z'_\phi &= 0, \end{aligned}$$

seega tema jakobiaan

$$\begin{aligned} J(r, \theta, \phi) &:= \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^3 \theta \sin^2 \phi \\ &\quad r^2 \sin \theta \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^3 \theta \cos^2 \phi \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^3 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= r^2 \sin \theta \cos^2 \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Näeme, et teisendus (7.13) kujutab  $r\theta\phi$ -ruumi hulga

$$\{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3: r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (7.14)$$

sisemuse

$$\{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3: r > 0, \theta \in (0, \pi), \phi \in (0, 2\pi)\}$$

regulaarselt  $xyz$ -ruumiks, millest on välja lõigatud pooltasand (7.12) (s.t.  $zx$ -tasandi osa, kus  $x \geq 0$ ); hulga (7.14) raja (s.t. selle hulga osa, kus  $r = 0$  või  $\theta \in \{0, \pi\}$  või  $\phi \in \{0, 2\pi\}$ ) kujutab see teisendus pooltasandiks (7.12). Järgnev teoreem järeldub nüüd teoreemist 7.7.

**Teoreem 7.9.** *Kui*

- (1) kolme muutuja funktsioon  $t = f(x, y, z)$  on pidev  $xyz$ -ruumi mõõtuvas kinnises hulgas  $\mathcal{E}$ ;
- (2) teisendus (7.13) kujutab hulgas (7.14) sisalduva mõõtuva kinnise hulga  $\Delta$  hulgaks  $\mathcal{E}$ ,

siis

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{E}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_{\Delta} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta) \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \end{aligned}$$

## 7.4. Kolmekordse integraali rakendusi

### 7.4.1. Keha ruumala arvutamine

Järgnev teoreem sisaldub Jordani mõõdu definitsioonis ruumis  $\mathbb{R}^3$ .

**Teoreem 7.10.** *Mõõtuva hulga  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  ruumala  $V_{\mathcal{E}}$  avaldub valemiga*

$$V_{\mathcal{E}} = \iiint_{\mathcal{E}} dx \, dy \, dz.$$

**NB!** Jordani mõõtu ruumis  $\mathbb{R}^3$  me käesolevas konspektis pole defineerinud; selle definitsiooni kirjeldus on antud jaotise 6.2 sissejuhatavas lõigus.

**Järeldus 7.11.** *Olgu  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$  mõõtuv kinnine hulk ning olgu funktsioonid*

$$\alpha = \alpha(x, y) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x, y), \quad (x, y) \in \mathcal{A},$$

*pidevad hulgas  $\mathcal{A}$ , kusjuures*

$$\alpha(x, y) \leq \beta(x, y) \quad \text{iga } (x, y) \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

*Siis kõversilinder*

$$\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{A}, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

*on mõõtuv hulk ruumis  $\mathbb{R}^3$ , kusjuures tema ruumala  $V_{\mathcal{C}}$  avaldub valemiga*

$$V_{\mathcal{C}} = \iint_{\mathcal{A}} (\beta(x, y) - \alpha(x, y)) \, dx \, dy.$$

**TÕESTUS.** Kõversilindri  $\mathcal{C}$  mõõtuvust me käesolevas kursuses ei tõesta.

Kõversilindri  $\mathcal{C}$  mõõtuvuse tõestus toetub teoreemi 2.5 analoogile, mille kohaselt *tõkestatud hulk ruumis  $\mathbb{R}^3$  on Jordani mõttes mõõtuv parajasti siis, kui tema raja on nullmõõduline.*

Kõversilindri  $\mathcal{C}$  mõõtuvuse tõttu eksisteerib kolmekordne integraal  $\iiint_{\mathcal{C}} dx dy dz$ , kusjuures teoreemi 7.10 põhjal, kasutades kolmekordse integraali arvutusvalemit üle kõversilindri teoreemist 7.2,

$$V_{\mathcal{C}} = \iiint_{\mathcal{C}} dx dy dz = \iint_{\mathcal{A}} \left( \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz \right) dx dy = \iint_{\mathcal{A}} (\beta(x,y) - \alpha(x,y)) dx dy.$$

□

## VI peatükk.

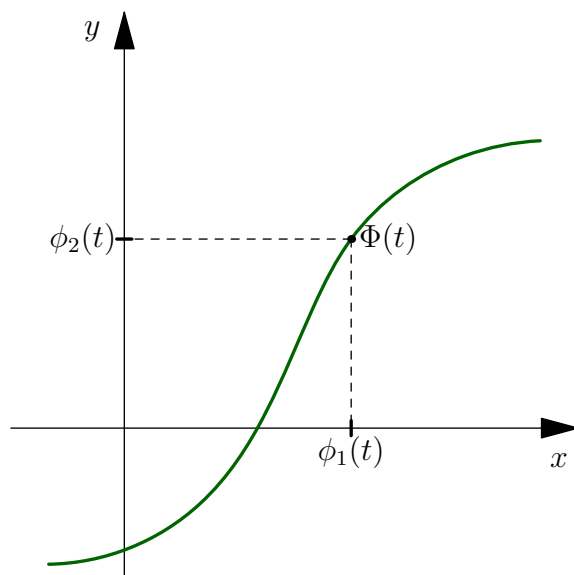
# Joonintegraalid

## § 1. Joone kaare pikkus

### 1.1. Tasandilise joone mõiste

Meenutame (vt. alajaotist I.1.6.2), et (*pidevaks ehk Jordani*) *jooneks* ruumis  $\mathbb{R}^m$  nimetatakse pidevat funktsiooni  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$ , kus  $T \subset \mathbb{R}$  on mingi intervall. Hulka  $\{\Phi(t): t \in T\}$  ruumis  $\mathbb{R}^m$  (s.t. funktsiooni  $\Phi$  väärtuste hulka) nimetatakse seejuures joone  $\Phi$  *jäljeks*. Funktsiooni  $\Phi$  argumentidele (antud juhul muutujale  $t$ ) viidatakse kui *parameetritele*. Jooni ruumis  $\mathbb{R}^2$  nimetatakse *tasandilisteks joonteks*. Olulisemaid joonte esitusviise (esitus parameetriliste võrranditega, tasandilise joone esitus võrrandiga  $y = f(x)$  ning polaarkoordinaatides) on tutvustatud alajaotises I.1.6.3.

Joont  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on kõige lihtsam ette kujutada kui ruumis  $\mathbb{R}^m$  eeskirja  $u = \Phi(t)$  järgi liikuva punkti trajektoori: ajahetkel  $t \in T$  asub liikuv punkt ruumis  $\mathbb{R}^m$  punktis  $\Phi(t)$  (vt. joonist 1.1, kus  $m = 2$ ).



JOONIS 1.1. Siin  $\Phi(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ , s.t.  $\phi_1(t)$  ja  $\phi_2(t)$  on punkti  $\Phi(t)$  (rist)koordinaadid.

Sageli, kõneldes joonest, peetakse tegelikult silmas hoopis teatava joone jälge. Näiteks viidates mingi joone punktidele, mõistetakse selle all hoopis kõnealuse joone jälje punkte jne. Sedalaadi terminoloogilist ebatäpsust, mis üldjuhul sisulist kaksipidimõistmist ei tekita, lubame endale käesolevas konspektis ka meie.

Kui intervall  $T$  on lõik, s.t.  $T = [\alpha, \beta]$  mingite  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < \beta$ , korral, siis nimetatakse joont  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  *kaareks*. Ruumi  $\mathbb{R}^m$  punkte  $\Phi(\alpha)$  ja  $\Phi(\beta)$  nimetatakse seejuures vastavalt kaare  $\Phi$  *alguspunktiks* ja kaare  $\Phi$  *lõpp-punktiks*. Kaare algus- ja lõpp-punkti nimetatakse selle kaare *otspunktideks*. Kui  $A, B \in \mathbb{R}^m$ , siis kõneldes kaarest  $AB$  peetakse silmas mingit kaart, mille alguspunkti on  $A$  ja lõpp-punkt on  $B$ .

Tasandilise joone mõiste hõlmab hulgaliselt funktsioone, mille jälgi meie eelmatemaatiline arusaam tõrgub joonteks nimetamast. Näiteks tasandi  $\mathbb{R}^2$  punkti-hulk  $[0, 1] \times [0, 1] := \{(x, y): x, y \in [0, 1]\}$  – ruut – on teatava pideva funktsiooni  $\Phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  väärtuste hulk, (s.t. teatava tasandilise joone jälg). Niisuguseid “ebajoonelikke” jooni ühendab üks ühine omadus – *kordsete punktide olemasolu*. *Kordse punkti* all mõistetakse joone  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  punkti (või, täpsemalt, selle joone jälje punkti), mis vastab parameetri  $t$  erinevatele väärtustele, ehk, tõlgendades joont  $\Phi$  tasandil eeskirja  $u = \Phi(t)$  järgi liikuva punkti trajektoorina, läbib see liikuv punkt joone kordse punkti rohkem kui üks kord. Seepärast on otstarbekas sisse tuua selliste joonte klass, millel kordsed punktid puuduvad.

**Definitsioon 1.1.** Öeldakse, et joon  $\Phi: T \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *lihtne*, kui funktsioon  $\Phi$  on injektiivne, s.t. parameetri  $t$  erinevatele väärtustele vastavad selle joone erinevad punktid:

$$t, t' \in T, t \neq t' \implies \Phi(t) \neq \Phi(t')$$

(ehk, teisisõnu, joonel  $\Phi$  ei ole kordseid punkte).

**Definitsioon 1.2.** Öeldakse, et kaar  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$  on *lihtne kinnine kaar*, kui

$$\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$$

(s.t. tema otspunktid langevad kokku) ja

$$t \in [\alpha, \beta], t' \in (\alpha, \beta), t \neq t' \implies \Phi(t) \neq \Phi(t')$$

(s.t. peale otspunktide tal rohkem kordseid punkte pole).

Jaotise lõpetuseks lepime kokku järgmises täiendavas terminoloogias.

Vaatleme tasandilist kaart  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Kui  $\alpha \leq \gamma < \delta \leq \beta$ , siis kaarele  $\Phi|_{[\gamma, \delta]}: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  viitame kui kaare  $\Phi$  *osakaarele*. Kui  $\alpha \leq \gamma < \xi < \delta \leq \beta$  ning  $C := \Phi(\gamma)$ ,  $P := \Phi(\xi)$ ,  $D := \Phi(\delta)$ , siis me ütleme, et punkt  $P$  asub vaadeldaval kaarel *punktide  $C$  ja  $D$  vahel*.

Eeldame nüüd, et kaar  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  on lihtne. Siis see kaar määrab oma jäljel  $L := \{\Phi(t): t \in [\alpha, \beta]\}$  loomulikul viisil järjestuse: loomulik on lugeda punkt  $P_1 \in L$  eelnevaks punktile  $P_2 \in L$ , kui  $t_1 < t_2$ , kus  $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$  on sellised, et  $\Phi(t_1) = P_1$  ja  $\Phi(t_2) = P_2$  – tõlgendades kaart  $\Phi$  kui tasandil liikuva punkti liikumiseeskirja, läbib see liikuv punkt punkti  $P_1$  enne kui punkti  $P_2$ .

## 1.2. Täiendavaid ülesandeid

Selle jaotise ülesandeid 1.1 ja 1.3 kasutatakse mõne selle peatüki tulemuse tõestamisel; ülesanne 1.2 annab abitulemuse ülesande 1.3 lahendamiseks. Materjali omandamise seisukohalt võib ülesannete 1.2 ja 1.3 lahendamise edasi lükata niikauaks, kuni ülesandele 1.3 hilisemas tekstis viidatakse; siis on rangelt soovitatav need ülesanded ära lahendada.

Kõik selle jaotise ülesanded on sõnastatud tasandiliste joonte jaoks, kuid nende ülesannete väited kehtivad ka joonte jaoks ruumis  $\mathbb{R}^m$  mis tahes  $m \in \mathbb{N}$  korral, kusjuures ka nende väidete tõestused jäävad sisuliselt samaks.

**Ülesanne 1.1.** Tõestada, et tasandilise kaare  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  jälg  $L := \{\Phi(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  on kinnine tõkestatud hulk.

NÄPUNÄIDE. Esitada kaar parameetriliste võrranditega. Jälje tõkestatuse tõestamisel kasutada Weierstrassi esimest teoreemi; jälje kinnisuse tõestamisel kasutada hulga kinnisuse kriteeriumit koonduvate jadade piirväärtuste kaudu (lauset I.2.3), Bolzano–Weierstrassi teoreemi (arvjadade jaoks) ja parameetrilistes võrrandites esinevate funktsioonide pidevust.

**Ülesanne 1.2.** Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  lihtne (tasandiline) kaar. Tähistame  $L := \{\Phi(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ , s.t.  $L$  on kaare  $\Phi$  jälg. Siis me saame vaadelda pöördfunktsiooni  $\Phi^{-1}: L \rightarrow [\alpha, \beta]$ . Tõestada, et pöördfunktsioon  $\Phi^{-1}$  on pidev.

NÄPUNÄIDE. Oletada vastuväiteliselt, et pöördfunktsioon  $\Phi^{-1}$  pole pidev ning kasutada Bolzano–Weierstrassi teoreemi (arvjadade jaoks) ja funktsiooni  $\Phi$  pidevust.

**Ülesanne 1.3.** Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $\Psi: [\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  lihtsad (tasandilised) kaared, millel on sama jälg, s.t.  $L := \{\Phi(t) : t \in [\alpha, \beta]\} = \{\Psi(\tau) : \tau \in [\gamma, \delta]\}$ . Tähistame  $A := \Phi(\alpha)$  ja  $B := \Phi(\beta)$ , s.t.  $A$  ja  $B$  on vastavalt kaare  $\Phi$  algus- ja lõpp-punkt. Siis

- (a) kaare  $\Psi$  alguspunkt saab olla ainult kas  $A$  või  $B$ ;
- (b) kui kaare  $\Psi$  alguspunkt on  $A$ , siis funktsiooni  $\Psi$  poolt määratud jälje  $L$  punktide järjestus ühtib funktsiooni  $\Phi$  poolt määratud järjestusega; kui kaare  $\Psi$  alguspunkt on  $B$ , siis funktsiooni  $\Psi$  poolt määratud jälje  $L$  punktide järjestus on vastupidine funktsiooni  $\Phi$  poolt määratud järjestusele;
- (c) kui kaare  $\Psi$  alguspunkt on  $A$ , siis tema lõpp-punkt on  $B$ ; kui kaare  $\Psi$  alguspunkt on  $B$ , siis tema lõpp-punkt on  $A$ .

NÄPUNÄIDE. Tõlgendades funktsiooni  $\Phi$  funktsioonina  $[\alpha, \beta] \rightarrow L$ , on pöördfunktsioon  $\Phi^{-1}$  ülesande 1.2 põhjal pidev. Seega, tõlgendades funktsiooni  $\Psi$  funktsioonina  $[\gamma, \delta] \rightarrow L$ , on kompositsioon

$$h := \Phi^{-1}\Psi: [\gamma, \delta] \rightarrow [\alpha, \beta]$$

pidev bijektsioon. (Märgime, et ka funktsiooni  $h$  pöördfunktsioon  $h^{-1} = \Psi^{-1}\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow [\gamma, \delta]$  on pidev.) Tõestada, et

- (A)  $h(\gamma) = \alpha$  või  $h(\gamma) = \beta$ ;
- (B) kui  $h(\gamma) = \alpha$ , siis mis tahes  $\tau_1, \tau_2 \in [\gamma, \delta]$ ,  $\tau_1 < \tau_2$  korral  $h(\tau_1) < h(\tau_2)$ ; kui  $h(\gamma) = \beta$ , siis mis tahes  $\tau_1, \tau_2 \in [\gamma, \delta]$ ,  $\tau_1 < \tau_2$  korral  $h(\tau_1) > h(\tau_2)$ ;
- (C) kui  $h(\gamma) = \alpha$ , siis  $h(\delta) = \beta$ ; kui  $h(\gamma) = \beta$ , siis  $h(\delta) = \alpha$ .

Väidete (A) ja (B) tõestamisel kasutada Bolzano–Cauchy teoreemi lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest; väide (C) on vahetu järeldus väitest (B). Väited (a)–(c) järelduvad vastavalt väidetest (A)–(C). (Teiselt poolt, väide (c) on vahetu järeldus väitest (b).)

### 1.3. Tasandilise kaare pikkuse mõiste

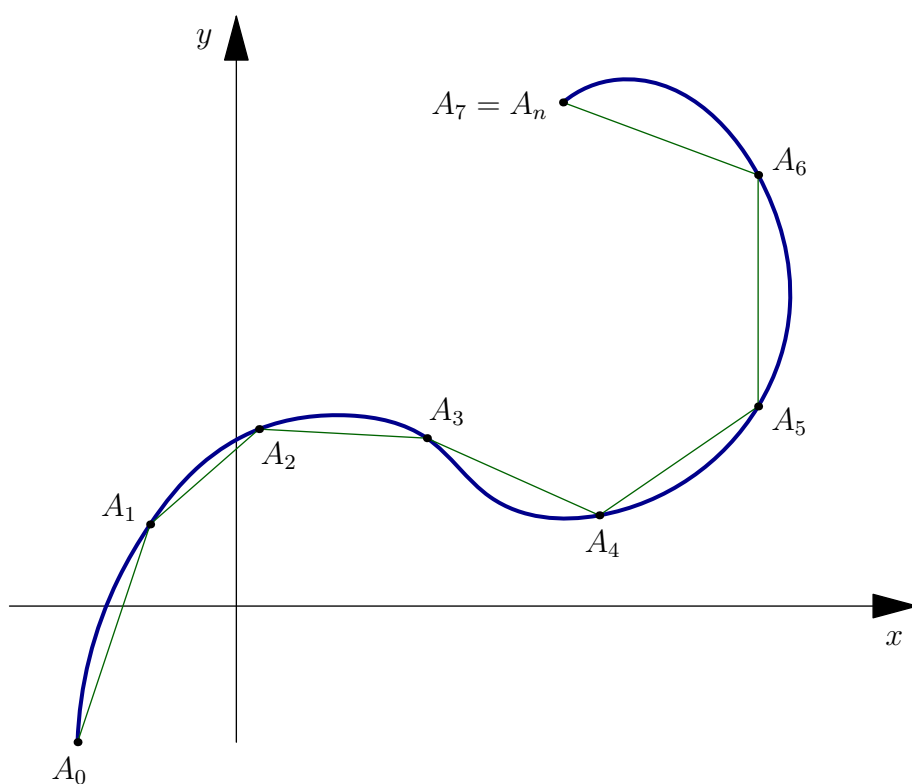
Vaatleme tasandilist kaart  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Jaotame lõigu  $[\alpha, \beta]$  osadeks punktidega  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ning vaatleme kaare  $\Phi$  (või, täpsemalt, kaare  $\Phi$  jälje) punkte

$$A_0 := \Phi(t_0) = \Phi(\alpha), \quad A_1 := \Phi(t_1), \quad \dots, \quad A_n := \Phi(t_n) = \Phi(\beta).$$

Ühendades iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral punktid  $A_{j-1}$  ja  $A_j$  sirglõiguga, saame *murdjoone*

$$A_0 A_1 \dots A_n \tag{1.1}$$

(vt. joonist 1.2).



JOONIS 1.2. Joonisel on sinisega kujutatud kaart  $\Phi$  (või, täpsemalt, selle kaare jälge) ning rohelisega (kõõl)murdjoont (1.1), kus  $n = 7$ .

**NB!** Must-valge televisiooni vaatajad siin neid jooni sinise ja rohelisena ei näe!

Sellist murdjoont (1.1) nimetatakse kaare  $\Phi$  *kõõlmurdjooneks*. Punkte  $A_{j-1}$  ja  $A_j$  ühendavatele sirglõikudele  $A_{j-1}A_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , viidatakse kui kaare  $\Phi$  *kõõludele* või ka kui (kõõl)murdjoone (1.1) *lülile*. Kõõlmurdjoone (1.1) *pikkuseks* nimetatakse tema lülide pikkuste summat  $\sum_{j=1}^n |A_{j-1}A_j|$ .

**Märkus 1.1.** Kui kaarel  $\Phi$  leidub kordseid punkte, siis võib juhtuda et mingi  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral punktid  $A_{j-1}$  ja  $A_j$  langevad ühte. Sel juhul kõõl  $A_{j-1}A_j$  on tegelikult ühepunktiline hulk  $\{A_{j-1}\} = \{A_j\}$ ; selle “kõõlu” pikkus loetakse võrdseks nulliga.

**Definitsioon 1.3.** Kui kaare  $\Phi$  kõikvõimalike kõõlmurdjoonte (1.1) pikkuste hulk on ülalt tõkestatud, siis öeldakse, et kaar  $\Phi$  on *sirgestuv*, kusjuures nende kõõlmurdjoonte pikkuste hulga ülemist raja nimetatakse kaare  $\Phi$  *pikkuseks*.

Kui kaar  $\Phi$  esitub parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

siis iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral kõõlu  $A_{j-1}A_j$  pikkus on

$$\sqrt{|x(t_j) - x(t_{j-1})|^2 + |y(t_j) - y(t_{j-1})|^2},$$

seega kõõlmurdjoone (1.1) pikkus on

$$\sum_{j=1}^n \sqrt{|x(t_j) - x(t_{j-1})|^2 + |y(t_j) - y(t_{j-1})|^2};$$

niisiis, juhul, kui kaar  $\Phi$  on sirgestuv, selle kaare pikkus  $s_\Phi$  on

$$s_\Phi := \sup_{\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: \beta} \sum_{j=1}^n \sqrt{|x(t_j) - x(t_{j-1})|^2 + |y(t_j) - y(t_{j-1})|^2}.$$

Järgnev lause esitab paar lihtsat kaare pikkuse omadust.

**Lause 1.1.** Olgu  $AB$  tasandiline kaar.

(a) Olgu kaare  $AB$  kõõlmurdjoon  $l'$  saadud selle kaare kõõlmurdjoont

$$l := A_0A_1 \dots A_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

määravatele punktidele  $A_0, A_1, \dots, A_n$ , kus  $A_0 = A$  ja  $A_n = B$ , uute punktide juurdelisamise teel. Siis kõõlmurdjoone  $l'$  pikkus  $s_{l'}$  ei ole väiksem kõõlmurdjoone  $l$  pikkusest  $s_l$ :

$$s_{l'} \geq s_l. \quad (1.2)$$

(b) Olgu  $C$  kaare  $AB$  punkt, mis asub punktide  $A$  ja  $B$  vahel. Siis kaar  $AB$  on sirgestuv parajasti siis, kui osakaared  $AC$  ja  $CA$  on sirgestuvad; seejuures kaare  $AB$  pikkus  $s_{AB}$  on osakaarte  $AC$  ja  $CB$  pikkuste  $s_{AC}$  ja  $s_{CB}$  summa:

$$s_{AB} = s_{AC} + s_{CB}. \quad (1.3)$$

**TÕESTUS.** (a). Väite tõestuseks piisab tõestada võrratus (1.2) juhul, kui kõõlmurdjoon  $l'$  on saadud punktidele  $A_0, A_1, \dots, A_n$  ühe uue punkti juurdelisamise teel. Olgu  $k \in \{1, \dots, n\}$  selline, et see uus punkt  $C$  asub punktide  $A_{k-1}$  ja  $A_k$  vahel. Kõõlmurdjooned  $l$  ja  $l'$  koosnevad ühtedest ja samadest sirglõikudest ainsa erinevusega, et murdjoone  $l'$  koosseisu kuuluvad sirglõigu  $A_{k-1}A_k$  asemel sirglõigud  $A_{k-1}C$  ja  $CA_k$ . Kuna

$$|A_{k-1}C| + |CA_k| \geq |A_{k-1}A_k|$$

(PÕHJENDADA!), siis kehtib (1.2).

(b). Eeldame kõigepealt, et kaar  $AB$  on sirgestuv. Olgu  $l_1 := AA_1 \dots A_{k-1}C$  ja  $l_2 := CB_1 \dots B_{m-1}B$  vastavalt osakaarte  $AC$  ja  $CB$  mingid kõõlmurdjooned. Tähistame kaare  $AB$  vastava kõõlmurdjoone  $AA_1 \dots A_{k-1}CB_1 \dots B_{m-1}B$  sümboliga  $l$  ning nende kolme murdjoone pikkused vastavalt sümbolitega  $s_{l_1}$ ,  $s_{l_2}$  ning  $s_l$ ; siis

$$s_{l_1} + s_{l_2} = s_l \leq s_{AB},$$

seega

$$\sup s_{l_1} + \sup s_{l_2} \leq s_{AB},$$

kus võrratuse vasakul pool olevates liidetavates on supreemum võetud vastavalt üle kaare  $AC$  kõikvõimalike kõõlmurdjoonte  $l_1$  ja üle kaare  $CB$  kõikvõimalike kõõlmurdjoonte  $l_2$ ; järelikult kaared  $AC$  ja  $CB$  on sirgestuvad, kusjuures

$$s_{AC} + s_{CB} \leq s_{AB}. \quad (1.4)$$

Teiselt poolt, eeldame, et kaared  $AC$  ja  $CB$  on sirgestuvad. Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  kaart  $AB$  defineeriv kujutus ning olgu  $\tau \in (\alpha, \beta)$  selline, et  $C = \Phi(\tau)$ . Olgu  $l := AA_1 \dots A_{n-1}B$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mingi kaare  $AB$  kõõlmurdjoon ja olgu  $\alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < \beta$  seda kõõlmurdjoont määravad punktid, s.t.  $A_j = \Phi(t_j)$  iga  $j \in \{1, \dots, n-1\}$  korral.

On kaks teineteist välistavat võimalust:

- (1) mingi  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  korral  $\tau = t_k$  (ning seega  $C = A_k$ );
- (2) mingi  $k \in \{1, \dots, n\}$  korral  $t_{k-1} < \tau < t_k$  (s.t.  $C$  asub punktide  $A_{k-1}$  ja  $A_k$  vahel).

Juhul (1) tähistame sümboliga  $l_1$  kaare  $AC$  kõõlmurdjoone  $AA_1 \dots A_{k-1}C$  ja sümboliga  $l_2$  kaare  $CB$  kõõlmurdjoone  $CA_{k+1} \dots A_{n-1}B$ ; siis

$$s_l = s_{l_1} + s_{l_2} \leq s_{AC} + s_{CB}.$$

Juhul (2) tähistame sümboliga  $l_1$  kaare  $AC$  kõõlmurdjoone  $AA_1 \dots A_{k-1}C$ , sümboliga  $l_2$  kaare  $CB$  kõõlmurdjoone  $CA_k \dots A_{n-1}B$  ja sümboliga  $l'$  kaare  $AB$  kõõlmurdjoone  $AA_1 \dots A_{k-1}CA_k \dots A_{n-1}B$ ; siis, arvestades, et kõõlmurdjoon  $l'$  on saadud kõõlmurdjoont  $l$  määravatele punktidele uue punkti  $C$  juurdelisamise teel, väite (a) põhjal

$$s_l \leq s_{l'} = s_{l_1} + s_{l_2} \leq s_{AC} + s_{CB}.$$

Niisiis igal juhul  $s_l \leq s_{AC} + s_{CB}$ ; seega

$$\sup s_l \leq s_{AC} + s_{CB},$$

kus võrratuse vasakul pool on supreemum võetud üle kaare  $AB$  kõikvõimalike kõõlmurdjoonte  $l$ ; järelikult kaar  $AB$  on sirgestuv, kusjuures

$$s_{AB} \leq s_{AC} + s_{CB}. \quad (1.5)$$

Soovitud võrdus (1.3) järeldub võrratustest (1.4) ja (1.5).  $\square$

**Märkus 1.2.** Saab näidata, et kui tasandiline kaar  $\Phi$  on lihtne, siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare  $\Psi$  korral, mille jälg on võrdne kaare  $\Phi$  jäljega, on kaar  $\Psi$  sirgestuv parajasti siis, kui kaar  $\Phi$  on sirgestuv, kusjuures nende kaarte sirgestuvuse juhul on nende pikkused võrdsed.

Lausest 1.1, (b), järeldub, et eelnev väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsate kaarte asemel kaari, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte.

Sellega on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga korral – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele – leida selle punktihulga – kaare – pikkus. Selles ülesandes peetakse “kaar” all silmas mingit kaart, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte ning mille jälg see punktihulk on; eelneva väite põhjal on kõigi niisuguste (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaarte pikkused võrdsed ning seega ei sõltu vaadeldava “kaar” pikkus sellise (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaare valikust.

**Lause 1.2.** Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sirgestuv (tasandiline) kaar. Iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral tähistame sümboliga  $s(t)$  selle kaare osakaare  $AC_t$  pikkuse, kus  $A := \Phi(\alpha)$  (s.t.  $A$  on selle kaare alguspunkt) ja  $C_t := \Phi(t)$ ; seejuures defineerime  $s(\alpha) = 0$ . Siis funktsioon  $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto s(t) \in \mathbb{R}$  on pidev.

**TÕESTUS.** Kõigepealt näitame, et funktsioon  $t \mapsto s(t)$  on vasakult pidev igas punktis  $\tau \in (\alpha, \beta]$ . Selleks, fikseerides vabalt punkti  $\tau \in (\alpha, \beta]$  ja reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab leida punkt  $\tau_\varepsilon \in [\alpha, \tau)$  nii, et

$$\tau_\varepsilon < t < \tau \implies s(t) > s(\tau) - 2\varepsilon$$

(PÕHJENDADA!) Selleks omakorda piisab valida punkt  $\tau_\varepsilon \in [\alpha, \tau)$  nii, et  $s(\tau_\varepsilon) > s(\tau) - 2\varepsilon$  (PÕHJENDADA!).

Valime punktid  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) nii, et, tähistades  $A_j := \Phi(t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , murdjoone  $\ell_0 := A_0A_1 \dots A_n$  pikkus  $s_{\ell_0} > s(\tau) - \varepsilon$  (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE VALIK ON VÕIMALIK!). Fikseerime (esialgu) suvaliselt punkti  $\tau_\varepsilon \in (t_{n-1}, \tau)$ , tähistame  $C := \Phi(\tau_\varepsilon)$ , murdjoone  $A_0A_1 \dots A_{n-1}CA_n$  ja selle murdjoone osamurdjoone  $A_0A_1 \dots A_{n-1}C$  tähistame vastavalt sümbolitega  $\ell$  ja  $\ell'$ , nende murdjoonte pikkused tähistame sümbolitega  $s_\ell$  ja  $s_{\ell'}$  ning sirglõigu  $CA_n$  pikkuse sümboliga  $|CA_n|$ . Siis

$$s(\tau) - \varepsilon < s_{\ell_0} \leq s_\ell = s_{\ell'} + |CA_n| \leq s(\tau_\varepsilon) + |CA_n| = s(\tau_\varepsilon) + d(\Phi(\tau_\varepsilon), \Phi(\tau)).$$

Funktsiooni  $\Phi$  pidevuse tõttu punktis  $\tau$  saanuksime me punkti  $\tau_\varepsilon \in (t_{n-1}, \tau)$  valida algusest peale nii, et  $d(\Phi(\tau_\varepsilon), \Phi(\tau)) < \varepsilon$ . Niisuguse punkti  $\tau_\varepsilon$  jaoks kehtib võrratus  $s(\tau_\varepsilon) > s(\tau) - 2\varepsilon$ , nagu soovitud.

Lause tõestuseks jääb näidata, et funktsioon  $t \mapsto s(t)$  on paremalt pidev igas punktis  $\tau \in [\alpha, \beta)$ . Selleks, fikseerides vabalt punkti  $\tau \in [\alpha, \beta)$  ja jada  $(\tau_n)_{n=1}^\infty$  poolloigus  $(\tau, \beta]$  nii, et  $\tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau$ , piisab näidata, et  $s(\tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s(\tau)$ .

Vaatleme kaart  $\Psi: [0, \beta - \alpha] \ni v \mapsto \Phi(\beta - v) \in \mathbb{R}^2$ . Selle kaare alguspunkt on esialgse kaare lõpp-punkt  $B := \Phi(\beta)$  ja lõpp-punkt on esialgse kaare alguspunkt  $A = \Phi(\alpha)$ . (Piltlikult öeldes, see uus kaar on “esialgne kaar  $AB$  läbituna vastupidises suunas”.) Iga punkti  $v \in [0, \beta - \alpha]$  korral olgu  $\sigma(v)$  selle kaare punkte  $B$  ja  $D_v := \Psi(v) = \Phi(\beta - v)$  ühendava osakaare  $BD_v$  pikkus; seejuures loeme  $\sigma(0) = 0$ . Eelnevalt tõestatu põhjal on funktsioon  $v \mapsto \sigma(v)$  vasakult pidev igas punktis  $v \in (0, \beta - \alpha]$ .

Paneme tähele, et iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral  $s(t) + \sigma(\beta - t) = s$ , kus  $s$  on kaare  $AB$  pikkus (PÕHJENDADA!). Iga  $n \in \mathbb{N}$  korral  $\beta - \tau_n \in [0, \beta - \tau)$ , kusjuures  $\beta - \tau_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta - \tau$ , seega, arvestades, et funktsioon  $v \mapsto \sigma(v)$  on vasakult pidev punktis  $\beta - \tau$ ,

$$s(\tau_n) = s - \sigma(\beta - \tau_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s - \sigma(\beta - \tau) = s(\tau),$$

nagu soovitud.  $\square$

## 1.4. Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus

Vaatleme (tasandilist) kaart  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Kui  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), siis tähega  $l$  tähistame kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoont  $A_0 A_1 \dots A_n$ , kus  $A_j = \Phi(t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , sümboliga  $s_l$  tähistame murdjoone  $l$  pikkust ning

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

**Definitsioon 1.4.** Arvu  $I \in \mathbb{R}$  nimetatakse kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuseks, kui iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (kaare  $\Phi$  mis tahes kõõlmurdjoone  $l$  korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |s_l - I| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

**Märkus 1.3.** Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.7)$$

Lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (1.8)$$

tähistame  $x_j := x(t_j)$ ,  $y_j := y(t_j)$ ,  $A_j := (x_j, y_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , ning iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame  $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ ,  $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$ ,  $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$ .

Osutub, et kui kaar (1.7) on lihtne, siis tema jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis (1.6) asendada tingimus

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \quad (1.9)$$

tingimusega

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta \quad (1.10)$$

või tingimusega

$$\max_{1 \leq j \leq n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta. \quad (1.11)$$

Tõepoolest, olgu kaar (1.7) lihtne. Tõestame kõigepealt, et selle kaare jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis (1.6) asendada tingimus (1.9) tingimusega (1.10). Selleks, fikseerides vabalt reaalarvu  $\gamma > 0$ , piisab veenduda, et

(1) leidub reaalarv  $\delta_1 > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (1.8))

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_1 \implies \max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \gamma; \quad (1.12)$$

(2) leidub reaalarv  $\delta_2 > 0$  nii, et lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (1.8))

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta_2 \implies \max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \gamma$$

(PÕHJENDADA!)

(1). Kuna funktsioonid (1.7) on pidevad, siis Cantori teoreemi ?? põhjal on nad ühtlaselt pidevad lõigus  $[\alpha, \beta]$ , seega leidub reaalarv  $\delta_1 > 0$  nii, et

$$t', t'' \in [\alpha, \beta], |t' - t''| < \delta \implies |x(t') - x(t'')| < \gamma \quad \text{ja} \quad |y(t') - y(t'')| < \gamma.$$

Kui nüüd lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviis punktidega (1.8) rahuldab tingimust  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_1$ , siis iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $|t_j - t_{j-1}| < \delta_1$ , järelikult

$$|x(t_j) - x(t_{j-1})| < \gamma \quad \text{ja} \quad |y(t_j) - y(t_{j-1})| < \gamma$$

ning seega kehtib implikatsiooni (1.12) paremal poolel oleva võrratus.

(2). Oletame vastuväiteliselt, et sellist reaalarvu  $\gamma_2 > 0$  ei leidu. Siis iga  $n \in \mathbb{N}$  korral leiduvad  $t'_n, t''_n \in [\alpha, \beta]$  nii, et  $|t'_n - t''_n| \geq \gamma$ , kuid

$$|x(t'_n) - x(t''_n)| < \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad |y(t'_n) - y(t''_n)| < \frac{1}{n}$$

(PÕHJENDADA!) . Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal leiduvad jadadel  $(t'_n)_{n=1}^\infty$  ja  $(t''_n)_{n=1}^\infty$  koonduvad osajadad  $(t'_{k_n})_{n=1}^\infty$  ja  $(t''_{k_n})_{n=1}^\infty$  (PÕHJENDADA, MIKS ME SAAME NENDE KOONDUVATE OSAJADADE ELEMENTID VALIDA ÜHTEDE JA SAMADE INDEKSITEGA!) . Olgu  $t', t'' \in [\alpha, \beta]$  nende osajadade piirväärtused, s.t.  $t'_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t'$  ja  $t''_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t''$ ; siis  $t' \neq t''$  (PÕHJENDADA!) , kuid  $x(t') = x(t'')$  ja  $y(t') = y(t'')$  (PÕHJENDADA!) , mis on vastuolus kaare (1.7) lihtsusega (PÕHJENDADA!) .

Jääb tõestada, et kaare (1.7) jaoks jääb kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 1.4 implikatsioonis (1.6) asendada tingimus (1.9) tingimusega (1.11) (siin me eeldame endiselt, et vaadeldav kaar on lihtne). Selleks märgime, et kui lõik  $[\alpha, \beta]$  on jaotatud osalõikudeks punktidega (1.8), siis iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\max\{|\Delta x_j|, |\Delta y_j|\} \leq \sqrt{|\Delta x_j|^2 + |\Delta y_j|^2} = d(A_{j-1}, A_j) \leq \sqrt{2} \max\{|\Delta x_j|, |\Delta y_j|\}$$

ning seega

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \max_{1 \leq j \leq n} d(A_{j-1}, A_j) \leq \max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} \leq \max_{1 \leq j \leq n} d(A_{j-1}, A_j).$$

Tõestatav väide järeldub eelnevast võrratusteahelast (PÕHJENDADA!) .

**Teoreem 1.3.** *Tasandiline kaar on sirgestuv parajasti siis, kui tema kõõlmurdjoonte pikkustel on olemas piirväärtus; seejuures selle kaare pikkus on võrdne tema kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtusega.*

TÕESTUS. Olgu tasandiline kaar  $\Phi$  esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (1.13)$$

*Piisavus.* Eksisteerigu kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoonte pikkustel piirväärtus  $I$ . Veendumaks, et see kaar on sirgestuv, kusjuures tema pikkus  $s_\Phi \leq I$ , piisab näidata, et selle

kaare mis tahes kõõlmurdjoone  $l$  ja mis tahes reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral kõõlmurdjoone  $l$  pikkus  $s_l$  rahuldab tingimust

$$s_l \leq I + \varepsilon.$$

Olgu  $\varepsilon > 0$ . Kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtuse definitsiooni 1.4 põhjal leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et kehtib implikatsioon (1.6). Olgu  $l$  kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoon. Kõõlmurdjoone  $l$  punktidele lõpliku arvu uute punktide juurdelisamise teel on võimalik saada kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoon  $l'$ , mis vastab lõigu  $[\alpha, \beta]$  teatavale jaotusviisile, mille osalõikude suurim pikkus on väiksem kui  $\delta$ ; seega  $|s_{l'} - I| < \varepsilon$ . Lause 1.1, (a), põhjal nüüd  $s_l \leq s_{l'} < I + \varepsilon$ , nagu soovitud.

*Tarvilikkus.* Eeldame, et kaar  $\Phi$  on sirgestuv, ja fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Veendumaks, et kaare  $\Phi$  pikkus  $s_\Phi$  on selle kaare kõõlmurdjoonte pikkuste piirväärtus, piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (kaare  $\Phi$  mis tahes kõõlmurdjoone  $l$  korral) kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies s_l > s_\Phi - \varepsilon$$

(PÕHJENDADA!). Selleks valime kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoone  $l_0$ , mille pikkus  $s_{l_0}$  rahuldab tingimust

$$s_{l_0} > s_\Phi - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu  $m$  murdjoone  $l_0$  lülide arv. Teoreemi tõestuseks piisab nüüd tõestada järgmine väide:

- (o) leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et kui kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoon  $l'$  on saadud mingit kõõlmurdjoont  $l$  määravatele kaare punktidele ühe uue punkti juurdelisamise teel, siis

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Tõepoolest, rahuldagu reaalarv  $\delta > 0$  väite (o) tingimust ning olgu  $l$  kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoon, mida määravad lõigu  $[\alpha, \beta]$  punktid rahuldavad tingimust  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ .

Tähistame sümboliga  $l'$  kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoone, mis on saadud kõõlmurdjoont  $l$  määravatele punktidele neist erinevate kõõlmurdjoont  $l_0$  määravate punktide juurdelisamise teel; siis väite (o) põhjal

$$s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2}$$

(PÕHJENDADA!). Kuna kõõlmurdjoon  $l'$  on tõlgendatav kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoonena, mis on saadud kõõlmurdjoont  $l_0$  määravatele punktidele neist erinevate kõõlmurdjoont  $l$  määravate punktide juurdelisamise teel, siis lause 1.1, (a), põhjal  $s_{l'} \geq s_{l_0}$  ning seega

$$s_l > s_{l'} - \frac{\varepsilon}{2} \geq s_{l_0} - \frac{\varepsilon}{2} > s_\Phi - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = s_\Phi - \varepsilon,$$

nagu soovitud.

**NB!** Maksimaalselt on vaja juurde lisada  $m - 1$  punkti.

Jääb tõestada väide (o). Olgu kaare  $\Phi$  kõõlmurdjoon  $l'$  saadud mingit kõõlmurdjoont  $l$  määravatele punktidele ühe uue punkti  $C = (x(\tau), y(\tau))$  juurdelisamise teel. Asugu see uus punkt punktide  $A_{k-1}$  ja  $A_k$  vahel ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ), s.t.  $t_{k-1} < \tau < t_k$ . Kõõlmurdjooned  $l$  ja  $l'$  koosnevad ühtedest ja samadest sirglõikudest ainsa erinevusega, et murdjoone  $l'$  koosseisu kuuluvad sirglõigu  $A_{k-1}A_k$  asemel sirglõigud  $A_{k-1}C$  ja  $CA_k$ . Seega, tähistades nende sirglõikude pikkused vastavalt sümbolitega  $|A_{k-1}A_k|$ ,  $|A_{k-1}C|$  ja  $|CA_k|$ ,

$$\begin{aligned} s_{l'} - s_l &= |A_{k-1}C| + |CA_k| - |A_{k-1}A_k| \leq |A_{k-1}C| + |CA_k| \\ &= \sqrt{|x(\tau) - x(t_{k-1})|^2 + |y(\tau) - y(t_{k-1})|^2} + \sqrt{|x(t_k) - x(\tau)|^2 + |y(t_k) - y(\tau)|^2} \\ &\leq 2\sqrt{2} \max\{|x(\tau) - x(t_{k-1})|, |y(\tau) - y(t_{k-1})|, |x(t_k) - x(\tau)|, |y(t_k) - y(\tau)|\}. \end{aligned}$$

Funktsioonide  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$  pidevuse tõttu lõigus  $[\alpha, \beta]$  on need funktsioonid Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidevad selles lõigus, seega leidub  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < \delta \implies |x(t) - x(t')| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m}, \quad |y(t) - y(t')| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis  $|\tau - t_{k-1}| < \delta$  ja  $|t_k - \tau| < \delta$  ning seega

$$s_{l'} - s_l < 2\sqrt{2} \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}m} = \frac{\varepsilon}{2m},$$

nagu soovitud. □

## 1.5. (Tasandilise) kaare pikkuse arvutamine

Teeme mõned käesoleva peatüki lõpuni kehtivad kokkulepped. Öeldes, et *funktsioonil  $\phi$  eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis*, mõistame me selle all, et funktsioonil  $\phi$  eksisteerib vahemikus  $(\alpha, \beta)$  pidev tuletis (s.t. pidev tuletisfunktsioon  $\phi'$ ), kusjuures tuletisfunktsioonil  $\phi'$  eksisteerib punktis  $\alpha$  lõplik parempoolne piirväärtus ja punktis  $\beta$  lõplik vasakpoolne piirväärtus. (Sellisel juhul öeldakse ka, et funktsioon  $\phi$  on *pidevalt diferentseeruv lõigus  $[\alpha, \beta]$* .) Märgime, et siit järeldub funktsioonil  $\phi$  punktides  $\alpha$  ja  $\beta$  vastavalt lõpliku parempoolse ja lõpliku vasakpoolse tuletise olemasolu, kusjuures

$$\phi'_+(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \alpha+} \phi'(t) \quad \text{ja} \quad \phi'_-(\beta) = \lim_{t \rightarrow \beta-} \phi'(t).$$

Öeldes, et *funktsioonil  $\phi$  eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $\phi'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused*, mõistame me selle all, et leiduvad arv  $n \in \mathbb{N}$  ja punktid  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$  nii, et igas vahemikus  $(t_{j-1}, t_j)$  eksisteerib funktsioonil  $\phi$  pidev tuletis (s.t. pidev tuletisfunktsioon  $\phi'$ ), kusjuures tuletisfunktsioonil  $\phi'$  eksisteerib punktis  $t_{j-1}$  lõplik parempoolne piirväärtus ja punktis  $t_j$  lõplik vasakpoolne piirväärtus. (Sellisel juhul öeldakse ka, et funktsioon  $\phi$

on *tükiti pidevalt diferentseeruv lõigus*  $[\alpha, \beta]$ .) Märgime, et siit järeldeb funktsioonil  $\phi$  lõplike ühepoolsete tuletiste olemasolu punktides  $t_0, t_1, \dots, t_m$  – erandiks on muidugi punktid  $t_0 = \alpha$  ja  $t_n = \beta$ , milles funktsioonil  $\phi$  eksisteerivad vastavalt lõplik parempoolne ja lõplik vasakpoolne tuletis.

**Teoreem 1.4.** *Esitugu (tasandiline) kaar  $L$  parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (1.14)$$

*kus funktsioonidel (1.14) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis. Siis kaar  $L$  on sirgestuv, kusjuures tema pikkus  $s_L$  avaldub valemiga*

$$s_L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (1.15)$$

TÕESTUS. Tähistame

$$I := \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (1.16)$$

(see integraal eksisteerib funktsiooni  $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  pidevuse tõttu) ja fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Teoreemi tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et mis tahes punktide  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) korral, tähistades  $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , ja

$$\ell := \sum_{j=1}^n \sqrt{|x(t_j) - x(t_{j-1})|^2 + |y(t_j) - y(t_{j-1})|^2}$$

(s.t.  $\ell$  on kaare  $L$  sellise kõõlmurdjoone pikkus, mis vastab punktidega  $t_0, t_1, \dots, t_n$  määratud lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisile), kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |\ell - I| < \varepsilon. \quad (1.17)$$

Olgu  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral, arvestades, et funktsioonid  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$  rahuldavad lõigus  $[t_{j-1}, t_j]$  Lagrange'i keskvaartusteoreemi eeldusi, leiduvad punktid  $\xi_j, \eta_j \in (t_{j-1}, t_j)$  nii, et

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(\xi_j) \Delta t_j \quad \text{ja} \quad y(t_j) - y(t_{j-1}) = y'(\eta_j) \Delta t_j,$$

järelikult

$$\begin{aligned} \sqrt{|x(t_j) - x(t_{j-1})|^2 + |y(t_j) - y(t_{j-1})|^2} &= \sqrt{x'(\xi_j)^2 (\Delta t_j)^2 + y'(\eta_j)^2 (\Delta t_j)^2} \\ &= \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} \Delta t_j; \end{aligned}$$

niisiis

$$\ell = \sum_{j=1}^n \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} \Delta t_j.$$

Tähistame

$$\sigma := \sum_{j=1}^n \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2} \Delta t_j,$$

siis

$$|\ell - I| \leq |\ell - \sigma| + |\sigma - I|.$$

Arvestades, et  $\sigma$  on punktidega  $t_0, t_1, \dots, t_n$  määratud lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisile vastav integraalsumma funktsiooni  $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  jaoks, saame leida reaalarvu  $\delta_1 > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_1 \implies |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edasi,

$$|\ell - \sigma| \leq \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2} \right| \Delta t_j. \quad (1.18)$$

Arvestades, et kahe muutuja funktsioon

$$\Phi: [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \ni (\xi, \eta) \longmapsto \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2}$$

on pidev kinnises tõkestatud hulgas  $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^2$ , on see funktsioon Cantori teoreemi põhjal ka ühtlaselt pidev selles hulgas, järelikult leidub  $\delta_2 > 0$  nii, et

$$\begin{aligned} (\xi, \eta), (\xi', \eta') \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta], d((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = \sqrt{|\xi' - \xi|^2 + |\eta' - \eta|^2} < \delta_2 \\ \implies \left| \sqrt{x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2} - \sqrt{x'(\xi')^2 + y'(\eta')^2} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$

Seega, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_2$ , siis (arvestades, et sel juhul iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $d((\xi_j, \eta_j), (\xi_j, \xi_j)) = |\eta_j - \xi_j| < \Delta t_j < \delta_2$ )

$$|\ell - \sigma| < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \sum_{j=1}^n \Delta t_j = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ , siis

$$|\ell - I| \leq |\ell - \sigma| + |\sigma - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

s.t. implikatsioon (1.17) kehtib, nagu soovitud.  $\square$

**Märkus 1.4.** Teoreemi 1.4 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, Cantori teoreemi kasutasime me vaid tingimust

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_2 \implies |\ell - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.19)$$

rahuldava reaalarvu  $\delta_2 > 0$  leidmisel. Samas absoluutväärtust  $|\ell - \sigma|$  võib ülalt hinnata ka järgmiselt: võrratuse (1.18) põhjal

$$\begin{aligned} |\ell - \sigma| &\leq \sum_{j=1}^n \left| \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\eta_j)^2} - \sqrt{x'(\xi_j)^2 + y'(\xi_j)^2} \right| \Delta t_j \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^n |y'(\eta_j) - y'(\xi_j)| \Delta t_j \leq S(T) - s(T) \end{aligned}$$

(siin võrratus (1) on põhjendatud allpool), kus  $T$  on punktidega  $t_0, t_1, \dots, t_n$  määratud lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviis ning  $S(T)$  ja  $s(T)$  on sellele jaotusviisile vastavad tuletisfunktsiooni  $y'$  Darboux' ülem- ja alamsumma. Tuletisfunktsiooni  $y'$  pidevuse tõttu on see tuletisfunktsioon ka integreeruv, seega leidub reaalarv  $\delta_2 > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_2 \implies |\ell - \sigma| \leq S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{2},$$

s.t. kehtib implikatsioon (1.19).

Võrratuse (1) tõestuseks märgime, et mis tahes  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta^2 + \gamma^2 \neq 0$ , korral

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \right| &= \frac{(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2})(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2})}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha^2 + \gamma^2)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \frac{|\beta^2 - \gamma^2|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \\ &\leq \frac{|\beta^2 - \gamma^2|}{\sqrt{\beta^2} + \sqrt{\gamma^2}} = \frac{|(\beta - \gamma)(\beta + \gamma)|}{|\beta| + |\gamma|} = |\beta - \gamma| \frac{|\beta + \gamma|}{|\beta| + |\gamma|} \\ &\leq |\beta - \gamma|; \end{aligned}$$

võrratus (1) järeldub saadud võrratusest, kui võtta iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $\alpha = x'(\xi_j)$ ,  $\beta = x'(\eta_j)$  ja  $\gamma = y'(\xi_j)$ .

**Märkus 1.5.** Teoreem 1.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (1.14) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  nõrgema eeldustega, et funktsioonidel (1.14) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel  $x'$  ja  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järeldub lausest 1.1 (PÕHJENDADA!).

**Märkus 1.6.** Teoreem 1.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (1.14) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 1.5 käsitletud teoreemi 1.4 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  pidevust kasutasime me teoreemi 1.4 tõestuses vaid

- (A) integraali (1.16) olemasolu põhjendades;
- (B) tingimust (1.19) rahuldava reaalarvu  $\delta_2 > 0$  leidmisel (seda nii vahetult teoreemi sõnastusele järgnevas tõestuses Cantori teoreemi rakendades kui ka märkuses 1.4 toodud tõestusskeemis tuletisfunktsiooni  $y'$  integreeruvuse tagamiseks).

Eeldame nüüd, et funktsioonidel (1.14) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  integreeruv tuletis. Ka siis juhul integraal (1.16) eksisteerib. Tõepoolest, kuna integreeruvate funktsioonide korrutis on integreeruv, siis funktsioonid  $t \mapsto x'(t)x'(t) = x'(t)^2$  ja  $t \mapsto y'(t)y'(t) = y'(t)^2$  on integreeruvad lõigus  $[\alpha, \beta]$ ; kuna integreeruvate funktsioonide summa on integreeruv, siis funktsioon  $t \mapsto x'(t)^2 + y'(t)^2$  on integreeruv lõigus  $[\alpha, \beta]$ ; kuna integreeruva mittenegatiivse funktsiooni ruutjuur on integreeruv, siis integraal (1.16) eksisteerib. Samuti läheb peaaegu sõna-sõnalt läbi märkuses 1.4 toodud argument tingimust (1.19) rahuldava reaalarvu  $\delta_2 > 0$  leidmisel (sest tuletisfunktsiooni  $y'$  pidevust kasutati seal vaid tema integreeruvuse tagamiseks).

NB! "ülem-" on  
halb  
koht.  
murdumis-

Järgnev järeldus teoreemist 1.4 annab valemid kaare pikkuse arvutamiseks juhul, kui see kaar on antud võrrandiga  $y = y(x)$ ,  $x = x(y)$  või polaarkoordinaatides.

**Järeldus 1.5.** (a) Olgu kaar  $L$  esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \quad (1.20)$$

kus funktsioonil (1.20) eksisteerib lõigus  $[a, b]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar  $L$  on sirgestuv, kusjuures tema pikkus  $s_L$  avaldub valemiga

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

(b) Olgu kaar  $L$  esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \quad (1.21)$$

kus funktsioonil (1.21) eksisteerib lõigus  $[c, d]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $x'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar  $L$  on sirgestuv, kusjuures tema pikkus  $s_L$  avaldub valemiga

$$s_L = \int_c^d \sqrt{x'(y)^2 + 1} dy.$$

(c) Olgu kaar  $L$  esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \quad (1.22)$$

kus funktsioonil (1.22) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $r'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis kaar  $L$  on sirgestuv, kusjuures tema pikkus  $s_L$  avaldub valemiga

$$s_L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2} d\phi. \quad (1.23)$$

TÕESTUS. (a). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonil (1.20) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus  $[a, b]$  (PÕHJENDADA!). Võrrandiga (1.20) esitatud kaar  $L$  esitub parameetriliste võrranditega (võttes sisuliselt parameetri  $t$  rolli muutuja  $x$ )

$$x = t, \quad y = y(t), \quad t \in [a, b].$$

Tuletisfunktsioonid

$$x' = (t)'_t = 1 \quad \text{ja} \quad y' = y'(t)$$

rahuldavad teoreemi 1.4 eeldusi, seega valemi (1.15) põhjal

$$s_L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx,$$

nagu soovitud.

(b). Väite tõestus on analoogiline väite (a) tõestusega, aga siin tuleb kaare  $L$  esitamisel parameetriliste võrranditega võtta parameetri  $t$  rolli (sisuliselt) muutuja  $y$ .

(c). Üldisust kitsendamata võime eeldada, et funktsioonil (1.22) eksisteerib pidev tuletis kogu lõigus  $[\alpha, \beta]$  (PÕHJENDADA!). Võrrandiga (1.22) esitatud kaar  $L$  esitub parameetriliste võrranditega (võttes parameetriks muutuja  $\phi$ )

$$x = r(\phi) \cos \phi, \quad y = r(\phi) \sin \phi, \quad \phi \in [\alpha, \beta].$$

Tuletisfunktsioonid

$$\begin{aligned} x' &= (r(\phi) \cos \phi)'_{\phi} = r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi, \\ y' &= (r(\phi) \sin \phi)'_{\phi} = r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi \end{aligned}$$

rahuldavad teoreemi 1.4 eeldusi, seega valemist (1.15) saame valemi (1.23), sest

$$\begin{aligned} x'(\phi)^2 + y'(\phi)^2 &= (r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi)^2 + (r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi)^2 \\ &= r'(\phi)^2 \cos^2 \phi - 2r'(\phi)r(\phi) \sin \phi \cos \phi + r(\phi)^2 \sin^2 \phi \\ &\quad + r'(\phi)^2 \sin^2 \phi + 2r'(\phi)r(\phi) \sin \phi \cos \phi + r(\phi)^2 \cos^2 \phi \\ &= r'(\phi)^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r(\phi)^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= r'(\phi)^2 + r(\phi)^2. \end{aligned}$$

□

## 1.6. Tükiti siledad (tasandilised) kaared

Selles jaotises toome sisse ühe praktikas sagedasti esinevate sirgestuvate kaarte – *tükiti siledate kaarte* – klassi.

**Definitsioon 1.5.** Me ütleme, et tasandiline kaar on *sile*, kui teda esitavates parameetrilistes võrrandites

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (1.24)$$

funktsioonidel (1.24) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, kusjuures

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0 \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral,}$$

s.t. mitte ühegi  $t \in [\alpha, \beta]$  korral pole tuletised  $x'(t)$  ja  $y'(t)$  korraga nullid (siin tuletised  $x'(\alpha)$  ja  $y'(\alpha)$  ning  $x'(\beta)$  ja  $y'(\beta)$  all mõistame vastavalt vastavaid parempoolseid ning vasakpoolseid tuletisi).

Me ütleme, et tasandiline kaar (1.24) on *tükiti sile*, kui ta on oma järjestikuste punktidega jaotatav lõplikuks arvuks siledateks osakaarteks, s.t. leiduvad punktid  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n =: \beta$  nii, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

esitatud osakaar on sile.

## 1.7. Tõkestatud variatsiooniga funktsioonid. Tarvilik ja piisav tingimus kaare sirgestuvuseks

BLA-BLA-BLA...

## 1.8. Sirgestuva tasandilise kaare jälg on nullmõõduga hulk

Selles jaotises tõestame tema pealkirjas sõnastatud tulemuse.

**Teoreem 1.6.** *Sirgestuva tasandilise kaare jälg on nullmõõduga hulk.*

TÕESTUS. Olgu tasandiline kaar  $AB$  antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \quad (1.25)$$

(siin funktsioonid (1.25) on pidevad lõigul  $[\alpha, \beta]$  ning  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B = (x(\beta), y(\beta))$ ). Teoreemi tõestuseks piisab näidata, et selle kaare jälje  $L := \{(x(t), y(t)) : t \in [\alpha, \beta]\}$  Jordani välismõõt  $\mu^*(L) = 0$ . Selleks omakorda, fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab näidata, et

(o) leiduvad arv  $n \in \mathbb{N}$  ja punktid  $\alpha = t_1 < t_2 < \dots < t_n < \beta$  nii, et, tähistades iga  $i \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$P_i := (x_i, y_i) := (x(t_i), y(t_i)) \quad \text{ja} \quad \mathcal{D}_i := [x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon] \times [y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon]$$

(s.t.  $\mathcal{D}_i$  on ruut keskpunktiga  $P_i$  ja küljepikkusega  $2\varepsilon$ ), kehtivad tingimused

(1) kui  $n \geq 2$ , siis iga  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  korral

$$\max\{|x_{i+1} - x_i|, |y_{i+1} - y_i|\} = \varepsilon \quad (1.26)$$

(s.t. ruudu  $\mathcal{D}_{i+1}$  keskpunkt  $P_{i+1}$  paikneb ruudu  $\mathcal{D}_i$  rajajoonel) ja

$$\{(x(t), y(t)) : t \in [t_i, t_{i+1}]\} \subset \mathcal{D}_i \quad (1.27)$$

(s.t. kaare  $AB$  osakaar  $P_i P_{i+1}$  (või, täpsemalt, selle osakaare jälg) sisaldub ruudus  $\mathcal{D}_i$ );

(2)  $\{(x(t), y(t)) : t_n \leq t \leq \beta\} \subset \mathcal{D}_n$  (s.t. kaare  $AB$  osakaar  $P_n B$  (või, täpsemalt, selle osakaare jälg) sisaldub ruudus  $\mathcal{D}_n$ )

NB! Joonis?

(vt. **joonist ??**).

Tõepoolest, kehtigu väide (o). Siis  $L \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$ , seega arvestades, et

- ristküliksumma  $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$  pindala ei ületa arvu  $n(2\varepsilon)^2$ ,
- kui  $n \geq 2$ , siis iga  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  korral lõigu  $P_i P_{i+1}$  pikkus  $\sigma_i \geq \varepsilon$ ,
- kui  $n \geq 2$ , siis kõõlmurdjoone  $P_1 P_2 \dots P_n$  pikkus  $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i$  ei ületa kaare  $AB$  pikkust  $s$ ,

saame

$$\mu^*(L) \leq n(2\varepsilon)^2 = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon(n-1)\varepsilon \leq 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon s$$

(kui  $n = 1$ , siis loeme siin  $\sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i = 0$ ), millest arvu  $\varepsilon$  suvalisuse tõttu järeldub, et  $\mu^*(L) = 0$ , nagu soovitud.

Tõestame väite (o). Defineerime punktid  $\alpha = t_1 < t_2 < \dots$  järgmise eeskirja järgi. Kõigepealt defineerime  $t_1 = \alpha$  ning edasi, kui mingi  $k \in \mathbb{N}$  korral on defineeritud punktid  $t_1, \dots, t_k$ , kuid punkt  $t_{k+1}$  on veel defineerimata, siis toimime järgmiselt:

[A] kui  $n = k$  jaoks kehtib (2), siis defineerimegi  $n = k$  ja lõpetame protsessi;

[B] kui  $n = k$  jaoks tingimus (2) ei kehti, siis defineerime

$$t_{k+1} := \inf \left\{ t \in [t_k, \beta] : \max\{|x(t) - x_k|, |y(t) - y_k|\} = \varepsilon \right\} \quad (1.28)$$

(märgime, et hulk, millest siin infimum võetakse, on mittetühi (PÕHJENDADA!) ning seega see infimum eksisteerib; seejuures see infimum on rangelt väiksem arvust  $\beta$  (PÕHJENDADA!)).

Tõepoolest, funktsioon  $F: [t_k, \beta] \ni t \mapsto \max\{|x(t) - x_k|, |y(t) - y_k|\} \in \mathbb{R}$  on pidev lõigus  $[t_k, \beta]$ , kusjuures  $F(t_k) = 0$  ja leidub  $t'' \in [t_k, \beta]$  nii, et  $F(t'') > \varepsilon$  (vastasel korral kehtiks tingimus (2), kus  $n = k$ ), seega Bolzano–Cauchy teoreemi ?? põhjal leidub  $t' \in (t_k, t'')$  nii, et  $F(t') = \varepsilon$ , s.t.  $t'$  on selle hulga element, üle mille valemis (1.28) infimum võetakse. Kuna  $t' < t'' \leq \beta$ , siis see infimum on rangelt väiksem kui  $\beta$ ; niisiis  $t_{k+1} < \beta$ .

Paneme tähele, et juhul [B] defineeritud punkt  $t_{k+1}$  rahuldab tingimusi (1.26) ja (1.27), kus  $i = k$  (PÕHJENDADA!).

Tõepoolest, kuna  $t_{k+1} = \inf\{t \in [t_k, \beta] : F(t) = \varepsilon\}$ , siis funktsiooni  $F$  pidevuse tõttu ka  $F(t_{k+1}) = \varepsilon$ , s.t. kehtib (1.26), kus  $i = k$ . Tingimuse (1.27) (kus  $i = k$ ) kehtivuseks piisab veenduda, et  $F(t) \leq \varepsilon$  iga  $t \in [t_k, t_{k+1}]$  korral. Oletame vastuväiteliselt, et leidub  $\hat{t} \in [t_k, t_{k+1}]$  nii, et  $F(\hat{t}) > \varepsilon$ . Kuna  $F(t_k) = 0$ , siis Bolzano–Cauchy teoreemi ?? põhjal leidub  $\tilde{t} \in (t_k, \hat{t})$  nii, et  $F(\tilde{t}) = \varepsilon$ . Arvestades, et  $\tilde{t} < \hat{t} \leq t_{k+1}$ , on see vastuolus punkti  $t_{k+1}$  valikuga.

Seega jääb teoreemi tõestuseks veenduda, et kirjeldatud protsess  $t_1, t_2, \dots$  leidmiseks “peatub” lõpliku arvu sammude järel, s.t. mingi  $k \in \mathbb{N}$  jaoks kehtib (2). Selleks märgime, et kuna lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidevad funktsioonid  $x = x(t)$  ja  $y = y(t)$  on ühtlaselt pidevad selles lõigus, siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < \delta \implies \max\{|x(t) - x(t')|, |y(t) - y(t')|\} < \varepsilon.$$

Siit järeldub, et iga  $i = 1, 2, \dots$  korral  $t_{i+1} \geq t_i + \delta$ . Seega, kui valida  $\varkappa \in \mathbb{N}$  nii, et  $\alpha + \varkappa\delta > \beta$ , võime öelda, et kirjeldatud protsess peatub hiljemalt siis, kui on leitud  $t_1, \dots, t_{\varkappa}$  (PÕHJENDADA!).  $\square$

## § 2. Esimest liiki tasandiline joonintegraal

### 2.1. Esimest liiki (tasandilise) joonintegraali mõiste

Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  sirgestuv (tasandiline) kaar. Tähistame  $A := \Phi(\alpha)$  ja  $B := \Phi(\beta)$ , s.t.  $A$  ja  $B$  on vastavalt selle kaare algus- ja lõpp-punkt; kaarele  $\Phi$  viitame edasises kui kaarele  $AB$ . Olgu kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioon  $z = f(P) = f(x, y)$ .

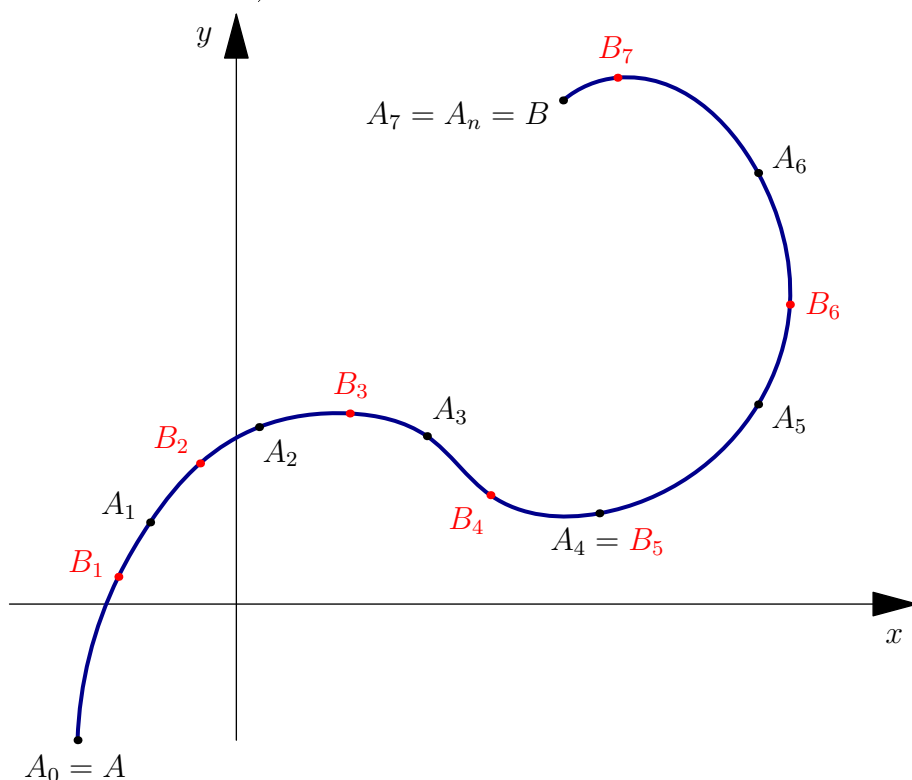
Jaotame lõigu  $[\alpha, \beta]$  osalõikudeks punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.1)$$

ja tähistame  $A_j = \Phi(t_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame  $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ , osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkuse tähistame sümboliga  $s_j$  ning fikseerime sellel osakaarel mingi punkti  $B_j$ , s.t.

$$B_j = \Phi(\tau_j), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (2.2)$$

(vt. joonist 2.1, kus  $n = 7$ ).



JOONIS 2.1. Joonisel on kujutatud kaart  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jälge) koos selle kaare osakaartel  $A_{j-1}A_j$  fikseeritud punktidega  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Moodustame *integraalsumma*

$$\sum_{j=1}^n f(B_j) s_j. \quad (2.3)$$

**Definitsioon 2.1.** Kui integraalsummadel (2.3) eksisteerib *piirväärtus*  $I \in \mathbb{R}$ , s.t. iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.1) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (2.2) korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < \varepsilon, \quad (2.4)$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *esimest liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist  $f$  üle kaare  $AB$*  ja tähistatakse sümboliga

$$\int_{AB} f(x, y) ds := \lim \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j := I. \quad (2.5)$$

**Märkus 2.1.** Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (2.6)$$

Lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisi korral punktidega  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) tähistame  $x_j := x(t_j)$ ,  $y_j := y(t_j)$ ,  $A_j := (x_j, y_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , ning iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame  $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ ,  $\Delta x_j := x_j - x_{j-1}$ ,  $\Delta y_j := y_j - y_{j-1}$ .

Analoogiliselt märkuses 1.3 tõestatuga saab näidata, et *kui kaar (2.6) on lihtne, siis tema jaoks jääb integraalsummade (2.3) piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 2.1 implikatsioonis (2.4) asendada tingimuse*

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$$

**NB!** Tingimuse *tingimusega*  
 $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$  võib asendada ka tingimusega  
 $\max_{1 \leq j \leq n} s_{A_{j-1}A_j} < \delta$ , kus  $s_{A_{j-1}A_j}$  tähistab osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkust!  
*või tingimusega*

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta.$$

**Märkus 2.2.** Saab näidata, et *kui tasandiline kaar  $\Phi$  on lihtne ning sellel kaarel (või täpsemalt, tema jäljel) on määratud ( $\mathbb{R}$ -väärtuseline) funktsioon  $f$ , siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare  $\Psi$  korral, mille jälg on võrdne kaare  $\Phi$  jäljega, eksisteerib esimest liiki joonintegraal funktsioonist  $f$  üle kaare  $\Psi$  parajasti siis, kui eksisteerib vastav integraal üle kaare  $\Phi$ , kusjuures nende integraalide eksisteerimise juhul on nad võrdsed.*

Järgneva jaotise lausest 2.3, (h), järeldub, et eelnev väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsa kaarte asemel kaari, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte.

Sellega on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele – ning sellel punktihulgal määratud ( $\mathbb{R}$ -väärtuseline) funktsiooni korral leida esimest liiki joonintegraal sellest funktsioonist üle selle punktihulga – kaare. Selles ülesandes peetakse “kaare” all silmas mingit kaart, millel on ülimalt lõplik arv kordseid punkte ning mille jälg see punktihulk on; eelneva põhjal on esimest liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kõigi niisuguste (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaarte võrdsed ning seega ei sõltu selle integraali väärtus sellise (ülimalt lõpliku arvu kordsete punktidega) kaare valikust.

## 2.2. Integraalsummade piirväärtus integraalsummade jadade piirväärtuste kaudu

Järgnev lause kirjeldab integraalsummade piirväärtuse (ehk siis, teisisõnu, esimest liiki joonintegraali) mõistet. Selleks lepime kokku järgnevas terminoloogias: kõikjal selle paragrahvi ulateses, kõneldes (*funktsiooni  $f$  integraalsummade jadast (kaarel  $AB$ )*), mõistame me selle all mingit niisugust arvjada  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$ , kus

(1) iga  $m \in \mathbb{N}$  korral  $\sigma_m$  on funktsiooni  $f$  integraalsumma tüüpi (2.3), s.t.

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m) s_{m,j}, \quad (2.7)$$

kus  $n_m \in \mathbb{N}$  ning lõigu  $[\alpha, \beta]$  mingi jaotusviisi

$$\alpha = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{n_m}^m = \beta \quad (2.8)$$

korral, defineerides

$$A_j^m := \Phi(t_j^m), \quad j = 0, 1, \dots, n_m,$$

iga  $j \in \{1, \dots, n_m\}$  korral sümbol  $s_j^m$  tähistab (kaare  $AB$ ) osakaare  $A_{j-1}^m A_j^m$  pikkust ja punkt  $B_j^m$  asub sellel osakaarel, s.t.

$$B_j^m = \Phi(\tau_j^m) \quad \text{mingi } \tau_j^m \in [t_{j-1}^m, t_j^m] \text{ korral}; \quad (2.9)$$

(2) integraalsummadele (2.7) vastavate lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviiside (2.8) pikima osalõigu pikkus läheneb nullile protsessis  $m \rightarrow \infty$ , s.t.

$$\max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (2.10)$$

kus  $\Delta t_j^m := t_j^m - t_{j-1}^m$ .

**Lause 2.1.** Olgu  $I \in \mathbb{R}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsiooni  $f$  integraalsummade (2.3) piirväärtus on arv  $I$ ;
- (ii) funktsiooni  $f$  mis tahes integraalsummade jada (kaarel  $AB$ ) koondub arvaks  $I$ .

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i), olgu  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  funktsiooni  $f$  integraalsummade jada (kaarel  $AB$ ) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Implikatsiooni tõestuseks peame leidma naturaalarvu  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$m \in \mathbb{N}, m \geq N \implies |\sigma_m - I| < \varepsilon. \quad (2.11)$$

Eelduse (i) põhjal leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.1) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (2.2) korral) kehtib implikatsioon (2.4). Nüüd, valides naturaalarvu  $N$  nii, et

$$m \in \mathbb{N}, m \geq N \implies \max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m < \delta$$

(selline valik on võimalik koonduvuse (2.10) tõttu), kehtib implikatsioon (2.11), nagu soovitud.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et arv  $I$  ei ole funktsiooni  $f$  integraalsummade (2.3) piirväärtus. Siis leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  nii, et iga  $m \in \mathbb{N}$  korral leiduvad lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviis (2.8) ning punktid (2.9),  $j = 1, \dots, n_m$ , nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m < \frac{1}{m},$$

kuid  $|\sigma_m - I| \geq \varepsilon$ , kus integraalsumma  $\sigma_m$  on defineeritud võrdusega (2.7). Nüüd  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $f$  integraalsummade jada (kaarel  $AB$ ), mis ei koonu arvaks  $I$ , vastuolu.  $\square$

Jaotise lõpetuseks tõestame, et *esimest liiki joonintegraal pidevast funktsioonist üle sirgestuva kaare eksisteerib alati*.

**Teoreem 2.2.** *Olgu  $AB$  sirgestuv (tasandiline) kaar ning olgu funktsioon  $f$  pidev sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel). Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal  $\int_{AB} f(x, y) ds$ .*

**TÕESTUS.** Olgu  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  kaart  $AB$  defineeriv funktsioon (siin loomulikult  $A = \Phi(\alpha)$  ja  $B = \Phi(\beta)$ ). Teoreemi tõestuseks piisab leida arv  $I \in \mathbb{R}$ , mille puhul iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et, tuginedes paragrahvi alguses sissetoodud tähistustele ja märkides  $\sigma := \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j$ , kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon. \quad (2.12)$$

Selleks paneme tähele, et leidub koonduv funktsiooni  $f$  integraalsummade jada  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  (PÕHJENDADA! – SELLEKS NÄIDATA, ET FUNKTSIOONI  $f$  IGA INTEGRAALSUMMADE JADA ON TÕKESTATUD NING RAKENDADA BOLZANO–WEIERSTRASSI TEOREEMI). Tähistame  $I := \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$  ja fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Teoreemi tõestuseks jääb leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et kehtib implikatsioon (2.12).

Esitugu kaar  $AB$  parameetriliste võrranditega  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , s.t.  $\Phi(t) = (x(t), y(t))$  iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral. Kuna funktsioon  $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto f(x(t), y(t)) = f(\Phi(t)) \in \mathbb{R}$  on pidev (PÕHJENDADA!), siis Cantori teoreemi põhjal on see funktsioon ühtlaselt pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$ , seega leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < 2\delta \implies |f(\Phi(t)) - f(\Phi(t'))| < \frac{\varepsilon}{2s},$$

kus  $s$  tähistab kaare  $AB$  pikkust (siin me võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $s > 0$ ). Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et (tuginedes paragrahvi alguses sissetoodud tähistustele ja märkides  $\sigma := \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j$ ) kehtib implikatsioon (2.12), s.t. eeldades, et  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , jääb näidata, et  $|\sigma - I| < \varepsilon$ .

Kuna  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I$ , siis leidub indeks  $m \in \mathbb{N}$  nii, et  $|\sigma_m - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Toetudes käesoleva jaotise alguses tingimustes (1) ja (2) sissetoodud tähistustele, esitub integraalsumma  $\sigma_m$  kujul  $\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(B_k^m) s_{m,k}$ , kus üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $\max_{1 \leq k \leq n_m} \Delta t_k^m < \delta$  (PÕHJENDADA, MIKS ME VÕIME SIIN ÜLDISUST KITSENDAMATA EELDADA, ET  $\max_{1 \leq k \leq n_m} \Delta t_k^m < \delta$ ). Kuna

$$|\sigma - I| \leq |\sigma - \sigma_m| + |\sigma_m - I| < |\sigma - \sigma_m| + \frac{\varepsilon}{2},$$

siis soovitud võrratuseks  $|\sigma - I| < \varepsilon$  jääb näidata, et  $|\sigma - \sigma_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

**NB!** Kui meie käsutuses oleks teoreem pidevate funktsioonide  $U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $V \rightarrow \mathbb{R}$  liitfunktsiooni pidevusest, kus  $U \subset \mathbb{R}^l$  ning  $V \subset \mathbb{R}^m$ , siis poleks meil siin kaart  $AB$  parameetriliste võrranditega esitatavaid funktsioone  $x$  ja  $y$  sisse tuua. (Meile piisaks siin isegi juhust, kus  $l = 1$  ja  $U = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  ning  $m = 2$ .)

Olgu  $N \in \mathbb{N}$  ja reaalarvud  $\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_N \in [\alpha, \beta]$  sellised, et  $\alpha = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_N = \beta$  ja  $\{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_N\} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \cup \{t_0^m, t_1^m, \dots, t_{n_m}^m\}$ . Iga  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  ja iga  $k \in \{0, 1, \dots, n_m\}$  korral olgu  $i_j, i'_k \in \{0, 1, \dots, N\}$  sellised (üheselt määratud) indeksid, et  $t_j = \tilde{t}_{i_j}$  ja  $t_k^m = \tilde{t}_{i'_k}$ . Siis iga  $i \in \{1, \dots, N\}$  korral leiduvad sellised üheselt määratud  $j \in \{1, \dots, n\}$  ja  $k \in \{1, \dots, n_m\}$ , et

$$t_{j-1} = \tilde{t}_{i_{j-1}} < \tilde{t}_i \leq \tilde{t}_{i_j} = t_j \quad \text{ja} \quad t_{k-1}^m = \tilde{t}_{i'_{k-1}} < \tilde{t}_i \leq \tilde{t}_{i'_k} = t_k^m;$$

selliste  $j$  ja  $k$  korral defineerime  $C_i := B_j = \Phi(\tau_j)$  ja  $D_i := B_k^m = \Phi(\tau_k^m)$ . Kuna

$$|\tau_j - \tau_k^m| \leq |\tau_j - \tilde{t}_i| + |\tilde{t}_i - \tau_k^m| < |t_j - t_{j-1}| + |t_k^m - t_{k-1}^m| < \delta + \delta = 2\delta,$$

siis

$$|f(C_i) - f(D_i)| = |f(\Phi(\tau_j)) - f(\Phi(\tau_k^m))| < \frac{\varepsilon}{2s}.$$

Defineerime iga  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  korral  $\tilde{A}_i := \Phi(\tilde{t}_i)$  ning tähistame iga  $i \in \{1, \dots, N\}$  korral sümboliga  $\tilde{s}_i$  (kaare  $AB$ ) osakaare  $\tilde{A}_{i-1}\tilde{A}_i$  pikkuse. Nüüd

$$\sigma = \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j = \sum_{j=1}^n f(B_j) \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \tilde{s}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} f(C_i) \tilde{s}_i = \sum_{i=1}^N f(C_i) \tilde{s}_i$$

ja

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} f(B_k^m) s_k^m = \sum_{k=1}^{n_m} f(B_k^m) \sum_{i=i'_{k-1}+1}^{i'_k} \tilde{s}_i = \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{i=i'_{k-1}+1}^{i'_k} f(D_i) \tilde{s}_i = \sum_{i=1}^N f(D_i) \tilde{s}_i$$

ning seega

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_m| &= \left| \sum_{i=1}^N (f(C_i) - f(D_i)) \tilde{s}_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |f(C_i) - f(D_i)| \tilde{s}_i \\ &< \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2s} \tilde{s}_i = \frac{\varepsilon}{2s} \sum_{i=1}^N \tilde{s}_i = \frac{\varepsilon}{2s} s = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

nagu soovitud. □

### 2.3. Esimest liiki joonintegraali omadusi

Järgnev lause võtab kokku esimest liiki joonintegraali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

**Lause 2.3.** Olgu  $AB$  sirgestuv kaar  $xy$ -tasandil ning olgu sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuva funktsioonid  $u = f(x, y)$  ja  $v = g(x, y)$ .

- (a) Olgu funktsioon  $f$  konstantne kaarel  $AB$ , s.t. mingi  $c \in \mathbb{R}$  korral  $f(x, y) = c$  kaarel  $AB$ . Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal  $\int_{AB} f(x, y) ds$ , kusjuures

$$\int_{AB} c ds = c s_{AB} \quad (2.13)$$

(sümbol  $s_{AB}$  tähistab kaare  $AB$  pikkust).

- (b) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal

$$\int_{AB} f(x, y) ds =: I. \quad (2.14)$$

Siis funktsioon  $f$  on tõkestatud kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).

- (c) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal (2.14) ning olgu  $a \in \mathbb{R}$ . Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal  $\int_{AB} af(x, y) ds$ , kusjuures

$$\int_{AB} af(x, y) ds = a \int_{AB} f(x, y) ds.$$

- (d) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid

$$\int_{AB} f(x, y) ds =: I_1 \quad \text{ja} \quad \int_{AB} g(x, y) ds =: I_2. \quad (2.15)$$

Siis eksisteerivad ka esimest liiki joonintegraalid  $\int_{AB} (f(x, y) \pm g(x, y)) ds$ , kusjuures

$$\int_{AB} (f(x, y) \pm g(x, y)) ds = \int_{AB} f(x, y) ds \pm \int_{AB} g(x, y) ds.$$

- (e) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid (2.15) ning olgu  $a, b \in \mathbb{R}$ . Siis eksisteerib ka esimest liiki joonintegraal  $\int_{AB} (af(x, y) + bg(x, y)) ds$ , kusjuures

$$\int_{AB} (af(x, y) + bg(x, y)) ds = a \int_{AB} f(x, y) ds + b \int_{AB} g(x, y) ds.$$

- (f) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal (2.14) ning olgu  $f(x, y) \geq 0$  iga punkti  $(x, y)$  korral kaarelt  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljelt). Siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds \geq 0.$$

- (g) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid (2.15) ning olgu  $f(x, y) \geq g(x, y)$  iga punkti  $(x, y)$  korral kaarelt  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljelt). Siis

$$\int_{AB} f(x, y) ds \geq \int_{AB} g(x, y) ds. \quad (2.16)$$

- (h) Olgu  $C$  kaare  $AB$  punkt, mis asub punktide  $A$  ja  $B$  vahel. Siis esimest liiki joonintegraal (2.14) eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerivad esimest liiki joonintegraalid

$$\int_{AC} f(x, y) ds =: J_1 \quad \text{ja} \quad \int_{CB} f(x, y) ds =: J_2. \quad (2.17)$$

Seejuures

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \int_{AC} f(x, y) ds + \int_{CB} f(x, y) ds. \quad (2.18)$$

- (i) (Esimest liiki joonintegraali keskväärtusteoreem.) Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal (2.14). Siis

- (i1) leidub reaalarv  $\mu$  nii, et

$$m := \inf f(x, y) \leq \mu \leq \sup f(x, y) =: M, \quad (2.19)$$

kus  $\inf$  ja  $\sup$  võetakse üle kõigi punktide  $(x, y)$  kaarelt  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljelt), ja

$$\int_{AB} f(x, y) ds = \mu s_{AB}, \quad (2.20)$$

kus  $s_{AB}$  on kaare  $AB$  pikkus;

- (i2) kui funktsioon  $f$  on pidev kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), siis leidub punkt  $C$  kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) nii, et

$$\int_{AB} f(x, y) ds = f(C) s_{AB}. \quad (2.21)$$

**Märkus 2.3.** Väite (h) tõestus toetub lausele 2.1. Selle lause kasutamine võimaldaks lihtsustada ka väidete (b) ja (c) tõestusi.

LAUSE 2.3 TÕESTUS. Esitugu kaar  $AB$  parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B = (x(\beta), y(\beta))$ . Lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.22)$$

tähistame  $A_j = (x(t_j), y(t_j))$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ; iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame  $\Delta t_j := t_j - t_{j-1}$ , osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkuse tähistame sümboliga  $s_j$  ning fikseerime sellel osakaarel mingi punkti  $B_j$ , s.t.  $B_j = (x(\tau_j), y(\tau_j))$ , kus  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ .

- (a). Konstantse funktsiooni  $f(x, y) = c$  mis tahes integraalsumma

$$\sum_{j=1}^n f(B_j) s_j = \sum_{j=1}^n c s_j = c \sum_{j=1}^n s_j = c s_{AB},$$

seega ka nende integraalsummade piirväärtus on  $c s_{AB}$ , s.t. kehtib (2.13).

(b). Väite tõestus sarnaneb Riemanni mõttes integreeruva funktsiooni tõkestatuse tõestusega. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon  $f$  on tõkestamata. Väite tõestuseks piisab näidata, et

( $\circ$ ) lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.22) ning mis tahes reaalarvu  $M \geq 0$  korral leiduvad punktid (2.2), nii et

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j \right| > M.$$

Tõepoolest, kehtigu väide ( $\circ$ ). Sel juhul (võttes integraalsummade (2.3) piirväärtuse definitsioonis  $\varepsilon = 1$ ) leidub  $\delta > 0$  nii, et kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis mis tahes punktide  $B_j$  korral vastavate osakaartelt  $A_{j-1}A_j$

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < 1 \quad \text{ehk, teisisõnu,} \quad I - 1 < \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j < I + 1$$

ning seega

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j \right| < \max\{|I - 1|, |I + 1|\}.$$

Oleme saanud vastuolu väitega ( $\circ$ ).

Jääb veel tõestada väide ( $\circ$ ). Olgu antud punktid (2.22) ja reaalarv  $M \geq 0$ . Kuna funktsioon  $f$  on tõkestamata kaarel  $AB$ , siis ta on tõkestamata mingil osakaarel  $A_{j_0-1}A_{j_0}$ . Valime iga  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_0\}$  korral vabalt punkti  $B_j$  kaarel  $A_{j-1}A_j$  ja tähistame

$$\kappa := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^n f(B_j) s_j.$$

Siis mis tahes punkti  $B_{j_0}$  korral osakaarelt  $A_{j_0-1}A_{j_0}$

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j \right| = |f(B_{j_0}) s_{j_0} + \kappa| \geq |f(B_{j_0})| s_{j_0} - |\kappa|.$$

Järelikult, kui valida punkt  $B_{j_0}$  osakaarelt  $A_{j_0-1}A_{j_0}$  nii, et

$$|f(B_{j_0})| > \frac{M + |\kappa|}{s_{j_0}}$$

(niisugune valik on võimalik, sest funktsioon  $f$  on tõkestamata osakaarel  $A_{j_0-1}A_{j_0}$ ), siis

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j \right| > \frac{M + |\kappa|}{s_{j_0}} s_{j_0} - |\kappa| = M.$$

(c). Fikseerime vabalt  $\varepsilon > 0$ . Väite tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.22) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide  $B_1, \dots, B_n$  korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{j=1}^n a f(B_j) s_j - aI \right| = |a| \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $a \neq 0$ . Integraali (2.14) olemasolu tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n a f(B_j) s_j - aI \right| < |a| \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon.$$

(d). Fikseerime vabalt  $\varepsilon > 0$ . Väite tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (2.22) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide  $B_1, \dots, B_n$  korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n (f(B_j) \pm g(B_j)) s_j - (I_1 \pm I_2) \right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n (f(B_j) \pm g(B_j)) s_j - (I_1 \pm I_2) \right| &= \left| \left( \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I_1 \right) \pm \left( \sum_{j=1}^n g(B_j) s_j - I_2 \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I_1 \right| + \left| \sum_{j=1}^n g(B_j) s_j - I_2 \right|. \end{aligned}$$

Integraalide (2.15) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud  $\delta_1, \delta_2 > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_1 \implies \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_2 \implies \left| \sum_{j=1}^n g(B_j) s_j - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n (f(B_j) \pm g(B_j)) s_j - (I_1 \pm I_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Väite (c) põhjal eksisteerivad joonintegraalid  $\int_{AB} a f(x, y) ds$  ja  $\int_{AB} b g(x, y) ds$ , seega väite (d) põhjal eksisteerib ka joonintegraal  $\int_{AB} (a f(x, y) + b g(x, y)) ds$ , kusjuures

$$\begin{aligned} \int_{AB} (a f(x, y) + b g(x, y)) ds &= \int_{AB} a f(x, y) ds + \int_{AB} b g(x, y) ds \\ &= a \int_{AB} f(x, y) ds + b \int_{AB} g(x, y) ds. \end{aligned}$$

(f). Fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab väite tõestuseks näidata, et

$$I > -\varepsilon. \quad (2.23)$$

Integraali (2.14) olemasolu tõttu leidub integraalsumma  $\sum_{j=1}^n f(B_j) s_j$ , mis rahuldab tingimust  $\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < \varepsilon$ ; niisiis

$$I + \varepsilon > \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j \geq 0$$

(siin viimane võrratus kehtib, sest  $f(x, y) \geq 0$  kaarel  $AB$ ), millest järeldub (2.23).

(g). Kuna  $f(x, y) \geq g(x, y)$  kaarel  $AB$ , siis  $f(x, y) - g(x, y) \geq 0$  sellel kaarel; seega väidete (d) ja (f) põhjal

$$\int_{AB} f(x, y) ds - \int_{AB} g(x, y) ds = \int_{AB} (f(x, y) - g(x, y)) ds \geq 0,$$

millest järeldub (2.16).

(h). Olgu  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  selline, et  $C = (x(\gamma), y(\gamma))$ . Siis kaared  $AC$  ja  $CB$  esituvad vastavalt parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \gamma] \quad \text{ja} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\gamma, \beta].$$

*Tarvilikkus.* Eksisteerigu esimest liiki joonintegraal (2.14). Tõestame ainult joonintegraali  $\int_{AC} f(x, y) ds$  olemasolu (joonintegraali  $\int_{CB} f(x, y) ds$  olemasolu tõestatakse analoogiliselt). Selleks märgime kõigepealt, et väite (b) põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud kaarel  $AB$ , seega on funktsioon  $f$  tõkestatud ka osakaarel  $AC$ , järelikult funktsiooni  $f$  kõikvõimalike integraalsummade hulk (mis vastavad kaare  $AC$  jaotusviisidele) on tõkestatud (PÕHJENDADA!), niisiis funktsiooni  $f$  mis tahes integraalsummade jada kaarel  $AC$  on tõkestatud (integraalsummade jada mõistet on selgitatud eespool jaotises 2.2). Kuna Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal saab igast tõkestatud arvjadast välja eraldada koonduva osajada, siis leidub koonduv funktsiooni  $f$  integraalsummade jada  $(v_m)_{m=1}^\infty$  kaarel  $AC$ . Tähistame  $J := \lim_{m \rightarrow \infty} v_m$ .

Olgu  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  suvaline funktsiooni  $f$  integraalsummade jada kaarel  $AC$ . Lause 2.1 põhjal piisab joonintegraali  $\int_{AC} f(x, y) ds$  olemasoluks näidata, et  $\rho_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J$ . Selleks fikseerime vabalt funktsiooni  $f$  mingi integraalsummade jada  $(\rho'_m)_{m=1}^\infty$  kaarel  $CB$ . Kuna  $(\rho_m + \rho'_m)_{m=1}^\infty$  ja  $(v_m + \rho'_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $f$  integraalsummade jadad kaarel  $AB$  (PÕHJENDADA!), siis lause 2.1 põhjal

$$\rho_m + \rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I \quad \text{ja} \quad v_m + \rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I$$

ning järelikult

$$\rho_m = (\rho_m + \rho'_m) - (v_m + \rho'_m) + v_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I - I + J = J,$$

nagu soovitud.

*Piisavus.* Eksisteerigu esimest liiki joonintegraalid (2.17). Olgu  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  suvaline funktsiooni  $f$  integraalsummade jada kaarel  $AB$ , s.t. kehtivad lausele 2.1 eelnevad tingimused (1) ja (2). Esimest liiki joonintegraali (2.14) olemasoluks ja valemi (2.18) kehtivuseks piisab lause 2.1 põhjal näidata, et  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1 + J_2$ . Selleks märgime kõigepealt, et väite (b) põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud osakaartel  $AC$  ja  $CB$ , niisiis funktsioon  $f$  on tõkestatud ka kaarel  $AB$  (PÕHJENDADA!), s.t. leidub reaalarv  $M \geq 0$  nii, et

$$|f(x, y)| \leq M \quad \text{iga punkti } (x, y) \text{ korral kaarelt } AB.$$

Tähistame iga  $m \in \mathbb{N}$  korral

$$j_m := \min\{j \in \{1, \dots, n_m\} : \gamma \leq t_j^m\}$$

(siis punkt  $C$  asub kaarel  $A_{j_m-1}A_{j_m}$ ) ning, tähistades kaarte  $A_{j_m-1}C$  ja  $CA_{j_m}$  pikused vastavalt sümboolitega  $s_0^m$  ja  $\hat{s}_0^m$  (seejuures, kui  $C = A_{j_m}$ , siis loeme  $\hat{s}_0^m = 0$ ),

$$\rho_m := \sum_{j=1}^{j_m-1} f(B_j^m) s_j^m + f(C) s_0^m \quad \text{ja} \quad \rho'_m := f(C) \hat{s}_0^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} f(B_j^m) s_j^m.$$

Siis  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  ja  $(\rho'_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $f$  integraalsummade jadad vastavalt kaartel  $AC$  ja  $CB$  (PÕHJENDADA!), seega lause 2.1 põhjal  $\rho_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1$  ja  $\rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_2$ . Kuna

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m) s_j^m = \sum_{j=1}^{j_m-1} f(B_j^m) s_j^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} f(B_j^m) s_j^m + f(B_{j_m}^m) s_{j_m}^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + f(B_{j_m}^m) s_{j_m}^m - f(C) s_0^m - f(C) \hat{s}_0^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + (f(B_{j_m}^m) - f(C)) s_{j_m}^m \end{aligned}$$

(sest  $s_0^m + \hat{s}_0^m = s_{j_m}^m$ ), siis jääb soovitud koonduvuseks  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1 + J_2$  näidata, et

$$(f(B_{j_m}^m) - f(C)) s_{j_m}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.24)$$

Kuna

$$|(f(B_{j_m}^m) - f(C)) s_{j_m}^m| \leq (|f(B_{j_m}^m)| + |f(C)|) s_{j_m}^m \leq 2M s_{j_m}^m,$$

siis piisab koonduvuseks (2.24) näidata, et  $s_{j_m}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . See järeldub lausest 1.2

(PÕHJENDADA!).

(i1). Väite tõestus sarnaneb Riemanni integraali keskvaartusteoreemi tõestusega. Väidete (a) ja (g) põhjal

$$m s_{AB} = \int_{AB} m ds \leq \int_{AB} f(x, y) ds \leq \int_{AB} M ds = M s_{AB};$$

seega, tähistades

$$\mu := \frac{\int_{AB} f(x, y) ds}{s_{AB}},$$

kehtivad (2.19) ja (2.20).

(i2). Olgu  $\mu \in \mathbb{R}$  arv eelnevast väitest. Kui funktsioon  $f$  on pidev kaarel  $AB$ , siis funktsioon

$$F(t) = f(x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

on pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$ , kusjuures

$$\inf_{t \in [\alpha, \beta]} F(t) = \inf_{t \in [\alpha, \beta]} f(x(t), y(t)) = m \leq \mu \leq M = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} f(x(t), y(t)) = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} F(t),$$

seega Bolzano–Cauchy teoreemi põhjal lõigus pideva funktsiooni vahepealsetest väärtustest leidub punkt  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  nii, et  $\mu = F(\gamma)$  ehk, tähistades  $C := (x(\gamma), y(\gamma))$ ,

$$\mu = F(\gamma) = f(x(\gamma), y(\gamma)) = f(C),$$

niisiis kehtib (2.21). □

## 2.4. Esimest liiki joonintegraali arvutamine

**Teoreem 2.4.** *Olgu kahe muutuva funktsioon  $u = f(P) = f(x, y)$  pidev (tasandilisel) kaarel  $L$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), mis esitub parameetriliste võrranditega*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (2.25)$$

*kus funktsioonidel (2.25) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis. Siis eksisteerib esimest liiki joonintegraal funktsioonist  $f$  üle kaare  $L$ , kusjuures*

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (2.26)$$

**TÕESTUS.** Tähistame

$$I := \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (2.27)$$

Fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab valemi (2.26) tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et, jaotades lõigu  $[\alpha, \beta]$  suvaliselt osalõikudeks punktidega  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ning fikseerides iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral suvaliselt punkti  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  ja tähistades

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad B_j := (x(\tau_j), y(\tau_j)), \quad s_j := \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

(märgime, et  $s_j$  on kaare  $L$  osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkus, kus  $A_{j-1} = (x(t_{j-1}), y(t_{j-1}))$  ja  $A_j = (x(t_j), y(t_j))$ ), kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < \varepsilon.$$

Hindame:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(\tau_j), y(\tau_j)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(x(\tau_j), y(\tau_j)) - f(x(t), y(t))| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |F(\tau_j) - F(t)| \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt, \tag{2.28}
 \end{aligned}$$

kus

$$F(t) := f(x(t), y(t)), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Kuna funktsioon  $F$  on pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$  (sest ta on pidevate funktsioonide liit-funktsioon), siis Cantori teoreemi põhjal ta on selles lõigus ühtlaselt pidev, seega leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < \delta \implies |F(t) - F(t')| < \frac{\varepsilon}{s_L},$$

kus  $s_L$  on kaare  $L$  pikkus. Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis mis tahes  $j \in \{1, \dots, n\}$  ja  $t \in [t_{j-1}, t_j]$  korral  $|\tau_j - t| < \delta$  ning seega  $|F(\tau_j) - F(t)| < \frac{\varepsilon}{s_L}$ , järelikult

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| &< \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\varepsilon}{s_L} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{\varepsilon}{s_L} \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \frac{\varepsilon}{s_L} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \frac{\varepsilon}{s_L} s_L = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

**Märkus 2.4.** Teoreemi 2.4 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, summat valemireas (2.28) saab hinnata ka teisiti. Nimelt, kuna funktsioon  $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  on pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$ , siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal on ta tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub reaalarv  $M > 0$  nii, et

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \leq M \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Seega, tähistades

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} F(t), \quad m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}, t_j]} F(t), \quad j = 1, \dots, n$$

(need supreemumid ja infimumid eksisteerivad, sest lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon  $F$  on Weierstrassi teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus ning seega tõkestatud ka igas osalõigus  $[t_{j-1}, t_j]$ ), kehtib

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (M_j - m_j) M dt = M \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \\ &= M \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta t_j. \end{aligned}$$

Kuna lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon  $F$  on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta t_j < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) s_j - I \right| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

**Märkus 2.5.** Teoreem 2.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (2.25) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  nõrgema eeldusega, et funktsioonidel (2.25) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel  $x'$  ja  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järeldub lausest 2.3, (h) (PÕHJENDADA!).

**Märkus 2.6.** Teoreem 2.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (2.25) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 2.5 käsitletud teoreemi 2.4 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, märkuse 1.6 põhjal on kaar  $L$  ka sel eeldusel sirgestuv, kusjuures tema pikkus on  $s_L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  ja iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral on osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkus  $s_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$ ; samuti eksisteerib integraal (2.27) (sest funktsioon  $x \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  on integreeruv lõigus  $[\alpha, \beta]$  ning antud lõigus integreeruvate funktsioonide korrutis on integreeruv selles lõigus). Vahetult teoreemi 2.4 sõnastusele järgnevas selle teoreemi tõestuses tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  pidevust muuks ei kasutata. (Märkuses 2.4 antud tõestusskeemis kasutatakse tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  pidevust lisaks veel funktsiooni  $t \mapsto \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$  tõkestatuse põhjendamiseks lõigus  $[\alpha, \beta]$ , aga ka see järeldub nende tuletisfunktsioonide integreeruvusest selles lõigus, sest mingis lõigus integreeruv funktsioon on tõkestatud selles lõigus).

Järgnev järeldus teoreemist 2.4 annab valemid esimest liiki (tasandilise) joon-integraali arvutamiseks juhul, kui kaar, üle mille integreeritakse, on antud võrrandiga  $y = y(x)$ ,  $x = x(y)$  või polaarkoordinaatides.

**Järeldus 2.5.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $u = f(x, y)$  pidev tasandilisel kaarel  $L$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).

(a) Olgu kaar  $L$  esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.29)$$

kus funktsioonil (2.29) eksisteerib lõigus  $[a, b]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

(b) Olgu kaar  $L$  esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \quad (2.30)$$

kus funktsioonil (2.30) eksisteerib lõigus  $[c, d]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $x'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_L f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{x'(y)^2 + 1} dy.$$

(c) Olgu kaar  $L$  esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \quad (2.31)$$

kus funktsioonil (2.31) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $r'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_L f(x, y) ds = \int_\alpha^\beta f(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) \sqrt{r'(\phi)^2 + r(\phi)^2} d\phi.$$

TÕESTUS. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.5 tõestusele (seejuures toetutakse teoreemi 1.4 asemel teoreemile 2.4). Seepärast jätame tõestamise lugejale.  $\square$

## 2.5. Esimest liiki joonintegraali rakendusi

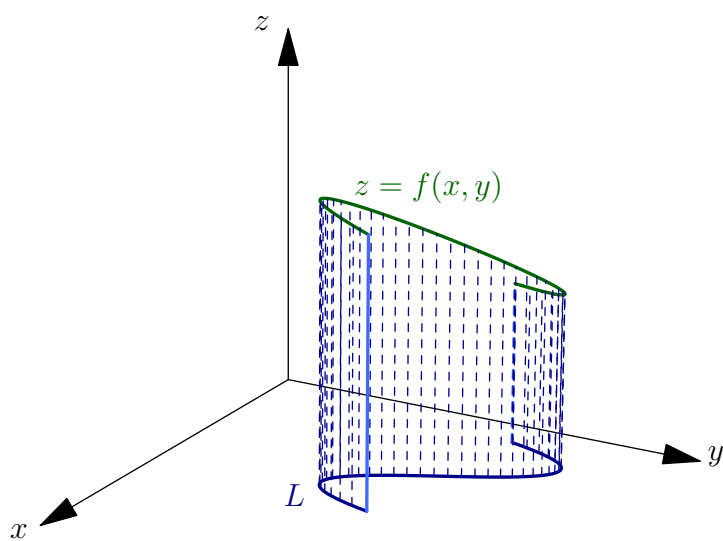
**Teoreem 2.6.** Olgu  $L$  sile kaar (või, täpsemalt, sileda kaare jälg)  $xy$ -tasandil ning olgu kahe muutuja funktsioon  $u = f(x, y)$  pidev kaarel  $L$ . Siis silindrilise pinna

$$\Sigma := \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in L, z \in [0, f(x, y)] \right\}$$

(vt. joonist 2.2) pindala on

$$S_\Sigma = \int_L f(x, y) ds.$$

TÕESTUS. Seda teoreemi me käesolevas kursuses ei tõesta.  $\square$



JOONIS 2.2. Silindriline pind  $\Sigma$  on joonisel viirutatud katkendliku joonega.

## § 3. Teist liiki tasandiline joonintegraal

### 3.1. Teist liiki joonintegraali mõiste

Olgu (tasandiline) kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (3.1)$$

Tähistame  $A := (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B := (x(\beta), y(\beta))$ , s.t.  $A$  ja  $B$  on vastavalt selle kaare algus- ja lõpp-punkt; sellele kaarele viitame edasises kui kaarele  $AB$ . Olgu kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioon  $z = f(P) = f(x, y)$ .

Jaotame lõigu  $[\alpha, \beta]$  osalõikudeks punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2)$$

ning tähistame  $x_j := x(t_j)$ ,  $y_j := y(t_j)$ ,  $A_j := (x_j, y_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ . Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1} \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}$$

ning fikseerime osakaarel  $A_{j-1}A_j$  mingi punkti  $B_j$ , s.t.

$$B_j := (x(\tau_j), y(\tau_j)), \quad \text{kus } \tau_j \in [t_{j-1}, t_j] \quad (3.3)$$

(vt. joonist 3.1, kus  $n = 7$ ). Moodustame *integraalsumma*

$$\sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j. \quad (3.4)$$

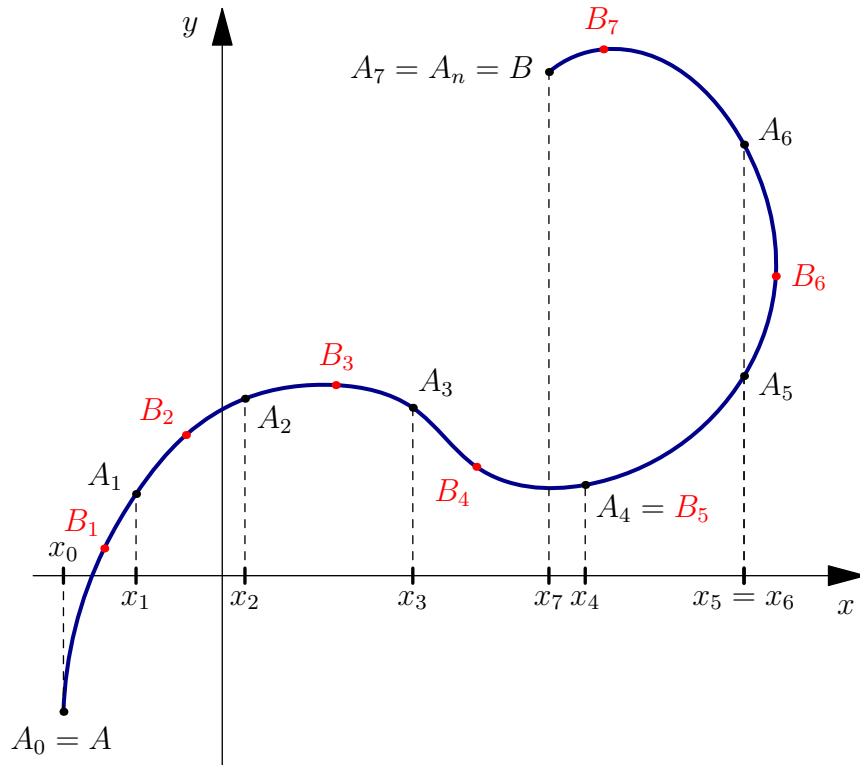
**Definitsioon 3.1.** Kui integraalsummadel (3.4) eksisteerib piirväärtus  $I \in \mathbb{R}$ , s.t. iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.2) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (3.3) korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \quad \implies \quad \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| < \varepsilon, \quad (3.5)$$

siis seda piirväärtust nimetatakse *teist liiki (tasandiliseks) joonintegraaliks funktsioonist  $f$  üle kaare  $AB$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele* ja tähistatakse sümboliga

$$\int_{AB} f(x, y) dx := \lim \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j := I. \quad (3.6)$$

Kaarele  $AB$  viidatakse seejuures kui *integreerimisteele*.



JOONIS 3.1. Joonisel on kujutatud kaart  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jälge) koos selle kaare osakaarte otspunktidega  $A_0, A_1, \dots, A_n$  ja nende otspunktide projektsioonidega  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $x$ -teljele ning osakaartel  $A_{j-1}A_j$  fikseeritud punktidega  $B_j, j = 1, \dots, n$ .

Analoogiliselt defineeritakse *teist liiki (tasandiline) joonintegraal funktsioonist  $f$  üle kaare  $AB$  projektsioonide järgi  $y$ -teljele*

$$\int_{AB} f(x, y) dy. \quad (3.7)$$

Kui funktsioonid  $u = F(x, y)$  ja  $v = G(x, y)$  on määratud kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), siis me tähistame

$$\int_{AB} F dx + G dy := \int_{AB} F(x, y) dx + G(x, y) dy := \int_{AB} F(x, y) dx + \int_{AB} G(x, y) dy.$$

**Märkus 3.1.** Analoogiliselt märkuses 1.3 tõestatuga saab näidata, et kui kaar (3.1) on lihtne, siis tema jaoks jääb integraalsummade (3.4) piirväärtuse mõiste samaks, kui definitsiooni 3.1 implikatsioonis (3.5) asendada tingimus

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$$

**NB!** Tingimuse  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$  võib asendada ka tingimusega  $\max_{1 \leq j \leq n} s_{A_{j-1}A_j} < \delta$ , kus  $s_{A_{j-1}A_j}$  tähistab osakaare  $A_{j-1}A_j$  pikkust!

tingimusega

$$\max\{|\Delta x_1|, |\Delta y_1|, \dots, |\Delta x_n|, |\Delta y_n|\} < \delta$$

õi tingimusega

$$\max_{1 \leq j \leq n} d(A_{j-1}, A_j) < \delta.$$

**Märkus 3.2.** Osutub, et kui tasandiline kaar  $\Phi$  on lihtne ning sellel kaarel (või täpsemalt, tema jäljel) on määratud ( $\mathbb{R}$ -väärtuseline) funktsioon  $f$ , siis mis tahes lihtsa tasandilise kaare  $\Psi$  korral, mille jälg on võrdne kaare  $\Phi$  jäljega ja mille algupunkt ühtib kaare  $\Phi$  alguspunktiga, eksisteerib teist liiki joonintegraal funktsioonist  $f$  üle kaare  $\Psi$  (ükskõik, kas projektsioonide järgi  $x$ -teljele või  $y$ -teljele) parajasti siis, kui eksisteerib vastav integraal üle kaare  $\Phi$ , kusjuures nende integraalide eksisteerimise juhul on nad võrdsed.

Tõepoolest, kui  $\Phi$  ja  $\Psi$  on lihtsad kaared, mille alguspunktid ja jäljed ühtivad, siis funktsioonid  $\Phi$  ja  $\Psi$  määravad sellel jäljel ühesuguse punktide järjestuse (vt. ülesannet 1.3). Siit järeldub, et mis tahes sellel jäljel määratud funktsiooni korral on selle funktsiooni integraalsummade hulk (nii projektsioonide järgi  $x$ -teljele kui ka  $y$ -teljele) üle kaare  $\Phi$  sama, mis vastavate integraalsummade hulk üle kaare  $\Psi$  (PÕHJENDADA!). Märkusest 3.1 järeldub, et ka nende integraalsummade piirväärtused üle kaarte  $\Phi$  ja  $\Psi$  on võrdsed (või ei eksisteeri kumbki nendest piirväärtustest) (PÕHJENDADA!) ehk, teisisõnu, teist liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kaarte  $\Phi$  ja  $\Psi$  on võrdsed.

Eelnevast arutelust nähtub, et tõestatud väide jääb kehtima, kui seal vaadelda lihtsate kaarte asemel kaari, mis määravad nende kaarte ühisel jäljel ühesuguse punktide järjestuse (“jälje punktide läbimise järjekorra”).

Eelnevaga on õigustatud järgnev ülesannetekogudes sagedasti esinev ülesandepüstitus: etteantud (tasandilise) punktihulga – millele selles ülesandes viidatakse kui kaarele ja mille puhul on ette antud “tema punktide läbimise järjekord” – ning sellel punktihulgal määratud ( $\mathbb{R}$ -väärtuseline) funktsiooni korral leida teist liiki joonintegraal sellest funktsioonist üle selle punktihulga – kaare (kas siis projektsioonide järgi  $x$ -teljele või  $y$ -teljele). Selles ülesandes peetakse “kaare” all silmas mingit kaart, mille jälg see punktihulk on ning mille poolt määratud “jälje punktide läbimise järjekord” ühtib selle etteantud järjekorraga: eelneva põhjal on teist liiki joonintegraalid vaadeldavast funktsioonist üle kõigi niisuguste kaarte võrdsed ning seega ei sõltu selle integraali väärtus sellise kaare valikust.

### 3.2. Integraalsummade piirväärtus integraalsummade jadade piirväärtuste kaudu

Järgnev lause kirjeldab integraalsummade (3.4) piirväärtuse (ehk siis, teisisõnu, teist liiki joonintegraali (projektsioonide järgi  $x$ -teljele)) mõistet. Selleks lepime kokku järgnevas terminoloogias: kõikjal selle paragrahvi ulatuses, kõneldes (*funktsiooni  $f$  integraalsummade jadast (kaarel  $AB$ ) (projektsioonide järgi  $x$ -teljele)*), mõistame me selle all mingit niisugust arvjada  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$ , kus

- (1) iga  $m \in \mathbb{N}$  korral  $\sigma_m$  on funktsiooni  $f$  integraalsumma tüüpi (3.4), s.t.

$$\sigma_m = \sum_{j=1}^{n_m} f(B_j^m) \Delta x_j^m, \quad (3.8)$$

kus  $n_m \in \mathbb{N}$  ning lõigu  $[\alpha, \beta]$  mingi jaotusviisi

$$\alpha = t_0^m < t_1^m < \dots < t_{n_m}^m = \beta \quad (3.9)$$

korral  $\Delta x_j^m := x(t_j^m) - x(t_{j-1}^m)$  ja

$$B_j^m = (x(\tau_j^m), y(\tau_j^m)) \quad \text{mingi } \tau_j^m \in [t_{j-1}^m, t_j^m] \text{ korral;} \quad (3.10)$$

- (2) integraalsummadele (3.8) vastavate lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviiside (3.9) pikima osa-lõigu pikkus läheneb nullile protsessis  $m \rightarrow \infty$ , s.t.

$$\max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad (3.11)$$

$$\text{kus } \Delta t_j^m := t_j^m - t_{j-1}^m.$$

**Lause 3.1.** Olgu  $I \in \mathbb{R}$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) funktsiooni  $f$  integraalsummade (3.4) piirväärtus on arv  $I$ ;
- (ii) funktsiooni  $f$  mis tahes integraalsummade jada (kaarel  $AB$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele) koondub arvuks  $I$ .

TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i), olgu  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  funktsiooni  $f$  integraalsummade jada (kaarel  $AB$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Implikatsiooni tõestuseks peame leidma indeksi  $N \in \mathbb{N}$  nii, et

$$m \in \mathbb{N}, m \geq N \implies |\sigma_m - I| < \varepsilon. \quad (3.12)$$

Eelduse (i) põhjal leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.2) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide (3.3) korral) kehtib implikatsioon (3.5). Nüüd, valides naturaalarvu  $N$  nii, et

$$m \in \mathbb{N}, m \geq N \implies \max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m < \delta$$

(selline valik on võimalik koonduvuse (3.11) tõttu), kehtib implikatsioon (3.12), nagu soovitud.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii). Oletame vastuväiteliselt, et arv  $I$  ei ole funktsiooni  $f$  integraalsummade (3.4) piirväärtus. Siis leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  nii, et iga  $m \in \mathbb{N}$  korral leiduvad lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviis (3.9) ning punktid (3.10),  $j = 1, \dots, n_m$ , nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n_m} \Delta t_j^m < \frac{1}{m},$$

kuid  $|\sigma_m - I| \geq \varepsilon$ , kus integraalsumma  $\sigma_m$  on defineeritud võrdusega (3.8) (PÕHJENDADA!). Nüüd  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $f$  integraalsummade jada (kaarel  $AB$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele), mis ei koondunud arvaks  $I$ , vastuolu.  $\square$

Jaotise lõpetuseks tõestame, et teist liiki joonintegraal pidevast funktsioonist üle sirgestuva kaare (nii projektsioonide järgi  $x$ -teljele kui ka  $y$ -teljele) eksisteerib alati.

**Teoreem 3.2.** Olgu  $AB$  sirgestuv (tasandiline) kaar ning olgu funktsioonid  $F$  ja  $G$  pidevad sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel). Siis eksisteerib teist liiki joonintegraal  $\int_{AB} F dx + G dy$ .

TÕESTUS. Tõestame teoreemi väite ainult juhul, kus  $G = 0$ . Juhul, kus  $F = 0$ , tõestatakse väide analoogiliselt; väite kehtivusest juhtub, kus vastavalt  $G = 0$  ja  $F = 0$ , järeldub selle väite kehtivus üldjuhul (PÕHJENDADA!).

Niisiis, eeldame järgnevas, et  $G = 0$ . Kõneldes integraalsummade ja integraalsummade jadadest, mõistame me selle all alati integraalsummasid ja integraalsummade jadasid kaarel  $AB$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele.

Esitugu kaar  $AB$  parameetriliste võrranditega  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Defineerime  $\Phi(t) := (x(t), y(t))$  iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral (siis  $A = \Phi(\alpha)$  ja  $B = \Phi(\beta)$ ). Teoreemi tõestuseks piisab leida arv  $I \in \mathbb{R}$ , mille puhul iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et, tuginedes paragrahvi alguses sissetoodud tähistustele ja märkides  $\sigma := \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j$ , kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |\sigma - I| < \varepsilon. \quad (3.13)$$

Selleks paneme tähele, et leidub koonduv funktsiooni  $f$  integraalsummade jada  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  (PÕHJENDADA! – SELLEKS NÄIDATA, ET FUNKTSIOONI  $f$  IGA INTEGRAALSUMMADE JADA ON TÕKESTATUD NING RAKENDADA BOLZANO–WEIERSTRASSI TEOREEMI). Tähistame  $I := \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m$  ja fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Teoreemi tõestuseks jääb leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et kehtib implikatsioon (3.13).

Kuna funktsioon  $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto F(x(t), y(t)) = F(\Phi(t)) \in \mathbb{R}$  on pidev, siis Cantori teoreemi põhjal on see funktsioon ühtlaselt pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$ , seega leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < 2\delta \implies |F(\Phi(t)) - F(\Phi(t'))| < \frac{\varepsilon}{2s},$$

kus  $s$  tähistab kaare  $AB$  pikkust (siin me võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $s > 0$ ). Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et (tuginedes paragrahvi alguses sissetoodud tähistustele ja märkides  $\sigma := \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j$ ) kehtib implikatsioon (3.13), s.t. eeldades, et  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , jääb näidata, et  $|\sigma - I| < \varepsilon$ .

Kuna  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I$ , siis leidub indeks  $m \in \mathbb{N}$  nii, et  $|\sigma_m - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tuginedes käesoleva jaotise alguses tingimustes (1) ja (2) sissetoodud tähistustele, esitub integraalsumma  $\sigma_m$  kujul  $\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} F(B_k^m) \Delta x_k^m$ , kus üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $\max_{1 \leq k \leq n_m} \Delta t_k^m < \delta$  (PÕHJENDADA, MIKS ME VÕIME SIIN ÜLDISUST KITSENDAMATA EELDADA, ET  $\max_{1 \leq k \leq n_m} \Delta t_k^m < \delta$ ). Kuna

$$|\sigma - I| \leq |\sigma - \sigma_m| + |\sigma_m - I| < |\sigma - \sigma_m| + \frac{\varepsilon}{2},$$

siis soovitud võrratuseks  $|\sigma - I| < \varepsilon$  jääb näidata, et  $|\sigma - \sigma_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Olgu  $N \in \mathbb{N}$  ja reaalarvud  $\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_N \in [\alpha, \beta]$  sellised, et  $\alpha = \tilde{t}_0 < \tilde{t}_1 < \dots < \tilde{t}_N = \beta$  ja  $\{\tilde{t}_0, \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_N\} = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \cup \{t_0^m, t_1^m, \dots, t_{n_m}^m\}$ . Iga  $j \in \{0, 1, \dots, n\}$  ja iga  $k \in \{0, 1, \dots, n_m\}$  korral olgu  $i_j, i'_k \in \{0, 1, \dots, N\}$  sellised (üheselt määratud) indeksid, et  $t_j = \tilde{t}_{i_j}$  ja  $t_k^m = \tilde{t}_{i'_k}$ . Siis iga  $i \in \{1, \dots, N\}$  korral leiduvad sellised üheselt määratud  $j \in \{1, \dots, n\}$  ja  $k \in \{1, \dots, n_m\}$ , et

$$t_{j-1} = \tilde{t}_{i_{j-1}} < \tilde{t}_i \leq \tilde{t}_{i_j} = t_j \quad \text{ja} \quad t_{k-1}^m = \tilde{t}_{i'_{k-1}} < \tilde{t}_i \leq \tilde{t}_{i'_k} = t_k^m;$$

NB! Alates sel-  
lest “Kuna” kuni  
järgmise lõigu vale-  
mireani “ $|F(C_i) - F(D_i)| = \dots$ ”, kor-  
dab teoreemi 3.2  
tõestus sõna-sõnalt  
teoreemi 2.2 tões-  
tuse vastavat juppi.

selliste  $j$  ja  $k$  korral defineerime  $C_i := B_j = \Phi(\tau_j)$  ja  $D_i := B_k^m = \Phi(\tau_k^m)$ . Kuna

$$|\tau_j - \tau_k^m| \leq |\tau_j - \tilde{t}_i| + |\tilde{t}_i - \tau_k^m| < |t_j - t_{j-1}| + |t_k^m - t_{k-1}^m| < \delta + \delta = 2\delta,$$

siis

$$|F(C_i) - F(D_i)| = |F(\Phi(\tau_j)) - F(\Phi(\tau_k^m))| < \frac{\varepsilon}{2s}.$$

Defineerime iga  $i \in \{1, \dots, N\}$  korral  $\Delta \tilde{x}_i := x(\tilde{t}_i) - x(\tilde{t}_{i-1})$ ; siis

$$\sigma = \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j = \sum_{j=1}^n F(B_j) \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \Delta \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} F(C_i) \Delta \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^N F(C_i) \Delta \tilde{x}_i$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIIN  $\Delta x_j = \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} \Delta \tilde{x}_i$ !) ja

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{n_m} F(B_k^m) \Delta x_k^m = \sum_{k=1}^{n_m} F(B_k^m) \sum_{i=i'_{k-1}+1}^{i'_k} \Delta \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{i=i'_{k-1}+1}^{i'_k} F(D_i) \Delta \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^N F(D_i) \Delta \tilde{x}_i$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIIN  $\Delta x_k^m = \sum_{i=i'_{k-1}+1}^{i'_k} \Delta \tilde{x}_i$ !). Seega, defineerides iga  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$

korral  $\tilde{A}_i := \Phi(\tilde{t}_i)$  ning tähistades iga  $i \in \{1, \dots, N\}$  korral sümbooliga  $|\tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_i|$  punkte  $\tilde{A}_{i-1}$  ja  $\tilde{A}_i$  ühendava sirglõigu pikkuse,

$$\begin{aligned} |\sigma - \sigma_m| &= \left| \sum_{i=1}^N (F(C_i) - F(D_i)) \Delta \tilde{x}_i \right| \leq \sum_{i=1}^N |F(C_i) - F(D_i)| |\Delta \tilde{x}_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon}{2s} |\tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_i| = \frac{\varepsilon}{2s} \sum_{i=1}^N |\tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_i| < \frac{\varepsilon}{2s} s = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIIN  $|\Delta \tilde{x}_i| \leq |\tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_i|$  JA  $\sum_{i=1}^N |\tilde{A}_{i-1} \tilde{A}_i| \leq s$ !), nagu soovitud.  $\square$

### 3.3. Teist liiki joonintegraali omadusi

Järgnev lause võtab kokku teist liiki joonintegraali olulisemad lihtsamat sorti omadused.

**Lause 3.3.** Olgu  $AB$  kaar  $xy$ -tasandil ning olgu sellel kaarel (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) määratud kahe muutuja funktsioonid  $u = F(x, y)$ ,  $u_1 = F_1(x, y)$ ,  $u_2 = F_2(x, y)$ ,  $v = G(x, y)$ ,  $v_1 = G_1(x, y)$  ja  $v_2 = G_2(x, y)$ .

- (a) Teist liiki joonintegraal sõltub kaare (või, täpsemalt, selle kaare jälje) läbimise suunast: kaare  $AB$  (või täpsemalt, selle kaare jälje) läbimisel vastassuunas integraali märk muutub:

$$\int_{BA} F dx + G dy = - \int_{AB} F dx + G dy$$

(siin peetakse kaare  $BA$  all silmas mingit kaart, mille jälg ühtib kaare  $AB$  jäljega ning mille poolt sellel jäljel määratud punktide järjestus ("jälje punktide läbimise järjekord") on täpselt vastupidine kaare  $AB$  poolt määratud järjestysele (muuhulgas, kaare  $BA$  alguspunkt on  $B$  ja lõpp-punkt  $A$ )).

(b) Kui kaar  $AB$  on risti  $x$ -teljega, siis

$$\int_{AB} F dx = 0; \quad (3.14)$$

kui kaar  $AB$  on risti  $y$ -teljega, siis

$$\int_{AB} G dy = 0.$$

(c) Olgu  $c \in \mathbb{R}$ .

(c1) Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal

$$\int_{AB} F dx =: I, \quad (3.15)$$

siis eksisteerib ka joonintegraal  $\int_{AB} c F dx$ , kusjuures

$$\int_{AB} c F dx = c \int_{AB} F dx.$$

(c2) Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal  $\int_{AB} G dy$ , siis eksisteerib ka joonintegraal  $\int_{AB} c G dy$ , kusjuures

$$\int_{AB} c G dy = c \int_{AB} G dy.$$

(d) (d1) Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid

$$\int_{AB} F_1 dx =: I_1 \quad \text{ja} \quad \int_{AB} F_2 dx =: I_2, \quad (3.16)$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid  $\int_{AB} (F_1 \pm F_2) dx$ , kusjuures

$$\int_{AB} (F_1 \pm F_2) dx = \int_{AB} F_1 dx \pm \int_{AB} F_2 dx.$$

(d2) Kui eksisteerivad teist liiki joonintegraalid

$$\int_{AB} G_1 dy \quad \text{ja} \quad \int_{AB} G_2 dy, \quad (3.17)$$

siis eksisteerivad ka joonintegraalid  $\int_{AB} (G_1 \pm G_2) dy$ , kusjuures

$$\int_{AB} (G_1 \pm G_2) dy = \int_{AB} G_1 dy \pm \int_{AB} G_2 dy.$$

- (e) Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid (3.16) ja (3.17). Siis eksisteerib ka joonintegraal

$$\int_{AB} (a_1 F_1 + a_2 F_2) dx + (b_1 G_1 + b_2 G_2) dy, \quad (3.18)$$

kusjuures

$$\begin{aligned} \int_{AB} (a_1 F_1 + a_2 F_2) dx + (b_1 G_1 + b_2 G_2) dy \\ = a_1 \int_{AB} F_1 dx + a_2 \int_{AB} F_2 dx + b_1 \int_{AB} G_1 dy + b_2 \int_{AB} G_2 dy. \end{aligned}$$

- (f) Olgu  $C$  kaare  $AB$  punkt, mis asub punktide  $A$  ja  $B$  vahel.

- (f1) Kui eksisteerib teist liiki joonintegraal

$$\int_{AB} F dx + G dy, \quad (3.19)$$

siis eksisteerivad ka teist liiki joonintegraalid

$$\int_{AC} F dx + G dy \quad \text{ja} \quad \int_{CB} F dx + G dy. \quad (3.20)$$

- (f2) Kui funktsioonid  $F$  ja  $G$  tõkestatud kaarel  $AB$  ning eksisteerivad teist liiki joonintegraalid (3.20), siis eksisteerib ka teist liiki joonintegraal (3.19), kusjuures

$$\int_{AB} F dx + G dy = \int_{AC} F dx + G dy + \int_{CB} F dx + G dy.$$

**Märkus 3.3.** Väite (f) tõestus toetub lausele 3.1. Selle lause kasutamine võimaldaks lihtsustada ka väidete (c) ja (d) tõestusi.

LAUSE 3.3 TÕESTUS. Esitugu kaar  $AB$  parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B = (x(\beta), y(\beta))$ . Lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisi korral punktidega

$$\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.21)$$

tähistame  $A_j = (x(t_j), y(t_j))$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ ; iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x_j - x_{j-1}, \quad \Delta y_j := y_j - y_{j-1}$$

ning, fikseerides osakaarel  $A_{j-1}A_j$  mingi punkti  $B_j$ , s.t.  $B_j = (x(\tau_j), y(\tau_j))$ , kus  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$ , tähistame

$$\sigma := \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j. \quad (3.22)$$

(a). Olgu  $BA$  mingi kaar, mille jälg ühtib kaare  $AB$  jäljega ning mille poolt sellel jäljel määratud punktide järjestus ("jälje punktide läbimise järjekord") on täpselt vastupidine kaare  $AB$  poolt määratud järjestusele (muuhulgas, kaare  $BA$  alguspunkt on  $B$  ja lõpp-punkt  $A$ ). Siis funktsiooni  $F$  integraalsummad üle kaare  $BA$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele on parajasti miinusemärgiga integraalsummad (3.22) (PÕHJENDADA!). Märkusest 3.1 järeldub nüüd, et funktsiooni  $F$  integraalsummadel üle kaare  $BA$  projektsioonide järgi  $x$ -teljele eksisteerib piirväärtus parajasti siis, kui eksisteerib piirväärtus integraalsummadel (3.22), kusjuures need piirväärtused on vastandmärgilised (PÕHJENDADA!). Niisiis, integraal  $\int_{BA} F dx$  eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib  $\int_{AB} F dx$ , kusjuures  $\int_{BA} F dx = -\int_{AB} F dx$ .

Analoogiliselt arutledes saame, et integraal  $\int_{BA} G dy$  eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib  $\int_{AB} G dy$ , kusjuures  $\int_{BA} G dy = -\int_{AB} G dy$ .

Eelnevast järeldub, et integraal  $\int_{BA} F dx + G dy$  eksisteerib parajasti siis, kui eksisteerib integraal  $\int_{AB} F dx + G dy$ , kusjuures

$$\begin{aligned}\int_{BA} F dx + G dy &= \int_{BA} F dx + \int_{BA} G dy = -\int_{AB} F dx - \int_{AB} G dy \\ &= -\left(\int_{AB} F dx + \int_{AB} G dy\right) = -\int_{AB} F dx + G dy.\end{aligned}$$

(b). Kui kaar  $AB$  on risti  $x$ -teljega, siis kõik integraalsummad (3.22) on võrdsed arvuga 0 (sest iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $\Delta x_j = 0$ ), seega ka nende integraalsummade piirväärtus on 0, s.t. kehtib (3.14).

Juhtu, kus kaar  $AB$  on risti  $y$ -teljega, käsitletakse analoogiliselt.

(c). Tõestame ainult väite (c1). (Väide (c2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraal (3.15). Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Väite (c1) tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide  $B_1, \dots, B_n$  korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n c F(B_j) \Delta x_j - c I \right| = |c| \left| \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j - I \right| < \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $c \neq 0$ . Integraali (3.15) olemasolu tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n F(B_j) \Delta x_j - I \right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n c F(B_j) \Delta x_j - c I \right| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

(d). Tõestame ainult väite (d1). (Väide (d2) tõestatakse analoogiliselt.) Eksisteerigu teist liiki joonintegraalid (3.16). Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Väite (d1) tõestuseks piisab leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes vastavate osakaarte punktide  $B_1, \dots, B_n$

korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n (F_1(B_j) \pm F_2(B_j)) \Delta x_j - (I_1 \pm I_2) \right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n (F_1(B_j) \pm F_2(B_j)) \Delta x_j - (I_1 \pm I_2) \right| \\ &= \left| \left( \sum_{j=1}^n F_1(B_j) \Delta x_j - I_1 \right) \pm \left( \sum_{j=1}^n F_2(B_j) \Delta x_j - I_2 \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=1}^n F_1(B_j) \Delta x_j - I_1 \right| + \left| \sum_{j=1}^n F_2(B_j) \Delta x_j - I_2 \right|. \end{aligned}$$

Integraalide (3.16) olemasolu tõttu leiduvad reaalarvud  $\delta_1, \delta_2 > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_1 \implies \left| \sum_{j=1}^n F_1(B_j) \Delta x_j - I_1 \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta_2 \implies \left| \sum_{j=1}^n F_2(B_j) \Delta x_j - I_2 \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \min\{\delta_1, \delta_2\} =: \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n (F_1(B_j) \pm F_2(B_j)) \Delta x_j - (I_1 \pm I_2) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(e). Joonintegraali (3.18) olemasolu järeldub vahetult väidetest (c) ja (d) (PÕH-JENDADA!); seejuures (jällegi väidete (c) ja (d) põhjal)

$$\begin{aligned} & \int_{AB} (a_1 F_1 + a_2 F_2) dx + (b_1 G_1 + b_2 G_2) dy \\ &= \int_{AB} (a_1 F_1 + a_2 F_2) dx + \int_{AB} (b_1 G_1 + b_2 G_2) dy \\ &= \int_{AB} a_1 F_1 dx + \int_{AB} a_2 F_2 dx + \int_{AB} b_1 G_1 dy + \int_{AB} b_2 G_2 dy \\ &= a_1 \int_{AB} F_1 dx + a_2 \int_{AB} F_2 dx + b_1 \int_{AB} G_1 dy + b_2 \int_{AB} G_2 dy. \end{aligned}$$

(f). Olgu  $\gamma \in [\alpha, \beta]$  selline, et  $C = (x(\gamma), y(\gamma))$ . Siis kaared  $AC$  ja  $CB$  esituvad vastavalt parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \gamma] \quad \text{ja} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\gamma, \beta].$$

Tõestame väite ainult juhul, kus  $G = 0$ . Juhul, kus  $F = 0$ , tõestatakse väide analoogiliselt; väite kehtivusest juhtudel, kus vastavalt  $G = 0$  ja  $F = 0$ , järeldub selle väite kehtivus üldjuhul (PÕHJENDADA!).

Niisiis, eeldame järgnevas, et  $G = 0$ . Kõneldes integraalsummadest ja integraalsummade jadadest, mõistame me selle all alati integraalsummasid ja integraalsummade jadasid projektsioonide järgi  $x$ -teljele (selliste integraalsummade jada mõistet on selgitatud eespool jaotises 3.2).

(f1). Eksisteerigu teist liiki joonintegraal  $\int_{AB} F dx =: I$ . Tõestame ainult joonintegraali  $\int_{AC} F dx$  olemasolu (joonintegraali  $\int_{CB} F dx$  olemasolu tõestatakse analoogiliselt).

Kõigepealt näitame, et funktsiooni  $F$  mis tahes integraalsummade jada kaarel  $AC$  on tõkestatud. Oletame vastuväiteliselt, et funktsiooni  $F$  mingi integraalsummade jada  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  kaarel  $AC$  on tõkestamata. Joonintegraali  $\int_{AB} F dx = I$  olemasolu tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et (lõigu  $[\alpha, \beta]$  mis tahes jaotusviisi korral punktidega (3.21) ning mis tahes sellele jaotusviisile vastava integraalsumma (3.22) korral)

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |\sigma - I| < 1$$

ning seega

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies |\sigma| < \max\{|I - 1|, |I + 1|\} =: \kappa. \quad (3.23)$$

Fikseerime vabalt funktsiooni  $F$  mingi niisuguse integraalsumma  $\rho'$  kaarel  $CB$ , mis vastab lõigu  $[\gamma, \beta]$  mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui  $\delta$ . Kuna integraalsummade jada  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  on tõkestamata, siis leidub funktsiooni  $F$  integraalsumma  $\rho$  kaarel  $AC$ , mis vastab lõigu  $[\alpha, \gamma]$  mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui  $\delta$ , nii, et

$$|\rho| > \kappa + |\rho'|$$

(PÕHJENDADA!). Nüüd  $\sigma := \rho + \rho'$  on funktsiooni  $F$  integraalsumma kaarel  $AB$ , mis vastab lõigu  $[\alpha, \beta]$  mingile jaotusviisile, mille osalõikude maksimaalne pikkus on väiksem kui  $\delta$  (PÕHJENDADA!), seega implikatsiooni (3.23) tõttu  $|\sigma| < \kappa$ . Teiselt poolt,

$$|\sigma| = |\rho + \rho'| \geq |\rho| - |\rho'| > \kappa + |\rho'| - |\rho'| = \kappa,$$

vastuolu. Niisiis, funktsiooni  $F$  iga integraalsummade jada kaarel  $AC$  on tõkestatud.

Kuna Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal saab igast tõkestatud arvjadast välja eraldada koonduva osajada, siis leidub koonduv funktsiooni  $F$  integraalsummade jada  $(v_m)_{m=1}^\infty$  kaarel  $AC$ . Tähistame  $J := \lim_{m \rightarrow \infty} v_m$ .

Olgu  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  suvaline funktsiooni  $F$  integraalsummade jada kaarel  $AC$ . Lause 3.1 põhjal piisab joonintegraali  $\int_{AC} F(x, y) dx$  olemasoluks näidata, et  $\rho_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J$ . Selleks fikseerime vabalt funktsiooni  $F$  mingi integraalsummade jada  $(\rho'_m)_{m=1}^\infty$  kaarel  $CB$ . Kuna  $(\rho_m + \rho'_m)_{m=1}^\infty$  ja  $(v_m + \rho'_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $F$  integraalsummade jadad kaarel  $AB$  (PÕHJENDADA!), siis lause 3.1 põhjal

$$\rho_m + \rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I \quad \text{ja} \quad v_m + \rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I$$

ning järelikult

$$\rho_m = (\rho_m + \rho'_m) - (v_m + \rho'_m) + v_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} I - I + J = J,$$

nagu soovitud.

(f2). Olgu funktsioon  $F$  tõkestatud kaarel  $AB$ , s.t. leidub reaalarv  $M \geq 0$  nii, et

$$|F(x, y)| \leq M \quad \text{iga punkti } (x, y) \text{ korral kaarelt } AB,$$

ning eksisteerigu teist liiki joonintegraalid  $\int_{AC} F dx =: J_1$  ja  $\int_{CB} F dx =: J_2$ . Olgu  $(\sigma_m)_{m=1}^\infty$  suvaline funktsiooni  $F$  integraalsummade jada kaarel  $AB$ , s.t. kehtivad lau-  
sele 3.1 eelnevad tingimused (1) ja (2). Teist liiki joonintegraali  $\int_{AB} F dx$  olemasoluks  
ja võrduseks

$$\int_{AB} F dx = \int_{AC} F dx + \int_{CB} F dx$$

piisab lause 3.1 põhjal näidata, et  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1 + J_2$ .

Tähistame iga  $m \in \mathbb{N}$  korral

$$j_m := \min\{j \in \{1, \dots, n_m\} : \gamma \leq t_j^m\}$$

(siis  $t_{j_m-1} < \gamma \leq t_{j_m}$ ) ning

$$\Delta x_0^m := x(\gamma) - x(t_{j_m-1}), \quad \rho_m := \sum_{j=1}^{j_m-1} F(B_j^m) \Delta x_j^m + F(C) \Delta x_0^m,$$

$$\Delta \hat{x}_0^m := x(t_{j_m}) - x(\gamma), \quad \rho'_m := F(C) \Delta \hat{x}_0^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} F(B_j^m) \Delta x_j^m.$$

Siis  $(\rho_m)_{m=1}^\infty$  ja  $(\rho'_m)_{m=1}^\infty$  on funktsiooni  $F$  integraalsummade jadad vastavalt kaartel  
 $AC$  ja  $CB$  (PÕHJENDADA!), seega lause 2.1 põhjal  $\rho_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1$  ja  $\rho'_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_2$ . Kuna

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sum_{j=1}^{n_m} F(B_j^m) \Delta x_j^m = \sum_{j=1}^{j_m-1} F(B_j^m) \Delta x_j^m + \sum_{j=j_m+1}^{n_m} F(B_j^m) \Delta x_j^m + F(B_{j_m}^m) \Delta x_{j_m}^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + F(B_{j_m}^m) \Delta x_{j_m}^m - F(C) \Delta x_0^m - F(C) \Delta \hat{x}_0^m \\ &= \rho_m + \rho'_m + (F(B_{j_m}^m) - F(C)) \Delta x_{j_m}^m \end{aligned}$$

(sest  $\Delta x_0^m + \Delta \hat{x}_0^m = \Delta x_{j_m}^m$ ), siis jääb soovitud koonduvuseks  $\sigma_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} J_1 + J_2$   
näidata, et

$$(F(B_{j_m}^m) - F(C)) \Delta x_{j_m}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (3.24)$$

Kuna

$$|(F(B_{j_m}^m) - F(C)) \Delta x_{j_m}^m| \leq (|F(B_{j_m}^m)| + |F(C)|) \Delta x_{j_m}^m \leq 2M \Delta x_{j_m}^m,$$

siis piisab koonduvuseks (3.24) näidata, et  $\Delta x_{j_m}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ . See järeldub Cantori  
teoreemist lõiguse pideva funktsiooni ühtlasest pidevusest (PÕHJENDADA!).  $\square$

Olgu  $L$  mingi sirgestuva lihtsa kinnise (tasandilise) kaare jälg  $xy$ -tasandil ning olgu sellel jäljel  $L$  määratud pidevad funktsioonid  $F$  ja  $G$ . Siis kirjaviisist

$$\int_L F dx + G dy \quad (3.25)$$

ei selgu, milline jälje  $L$  punkt tuleb teist liiki joonintegraali (3.25) leidmisel valida kaare alguspunktiks (ja ühtlasi lõpp-punktiks) ning millises suunas tuleb see jälg läbida (s.t. milline on on selle jälje “punktide läbimise järjekord”). Jälje  $L$  ühesuguse läbimise suuna puhul ei sõltu integraal (3.25) kaare alguspunkti valikust (see järeldub lausest 3.3, (f), ja märkusest 3.2 (PÕHJENDADA!)), küll aga sõltub see integraal jälje läbimise suunast – jälje läbimisel vastassuunas muutub selle integraali märk (vt. lauset 3.3, (a)).

NB! Joonis?

Lihtsa kinnise kaare jälje läbimise suunda, milles liikudes selle jäljega piiratud tasandi osa jääb vasakule, nimetatakse *positiivseks suunaks*. (Piltlikult väljendudes, positiivne suund on kellaosuti liikumise vastassuund.)

On tavaks leppida kokku järgmises: kui  $L$  on sirgestuva lihtsa kinnise kaare jälg, siis kirjaviisi (3.25) puhul mõistetakse jälje  $L$  läbimise suunana positiivset suunda, s.t. selle integraali arvutamisel tuleb leida vastav teist liiki joonintegraal üle niisuguse lihtsa kinnise kaare  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mille jälg on  $L$  ning mille puhul parameetri  $t \in [\alpha, \beta]$  kasvades liigub kaare punkt  $\Phi(t)$  mööda kaart positiivses suunas.

Kui on vaja märkida integraali üle lihtsa kinnise kaare (mille jälg on  $L$ ) negatiivses suunas (s.t. kellaosuti liikumise vastassuunas), kirjutatakse integraali (3.25) ette miinusemärk.

### 3.4. Teist liiki joonintegraali arvutamine

**Teoreem 3.4.** Olgu kahe muutuva funktsioon  $u = f(P) = f(x, y)$  pidev (tasandiliselt) kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel), mis esitub antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (3.26)$$

kus funktsioonidel (3.26) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis ning

$$A = (x(\alpha), y(\alpha)) \quad \text{ja} \quad B = (x(\beta), y(\beta)).$$

Siis eksisteerivad teist liiki joonintegraalid funktsioonist  $f$  üle kaare  $AB$  projektsioonide järgi nii  $x$ - kui ka  $y$ -teljele, kusjuures

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) x'(t) dt \quad (3.27)$$

ja

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) y'(t) dt. \quad (3.28)$$

TÕESTUS. Tõestame ainult valemi (3.27) (valem (3.28) tõestatakse analoogiliselt). Tähistame

$$I := \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) x'(t) dt. \quad (3.29)$$

Fikseerides vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ , piisab valemi (3.27) tõestuseks leida reaalarv  $\delta > 0$  nii, et, jaotades lõigu  $[\alpha, \beta]$  suvaliselt osalõikudeks punktidega  $\alpha =: t_0 < t_1 < \dots < t_n := \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ning fikseerides iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral suvaliselt punkti  $\tau_j \in [t_{j-1}, t_j]$  ja tähistades

$$\Delta t_j := t_j - t_{j-1}, \quad \Delta x_j := x(t_j) - x(t_{j-1}), \quad B_j := (x(\tau_j), y(\tau_j)),$$

kehtib implikatsioon

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| < \varepsilon.$$

Selleks märgime, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral Newton–Leibnizi valemi põhjal

$$\Delta x_j = x(t_j) - x(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t) dt, \quad (3.30)$$

seega

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| &= \left| \sum_{j=1}^n f(x(\tau_j), y(\tau_j)) \int_{t_{j-1}}^{t_j} x'(t) dt - \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) x'(t) dt \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(\tau_j), y(\tau_j)) x'(t) dt - \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x(t), y(t)) x'(t) dt \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f(x(\tau_j), y(\tau_j)) - f(x(t), y(t))| |x'(t)| dt. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Kuna tuletisfunktsioon  $x'$  on pidev lõigus  $[\alpha, \beta]$ , siis Weierstrassi esimese teoreemi põhjal ta on ka tõkestatud selles lõigus, s.t. leidub  $M > 0$  nii, et

$$|x'(t)| \leq M \quad \text{iga } t \in [\alpha, \beta] \text{ korral.}$$

Lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  on Cantori teoreemi põhjal ühtlaselt pidev selles lõigus, seega leidub  $\delta > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], |t - t'| < \delta \implies |f(x(t), y(t)) - f(x(t'), y(t'))| < \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)}.$$

Kui nüüd  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| < \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{\varepsilon}{M(\beta - \alpha)} M dt = \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \sum_{j=1}^n \Delta t_j = \varepsilon.$$

□

**Märkus 3.4.** Teoreemi 3.4 saab tõestada ka ilma Cantori teoreemi kasutamata. Tõepoolest, summat valemireas (3.31) saab hinnata ka teisiti. Nimelt, tähistades

$$M_j := \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f(x(t), y(t)), \quad m_j := \inf_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f(x(t), y(t)), \quad j = 1, \dots, n$$

(need supreemumid ja infimumid eksisteerivad, sest lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  on Weierstrassi teoreemi põhjal tõkestatud selles lõigus ning seega tõkestatud ka igas osalõigus  $[t_{j-1}, t_j]$ ), kehtib

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| &\leq \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} (M_j - m_j) M dt = M \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} dt \\ &= M \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta t_j. \end{aligned}$$

Kuna lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev funktsioon  $t \mapsto f(x(t), y(t))$  on integreeruv selles lõigus, siis leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et

$$\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta \implies \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) \Delta t_j < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Niisiis, kui  $\max_{1 \leq j \leq n} \Delta t_j < \delta$ , siis

$$\left| \sum_{j=1}^n f(B_j) \Delta x_j - I \right| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

**Märkus 3.5.** Teoreem 3.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (3.26) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  nõrgema eeldusega, et funktsioonidel (3.26) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonidel  $x'$  ja  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. See järelneb lausest 3.3, (f) **(PÕHJENDADA!)**.

**Märkus 3.6.** Teoreem 3.4 jääb kehtima, kui seal asendada eeldus funktsioonidel (3.26) pideva tuletise olemasolust lõigus  $[\alpha, \beta]$  (nõrgema) eeldusega nendel funktsioonidel integreeruva tuletise olemasolust selles lõigus (see eeldus on nõrgem ka märkuses 3.5 käsitletud teoreemi 3.4 eelduse nõrgendusest).

Tõepoolest, tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  pidevust kasutab märkuses 3.4 antud tõestusskeem vaid integraalide (3.29) ja  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) y'(t) dt$  olemasolu ning valemite (3.30) ja  $y(t_j) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} y'(t) dt$  põhjendamiseks. Need integraalid eksisteerivad ning valemid kehtivad ka eeldusel, et tuletisfunktsioonid  $x'$  ja  $y'$  on integreeruvad. (Vahetult teoreemi 3.4 sõnastusele järgnev tõestus kasutab tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  pidevust lisaks veel nende (tuletis)funktsioonide tõkestatuse põhjendamiseks, aga ka nende funktsioonide tõkestatus järelneb nende integreeruvusest.)

**NB!** Valemite (3.30) ja  $y(t_j) - y(t_{j-1}) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} y'(t) dt$  põhjendamiseks on tegelikult vaja vaid tuletisfunktsioonide  $x'$  ja  $y'$  integreeruvust.

Järgnev järelendus teoreemist 3.4 annab valemid teist liiki (tasandilise) joonintegraali arvutamiseks juhul, kui kaar, üle mille integreeritakse, on antud võrrandiga  $y = y(x)$ ,  $x = x(y)$  või polaarkoordinaatides.

**Järeldus 3.5.** Olgu kahe muutuva funktsioon  $u = f(x, y)$  pidev tasandilisel kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel).

(a) Olgu kaar  $AB$  esitatud võrrandiga

$$y = y(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.32)$$

kus

$$A = (a, y(a)) \quad \text{ja} \quad B = (b, y(b))$$

ning funktsioonil (3.32) eksisteerib lõigus  $[a, b]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $y'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx \quad \text{ja} \quad \int_{AB} f(x, y) dy = \int_a^b f(x, y(x)) y'(x) dx.$$

(b) Olgu kaar  $AB$  esitatud võrrandiga

$$x = x(y), \quad y \in [c, d], \quad (3.33)$$

kus

$$A = (x(c), c) \quad \text{ja} \quad B = (x(d), d).$$

ning funktsioonil (3.33) eksisteerib lõigus  $[c, d]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $x'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_c^d f(x(y), y) x'(y) dy \quad \text{ja} \quad \int_{AB} f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy.$$

(c) Olgu kaar  $AB$  esitatud polaarkoordinaatides võrrandiga

$$r = r(\phi), \quad \phi \in [\alpha, \beta], \quad (3.34)$$

kus (ristkoordinaatides)

$$A = (r(\alpha) \cos \alpha, r(\alpha) \sin \alpha) \quad \text{ja} \quad B = (r(\beta) \cos \beta, r(\beta) \sin \beta)$$

(s.t. polaarkoordinaatides  $A = (r(\alpha), \alpha)$  ja  $B = (r(\beta), \beta)$ ) ning funktsioonil (3.34) eksisteerib lõigus  $[\alpha, \beta]$  pidev tuletis, välja arvatud, võib-olla, lõplikus arvus punktides, milles tuletisfunktsioonil  $r'$  eksisteerivad lõplikud ühepoolsed piirväärtused. Siis

$$\int_{AB} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) (r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi) d\phi$$

ja

$$\int_{AB} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\phi) \cos \phi, r(\phi) \sin \phi) (r'(\phi) \sin \phi + r(\phi) \cos \phi) d\phi.$$

TÕESTUS. Järelduse tõestus on sarnane järelduse 1.5 tõestusele (seejuures toetatakse teoreemi 1.4 asemel teoreemile 3.4). Seepärast jätame tõestamise lugejale.  $\square$

### 3.5. Greeni valem

Meenutame, et *piirkonnaks* ruumis  $\mathbb{R}^m$  nimetatakse lahtise sidusa hulga ja selle hulga raja mingi alamhulga ühendit. Seejuures *lahtiseks piirkonnaks* nimetatakse lahtist sidusat hulka (sel juhul “selle hulga raja mingi alamhulk” piirkonna definitsioonis on tühi hulk) ning *kinniseks piirkonnaks* nimetatakse lahtise sidusa hulga sulundit (sel juhul “selle hulga raja mingi alamhulk” piirkonna definitsioonis on kogu raja).

**Teoreem 3.6** (Greeni valem). *Eksisteerigu pidevatel kahe muutuva funktsioonidel  $u = F(x, y)$  ja  $v = G(x, y)$  pidevad osatuletised  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ja  $\frac{\partial G}{\partial x}$  tõkestatud kinnises piirkonnas  $\mathcal{D}$ , mille rajajoon  $\partial\mathcal{D}$  on tükiti sile lihtne kinnine kaar (või, täpsemalt, raja  $\partial\mathcal{D}$  on mingi tükiti sileda lihtsa kinnise kaare jälg). Siis*

$$\iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F dx + G dy. \quad (3.35)$$

**Märkus 3.7.** Paneme tähele, et mõlemad integraalid valemis (3.35) eksisteerivad.

Tõepoolest, hulga  $\mathcal{D}$  rajajoon on tükiti sile ning funktsioonid  $F$  ja  $G$  on pidevad sellel rajajoonel (või, täpsemalt, selle joone jäljel), seega võrduse (3.35) paremal poolel olev integraal eksisteerib teoreemi 3.4 põhjal. (Teine võimalus selle integraali olemasolu põhjendamiseks on märkida, et teoreemi 1.4 põhjal on hulga  $\mathcal{D}$  rajajoon sirgestuv ning seega eksisteerib võrduse (3.35) paremal poolel olev integraal teoreemi 3.2 põhjal.)

Teiselt poolt, kuna hulga  $\mathcal{D}$  rajajoon on teoreemi 1.4 põhjal sirgestuv, siis teoreemi 1.6 põhjal on hulga  $\mathcal{D}$  raja nullmõõduga hulk ning seega teoreemi V.2.5 põhjal on hulk  $\mathcal{D}$  mõõtu. Võrduse (3.35) vasakul poolel oleva integraali olemasolu järeldub nüüd teoreemist V.2.8.

**Märkus 3.8.** Teoreem 3.6 on tähelepanuväärne järgmises mõttes: funktsioonide  $F$  ja  $G$  käitumine piirkonna  $\mathcal{D}$  rajajoonel annab meile piisavalt informatsiooni funktsiooni  $\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$  käitumise kohta piirkonnas  $\mathcal{D}$ , et me saaksime leida integraali sellest funktsioonist üle hulga  $\mathcal{D}$ .

Teoreemile 3.6 (Greeni valemile) toetub kompleksmuutuva funktsioonide teoorias olulist rolli etendava **Cauchy (integraal)valemi** tõestus.

Tõestame Greeni valemist ainult järgnevas lauses toodud erijuhud.

**Lause 3.7.** *Kehtigu teoreemi 3.6 eeldused.*

(a) *Olgu*

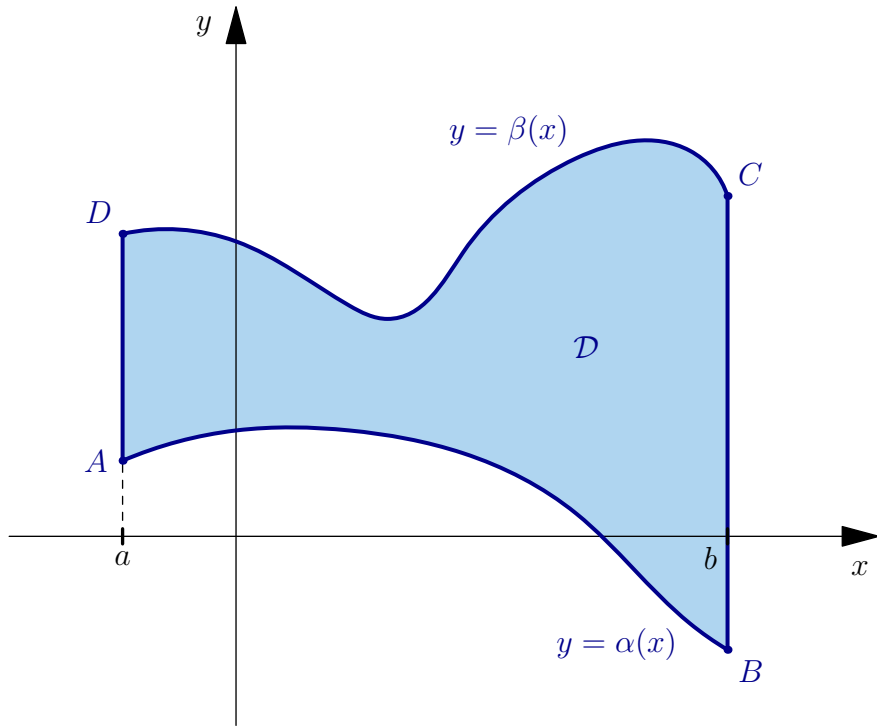
$$\mathcal{D} := \{(x, y) : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\},$$

*(s.t.  $\mathcal{D}$  on kõvertrapets; vt. joonist 3.2), kus funktsioonidel*

$$\alpha = \alpha(x) \quad \text{ja} \quad \beta = \beta(x), \quad x \in [a, b],$$

*eksisteerib lõigus  $[a, b]$  pidev tuletis. Siis*

$$-\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F dx. \quad (3.36)$$



JOONIS 3.2. Joonisel on kõvertrapets  $\mathcal{D}$  värvitud helesiniseks; selle kõvertrapetsi rajajoon (mis samuti sisaldub selles kõvertrapetsis) on kujutatud tumesinisega.

(b) Olgu

$$\mathcal{D} := \{(x, y) : y \in [c, d], \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

kus funktsioonidel

$$\gamma = \gamma(y) \quad \text{ja} \quad \delta = \delta(y), \quad y \in [c, d],$$

eksisteerib lõigus  $[c, d]$  pidev tuletis. Siis

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x} dx dy = \int_{\partial \mathcal{D}} G dy. \quad (3.37)$$

TÕESTUS. Tõestame ainult väite (a). (Väide (b) tõestatakse analoogiliselt.)

Tähistame

$$A := (a, \alpha(a)), \quad B := (b, \alpha(b)), \quad C := (b, \beta(b)), \quad D := (a, \beta(a))$$

(vt. joonist 3.2). Siis

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left( F(x, \beta(x)) - F(x, \alpha(x)) \right) dx; \end{aligned}$$

ning järelikult

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{D}} F dx &= \int_{AB} F dx + \int_{BC} F dx + \int_{CD} F dx + \int_{DA} F dx = \int_{AB} F dx + \int_{CD} F dx \\ &= \int_{AB} F dx - \int_{DC} F dx = \int_a^b F(x, \alpha(x)) dx - \int_a^b F(x, \beta(x)) dx \\ &= - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy,\end{aligned}$$

nagu soovitud. □

**Märkus 3.9.** Valem (3.36) jääb kehtima, kui

- (1) piirkond  $\mathcal{D}$  esitub lõpliku ühendina  $\mathcal{D} = \bigcup_{j=1}^n \mathcal{D}_j$ , kus  $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$  on paarikaupa lõikumatus sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.7, (a), eeldusi kõvertrapetsi  $\mathcal{D}$  kohta.

Tõepoolest, eelduse (1) kehtides lause 3.7, (a), põhjal

$$\begin{aligned}- \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy &= - \sum_{j=1}^n \iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^n - \iint_{\mathcal{D}_j} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\mathcal{D}_j} F dx \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} F dx.\end{aligned}$$

Siin viimane võrdus kehtib, sest summas  $\sum_{j=1}^n \int_{\partial\mathcal{D}_j} F dx$  esinevad integraalid üle rajajoonte  $\partial\mathcal{D}_j$  niisuguste osade, mis pole rajajoone  $\partial\mathcal{D}$  osad, kaks korda, kusjuures ühel juhul läbitakse selline osa ühes suunas ja teisel juhul vastupidises suunas; seega koonduvad summas  $\sum_{j=1}^n \int_{\partial\mathcal{D}_j} F dx$  integraalid üle rajajoonte  $\partial\mathcal{D}_j$  osade, mis pole rajajoone  $\partial\mathcal{D}$  osad, paarikaupa välja.

Analoogiliselt saab näidata, et valem (3.37) jääb kehtima, kui

- (2) piirkond  $\mathcal{D}$  esitub lõpliku ühendina  $\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{D}'_i$ , kus  $\mathcal{D}'_1, \dots, \mathcal{D}'_m$  on paarikaupa lõikumatus sisemustega kõvertrapetsid, mis rahuldavad lause 3.7, (b), eeldusi kõvertrapetsi  $\mathcal{D}$  kohta.

Eelnevast järeldub, et kui samaaegselt kehtivad eeldused (1) ja (2), siis kehtib Greeni valem (3.35), sest niisugusel juhul

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x} dx dy - \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \int_{\partial\mathcal{D}} G dy + \int_{\partial\mathcal{D}} F dx \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} F dx + G dy.\end{aligned}$$

**NB!** Joonis?

### 3.6. Teist liiki joonintegraali sõltumatus integreerimistest

Olgu funktsioonid  $F$  ja  $G$  pidevad piirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Vaatleme teist liiki joonintegraali

$$\int_{AB} F dx + G dy \quad (3.38)$$

üle piirkonnas  $\mathcal{D}$  sisalduva tükiti sileda kaare  $AB$ . Kui mis tahes piirkonnas  $\mathcal{D}$  sisalduvate punkte  $A$  ja  $B$  ühendavate tükiti siledate kaartide  $L_1$  ja  $L_2$  korral, mille alguspunkt on  $A$  ja lõpp-punkt  $B$  (vt. **joonist ???**), kehtib võrdus

$$\int_{L_1} F dx + G dy = \int_{L_2} F dx + G dy,$$

siis öeldakse, et teist liiki joonintegraal (3.38) *ei sõltu integreerimistest* piirkonnas  $\mathcal{D}$ . Sellisel juhul kasutatakse joonintegraali (3.38) märkimiseks sümbolit

$$\int_A^B F dx + G dy :$$

see integraal sõltub integreerimistee alguspunktist  $A$  ja lõpp-punktist  $B$ , kuid mitte neid punkte ühendavast integreerimistest.

**NB!** "Integreerimistest" mõistet tutvustatakse lk. 263.

**Märkus 3.10.** Heine–Boreli lemma (vt. **??**) abil saab näidata, et kui piirkond  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  on lahtine, siis mis tahes punktide  $A, B \in \mathcal{D}$  korral leidub neid punkte ühendav (lõplikust arvust lülidest koosnev) lihtne murdjoon, mis tervikuna sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ . Esitame selle väite tõestuse skeemi.

**NB!** Mis on murdjoon? Mis on murdjoone lülid? Eelnevas on olnud juttu kaare kõõlmurdjoonest ja selle lülidest (vt. jaotise 1.3 algust, lk. 232).

Olgu  $A, B \in \mathcal{D}$ ,  $A \neq B$ . Siis hulga  $\mathcal{D}$  sidususe tõttu leidub punkte  $A$  ja  $B$  ühendav kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ . Esitugu mingi selline kaar  $AB$  parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (3.39)$$

kus  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B = (x(\beta), y(\beta))$ . Iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral tähistame  $C_t := (x(t), y(t))$  (s.t.  $C_t$  on kaare  $AB$  punkt, mis vastab parameetri väärtusele  $t$ ); siis hulga  $\mathcal{D}$  lahtisuse tõttu leidub reaalarv  $r_t > 0$  nii, et  $B(C_t, r_t) \subset \mathcal{D}$  (sümbol  $B(C_t, r_t)$  tähistab lahtist kera (ehk siis vaadeldaval kahedimensionaalsel juhul lahtist ringi) keskpunktiga  $C_t$  ja raadiusega  $r_t$ ). Funktsioonide (3.39) pidevuse tõttu leidub iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral reaalarv  $\delta_t > 0$  nii, et

$$t' \in [\alpha, \beta], \quad t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \implies C_{t'} \in B(C_t, r_t)$$

**(PÕHJENDADA!)**. Nüüd hulk  $\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  on lõigu  $[\alpha, \beta]$  lahtine kate, seega Heine–Boreli lemma põhjal leidub tal lõplik alamkate, s.t. leiduvad  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [\alpha, \beta]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) nii, et  $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{j=0}^n U_j$ , kus  $U_j := (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j})$ . Üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , kusjuures iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $U_{j-1} \cap U_j \neq \emptyset$  **(PÕHJENDADA!)**. Siit järeldub, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}}) \cap B(C_{t_j}, r_{t_j}) \neq \emptyset$  **(PÕHJENDADA!)** ning seega sirgloik  $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$  sisaldub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  **(PÕHJENDADA!)**. Niisiis, murdjoon  $C_{t_0}C_{t_1} \dots C_{t_n}$  sisaldub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$ . Arvestades, et  $C_{t_0} = A$  ja  $C_{t_n} = B$ , jääb väite tõestuseks näidata, et mis tahes punkte  $A$  ja  $B$  ühendava (lõplikust arvust lülidest koosneva) murdjoone  $\ell$  korral leidub neid punkte  $A$  ja  $B$  ühendav lihtne murdjoon  $\ell'$ , mis punktihulgana on murdjoone  $\ell$  alamhulk:  $\ell' \subset \ell$ . Selle väite saab lihtsasti tõestada matemaatilise induktsiooni abil murdjoone  $\ell$  lülide arvu  $n$  järgi **(TEHA SEE INDUKTSIOON LÄBI!)**.

Selles jaotises anname mõned tarvilikud ja piisavad tingimused teist liiki joonintegraalide sõltumatuseks integreerimisteest. Selleks vajame me *ühelisisidusa* (tasandilise) piirkonna mõistet.

**Definitsioon 3.2.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  on *ühelisisidus*, kui ta on sidus ning mis tahes selles hulgas sisalduva lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa sisaldub selles hulgas.



JOONIS 3.3. Joonisel vasakul helesinisega kujutatud hulk on ühelisisidus – see hulk on sidus ning mis tahes selles hulgas sisalduva lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa sisaldub selles hulgas. Joonisel paremal helesinisega kujutatud sidus hulk ei ole ühelisisidus – selles hulgas sisalduva lihtsa kinnise kaarega  $L$  piiratud tasandi osa ei sisaldu selles hulgas.

**NB!** Must-valge televisiooni vaatad siin neid hulki helesinisena ei näe!

**Märkus 3.11.** Eelnev ühelisisidususe definitsioon ei ole matemaatiliselt range – formaalselt pole selge, mida mõista “lihtsa kinnise kaarega piiratud tasandi osa” all. Esitame matemaatiliselt range definitsiooni.

**Definitsioon 3.3.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  on *ühelisisidus*, kui mis tahes selles hulgas sisalduv lihtne kinnine kaar on *pidevalt deformeeritav mingiks hulga  $\mathcal{D}$  punktiks*, s.t. mis tahes pideva funktsiooni  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{D}$  korral, kus  $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$ , leiduvad pidev funktsioon  $\Gamma: [0, 1] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{D}$  ja punkt  $P \in \mathcal{D}$  nii, et

- $\Gamma(0, t) = \Phi(t)$  iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral;
- $\Gamma(s, \alpha) = \Gamma(s, \beta)$  iga  $s \in [0, 1]$  korral;
- $\Gamma(1, t) = P$  iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral.

**Teoreem 3.8.** Olgu kahe muutuja funktsioonid  $u = F(x, y)$  ja  $v = G(x, y)$  pidevad lahtises piirkonnas  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- mis tahes punktide  $A, B \in \mathcal{D}$  korral integraal (3.38) ei sõltu integreerimisteest piirkonnas  $\mathcal{D}$ ;
- integraalilune avaldis  $F dx + G dy$  on täpne diferentsiaal, s.t. leidub piirkonnas  $\mathcal{D}$  diferentseeruv kahe muutuja funktsioon  $U = U(x, y)$ , mille täis-diferentsiaal on see avaldis:

$$dU = F dx + G dy. \quad (3.40)$$

Seejuures kehtib “Newton–Leibnizi valem”

$$\int_{AB} F dx + G dy = U(B) - U(A). \quad (3.41)$$

Kui piirkond  $\mathcal{D}$  on ühelisidus ning funktsioonidel  $F$  ja  $G$  eksisteerivad selles piirkonnas pidevad osatuletised  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ja  $\frac{\partial G}{\partial x}$ , siis tingimused (i) ja (ii) on samaväärsed tingimusega

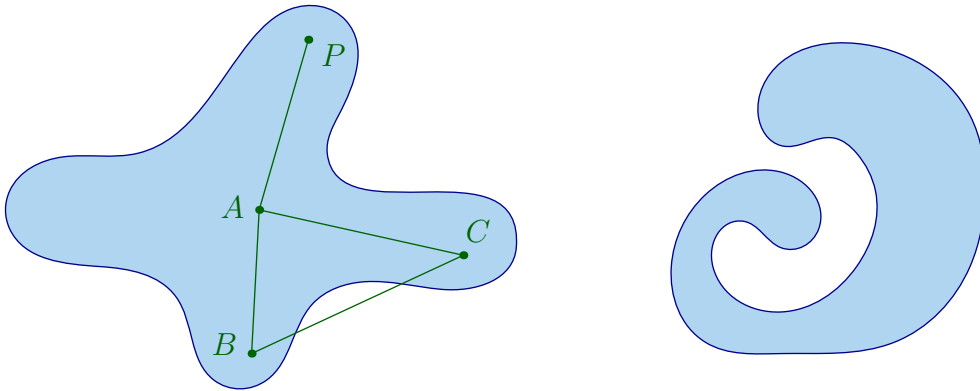
(iii) integraalilune avaldis  $F dx + G dy$  on kinnine diferentsiaal, s.t. piirkonnas  $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}. \quad (3.42)$$

**Märkus 3.12.** Nagu järgnevast tõestusest näeme, kehtib teoreemi 3.8 implikatsioon (ii) $\Rightarrow$ (iii) (ning seega ka implikatsioon (i) $\Rightarrow$ (iii)) ka ilma eelduseta piirkonna  $\mathcal{D}$  ühelisiduse kohta.

Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii) $\Rightarrow$ (ii) (või (iii) $\Rightarrow$ (i)) tõestus üldjuhul on käesoleva kursuse jaoks liiga keeruline. Seepärast piirdume me selle implikatsiooni tõestusega teataval erijuhul – tähekujuliste piirkondade juhul – mis hõlmab olulisemaid praktikas ettetulevaid ühelisidusaid piirkondi – muuhulgas ka näiteks kumeraid piirkondi.

**Definitsioon 3.4.** Öeldakse, et hulk  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  on tähekujuline, kui leidub punkt  $A \in \mathcal{D}$  nii, et mis tahes punkti  $B \in \mathcal{D}$  korral punkte  $A$  ja  $B$  ühendav sirglõik sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ .



**JOONIS 3.4.** Joonisel vasakul helesinisega kujutatud hulk on tähekujuline – selle hulga punkti  $A$  selle hulga mis tahes punktiga  $P$  ühendav sirglõik sisaldub selles hulgas. Samas see hulk ei ole kumer – selle hulga punkte  $B$  ja  $C$  ühendav sirglõik ei sisaldu selles hulgas. Joonisel paremal helesinisega kujutatud hulk ei ole tähekujuline – selles hulgas ei leitu definitsiooni 3.4 tingimust rahuldavat punkti  $A$ .

**NB!** Must-valge televisiooni vaatajad siin neid hulki helesinisena ei näe!

TEOREEMI 3.8 TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Olgu mis tahes punktide  $A, B \in \mathcal{D}$  korral integraal (3.38) sõltumatu integreerimistest. Fikseerime vabalt punkti  $A \in \mathcal{D}$  ja defineerime piirkonnas  $\mathcal{D}$  kahe muutuja funktsiooni  $u = U(B) = U(x, y)$  võrdusega

$$U(B) = \int_A^B F dx + G dy, \quad B \in \mathcal{D}$$

(seejuures me loeme  $U(A) = 0$ ). Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et piirkonnas  $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G.$$

Tõestame neist **samasustest** vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt punkti  $B := (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Me peame näitama, et

$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x_0, y_0).$$

Märgime, et piirkonna  $\mathcal{D}$  lahtisuse tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et  $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$ ; niisiis, kui  $|h| < \delta$ , siis punkte  $B = (x_0, y_0)$  ja  $C := (x_0 + h, y_0)$  ühendav sirglõik  $BC$  sisaldub piirkonnas  $\mathcal{D}$ . Valides integraalis  $\int_A^C F dx + G dy$  integreerimisteeks kaare, mis on saadud vabalt valitud (punkte  $A$  ja  $B$  ühendava ja piirkonnas  $\mathcal{D}$  sisalduva) tükiti sileda kaare  $AB$  ja sirglõigu  $BC$  ühendamisel (selliseid tükiti siledaid kaari  $AB$  leidub – vt. märkust 3.10),

$$\begin{aligned} U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) &= U(C) - U(B) = \int_A^C F dx + G dy - \int_A^B F dx + G dy \\ &= \int_A^B F dx + G dy + \int_B^C F dx + G dy - \int_A^B F dx + G dy \\ &= \int_B^C F dx + G dy = \int_B^C F dx = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x, y_0) dx = F(\xi_h, y_0) h, \end{aligned}$$

kus punkt  $\xi_h$  paikneb punktide  $x_0$  ja  $x_0 + h$  vahel (sellise punkti  $\xi_h$  olemasolu järel­dub integraalarvutuse keskväärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et  $\xi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0$ , funktsiooni  $F$  pidevuse tõttu

$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} = F(\xi_h, y_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x_0, y_0),$$

nagu soovitud.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Leidugu piirkonnas  $\mathcal{D}$  diferentseeruv kahe muutuja funktsioon  $u = U(x, y)$ , mis rahuldab tingimust (3.40), s.t.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G.$$

Olgu piirkonna  $\mathcal{D}$  punkte  $A$  ja  $B$  ühendav (piirkonnas  $\mathcal{D}$  sisalduv) tükiti sile kaar antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

kus

$$(x(\alpha), y(\alpha)) = A \quad \text{ja} \quad (x(\beta), y(\beta)) = B.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et kehtib võrdus (3.41). Veendume selles:

$$\begin{aligned} \int_{AB} F dx + G dy &= \int_{AB} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{\partial U}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} U(x(t), y(t)) dt \\ &\stackrel{(*)}{=} U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) \\ &= U(B) - U(A), \end{aligned}$$

nagu soovitud (siin võrdus  $(*)$  kehtib Newton–Leibnizi valemi põhjal).

Eeldame nüüd täiendavalt, et funktsioonidel  $F$  ja  $G$  eksisteerivad piirkonnas  $\mathcal{D}$  pidevad osatuletised  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ja  $\frac{\partial G}{\partial x}$ .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Kehtigu (ii). Siis piirkonnas  $\mathcal{D}$

$$F = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{ja} \quad G = \frac{\partial U}{\partial y}$$

ning järelikult

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Kuna osatuletised  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ja  $\frac{\partial G}{\partial x}$  on pidevad piirkonnas  $\mathcal{D}$ , siis teist järku segaatuletised  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$  ja  $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  on pidevad piirkonnas  $\mathcal{D}$ ; järelikult teoreemi II.3.4 põhjal  $\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$  piirkonnas  $\mathcal{D}$ ; niisiis  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$  piirkonnas  $\mathcal{D}$ , nagu soovitud.

**NB!** \*Ülesanne.  
Põhjendada, et tähekujuline hulk on ühelisus.

Eeldame nüüd täiendavalt, et piirkond  $\mathcal{D}$  on tähekujuline.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (iii). Implikatsiooni tõestuseks piisab leida piirkonnas  $\mathcal{D}$  diferentseeruv kahe muutuja funktsioon  $u = U(x, y)$ , mis rahuldab tingimust (3.40). Piirkonna  $\mathcal{D}$  tähekujulisuse tõttu leidub punkt  $A \in \mathcal{D}$  nii, et mis tahes punkti  $B \in \mathcal{D}$  korral punkte  $A$  ja  $B$  ühendav sirglõik sisaldub piirkonnas  $\mathcal{D}$ . Defineerime funktsiooni  $U: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  võrdusega

$$U(B) := \int_{AB} F dx + G dy, \quad B \in \mathcal{D},$$

kus integreerimisteeks on punkte  $A$  ja  $B$  ühendav sirglõik (seejuures me loeme  $U(A) = 0$ ). Tingimuse (3.40) kehtivuseks piisab näidata, et piirkonnas  $\mathcal{D}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F \quad \text{ja} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = G$$

(PÕHJENDADA, MIKS SIIT JÄRELDUB FUNKTSIOONI  $U$  DIFERENTSEERUVUS JA TINGIMUSE (3.40)

KEHTIVUS! Tõestame neist samasustest vaid esimese (teine tõestatakse analoogiliselt). Fikseerime vabalt punkti  $B := (x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ . Me peame näitama, et

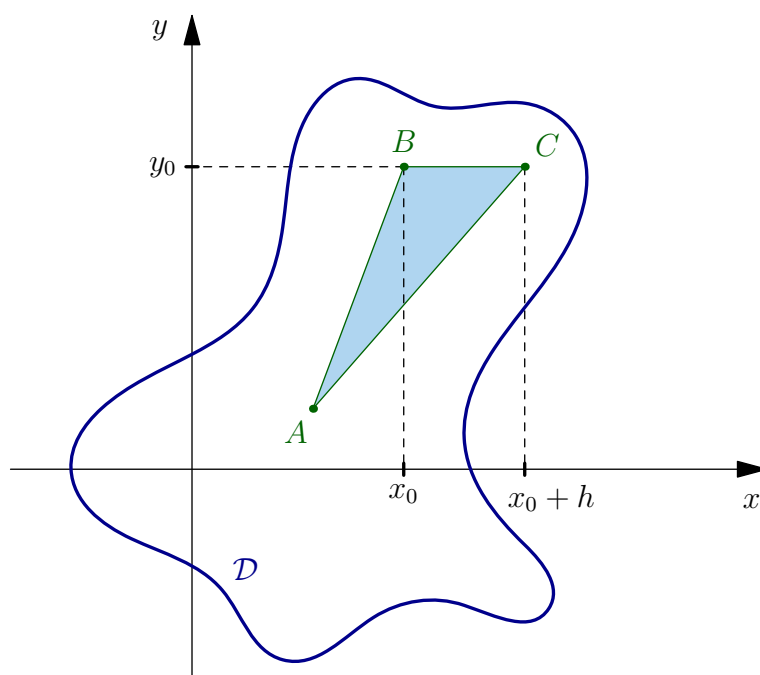
$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x_0, y_0).$$

Märgime, et piirkonna  $\mathcal{D}$  lahtisuse tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et  $U_\delta(B) \subset \mathcal{D}$ ; niisiis, kui  $|h| < \delta$ , siis punkte  $B = (x_0, y_0)$  ja  $C := (x_0 + h, y_0)$  ühendav sirglõik  $BC$  sisaldub piirkonnas  $\mathcal{D}$ . Näeme, et

$$U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) = U(C) - U(B) = \int_{AC} F dx + G dy - \int_{AB} F dx + G dy.$$

Greeni valemi põhjal, tähistades kolmnurga  $ABC$  kontuuri tähga  $L$  ja selle kolmnurga enda tähga  $\Delta$  ning oletades konkreetsuse mõttes, et  $h > 0$  (juhtu, kus  $h < 0$ , käsitletakse analoogiliselt), järeldub samasusest (3.42), et (vt. joonist 3.5)

$$\begin{aligned} \int_L F dx + G dy &= \int_{AC} F dx + G dy + \int_{CB} F dx + G dy + \int_{BA} F dx + G dy \\ &= \iint_{\Delta} \left( \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$



JOONIS 3.5. Kolmnurk  $\Delta$  on joonisel värvitud helesiniseks.

NB! Must-valge televisiooni vaatajad siin seda kolmnurka helesinisena ei näe!

seega

$$\begin{aligned} U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0) &= \int_{AC} F dx + G dy + \int_{BA} F dx + G dy \\ &= \int_{BC} F dx + G dy = \int_{BC} F dx = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x, y_0) dx \\ &= F(\xi_h, y_0) h, \end{aligned}$$

kus punkt  $\xi_h$  paikneb punktide  $x_0$  ja  $x_0 + h$  vahel (sellise punkti  $\xi_h$  olemasolu järel-  
dub integraalarvutuse keskvärtusteoreemist); järelikult, arvestades, et  $\xi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x_0$ ,  
funktsiooni  $F$  pidevuse tõttu

$$\frac{U(x_0 + h, y_0) - U(x_0, y_0)}{h} = F(\xi_h, y_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} F(x_0, y_0),$$

nagu soovitud. □

### 3.7. Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii) $\Rightarrow$ (i) tõestus üldjuhul

Teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii)  $\Rightarrow$  (i) tõestus üldjuhul (s.t. ilma eelduseta piirkonna  $\mathcal{D}$   
tähekujulisuse kohta) toetub järgmisele lemmale.

**NB!** Siin “ $\ell$ ”  
ei tarvitse olla  
eriti hea tähistus;  
eespool on sellega  
tähistatud miskise  
kõõlmurdjoone  
pikkust!

**Lemma 3.9.** *Olgu funktsioonid  $F$  ja  $G$  pidevad lahtises piirkonnas  $\mathcal{D}$  ning olgu  $A, B \in \mathcal{D}$  ja  $\varepsilon > 0$ . Siis iga tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  sisalduva punkte  $A$  ja  $B$  ühendava sirgestuva kaare  $AB$  korral leidub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  sisalduv (lõplikust arvust lüli-dest koosnev) kaare  $AB$  kõõlmurdjoon  $\ell$  (alguspunktiga  $A$  ja lõpp-punktiga  $B$ ) nii, et*

$$\left| \int_{AB} F dx + G dy - \int_{\ell} F dx + G dy \right| < \varepsilon. \quad (3.43)$$

**TÕESTUS.** Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Olgu punkte  $A$  ja  $B$  ühendav sirges-  
tuv kaar, mis tervikuna sisaldub hulgas  $\mathcal{D}$ , esitatud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \quad (3.44)$$

kus  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  ja  $B = (x(\beta), y(\beta))$ . Tähistame selle kaare pikkuse tähega  $s$ . Iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral tähistame  $C_t := (x(t), y(t))$  (s.t.  $C_t$  on kaare  $AB$  punkt, mis vastab parameetri väärtusele  $t$ ); siis hulga  $\mathcal{D}$  lahtisuse tõttu leidub reaalarv  $r_t > 0$  nii, et  $B(C_t, r_t) \subset \mathcal{D}$  (sümbol  $B(C_t, r_t)$  tähistab lahtist kera – ehk siis vaadeldaval kahedimensionaalsel juhul lahtist ringi – keskpunktiga  $C_t$  ja raadiusega  $r_t$ ); seejuures funktsioonide  $F$  ja  $G$  pidevuse tõttu võime arvu  $r_t$  valida nii, et

$$|F(P) - F(C_t)| < \frac{\varepsilon}{8s} \quad \text{ja} \quad |G(P) - G(C_t)| < \frac{\varepsilon}{8s} \quad \text{iga } P \in B(C_t, r_t) \text{ korral.} \quad (3.45)$$

Joonintegraalide  $\int_{AB} F dx =: I_1$  ja  $\int_{AB} G dy =: I_2$  olemasolu tõttu leidub reaalarv  $\delta > 0$  nii, et mis tahes punktide  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ning funktsioonide  $F$  ja  $G$  mis tahes integraalsummade  $\sigma_1$  ja  $\sigma_2$  korral (lõigus  $[\alpha, \beta]$ )

vastavalt projektsioonide järgi  $x$ - ja  $y$ -teljele, mis vastavad lõigu  $[\alpha, \beta]$  jaotusviisile punktidega  $t_0, t_1, \dots, t_n$ ,

$$\max \Delta t_j < 2\delta \quad \implies \quad |\sigma_1 - I_1| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad |\sigma_2 - I_2| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (3.46)$$

(siin, nagu ikka,  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ ). (Liit)funktsioonide

$$[\alpha, \beta] \ni t \mapsto F(x(t), y(t)) =: f(t) \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad [\alpha, \beta] \ni t \mapsto G(x(t), y(t)) =: g(t) \in \mathbb{R}$$

pidevuse tõttu on need funktsioonid (Cantori teoreemi põhjal) ühtlaselt pidevad lõigul  $[\alpha, \beta]$ , seega leidub reaalarv  $\delta' > 0$  nii, et

$$t, t' \in [\alpha, \beta], \quad |t - t'| < 2\delta' \quad \implies \quad |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{8s} \quad \text{ja} \quad |g(t) - g(t')| < \frac{\varepsilon}{8s}. \quad (3.47)$$

Funktsioonide (3.44) pidevuse tõttu leidub iga  $t \in [\alpha, \beta]$  korral reaalarv  $\delta_t > 0$  nii, et

$$t' \in [\alpha, \beta], \quad t' \in (t - \delta_t, t + \delta_t) \quad \implies \quad C_{t'} \in B(C_t, r_t)$$

(PÕHJENDADA!); seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et  $\delta_t < \max\{\delta, \delta'\}$ . Nüüd hulk  $\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [\alpha, \beta]\}$  on lõigu  $[\alpha, \beta]$  lahtine kate, seega Heine–Boreli lemma põhjal leidub tal lõplik alamkate, s.t. leiduvad  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [\alpha, \beta]$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) nii, et  $[\alpha, \beta] \subset \bigcup_{j=0}^n U_j$ , kus  $U_j := (t_j - \delta_{t_j}, t_j + \delta_{t_j})$ . Üldisust kitsendamata võime eeldada, et  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , kusjuures iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $U_{j-1} \cap U_j \neq \emptyset$  (PÕHJENDADA!). Siit järeldub, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}}) \cap B(C_{t_j}, r_{t_j}) \neq \emptyset$  (PÕHJENDADA!) ning seega sirglõik  $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$  sisaldub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  (PÕHJENDADA!). Nüüd murdjoon  $C_{t_0}C_{t_1} \dots C_{t_n}$  sisaldub tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$ , kusjuures  $C_{t_0} = A$  ja  $C_{t_n} = B$ , seega, tähistades selle murdjoone sümboliga  $\ell$ , jääb tõestada võrratus (3.43). Selleks, tähistades  $\int_{\ell} F dx =: J_1$  ja  $\int_{\ell} G dy =: J_2$ , piisab tõestada võrratused  $|I_1 - J_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  ja  $|I_2 - J_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Tõestame neist võrratustest ainult esimese (teine võrratus tõestatakse sümmeetriliselt).

Ühelt poolt,

$$J_1 = \int_{\ell} F dx = \sum_{j=1}^n \int_{C_{t_{j-1}}C_{t_j}} F dx,$$

kus  $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$  on punkte  $C_{t_{j-1}}$  ja  $C_{t_j}$  ühendav sirglõik (alguspunktiga  $C_{t_{j-1}}$  ja lõpppunktiga  $C_{t_j}$ ). Iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral tähistame

$$\Delta x_j := x(t_j) - x(t_{j-1}) \quad \text{ja} \quad \Delta y_j := y(t_j) - y(t_{j-1});$$

siis sirglõik  $C_{t_{j-1}}C_{t_j}$  esitub parameetriliste võrranditega

$$x = x(t_{j-1}) + t\Delta x_j =: \phi_j(t), \quad y = y(t_{j-1}) + t\Delta y_j =: \psi_j(t), \quad t \in [0, 1],$$

ning seega, arvestades, et  $\phi'_j(t) = \Delta x_j$ ,

$$J_{1,j} := \int_{C_{t_{j-1}}C_{t_j}} F dx = \int_0^1 F(\phi_j(t), \psi_j(t)) \phi'_j(t) dt = \Delta x_j \int_0^1 F(\phi_j(t), \psi_j(t)) dt.$$

Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi põhjal leidub  $\lambda_j \in [0, 1]$  nii, et

$$\int_0^1 F(\phi_j(t), \psi_j(t)) dt = F(\phi_j(\lambda_j), \psi_j(\lambda_j)) = F(P_j),$$

kus  $P_j = (\phi_j(\lambda_j), \psi_j(\lambda_j)) = (x(t_{j-1}) + \lambda_j \Delta x_j, y(t_{j-1}) + \lambda_j \Delta y_j)$ . Seega

$$J_1 = \sum_{j=1}^n J_{1j} = \sum_{j=1}^n F(P_j) \Delta x_j.$$

Teiselt poolt, arvestades, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral  $\Delta t_j = t_j - t_{j-1} < 2\delta$  (PÕHJENDADA!), järeldub implikatsioonist (3.46), et

$$\left| I_1 - \sum_{j=1}^n F(C_{t_j}) \Delta x_j \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Nüüd

$$\begin{aligned} |I_1 - J_1| &\leq \left| I_1 - \sum_{j=1}^n F(C_{t_j}) \Delta x_j \right| + \left| \sum_{j=1}^n (F(C_{t_j}) - F(P_j)) \Delta x_j \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{j=1}^n |F(C_{t_j}) - F(P_j)| |\Delta x_j|. \end{aligned}$$

Kuna  $\sum_{j=1}^n |\Delta x_j| \leq s$  (PÕHJENDADA!), siis piisab võrratuse  $|I_1 - J_1| < \frac{\varepsilon}{2}$  (ja ühtlasi lemma) tõestuseks näidata, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$|F(C_{t_j}) - F(P_j)| < \frac{\varepsilon}{4s}. \quad (3.48)$$

(PÕHJENDADA!). Fikseerime vabalt  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Kui  $P_j \in B(C_{t_j}, r_{t_j})$ , siis võrratus (3.48) kehtib hinnangute (3.45) põhjal. Jääb vaadelda juhtu, kus  $P_j \notin B(C_{t_j}, r_{t_j})$ . Kuna punkt  $P_j$  asub punkte  $C_{t_{j-1}}$  ja  $C_{t_j}$  ühendaval sirglõigul, siis sel juhul  $P_j \in B(C_{t_{j-1}}, r_{t_{j-1}})$  (PÕHJENDADA!). Nüüd, arvestades, et  $|t_j - t_{j-1}| < 2\delta'$  (PÕHJENDADA!), ning seega implikatsiooni (3.47) põhjal

$$\begin{aligned} |F(C_{t_j}) - F(C_{t_{j-1}})| &= |F(x(t_j), y(t_j)) - F(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}))| = |f(t_j) - f(t_{j-1})| \\ &< \frac{\varepsilon}{8s}, \end{aligned}$$

saame (jällegi hinnangute (3.45) põhjal)

$$|F(C_{t_j}) - F(P_j)| \leq |F(C_{t_j}) - F(C_{t_{j-1}})| + |F(C_{t_{j-1}}) - F(P_j)| < \frac{\varepsilon}{8s} + \frac{\varepsilon}{8s} = \frac{\varepsilon}{4s}.$$

Niisiis, võrratus (3.48) kehtib igal juhul.  $\square$

Nüüd oleme võimelised esitama teoreemi 3.8 implikatsiooni (iii) $\Rightarrow$ (i) tõestuse üldjuhul (s.t. ilma täiendava eelduseta piirkonna  $\mathcal{D}$  tähekujulisuse kohta).

TEOREEMI 3.8, (iii) $\Rightarrow$ (i), TÕESTUS. Olgu piirkond  $\mathcal{D}$  ühelisidus ning eksisteerigu funktsioonidel  $F$  ja  $G$  selles piirkonnas pidevad osatuletised  $\frac{\partial F}{\partial y}$  ja  $\frac{\partial G}{\partial x}$ . Eeldame, et kehtib (iii), s.t.  $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}$  piirkonnas  $\mathcal{D}$ . Olgu  $A, B \in \mathcal{D}$  ning olgu  $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $\psi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  kaared alguspunktiga  $A$  ja lõpp-punktiga  $B$  (s.t.  $\phi(a) = \psi(c) = A$  ja  $\phi(b) = \psi(d) = B$ ), mis tervikuna sisalduvad hulgas  $\mathcal{D}$  (või, täpsemalt, nende kaarte jäljed sisalduvad hulgas  $\mathcal{D}$ ), kusjuures funktsioonid  $\phi$  ja  $\psi$  on tükiti lineaarsed (s.t. lõigud  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  saab jaotada lõplikuks arvuks osalõikudeks, millest igaühel on vastavalt funktsioonid  $\phi$  ja  $\psi$  lineaarsed). Kaarte  $\phi$  ja  $\psi$  jäljed on lõplikust arvust lülidest koosnevad murdjooned (mis tervikuna sisalduvad hulgas  $\mathcal{D}$ ). Viidates kaartele  $\phi$  ja  $\psi$  vastavalt kui kaartele  $AB$  ja  $\widehat{AB}$ , piisab lemma 3.9 põhjal implikatsiooni tõestuseks näidata, et  $\int_{AB} F dx + G dy = \int_{\widehat{AB}} F dx + G dy$  (PÕHJENDADA!).

Lõigud  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  saab jaotada lõplikuks arvuks osalõikudeks vastavalt punktidega  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  ja  $c = T_0 < T_1 < \dots < T_n = d$ , kus  $n \in \mathbb{N}$  ning iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral osakaartel  $\phi|_{[t_{j-1}, t_j]}$  ja  $\psi|_{[T_{j-1}, T_j]}$  on ühine alguspunkt ja ühine lõpp-punkt, s.t.  $\phi(t_{j-1}) = \psi(T_{j-1}) =: A_{j-1}$  ja  $\phi(t_j) = \psi(T_j) =: A_j$ , ning, viidates edasises neile osakaartele vastavalt kui kaartele  $A_{j-1}A_j$  ja  $\widehat{A_{j-1}A_j}$ , kas

(1) osakaared  $A_{j-1}A_j$  ja  $\widehat{A_{j-1}A_j}$  on lihtsad, kusjuures nende jäljed ühtivad,

või

(2) osakaared  $A_{j-1}A_j$  ja  $\widehat{A_{j-1}A_j}$  (või, täpsemalt, nende osakaarte jäljed) lõikuvad ainult nende osakaarte alguspunktis  $A_{j-1}$  ja lõpp-punktis  $A_j$ .

Soovitud võrduse  $\int_{AB} F dx + G dy = \int_{\widehat{AB}} F dx + G dy$  tõestuseks piisab veenduda, et iga  $j \in \{1, \dots, n\}$  korral

$$\int_{A_{j-1}A_j} F dx + G dy = \int_{\widehat{A_{j-1}A_j}} F dx + G dy. \quad (3.49)$$

Olgu  $j \in \{1, \dots, n\}$  suvaline. Juhul (1) järeldub soovitud võrdus (3.49) märkusest 3.2. Jääb vaadelda juhtu (2). Soovitud võrduse (3.49) tõestuseks sel juhul paneme kõigepealt tähele, et, tänu eeldusele (iii), Greeni valemi (3.35) põhjal

(#) mis tahes tervikuna hulgas  $\mathcal{D}$  sisalduva lihtsa kinnise kaare  $L$  korral

$$\int_L F dx + G dy = 0$$

(PÕHJENDADA!). Siit järeldub, et soovitud võrduse (3.49) tõestamisel võime üldisust kitsendamata eeldada, et kaared  $A_{j-1}A_j$  ja  $\widehat{A_{j-1}A_j}$  on lihtsad (PÕHJENDADA!). Nüüd väite (#) põhjal

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{A_{j-1}A_j\widehat{A_{j-1}A_j}} F dx + G dy = \int_{A_{j-1}A_j} F dx + G dy + \int_{\widehat{A_{j-1}A_j}} F dx + G dy \\ &= \int_{A_{j-1}A_j} F dx + G dy - \int_{\widehat{A_{j-1}A_j}} F dx + G dy, \end{aligned}$$

kus  $\widehat{A_j A_{j-1}}$  tähistab kaart  $\widehat{A_{j-1} A_j}$  läbituna vastupidises suunas ning  $A_{j-1} \widehat{A_j A_{j-1}}$  tähistab kaarte  $A_{j-1} A_j$  ja  $\widehat{A_j A_{j-1}}$  *konkatenatsiooni*, s.t. mingit niisugust lihtsat kinnist kaart, kus alguses läbitakse kaar  $A_{j-1} A_j$  ning seejärel kaar  $\widehat{A_j A_{j-1}}$ . Soovitud võrdus (3.49) järeldeb eelnevast võrdusteahelast.  $\square$

### 3.8. Teist liiki joonintegraali rakendusi

#### 3.8.1. Tasandilise kujundi pindala arvutamine

Olgu  $xy$ -tasandi piirkonna  $\mathcal{D}$  raja  $\partial\mathcal{D}$  tükiti sile lihtne kinnine kaar (või, täpsemalt, raja  $\partial\mathcal{D}$  on mingi niisuguse kaare jälg). Defineerime funktsioonid

$$F(x, y) = -y \quad \text{ja} \quad G(x, y) = x;$$

siis

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -1 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 1;$$

seega Greeni valemi (3.35) põhjal

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}} \left( -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right) dx \, dy = \int_{\partial\mathcal{D}} F(x, y) \, dx = - \int_{\partial\mathcal{D}} y \, dx, \\ \iint_{\mathcal{D}} dx \, dy &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\mathcal{D}} G(x, y) \, dy = \int_{\partial\mathcal{D}} x \, dy, \end{aligned}$$

millest, arvestades, et hulga  $\mathcal{D}$  pindala  $S_{\mathcal{D}} = \iint_{\mathcal{D}} dx \, dy$ , saame pindala  $S_{\mathcal{D}}$  arvutamiseks valemid

$$S_{\mathcal{D}} = - \int_{\partial\mathcal{D}} y \, dx, \quad S_{\mathcal{D}} = \int_{\partial\mathcal{D}} x \, dy$$

ja

$$S_{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} \left( \int_{\partial\mathcal{D}} -y \, dx + x \, dy \right).$$

#### 3.8.2. Jõu töö arvutamine

Liikugu punktmass tasandil mööda sirgestuvat kaart  $AB$  punktist  $A$  punktini  $B$  jõu  $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  väljas, kus  $u = P(x, y)$  ja  $v = Q(x, y)$  on kaarel  $AB$  (või, täpsemalt, selle kaare jäljel) pidevad funktsioonid. (Seda liikumist mööda kaart  $AB$  tuleb mõista nii, et vaadeldav punktmass liigub tasandil eeskirja  $X = \Phi(t)$  järgi, s.t. ajahetkel  $t \in [\alpha, \beta]$  asub liikuv punkt tasandi  $\mathbb{R}^2$  punktis  $\Phi(t)$ , kus  $\Phi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  on kaart  $AB$  esitav funktsioon (siin loomulikult  $\Phi(\alpha) = A$  ja  $\Phi(\beta) = B$ )). Siis jõu  $\vec{F}$  poolt tehtud töö  $W$  esitub valemiga

$$W = \int_{AB} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy.$$

## § 4. Ruumilise kaare sirgestuvus ja pikkus ning esimest ja teist liiki ruumilised joonintegraalid

*Ruumiliste joonte* all mõistame me jooni ruumis  $\mathbb{R}^3$ .

Ruumilise kaare *sirgestuvus* ja *pikkus* ning *esimest* ja *teist liiki joonintegraalid üle ruumise kaare* (*ruumilised joonintegraalid*) defineeritakse analoogiliselt tasandilise kaare juhuga; seejuures teist liiki joonintegraali puhul lisandub loomulikul viisil teist liiki joonintegraal projektsioonide järgi  $z$ -teljele.

Ruumiliste kaartide ja joonintegraalide jaoks kehtivad kõigi selles peatükis tasandiliste kaartide ja joonintegraalide jaoks tõestatud omaduste ja arvutusvalemite loomulikud analoogid; erandiks on teist liiki tasandiliste joonintegraalide jaoks jaotistes 3.5 ja 3.6 tõestatud tulemused, milledele ruumiliste joonintegraalide jaoks *vahetud analoogid* puuduvad.

## § 5. Cauchy integral formula

**Theorem** (Cauchy integral formula). *Let  $\mathcal{D}$  be a bounded domain with piecewise smooth boundary  $\partial\mathcal{D}$ . If  $f(z)$  is analytic on  $\mathcal{D}$ , and  $f(z)$  extends smoothly to the boundary  $\partial\mathcal{D}$ , then*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \text{for every } z \in \mathcal{D}.$$



## VII peatükk.

# Parameetrist sõltuvad integraalid

## § 1. Parameetrist sõltuvad Riemanni integraalid

### 1.1. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali mõiste

Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  määratud hulgas  $[a, b] \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ . Eksisteerigu iga väärtuse  $y \in Y$  korral Riemanni integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ . Sel juhul on hulgas  $Y$  määratud (muutuja  $y$ ) funktsioon

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (1.1)$$

Eeldame nüüd, et kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  on määratud kõvertrapetsis

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

kus  $\alpha$  ja  $\beta$  on lõigus  $[c, d]$  pidevad (muutuja  $y$ ) funktsioonid, mis rahuldavad tingimust  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  iga  $y \in [c, d]$  korral. Eksisteerigu iga väärtuse  $y \in [c, d]$  korral Riemanni integraal  $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ . Sel juhul on lõigus  $[c, d]$  määratud (muutuja  $y$ ) funktsioon

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx. \quad (1.2)$$

Nii funktsioonile (1.1) kui ka funktsioonile (1.2) viidatakse kui *parameetrist sõltuvale Riemanni integraalile*. Parameetri rollis on siin muutuja  $y$ : valemite (1.1) ja (1.2) esinevad integraalid sõltuvad parameetri  $y$  väärtusest. Märgime, et kui  $Y = [c, d]$ , siis funktsioon (1.1) on erijuht funktsioonist (1.2), kus  $\alpha(y) = a$  ja  $\beta(y) = b$  iga  $y \in [c, d]$  korral.

Järgnevates kahes jaotises huvitab meid, millised eeldused funktsiooni  $f$  jaoks garanteerivad vastavalt parameetrist sõltuvate integraalide (1.1) ja (1.2) pidevuse, integreeruvuse (Riemanni mõttes) ja diferentseeruvuse.

## 1.2. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali pidevus, integreeruvus ja diferentseeruvus

**Teoreem 1.1.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.1) on pidev lõigus  $[c, d]$ .

**TÕESTUS.** *First things first:* funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$  on iga väärtuse  $y \in [c, d]$  korral funktsioon  $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  pidev lõigus  $[a, b]$ , seega see funktsioon on ka integreeruv lõigus  $[a, b]$ , s.t. eksisteerib Riemanni integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ ; niisiis funktsioon (1.1) on määratud lõigus  $[c, d]$ .

Peame näitama, et funktsioon (1.1) on pidev igas lõigu  $[c, d]$  punktis. Fikseerime vabalt punkti  $y_0 \in [c, d]$ . Tõestamiseks, et funktsioon (1.1) on pidev punktis  $y_0$ , piisab näidata, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$y \in [c, d], |y - y_0| < \delta \implies |I(y) - I(y_0)| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Mis tahes punkti  $y \in [c, d]$  korral

$$\begin{aligned} |I(y) - I(y_0)| &= \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx. \end{aligned}$$

Ristkülik  $[a, b] \times [c, d]$  on kinnine tõkestatud hulk tasandil  $\mathbb{R}^2$ , seega Cantori teoreemi põhjal on selles ristkülikus pidev funktsioon  $f$  ühtlaselt pidev selles ristkülikus, järelikult leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$\begin{aligned} (x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d], d((x, y), (u, v)) < \delta \\ \implies |f(x, y) - f(u, v)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \end{aligned}$$

(siin  $d((x, y), (u, v))$  on punktide  $(x, y)$  ja  $(u, v)$  vaheline kaugus tasandil  $\mathbb{R}^2$ ). Nüüd, kui punkt  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $|y - y_0| < \delta$ , siis mis tahes  $x \in [a, b]$  korral  $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  (sest  $d((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta$ ) ning seega

$$|I(y) - I(y_0)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Implikatsioon (1.3) kehtib. □

**Teoreem 1.2.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.1) on integreeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \stackrel{(*)}{=} \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (1.4)$$

**NB!** Funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu on siin võrratus  $|I(y) - I(y_0)| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx$  tegelikult range; seega me võiksime kõikjal tõestuses kirjutada  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  asemele  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  ja kustutada viimases valemireas fragmendi " $\frac{\varepsilon}{2} < "$ ".

TÕESTUS. Teoreemi 1.1 põhjal on funktsioon (1.1) pidev lõigus  $[c, d]$ , seega see funktsioon on ka integreeruv selles lõigus, s.t. eksisteerib Riemanni integraal  $\int_c^d I(y) dy$  ehk, teisisõnu, eksisteerib Riemanni integraal  $\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ . Niisiis jääb tõestada vaid võrdus (\*) võrdusteahelas (1.4). Järelduse V.5.3 põhjal (kui seal võtta  $\alpha(x) = c$  ja  $\beta(x) = d$  iga  $x \in [a, b]$  korral ning  $\gamma(y) = a$  ja  $\delta(y) = b$  iga  $y \in [c, d]$  korral) on funktsioon  $f$  (Riemanni mõttes) integreeruv ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

nagu soovitud.  $\square$

**Teoreem 1.3.** *Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  ja tema osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevad ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.1) on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures*

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

TÕESTUS. Olgu  $y_0 \in [c, d]$ . Peame näitama, et

$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx. \quad (1.5)$$

Koonduvuse (1.5) tõestuseks tuleb näidata, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$y \in [c, d], 0 < |y - y_0| < \delta \quad \implies \quad \left| \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Mis tahes  $y \in [c, d] \setminus \{y_0\}$  korral

$$I(y) - I(y_0) = \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx = \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx.$$

Iga  $x \in [a, b]$  korral rahuldab funktsioon  $\eta \mapsto f(x, \eta)$  lõigus  $[y_0, y]$  (või lõigus  $[y, y_0]$ , kui  $y < y_0$ ) Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi (märgime, et selle funktsiooni tuletisfunktsioon on  $\eta \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$ ), järelikult (Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal) leidub punkt  $\eta_{y,x} \in (y_0, y)$  (või  $\eta_{y,x} \in (y, y_0)$ , kui  $y < y_0$ ) selliselt, et

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) (y - y_0);$$

niisiis

$$I(y) - I(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) (y - y_0) dx = (y - y_0) \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) dx$$

ja seega

$$\begin{aligned} \left| \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| &= \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) dx - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right) dx \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx. \end{aligned}$$

Kuna osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  on pidev kinnises tõkestatud hulgas  $[a, b] \times [c, d]$  tasandil  $\mathbb{R}^2$ , siis Cantori teoreemi põhjal on see osatuletisfunktsioon selles hulgas ka ühtlaselt pidev, järelikult leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$(x, y), (u, v) \in [a, b] \times [c, d], d((x, y), (u, v)) < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

(siin  $d((x, y), (u, v))$  on punktide  $(x, y)$  ja  $(u, v)$  vaheline kaugus tasandil  $\mathbb{R}^2$ ). Niisiis, kui  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $0 < |y - y_0| < \delta$ , siis mis tahes  $x \in [a, b]$  korral  $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  (sest  $d((x, \eta_{y,x}), (x, y_0)) = |\eta_{y,x} - y_0| < |y - y_0| < \delta$ ) ning seega

$$\left| \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Implikatsioon (1.6) kehtib. □

### 1.3. Parameetrist sõltuva Riemanni integraali pidevus, integreeruvus ja diferentseeruvus – juht, kus integraali rajad sõltuvad parameetrist

Kõikjal selles jaotises tähistame

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\},$$

kus  $\alpha$  ja  $\beta$  on lõigus  $[c, d]$  pidevad (muutuja  $y$ ) funktsioonid, mis rahuldavad tingimust  $\alpha(y) \leq \beta(y)$  iga  $y \in [c, d]$  korral (meenutame, et sellist hulka  $\mathcal{A}$  nimetatakse *kõvertrapetsiks*), ning

$$\mathcal{D} := [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y \in [c, d]\},$$

kus reaalarvud  $a$  ja  $b$  on sellised, et  $a < b$  ning

$$a \leq \alpha(y) \quad \text{ja} \quad \beta(y) \leq b \quad \text{iga } y \in [c, d] \text{ korral.} \quad (1.7)$$

Märgime, et Weierstrassi teise teoreemi põhjal on lõigus  $[c, d]$  pidevad funktsioonid  $\alpha$  ja  $\beta$  tõkestatud selles lõigus ning järelikult tingimust (1.7) rahuldavaid reaalarvusi  $a$  ja  $b$  leidub.

**NB!** Osatule-  
tisfunktsiooni  $f$   
pidevuse tõttu  
on siin võrratus  
 $\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx$   
tegelikult range;  
seega me võiksime  
kõikjal tõestuses  
kirjutada  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$   
asemele  $\frac{\varepsilon}{b-a}$   
ja kustutada  
viimases valemireas  
fragmendi " $\frac{\varepsilon}{2} <$ ".

**Teoreem 1.4.** *Olgu kahe muutuva funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.2) on pidev lõigus  $[c, d]$ .*

**TÕESTUS.** *First things first:* funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$  on iga väärtuse  $y \in [c, d]$  korral funktsioon  $[a, b] \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$  pidev lõigus  $[a, b]$ , seega see funktsioon on ka integreeruv lõigus  $[a, b]$ , järelikult see funktsioon on integreeruv ka lõigu  $[a, b]$  igas osalõigus; muuhulgas see funktsioon on integreeruv lõigus  $[\alpha(y), \beta(y)]$ , s.t. eksisteerib Riemanni integraal  $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ ; niisiis funktsioon (1.2) on määratud lõigus  $[c, d]$ .

Peame näitama, et funktsioon (1.2) on pidev igas lõigu  $[c, d]$  punktis. Fikseerime vabalt punkti  $y_0 \in [c, d]$ . Tõestamiseks, et funktsioon (1.2) on pidev punktis  $y_0$ , piisab näidata, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$y \in [c, d], |y - y_0| < \delta \implies |I(y) - I(y_0)| < \varepsilon. \quad (1.8)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Mis tahes punkti  $y \in [c, d]$  korral

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx,$$

seega, arvestades, et  $I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0) dx$ ,

$$I(y) - I(y_0) = \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx + \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \quad (1.9)$$

ning järelikult

$$|I(y) - I(y_0)| \leq \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx + \left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \right|.$$

Ristkülik  $\mathcal{D}$  on kinnine tõkestatud hulk tasandil  $\mathbb{R}^2$ , seega Cantori teoreemi põhjal on selles ristkülikus pidev funktsioon  $f$  ühtlaselt pidev selles ristkülikus, järelikult leidub reaalarv  $\delta_1 > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$(x, y), (u, v) \in \mathcal{D}, d((x, y), (u, v)) < \delta_1 \implies |f(x, y) - f(u, v)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

(siin  $d((x, y), (u, v))$  on punktide  $(x, y)$  ja  $(u, v)$  vaheline kaugus tasandil  $\mathbb{R}^2$ ). Nüüd, kui punkt  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $|y - y_0| < \delta_1$ , siis mis tahes  $x \in [a, b]$  korral  $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  (sest  $d((x, y), (x, y_0)) = |y - y_0| < \delta_1$ ) ning seega

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \leq \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

**NB!** Funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu on siin võrratus  $\leq \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx$  tegelikult range!

Weierstrassi teise teoreemi põhjal on funktsioon  $f$  tõkestatud ristkülikus  $\mathcal{D}$ , seega leidub reaalarv  $M > 0$  selliselt, et  $|f(x, y)| \leq M$  iga  $(x, y) \in \mathcal{D}$  korral, järelikult iga  $y \in [c, d]$  korral

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x, y)| dx \right| \leq M |\beta(y) - \beta(y_0)| \quad \text{ja} \quad \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} |f(x, y)| dx \right| \leq M |\alpha(y) - \alpha(y_0)|.$$

Funktsioonide  $\beta$  ja  $\alpha$  pidevuse tõttu lõigus  $[c, d]$  leidub reaalarv  $\delta_2 > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$y \in [c, d], |y - y_0| < \delta_2 \quad \implies \quad |\beta(y) - \beta(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad \text{ja} \quad |\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Nüüd, kui punkt  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $|y - y_0| < \delta_2$ , siis

$$\left| \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} |f(x, y)| dx \right| + \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} |f(x, y)| dx \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eelnevast järeldub, et kui punkt  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $|y - y_0| < \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , siis

$$|I(y) - I(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Implikatsioon (1.8) kehtib. □

**Teoreem 1.5.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev ristkülikus  $\mathcal{D}$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.2) on integreeruv lõigus  $[c, d]$ .

TÕESTUS. Teoreemi 1.4 põhjal on funktsioon (1.2) pidev lõigus  $[c, d]$ , järelikult see funktsioon on ka integreeruv lõigus  $[c, d]$ . □

**Teoreem 1.6.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  ja tema osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevad ristkülikus  $\mathcal{D}$  ning olgu funktsioonid  $\alpha$  ja  $\beta$  diferentseeruvad lõigus  $[c, d]$ . Siis parameetrist sõltuv Riemanni integraal (1.2) on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y) \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

TÕESTUS. Olgu  $y_0 \in [c, d]$ . Teoreemi tõestuseks peame näitama, et

$$\frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx + \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0) - \alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0).$$

Arvestades võrdust (1.9), piisab selleks näidata, et

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \quad (1.10)$$

ning

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0) \quad (1.11)$$

ja

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0). \quad (1.12)$$

Tõestame kõigepealt koonduvuse (1.10). Selleks peame näitama, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$y \in [c, d], 0 < |y - y_0| < \delta \\ \implies \left| \frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| < \varepsilon. \quad (1.13)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Kui  $y \in [c, d] \setminus \{y_0\}$ , siis iga  $x \in [\alpha(y_0), \beta(y_0)]$  korral rahuldab funktsioon  $\eta \mapsto f(x, \eta)$  lõigus  $[y_0, y]$  (või lõigus  $[y, y_0]$ , kui  $y < y_0$ ) Lagrange'i keskväärtusteoreemi eeldusi (märgime, et selle funktsiooni tuletisfunktsioon on  $\eta \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta)$ ), järelikult (Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal) leidub punkt  $\eta_{y,x} \in (y_0, y)$  (või  $\eta_{y,x} \in (y, y_0)$ , kui  $y < y_0$ ) selliselt, et

$$f(x, y) - f(x, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) (y - y_0);$$

niisiis

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) dx$$

ja seega

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right) dx \right| \\ &\leq \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| dx. \end{aligned}$$

Kuna osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  on pidev kinnises tõkestatud hulgas  $\mathcal{D}$  tasandil  $\mathbb{R}^2$ , siis Cantori teoreemi põhjal on see osatuletisfunktsioon selles hulgas ka ühtlaselt pidev, järelikult leidub reaalarv  $\delta > 0$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$(x, y), (u, v) \in \mathcal{D}, d((x, y), (u, v)) < \delta \implies \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

(siin  $d((x, y), (u, v))$  on punktide  $(x, y)$  ja  $(u, v)$  vaheline kaugus tasandil  $\mathbb{R}^2$ ). Niisiis, kui  $y \in [c, d]$  rahuldab tingimust  $0 < |y - y_0| < \delta$ , siis mis tahes  $x \in [a, b]$  korral  $|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \eta_{y,x}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  (sest  $d((x, \eta_{y,x}), (x, y_0)) = |\eta_{y,x} - y_0| < |y - y_0| < \delta$ ) ning seega

**NB!** Osatuletis-funktsiooni  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevuse tõttu on siin võrratus  $\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  tegelikult range; seega me võiksime kõikjal tõestuses kirjutada  $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$  asemele  $\frac{\varepsilon}{b-a}$  ja kustutada viimases valemireas fragmendi " $\frac{\varepsilon}{2} <$ ".

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0)) dx - \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx \right| \\ & \leq \int_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (\beta(y_0) - \alpha(y_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Implikatsioon (1.13) kehtib. Koonduvus (1.10) on tõestatud.

Jääb tõestada koonduvused (1.11) ja (1.12). Integraalarvutuse keskväärtusteoreemi põhjal leiduvad iga  $y \in [c, d]$  korral punktid  $x_{1y} \in [\beta(y_0), \beta(y)]$  ja  $x_{2y} \in [\alpha(y_0), \alpha(y)]$  (kui  $\beta(y) < \beta(y_0)$ , siis siin ja edaspidises tõestuses mõistame lõigu  $[\beta(y_0), \beta(y)]$  all lõiku  $[\beta(y), \beta(y_0)]$ ; kui  $\alpha(y) < \alpha(y_0)$ , siis mõistame lõigu  $[\alpha(y_0), \alpha(y)]$  all lõiku  $[\alpha(y), \alpha(y_0)]$ ) selliselt, et

$$\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = f(x_{1y}, y) (\beta(y) - \beta(y_0))$$

ja

$$\int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx = f(x_{2y}, y) (\alpha(y) - \alpha(y_0))$$

ning seega

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} f(x_{1y}, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \beta'(y_0) f(\beta(y_0), y_0)$$

ja

$$\frac{1}{y - y_0} \int_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x, y) dx = \frac{\alpha(y) - \alpha(y_0)}{y - y_0} f(x_{2y}, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \alpha'(y_0) f(\alpha(y_0), y_0),$$

s.t. (1.11) ja (1.12) kehtivad. Eelnevas arvestasime, et

$$\frac{\beta(y) - \beta(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \beta'(y_0) \quad \text{ja} \quad \frac{\alpha(y) - \alpha(y_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \alpha'(y_0)$$

ning et

$$f(x_{1y}, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(\beta(y_0), y_0) \quad \text{ja} \quad f(x_{2y}, y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} f(\alpha(y_0), y_0). \quad (1.14)$$

Siin koonduvuste (1.14) tõestuseks märgime, et kuna  $x_{1y} \in [\beta(y_0), \beta(y)]$  ja  $x_{2y} \in [\alpha(y_0), \alpha(y)]$ , kusjuures funktsioonide  $\beta$  ja  $\alpha$  pidevuse tõttu  $\beta(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \beta(y_0)$  ja  $\alpha(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \alpha(y_0)$ , siis  $x_{1y} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \beta(y_0)$  ja  $x_{2y} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \alpha(y_0)$  ning järelikult funktsiooni  $f$  pidevuse tõttu kehti **b** (1.14). □

## § 2. Parameetrist sõltuvad päratud integraalid

### 2.1. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali mõiste

Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  määratud hulgas  $[a, \infty) \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ . Eeldame, et iga väärtuse  $y \in Y$  korral päratu integraal  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  koondub, s.t. iga väärtuse  $y \in Y$  korral see päratu integraal eksisteerib ja on lõplik (sellisel juhul öeldakse ka, et *päratu integraal  $\int_a^\infty f(x, y) dx$  koondub hulgas  $Y$* ). Sel juhul on hulgas  $Y$  määratud (muutuja  $y$ ) funktsioon

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx. \quad (2.1)$$

Funktsioonile (2.1) viidatakse kui *parameetrist sõltuvalle (esimest liiki) päratule integraalile*. Parameetri rollis on siin muutuja  $y$ : valemis (2.1) esineva päratu integraali väärtus sõltub parameetri  $y$  väärtusest.

Nagu parameetrist sõltuva Riemanni integraali puhul, huvitavad meid ka parameetrist sõltuva päratu integraali (2.1) puhul tingimused, mis garanteerivad selle funktsiooni pidevuse, integreeruvuse ja diferentseeruvuse. Vastavasisulised teoreemid – mis on jaotistes 1.2 ja 1.3 parameetrist sõltuvat Riemanni integraali käsitlevate teoreemide analoogid – tõestame me jaotises 2.4. Neis teoreemides on üheks oluliseks eelduseks *parameetrist sõltuva päratu integraali (2.1) ühtlane koonduvus*, millele on pühendatud selle paragrahvi järgmised kaks jaotist 2.2 ja 2.3.

### 2.2. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse mõiste ja Cauchy kriteerium

Kõikjal selles jaotises eeldame me, et kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  on määratud hulgas  $[a, \infty) \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ .

**Definitsioon 2.1.** Öeldakse, et päratu integraal (2.1) *koondub ühtlaselt* (parameetri  $y$  suhtes) hulgas  $Y$ , kui see integraal koondub hulgas  $Y$  (s.t. iga väärtuse  $y \in Y$  korral see päratu integraal eksisteerib ja on lõplik), kusjuures iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$R \in \mathbb{R}, R > A \quad \implies \quad \left| \int_R^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral.} \quad (2.2)$$

**Teoreem 2.1** (parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Cauchy kriteerium). *Eksisteerigu mis tahes  $y \in Y$  ja  $b \in (a, \infty)$  korral Riemanni integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *päratu integraal (2.1) koondub ühtlaselt hulgas  $Y$ ;*
- (ii) *iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et kehtib implikatsioon*

$$R, R' \in \mathbb{R}, R' > R > A \quad \implies \quad \left| \int_R^{R'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral.} \quad (2.3)$$

Teoreemi 2.1 (implikatsiooni (ii) $\Rightarrow$ (i)) tõestamisel on mugav toetuda järgnevale lemmale, mis taandab küsimuse parameetrist sõltuva püraatü integraali (ühtlase) koonduvuse kohta küsimusele teatavate parameetrist sõltuvate integraalide funktsionaaljadade (ühtlase) koonduvuse kohta, ning mida kasutavad ka teoreemi 2.4 (parameetrist sõltuva esimest liiki püraatü integraali ühtlase koonduvuse Dini tunnuse) ning teoreemide 2.6–2.8 tõestus **ed**. (Teoreemid 2.6–2.8 annavad piisavad tingimused selleks, et parameetrist sõltuv püraatü integraal (2.1) oleks vastavalt pidev, integreeruv ja diferentseeruv lõigul  $[c, d]$ .)

**Lemma 2.2.** Eksisteerigu mis tahes  $y \in Y$  ja  $b \in (a, \infty)$  korral Riemanni integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ .

(a) Olgu  $y \in Y$ . Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) püraatü integraal (2.1) koondub punktis  $y$ ;
- (ii) mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$ , kus

$$g_n: Y \ni \eta \longmapsto \int_a^{b_n} f(x, \eta) dx \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

koondub punktis  $y$ .

Seejuures, kui kehtib üks väidetest (i) ja (ii), siis väites (ii) kirjeldatud funktsionaaljadad  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koonduvad punktis  $y$  piirväärtuseks  $I(y)$ .

(b) Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) püraatü integraal (2.1) koondub ühtlaselt (parameetri  $y$  suhtes) hulgas  $Y$ ;
- (ii) mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , valemitega (2.4) defineeritud funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt hulgas  $Y$ .

Seejuures, kui kehtib üks väidetest (i) ja (ii), siis väites (ii) kirjeldatud funktsionaaljadade  $(g_n)_{n=1}^\infty$  piirfunktsioon hulgas  $Y$  on  $I$ .

**Märkus 2.1.** Samaväärsused (i) $\Leftrightarrow$ (ii) lemma 2.2 väidetes (a) ja (b) jäävad kehtima, kui neis kummaski asendada väites (ii) **tingimus** “mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ” tingimusega “mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimusi  $b_1 < b_2 < \dots$  ja  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ”. See nähtub nende väidete implikatsioonide (ii) $\Rightarrow$ (i) tõestus **t** est.

**LEMMA 2.2 TÕESTUS.** (a). Väide (i) tähendab, et eksisteerib lõplik piirväärtus  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x, y) dx$ . **Funktsiooni piirväärtuse olemasolu** Heine kriteeriumi põhjal tähendab see omakorda, et mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , eksisteerib lõplik piirväärtus  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y)$ , kus funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on defineeritud valemitega (2.4), ehk, teisisõnu, funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub punktis  $y$ . Samaväärsus (i) $\Leftrightarrow$ (ii) on tõestatud.

Väite “Seejuures, ...” tõestuseks märgime, et kui päratu integraal (2.1) koondub punktis  $y$ , siis **Heine kriteeriumi** põhjal mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$ , mis on defineeritud valemitega (2.4), koondub punktis  $y$  piirväärtuseks  $I(y)$ .

(b). (i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i), rahuldagu arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  ning olgu funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , defineeritud valemitega (2.4). Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt piirfunktsiooniks  $I$  hulgas  $Y$ , s.t. iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$n \in \mathbb{N}, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_{b_n}^\infty f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral} \quad (2.5)$$

(märgime, et siin  $I(y) - g_n(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^{b_n} f(x, y) dx = \int_{b_n}^\infty f(x, y) dx$ ). Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Päratu integraali (2.1) ühtlase koonduvuse tõttu hulgas  $Y$  leidub reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et kehtib implikatsioon (2.2). Kui nüüd indeks  $N \in \mathbb{N}$  on selline, et  $b_n > A$  iga indeksi  $n \geq N$  korral (niisugune indeks  $N$  leidub, sest  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ), siis implikatsioon (2.5) kehtib.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii). Siis juba tõestatud väite (a) implikatsiooni (ii) $\Rightarrow$ (i) põhjal päratu integraal (2.1) koondub hulgas  $Y$ . Oletame vastuväiteliselt, et see koonduvus pole ühtlane. Siis leidub reaalarv  $\varepsilon > 0$  selliselt, et iga reaalarvu  $A \geq a$  korral leiduvad reaalarv  $R > A$  ja punkt  $y \in Y$  selliselt, et  $\left| \int_R^\infty f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon$ . Muu hulgas iga  $n \in \mathbb{N}$  korral leidub  $b_n > a + n$  selliselt, et  $\left| \int_{b_n}^\infty f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon$  mingi  $y \in Y$  korral. Paneme tähele, et  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  ning et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral, defineerides funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4),  $|I(y) - g_n(y)| \geq \varepsilon$  mingi  $y \in Y$  korral (sest  $I(y) - g_n(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^{b_n} f(x, y) dx = \int_{b_n}^\infty f(x, y) dx$ ); niisiis funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  ei koonu funktsiooniks  $I$  ühtlaselt hulgas  $Y$ . Arvestades, et väite (a) osa “Seejuures, ...” põhjal funktsioon  $I$  on funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  piirfunktsioon hulgas  $Y$ , järeldub siit, et funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  ei koonu ühtlaselt hulgas  $Y$ ; niisiis (ii) ei kehti. Jõudsime vastuoluni.

Väide “Seejuures, ...” järeldub implikatsiooni (i) $\Rightarrow$ (ii) tõestusest (või väite (a) osast “Seejuures, ...”).  $\square$

TEOREEMI 2.1 TÕESTUS. (i) $\Rightarrow$ (ii). Kehtigu (i) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Päratu integraali (2.1) ühtlase koonduvuse tõttu hulgas  $Y$  leidub reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et kehtib implikatsioon (2.2), kus arv  $\varepsilon$  on asendatud arvuga  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Kui nüüd arvud  $R, R' \in \mathbb{R}$  on sellised, et  $R' > R > A$ , siis iga  $y \in Y$  korral

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R'} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_R^\infty f(x, y) dx - \int_{R'}^\infty f(x, y) dx \right| \\ &\leq \left| \int_R^\infty f(x, y) dx \right| + \left| \int_{R'}^\infty f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon; \end{aligned}$$

niisiis implikatsioon teoreemi väitest (ii) kehtib.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (ii) ning rahuldagu arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Lemma 2.2, (b), põhjal piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et valemitega (2.4) defineeritud funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt hulgas  $Y$  piirfunktsiooniks  $I$ . Funktsionaaljada ühtlase koonduvuse Cauchy kriteeriumi põhjal piisab selleks näidata, et iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub indeks  $N \in \mathbb{N}$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left| \int_{b_m}^{b_n} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral} \quad (2.6)$$

(märgime, et siin  $g_n(y) - g_m(y) = \int_a^{b_n} f(x, y) dx - \int_a^{b_m} f(x, y) dx = \int_{b_m}^{b_n} f(x, y) dx$ ). Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Tehtud eelduse põhjal väite (ii) kehtivuse kohta leidub reaalarv  $A$  selliselt, et kehtib implikatsioon sellest väitest. Kui nüüd indeks  $N \in \mathbb{N}$  on selline, et  $b_n > A$  iga indeksi  $n \geq N$  korral (niisugune indeks  $N$  leidub, sest  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ ), siis implikatsioon (2.6) kehtib.  $\square$

### 2.3. Piisavaid tingimusi parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks – Weierstrassi tunnus ja Dini tunnus

**Teoreem 2.3** (parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Weierstrassi tunnus). *Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  määratud hulgas  $[a, \infty) \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ , kusjuures mis tahes  $y \in Y$  ja  $b \in (a, \infty)$  korral eksisteerib Riemanni integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ , ning olgu ühe muutuja funktsioon  $\phi$  määratud poolsirgel  $[a, \infty)$ . Kui*

(1)  $|f(x, y)| \leq \phi(x)$  iga  $(x, y) \in [a, \infty) \times Y$  korral;

(2) päratu integraal  $\int_a^\infty \phi(x) dx$  koondub,

siis päratu integraal (2.1) koondub ühtlaselt ja absoluutselt hulgas  $Y$ . (Siin päratu integraali (2.1) absoluutne koonduvus hulgas  $Y$  tähendab, et iga  $y \in Y$  korral päratu integraal  $\int_a^\infty |f(x, y)| dx$  koondub.)

**TÕESTUS.** Kehtigu tingimused (1) ja (2) ning olgu  $\varepsilon > 0$ . Cauchy kriteeriumi (teoremi 2.1) põhjal piisab päratu integraali (2.1) ühtlase koonduvuse tõestuseks hulgas  $Y$  leida reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et kehtib implikatsioon (2.3). Päratu integraali  $\int_a^\infty \phi(x) dx$  koonduvuse tõttu leidub (päratu integraali koonduvuse Cauchy kriteeriumi põhjal) reaalarv  $A \geq a$  selliselt, et mis tahes reaalarvude  $R, R' > A$  korral  $|\int_R^{R'} \phi(x) dx| < \varepsilon$ . Kui nüüd reaalarvud  $R$  ja  $R'$  on sellised, et  $R' > R > A$ , siis mis tahes  $y \in Y$  korral

$$\left| \int_R^{R'} f(x, y) dx \right| \leq \int_R^{R'} |f(x, y)| dx \leq \int_R^{R'} \phi(x) dx < \varepsilon.$$

Implikatsioon (2.3) kehtib.

Eelnevast arutelust nähtub, et ka parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_a^\infty |f(x, y)| dx$  koondub Cauchy kriteeriumi (teoreemi 2.1) põhjal ühtlaselt parameetri  $y$  suhtes hulgas  $Y$ .  $\square$

**Teoreem 2.4** (parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Dini<sup>1</sup> tunnus). *Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  mittenegatiivne ja pidev “poolribas”  $[a, \infty) \times [c, d]$ . Koondugu päratu integraal (2.1) lõigus  $[c, d]$ , kusjuures piirfunktsioon  $I$  on pidev lõigus  $[c, d]$ . Siis see päratu integraal koondub piirfunktsiooniks  $I$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ .*

Teoreemi 2.4 on mugav järeldada lemma 2.2 abil funktsionaaljada ühtlase koonduvuse Dini tunnusest.

Parema jälgitavuse huvides sõnastame siinkohal funktsionaaljada ühtlase koonduvuse Dini tunnuse.

**Teoreem 2.5** (funktsionaaljada ühtlase koonduvuse Dini tunnus). *Koondugu lõigus  $[c, d]$  määratud funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  piirfunktsiooniks  $g$  selles lõigus. Kui*

(1) *funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ja  $g$  on pidevad lõigus  $[c, d]$ ;*

(2) *(arv)jada  $(g_n(y))_{n=1}^\infty$  on monotoonne iga  $y \in [c, d]$  korral;*

*siis funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ .*

**TEOREEMI 2.4 TÕESTUS.** Olgu arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sellised, et  $b_1 < b_2 < \dots$  ja  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Defineerime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4), kus  $Y = [c, d]$ . Lemma 2.2, (b), põhjal piisab teoreemi tõestuseks näidata, et funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$  (vt. märkust 2.2). See koonduvus järeldub teoreemist 2.5, sest funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  rahuldab selle teoreemi eeldusi, kus  $g = I$ .

Tõepoolest, funktsionaaljada  $(g_n)$  koondub piirfunktsiooniks  $I$  lõigus  $[c, d]$  lemma 2.2, (a), põhjal; funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on pidevad lõigus  $[c, d]$  teoreemi 1.1 põhjal; (arv)jada  $(g_n(y))_{n=1}^\infty$  on monotoonne iga  $y \in [c, d]$  korral, sest mis tahes  $y \in [c, d]$  ja  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $f$  mittenegatiivsuse tõttu (arvestades, et  $b_n \leq b_{n+1}$ )

$$g_{n+1}(y) - g_n(y) = \int_a^{b_{n+1}} f(x, y) dx - \int_a^{b_n} f(x, y) dx = \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x, y) dx \geq 0.$$

$\square$

## 2.4. Parameetrist sõltuva esimest liiki päratu integraali pidevus, integreeruvus ja diferentseeruvus

Järgnevad teoremid 2.6–2.8 annavad piisavad tingimused selleks, et parameetrist sõltuv päratu integraal (2.1) oleks vastavalt pidev, integreeruv ja diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ .

<sup>1</sup>Ulisse Dini (1845–1918) – itaalia matemaatik

**Teoreem 2.6.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev “poolribas”  $[a, \infty) \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.1) koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.1) on pidev lõigus  $[c, d]$ .

**Teoreem 2.7.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev “poolribas”  $[a, \infty) \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.1) koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.1) on integreeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Teoreem 2.8.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  ja tema osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevad “poolribas”  $[a, \infty) \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.1) koondub lõigus  $[c, d]$  ning parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  koondub ühtlaselt (muutuja  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.1) on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d]. \quad (2.7)$$

Teoreeme 2.6–2.8 on mugav järeldada lemma 2.2 abil analoogilistest teoreemidest funktsionaalrea summa pidevuse, integreeruvuse ja diferentseeruvuse kohta.

Parema jälgitavuse huvides sõnastame siinkohal need teoreemid.

**Teoreem 2.9.** Kui

- (1) funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on pidevad lõigus  $[c, d]$ ;
- (2) funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $g$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ ,

siis ka funktsioon  $g$  on pidev lõigus  $[c, d]$ .

**Teoreem 2.10.** Kui

- (1) funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on integreeruvad lõigus  $[c, d]$ ;
- (2) funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $g$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ ,

siis ka funktsioon  $g$  on integreeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d g(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d g_n(y) dy.$$

**Teoreem 2.11.** Kui

- (1) funktsioonidel  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , eksisteerib lõigus  $[c, d]$  pidev tuletis;
- (2) funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $g$  lõigus  $[c, d]$ ;
- (3) tuletisfunktsioonide funktsionaaljada  $(g'_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $h$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ ,

siis ka piirfunktsioon  $g$  on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$g'(y) = h(y) \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

TEOREEMI 2.6 TÕESTUS. Valime arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , ning defineerime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4), kus  $Y = [c, d]$ . Siis teoreemi 1.1 põhjal funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on pidevad (sest iga  $n \in \mathbb{N}$  korral on funktsioon  $f$  pidev ristkülikus  $[a, b_n] \times [c, d]$ ); lemma 2.2, (b), põhjal funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$  piirfunktsiooniks  $I$ . Teoreemi 2.9 põhjal on funktsioon  $I$  pidev lõigus  $[c, d]$ .  $\square$

TEOREEMI 2.7 TÕESTUS. Teoreemi 2.6 põhjal on funktsioon (2.1) pidev lõigus  $[c, d]$ , seega see funktsioon on ka integreeruv selles lõigus; niisiis eksisteerib Riemanni integraal  $\int_c^d I(y) dy$ . Teoreemi 1.2 põhjal iga reaalarvu  $b > a$  korral

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

kus selle võrduse kehtivus tähendab muuhulgas kõigi selles võrduses esinevate integraalide olemasolu (kõik selles võrduses esinevad integraalid on Riemanni integraalid). Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et

$$\int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \xrightarrow{b \rightarrow \infty} \int_c^d I(y) dy. \quad (2.8)$$

Olgu reaalarvud  $b_n > a$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sellised, et  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Heine kriteeriumi põhjal funktsiooni piirväärtuse jaoks piisab koonduvuse (2.8) tõestuseks veenduda, et

$$\int_a^{b_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d I(y) dy. \quad (2.9)$$

Selleks defineerime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4), kus  $Y = [c, d]$ ; siis lemma 2.2, (b), põhjal funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$  piirfunktsiooniks  $I$ , seega teoreemi 2.10 põhjal

$$\int_c^d g_n(y) dy \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_c^d I(y) dy.$$

Koonduvuse (2.9) ja ühtlasi ka teoreemi tõestuseks jääb nüüd vaid märkida, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral

$$\int_c^d g_n(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^{b_n} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{b_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

$\square$

TEOREEMI 2.8 TÕESTUS. Valime arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nii, et  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , ning defineerime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4), kus  $Y = [c, d]$ . Siis lemma 2.2, (a), põhjal funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $I$  lõigus  $[c, d]$ . Teoreemi 1.3 põhjal on iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsioon  $g_n$  diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$g'_n(y) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d];$$

seejuures teoreemi 1.1 põhjal on tuletisfunktsioon  $g'_n$  pidev lõigus  $[c, d]$ . Lemma 2.2, (b), põhjal koondub tuletisfunktsioonide funktsionaaljada  $(g'_n)_{n=1}^\infty$  parameetrist sõltuvaks päratuks integraaliks  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  ühtlaselt (muutuja  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ . Teoreemi 2.11 põhjal on piirfunktsioon  $I$  diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures kehtib (2.7).  $\square$

Teoreemist 2.8 eksisteerib järgnev tugevam versioon.

**Teoreem 2.12.** *Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  ja tema osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevad “poolribas”  $[a, \infty) \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.1) koondub vähemalt ühes lõigu  $[c, d]$  punktis (s.t. leidub  $y_0 \in [c, d]$  selliselt, et päratu integraal  $\int_a^\infty f(x, y_0) dx$  koondub) ning parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  koondub ühtlaselt (muutuja  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ . Siis ka päratu integraal (2.1) koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ , kusjuures tema piirfunktsioon  $I$  on diferentseeruv selles lõigus. Seejuures*

$$I'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d]. \quad (2.10)$$

Teoreemi 2.12 tõestus on ülesehituselt sarnane teoreemi 2.8 tõestusega, kuid teoreemi 2.11 asemel kasutatakse seal järgnevat tugevamat versiooni teoreemist 2.11.

**Teoreem 2.13.** *Kui*

- (1) *funktsioonid  $g_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , on diferentseeruvad lõigus  $[c, d]$ ;*
- (2) *funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub vähemalt ühes lõigu  $[c, d]$  punktis;*
- (3) *tuletisfunktsioonide funktsionaaljada  $(g'_n)_{n=1}^\infty$  koondub piirfunktsiooniks  $h$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ ,*

*siis ka funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Seejuures on funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  piirfunktsioon  $g$  diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures*

$$g'(y) = h(y) \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

**TEOREEMI 2.12 TÕESTUS.** Olgu arvud  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , sellised, et  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Defineerime iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsiooni  $g_n$  valemiga (2.4), kus  $Y = [c, d]$ . Siis lemma 2.2, (a), põhjal funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koondub vähemalt ühes lõigu  $[c, d]$  punktis. Teoreemi 1.3 põhjal on iga  $n \in \mathbb{N}$  korral funktsioon  $g_n$  diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$g'_n(y) = \int_a^{b_n} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

Lemma 2.2, (b), põhjal koondub tuletisfunktsioonide funktsionaaljada  $(g'_n)_{n=1}^\infty$  parameetrist sõltuvaks päratuks integraaliks  $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  ühtlaselt (muutuja  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ . Teoreemi 2.13 põhjal koondub ka funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ ; seejuures selle funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$  piirfunktsioon  $g$  diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$g'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

Eelnevast arutelust nähtub, et mis tahes arvude  $b_n \in (a, \infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ , koondub valemitega (2.4) defineeritud funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$

ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Lemma 2.2, (b), põhjal koondub päratu integraal (2.1) ühtlaselt (parameetri  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ , kusjuures kõikide ülalkirjeldatud funktsionaaljadade  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$  piirfunktsioonid on  $I$ . Nüüd aga järeldub eelnevast, et funktsioon  $I$  on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures kehtib (2.10).  $\square$

## 2.5. Esimest liiki päratu integraal parameetrist sõltuvast esimest liiki päratust integraalist

**Teoreem 2.14.** Olgu  $a, c \in \mathbb{R}$  ning olgu funktsioon  $w = f(x, y)$  mittenegatiivne ja pidev hulgas  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq a, y \geq c\}$ , kusjuures parameetrist sõltuvad päratud integraalid

$$I(y) := \int_a^{\infty} f(x, y) dx \quad \text{ja} \quad K(x) := \int_c^{\infty} f(x, y) dy$$

(koonduvad ja) on pidevad vastavalt poolsirgetel  $y \in [c, \infty)$  ja  $x \in [a, \infty)$ . Kui koondub üks päratutest integraalidest

$$\int_c^{\infty} I(y) dy = \int_c^{\infty} \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \quad \text{ja} \quad \int_a^{\infty} K(x) dx = \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx,$$

siis koondub ka teine nendest integraalidest, kusjuures need kaks päratut integraali on võrdsed.

**TÕESTUS.** Sümmeetria põhjal piisab vaadelda vaid juhtu, kui koondub päratu integraal  $\int_a^{\infty} K(x) dx$ . Teoreemi tõestuseks peame näitama, et koondub ka päratu integraal  $\int_c^{\infty} I(y) dy$ , kusjuures  $\int_c^{\infty} I(y) dy = \int_a^{\infty} K(x) dx$ , s.t. iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub reaalarv  $D \geq c$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$d \in \mathbb{R}, d > D \quad \implies \quad \left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^{\infty} K(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (2.11)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu  $\varepsilon > 0$ . Iga reaalarvu  $d > c$  korral koondub parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$  Dini tunnuse (teoreemi 2.4) põhjal ühtlaselt muutuja  $y$  suhtes lõigus  $[c, d]$ , järelikult teoreemi 2.7 põhjal on funktsioon  $I$  integreeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^{\infty} f(x, y) dx \right) dy = \int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Seega mis tahes reaalarvude  $d > c$  ja  $b > a$  korral

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} K(x) dx - \int_c^d I(y) dy &= \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy \right) dx - \int_a^{\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^{\infty} \left( \int_c^{\infty} f(x, y) dy - \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^{\infty} \left( \int_d^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_b^{\infty} \left( \int_d^{\infty} f(x, y) dy \right) dx + \int_a^b \left( \int_d^{\infty} f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Päratu integraali  $\int_a^\infty K(x) dx$  koonduvuse tõttu leidub reaalarv  $b > a$  selliselt, et  $\int_b^\infty K(x) dx = \left| \int_b^\infty K(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$  (PÕHJENDADA, MIKS SELLINE REAALARV  $b$  LEIDUB!). Nüüd mis tahes reaalarvu  $d > c$  korral funktsiooni  $f$  mittenegatiivsuse tõttu iga  $x \in [a, \infty)$  korral

$$0 \leq \int_d^\infty f(x, y) dy \leq \int_c^\infty f(x, y) dy = K(x)$$

ning järelikult

$$0 \leq \int_b^\infty \left( \int_d^\infty f(x, y) dy \right) dx \leq \int_b^\infty K(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dini tunnuse (teoreemi 2.4) põhjal koondub parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_c^\infty f(x, y) dy$  ühtlaselt muutuja  $x$  suhtes lõigul  $[a, b]$ , seega leidub reaalarv  $D \geq c$  selliselt, et

$$d \in \mathbb{R}, d > D \implies \int_d^\infty f(x, y) dy = \left| \int_d^\infty f(x, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \text{ iga } x \in [a, b] \text{ korral.}$$

Nüüd mis tahes reaalarvu  $d > D$  korral

$$\left| \int_c^d I(y) dy - \int_a^\infty K(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Implikatsioon (2.11) kehtib.  $\square$

## 2.6. Parameetrist sõltuv teist liiki päratu integraal

Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  määratud hulgas  $[a, b) \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ . Eeldame, et (teist liiki) päratu integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$  koondub hulgas  $Y$ , s.t. iga väärtuse  $y \in Y$  korral (teist liiki) päratu integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$  koondub (s.t. iga väärtuse  $y \in Y$  korral eksisteerib iga  $t \in (a, b)$  korral Riemanni integraal  $\int_a^t f(x, y) dx$ , kusjuures eksisteerib lõplik piirväärtus  $\lim_{t \rightarrow b-} \int_a^t f(x, y) dx$ ; see piirväärtus ongi (teist liiki) päratu integraal  $\int_a^b f(x, y) dx$ ). Nendel eeldustel on hulgas  $Y$  määratud (muutuja  $y$ ) funktsioon

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx. \quad (2.12)$$

Funktsioonile (2.12) viidatakse kui *parameetrist sõltuvalle (teist liiki) päratule integraalile*. Parameetri rollis on siin muutuja  $y$ : valemis (2.12) esineva päratu integraali väärtus sõltub parameetri  $y$  väärtusest.

Teoreemides, mis annavad piisavad tingimused funktsiooni (2.12) pidevuseks, integreeruvuseks ja diferentseeruvuseks (sellised teoreemid 2.19–2.21 on vastavate parameetrist sõltuvat esimest liiki päratut integraali (2.1) käsitlevate teoreemide 2.6–2.8 analoogid), on üheks oluliseks eelduseks parameetrist sõltuva (teist liiki) päratu integraali (2.12) ühtlane koonduvus.

Järgnevas definitsioonis 2.2, teoreemis 2.15 ja lemmas 2.16 eeldame me, et kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  on määratud hulgas  $[a, b] \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ .

**Definitsioon 2.2.** Öeldakse, et päratu integraal (2.12) *koondub ühtlaselt* (parameetri  $y$  suhtes) hulgas  $Y$ , kui see integraal koondub hulgas  $Y$  (s.t. iga väärtuse  $y \in Y$  korral see päratu integraal eksisteerib ja on lõplik), kusjuures iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub arv  $A \in [a, b]$  selliselt, et kehtib implikatsioon

$$R \in (A, b) \quad \implies \quad \left| \int_R^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral.}$$

Järgnev teoreem annab tarviliku ja piisava tingimuse parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks.

**Teoreem 2.15** (parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Cauchy kriteerium). *Eksisteerigu mis tahes  $y \in Y$  ja  $t \in (a, b)$  korral Riemanni integraal  $\int_a^t f(x, y) dx$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *päratu integraal (2.12) koondub ühtlaselt hulgas  $Y$ ;*
- (ii) *iga reaalarvu  $\varepsilon > 0$  korral leidub arv  $A \in [a, b]$  selliselt, et kehtib implikatsioon*

$$R, R' \in \mathbb{R}, A < R < R' < b \quad \implies \quad \left| \int_R^{R'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \text{ iga } y \in Y \text{ korral.}$$

Teoreemi 2.15 (implikatsiooni (ii) $\implies$ (i)) tõestamisel on mugav toetuda järgnevale lemmale, mis taandab küsimuse parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali (ühtlase) koonduvuse kohta küsimusele teatavate parameetrist sõltuvate integraalide funktsionaaljadade (ühtlase) koonduvuse kohta.

**Lemma 2.16.** *Eksisteerigu mis tahes  $y \in Y$  ja  $t \in (a, b)$  korral Riemanni integraal  $\int_a^t f(x, y) dx$ .*

- (a) *Olgu  $y \in Y$ . Järgmised väited on samaväärsed:*

- (i) *päratu integraal (2.12) koondub punktis  $y$ ;*
- (ii) *mis tahes arvude  $b_n \in (a, b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ , funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^\infty$ , kus*

$$g_n: Y \ni \eta \longmapsto \int_a^{b_n} f(x, \eta) dx \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

*koondub punktis  $y$ .*

*Seejuures, kui kehtib üks väidetest (i) ja (ii), siis väites (ii) kirjeldatud funktsionaaljadad  $(g_n)_{n=1}^\infty$  koonduvad punktis  $y$  piirväärtuseks  $I(y)$ .*

(b) Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) päratu integraal (2.12) koondub ühtlaselt (parameetri  $y$  suhtes) hulgas  $Y$ ;
- (ii) mis tahes arvude  $b_n \in (a, b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ , valemitega (2.13) defineeritud funktsionaaljada  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$  koondub ühtlaselt hulgas  $Y$ .

Seejuures, kui kehtib üks väidetest (i) ja (ii), siis väites (ii) kirjeldatud funktsionaaljadade  $(g_n)_{n=1}^{\infty}$  piirfunktsioon hulgas  $Y$  on  $I$ .

**Märkus 2.2.** Samaväärsused (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) lemma 2.16 väidetes (a) ja (b) jäävad kehtima, kui neis kummaski asendada väites (ii) tingimus “mis tahes arvude  $b_n \in (a, b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimust  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ ” tingimusega “mis tahes arvude  $b_n \in (a, b)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , korral, mis rahuldavad tingimusi  $b_1 < b_2 < \dots$  ja  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ ”.

Järgnevad kaks teoreemi annavad piisavaid tingimusi parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlaseks koonduvuseks. Need teoreemid on vastavate parameetrist sõltuvat esimest liiki päratut integraali käsitlevate teoreemide 2.3 ja 2.4 – Weierstrassi tunnuse ja Dini tunnuse – analoogid.

**Teoreem 2.17** (parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Weierstrassi tunnus). Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  määratud hulgas  $[a, b] \times Y$ , kus  $Y \subset \mathbb{R}$ , kusjuures mis tahes  $y \in Y$  ja  $t \in (a, b)$  korral eksisteerib Riemanni integraal  $\int_a^t f(x, y) dx$ , ning olgu ühe muutuja funktsioon  $\phi$  määratud poollõigis  $[a, b]$ . Kui

$$(1) |f(x, y)| \leq \phi(x) \text{ iga } (x, y) \in [a, b] \times Y \text{ korral;}$$

$$(2) \text{ päratu integraal } \int_a^b \phi(x) dx \text{ koondub,}$$

siis päratu integraal (2.12) koondub ühtlaselt ja absoluutselt hulgas  $Y$ . (Siin päratu integraali (2.12) absoluutne koonduvus hulgas  $Y$  tähendab, et iga  $y \in Y$  korral päratu integraal  $\int_a^b |f(x, y)| dx$  koondub.)

**Teoreem 2.18** (parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse Dini tunnus). Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  mittenegatiivne ja pidev “poollahtises” riskülikus  $[a, b] \times [c, d]$ . Koondugu päratu integraal (2.12) lõigis  $[c, d]$ , kusjuures piirfunktsioon  $I$  on pidev lõigis  $[c, d]$ . Siis see päratu integraal koondub piirfunktsiooniks  $I$  ühtlaselt lõigis  $[c, d]$ .

Teoreemide 2.17 ja 2.18 tõestused on analoogilised vastavalt teoreemide 2.3 ja 2.4 tõestustega: teoreemi 2.17 tõestus toetub (parameetrist sõltuva teist liiki päratu integraali ühtlase koonduvuse) Cauchy kriteeriumile (teoreemile 2.15), teoreemi 2.18 tõestus toetub funktsionaaljada ühtlase koonduvuse Dini tunnusele (teoreemile 2.5) ja lemmale 2.16.

Sõnastame nüüd teoreemid, mis annavad piisavad tingimused vastavalt funktsiooni (2.12) pidevuseks, integreeruvuseks ja diferentseeruvuseks lõigis  $[c, d]$ .

**Teoreem 2.19.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev “poollahtises” ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.12) koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.12) on pidev lõigus  $[c, d]$ .

**Teoreem 2.20.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  pidev “poollahtises” ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.12) koondub ühtlaselt lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.12) on integreeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

**Teoreem 2.21.** Olgu kahe muutuja funktsioon  $w = f(x, y)$  ja tema osatuletisfunktsioon  $\frac{\partial f}{\partial y}$  pidevad “poollahtises” ristkülikus  $[a, b] \times [c, d]$ , kusjuures päratu integraal (2.12) koondub lõigus  $[c, d]$  ning parameetrist sõltuv päratu integraal  $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  koondub ühtlaselt (muutuja  $y$  suhtes) lõigus  $[c, d]$ . Siis funktsioon (2.12) on diferentseeruv lõigus  $[c, d]$ , kusjuures

$$I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{igas punktis } y \in [c, d].$$

Nagu juba öeldud, teoreemid 2.19–2.21 on teoreemide 2.6–2.8 analoogid. Ka teoreemide 2.19–2.21 tõestused on analoogilised vastavalt teoreemide 2.6–2.8 tõestusega: teoreemid 2.19–2.21 järelduvad vastavalt teoreemidest 2.9–2.11, kuid seejuures toetutakse lemma 2.2 asemel lemmale 2.16.

## § 3. Euleri integraalid

Selles paragrahvis tutvume me teatavate oluliste mitteelementaarfunktsioonidega, mis on tuntud *Euleri integraalide* nime all.

*Euleri esimest liiki integraaliks* ehk (*Euleri*) *beetafunktsiooniks* nimetatakse parameetri(te)st sõltuvat integraali

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \quad (3.1)$$

Selles integraalis on parameetrite rollis  $p$  ja  $q$ . Paneme tähele, et kui  $p < 1$  või  $q < 1$ , siis integraal (3.1) on parameetri(te)st sõltuv *päratu* integraal: kui  $p < 1$ , siis integraalialune funktsioon on tõkestamata punkti 0 igas parempoolses ümbruses; kui  $q < 1$ , siis integraalialune funktsioon on tõkestamata punkti 1 igas vasakpoolses ümbruses.

*Euleri teist liiki integraaliks* ehk (*Euleri*) *gammafunktsiooniks* nimetatakse parameetrist sõltuvat integraali

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx. \quad (3.2)$$

Selles integraalis on parameetri rollis  $p$ . Integraal (3.2) on parameetrist sõltuv *päratu* integraal. Päratust selles integraalis esineb kahel põhjusel: esiteks, “ülemine integreerimisraja on  $\infty$ ” ning, teiseks, kui  $p < 1$ , siis integraalialune funktsioon on tõkestamata punkti 0 igas parempoolses ümbruses.

### 3.1. Euleri integraalide koonduvuspiirkond

**Lause 3.1.** (a) *Euleri esimest liiki integraal (3.1) koondub parajasti siis, kui  $p > 0$  ja  $q > 0$ .*

(b) *Euleri teist liiki integraal (3.2) koondub parajasti siis, kui  $p > 0$ .*

TÕESTUS. (a). Päratu integraal (3.1) koondub parajasti siis, kui koonduvad päratud integraalid

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad \text{ja} \quad I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx; \quad (3.3)$$

seejuures integraalide  $I_1$  ja  $I_2$  puhul piisab vaadelda vaid vastavalt juhtusid, kui  $p < 1$  ja  $q < 1$  (sest kui  $p \geq 1$ , siis integraali  $I_1$  alune funktsioon on pidev lõigul  $[0, \frac{1}{2}]$ , kui aga  $q \geq 1$ , siis integraali  $I_2$  alune funktsioon on pidev lõigul  $[\frac{1}{2}, 0]$ ; seega need funktsioonid on Riemanni mõttes integreeruvad vastavalt lõikudes  $[0, \frac{1}{2}]$  ja  $[\frac{1}{2}, 0]$ , järelikult need integraalid eksisteerivad ja on lõplikud – vaadeldavatel juhtudel on tegemist tavaliste Riemanni integraalidega).

Mis tahes reaalarvu  $q$  korral  $(1-x)^{q-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$ , seega integraal  $I_1$  koondub parajasti siis, kui koondub integraal  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1} dx$  (PÕHJENDADA!); see integraal aga koondub parajasti siis, kui  $p > 0$  (PÕHJENDADA!).

Mis tahes reaalarvu  $p$  korral  $x^{p-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1-} 1$ , seega integraal  $I_2$  koondub parajasti siis, kui koondub integraal  $\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^{q-1} dx$  (PÕHJENDADA!); see integraal aga koondub parajasti siis, kui  $q > 0$  (PÕHJENDADA!).

Kokkuvõttes oleme saanud, et päratu integraal (3.1) koondub parajasti siis, kui  $p > 0$  ja  $q > 0$ .

(b). Päratu integraal (3.2) koondub parajasti siis, kui koonduvad päratud integraalid

$$I_1 := \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx \quad \text{ja} \quad I_2 := \int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx; \quad (3.4)$$

seejuures integraali  $I_1$  puhul piisab vaadelda vaid juhtu, kui  $p < 1$  (sest kui  $p \geq 1$ , siis integraalilune funktsioon on pidev lõigus  $[0, 1]$ , seega see funktsioon on Riemanni mõttes integreeruv selles lõigus, järelikult see integraal eksisteerib ja on lõplik – vaadeldaval juhul on tegemist tavalise Riemanni integraaliga).

Paneme tähele, et integraal  $I_2$  koondub iga  $p \in \mathbb{R}$  korral. Tõepoolest, olgu  $p \in \mathbb{R}$ . Integraalis  $I_2$  tekib päratu vaid sellest, et “ülemine integreerimisraja” on  $\infty$  (integraalilune funktsioon on pidev kogu poolsirgel  $[1, \infty)$ ). Mis tahes reaalarvu  $\alpha$  korral  $e^{-x} x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  (PÕHJENDADA!), seega ka

$$\frac{e^{-x} x^{p-1}}{x^{-2}} = e^{-x} x^{p+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

järelikult leidub reaalarv  $A \geq 1$  selliselt, et

$$0 < e^{-x} x^{p-1} \leq x^{-2} \quad \text{iga } x \geq A \text{ korral} \quad (\text{PÕHJENDADA!}).$$

Kuna päratu integraal  $\int_1^\infty x^{-2} dx$  koondub (PÕHJENDADA!), siis koondub ka integraal  $I_2$ .

Uurime nüüd päratu integraali  $I_1$  koonduvust. Kuna  $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$ , siis integraal  $I_1$  koondub parajasti siis, kui koondub integraal  $\int_0^1 x^{p-1} dx$  (PÕHJENDADA!); see integraal aga koondub parajasti siis, kui  $p > 0$ .

Kokkuvõttes olemegi saanud, et päratu integraal (3.2) koondub parajasti siis, kui  $p > 0$ .  $\square$

## 3.2. Euleri funktsioonide pidevus

**Lause 3.2.** (a) Euleri beetafunktsioon (3.1) on pidev kvadrandidis

$$\{(p, q) \in \mathbb{R}^2: p > 0, q > 0\}. \quad (3.5)$$

(b) Euleri gammafunktsioon (3.2) on pidev poolsirgel  $\{p \in \mathbb{R}: p > 0\}$ .

TÕESTUS. (a). Tõestamaks, et Euleri beetafunktsioon (3.1) on pidev kvadrandidis (3.5), piisab veenduda, et see funktsioon on pidev igas ristkülikus

$$\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 : p_1 \leq p \leq p_2, q_1 \leq q \leq q_2\}, \quad (3.6)$$

kus  $0 < p_1 < p_2$  ja  $0 < q_1 < q_2$ . Eeldamegi, et  $0 < p_1 < p_2$  ja  $0 < q_1 < q_2$ . Veendumaks, et beetafunktsioon on pidev ristkülikus (3.6), piisab veenduda, et (parameetritest  $p$  ja  $q$  sõltuvad) päratud integraalid (3.3) on pidevad selles ristkülikus (sest  $B(p, q) = I_1 + I_2$ ). Veendumaks, et päratud integraalid (3.3) on pidevad ristkülikus (3.6), piisab teoreemi 2.19 põhjal näidata, et need päratud integraalid koonduvad ühtlaselt parameetrite  $p$  ja  $q$  suhtes selles ristkülikus. (Täpsemalt, integraalide  $I_1$  ja  $I_2$  pidevus ristkülikus (3.6) järeldub nende integraalide ühtlasest koonduvusest selles ristkülikus teoreemi 2.19 analoogide põhjal kahest parameetrist sõltuva päratu integraali jaoks vastavalt funktsioonist, mis on määratud “poollahtises” risttahukas  $(a, b) \times [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ , ja funktsioonist, mis on määratud “poollahtises” risttahukas  $[a, b] \times [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ .)

Näitamaks, et päratud integraalid (3.3) koonduvad ühtlaselt parameetrite  $p$  ja  $q$  suhtes ristkülikus (3.6), rakendame Weierstrassi tunnust (teoreemi 2.17 analooge kahest parameetrist sõltuva päratu integraali jaoks). Mis tahes  $x \in (0, 1)$ ,  $p \in [p_1, p_2]$  ja  $q \in [q_1, q_2]$  korral

$$|x^{p-1}(1-x)^{q-1}| = x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p_1-1}(1-x)^{q_1-1}.$$

Kuna **päratud** integraalid  $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p_1-1}(1-x)^{q_1-1} dx$  ja  $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p_1-1}(1-x)^{q_1-1} dx$  koonduvad, siis Weierstrassi tunnuse põhjal (teoreemi 2.17 analoogide põhjal kahest parameetrist sõltuva päratu integraali jaoks vastavalt funktsioonist, mis on määratud hulgas  $(a, b) \times Y \times Z$ , ja funktsioonist, mis on määratud hulgas  $[a, b] \times Y \times Z$ ) koonduvad päratud integraalid  $I_1$  ja  $I_2$  ühtlaselt parameetrite  $p$  ja  $q$  suhtes ristkülikus (3.6).

(b). Tõestamaks, et Euleri gammafunktsioon (3.2) on pidev poolsirgel  $\{p \in \mathbb{R} : p > 0\}$ , piisab veenduda, et see funktsioon on pidev igas lõigus  $[p_1, p_2]$ , kus  $0 < p_1 < p_2$ . Eeldamegi, et  $0 < p_1 < p_2$ . Veendumaks, et gammafunktsioon on pidev lõigus  $[p_1, p_2]$ , piisab veenduda, et (parameetrist  $p$  sõltuvad) päratud integraalid (3.4) on pidevad selles lõigus (sest  $\Gamma(p) = I_1 + I_2$ ). Veendumaks, et päratud integraalid (3.4) on pidevad lõigus  $[p_1, p_2]$ , piisab vastavalt teoreemide 2.19 ja 2.6 põhjal näidata, et need päratud integraalid koonduvad ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigus  $[p_1, p_2]$ . (Täpsemalt, integraali  $I_1$  puhul toetutakse siin teoreemi 2.19 asemel tema analoogile “poollahtises” ristkülikus  $(a, b) \times [c, d]$  määratud funktsiooni jaoks.)

Näitamaks, et päratud integraalid (3.4) koonduvad ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigus  $[p_1, p_2]$ , rakendame Weierstrassi tunnust (vastavalt teoreemi 2.17 analoogi “poollahtises” ristkülikus  $(a, b) \times [c, d]$  määratud funktsiooni jaoks ja teoreemi 2.3). Mis tahes  $x \in (0, 1]$  ja  $p \in [p_1, p_2]$  korral

$$|e^{-x}x^{p-1}| = e^{-x}x^{p-1} \leq e^{-x}x^{p_1-1}.$$

Kuna päratu integraal  $\int_0^1 e^{-x}x^{p_1-1} dx$  koondub, siis Weierstrassi tunnuse põhjal (teoreemi 2.17 analoogi põhjal “poollahtises” ristkülikus  $(a, b) \times [c, d]$  määratud funktsiooni jaoks) koondub päratu integraal  $I_1$  ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigus  $[p_1, p_2]$ .

Mis tahes  $x \in [1, \infty)$  ja  $p \in [p_1, p_2]$  korral

$$|e^{-x}x^{p-1}| = e^{-x}x^{p-1} \leq e^{-x}x^{p_2-1}.$$

Kuna päratu integraal  $\int_1^\infty e^{-x}x^{p_2-1} dx$  koondub, siis Weierstrassi tunnuse (teoreemi 2.3) põhjal koondub päratu integraal  $I_2$  ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigus  $[p_1, p_2]$ .  $\square$

### 3.3. Euleri gammafunktsiooni omadusi

**Lause 3.3.** Euleri gammafunktsioon (3.2) on poolsirgel  $\{p \in \mathbb{R}: p > 0\}$  kui tahes palju kordi diferentseeruv; seejuures me võime seda funktsiooni diferentseerida kui tahes palju kordi integraali märgi all. Täpsemalt, iga  $n \in \mathbb{N}$  korral igas punktis  $p > 0$

$$\frac{d^n \Gamma}{dp^n}(p) = \int_0^\infty \frac{d^n}{dp^n}(e^{-x}x^{p-1}) dx = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx. \quad (3.7)$$

TÕESTUS. Lause tõestuseks piisab veenduda, et mis tahes reaalarvude  $p_2 > p_1 > 0$  korral kehtib valem (3.7) iga  $n \in \mathbb{N}$  korral igas punktis  $p \in [p_1, p_2]$ . Fikseerime vabalt reaalarvud  $p_2 > p_1 > 0$ . Veendumaks, et valem (3.7) kehtib iga  $n \in \mathbb{N}$  korral igas punktis  $p \in [p_1, p_2]$ , piisab, defineerides

$$I_1(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1} dx \quad \text{ja} \quad I_2(p) = \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1} dx,$$

veenduda, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral igas punktis  $p \in [p_1, p_2]$

$$\frac{d^n I_1}{dp^n}(p) = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx \quad \text{ja} \quad \frac{d^n I_2}{dp^n}(p) = \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx \quad (3.8)$$

(sest  $\Gamma(p) = I_1(p) + I_2(p)$  ning  $\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx = \int_0^1 e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx + \int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n dx$ ). Veendumaks, et iga  $n \in \mathbb{N}$  korral igas punktis  $p \in [p_1, p_2]$  kehtivad võrdused (3.8), piisab vastavalt teoreemide 2.21 ja 2.8 põhjal näidata, et nendes võrdustes paremal pool võrdusmärgi olevad päratud integraalid koonduvad ühtlaselt parameetri  $p$  järgi lõigus  $[p_1, p_2]$ . (Täpsemalt, võrdustest (3.8) esimese kehtivuse põhjendamisel me toetume siin teoreemi 2.21 asemel tema analoogile “poollahtises” riskülilikus  $(a, b] \times [c, d]$  määratud funktsiooni jaoks.)

Näitamaks, et võrdustes (3.8) esinevad päratud integraalid koonduvad ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigus  $[p_1, p_2]$ , rakendame Weierstrassi tunnust (vastavalt teoreemi 2.17 analoogi hulgas  $(a, b] \times Y$  määratud funktsiooni jaoks ja teoreemi 2.3). Mis tahes  $x \in (0, 1]$  ja  $p \in [p_1, p_2]$  korral, valides reaalarvu  $\alpha > 0$  selliselt, et  $p_1 - \alpha > 0$ ,

$$|e^{-x}x^{p-1}(\ln x)^n| = e^{-x}x^{p-1}|(\ln x)^n| \leq e^{-x}x^{p_1-1}|(\ln x)^n| = e^{-x}x^{p_1-\alpha-1} \left| \frac{(\ln x)^n}{x^{-\alpha}} \right|.$$

Kuna päratu integraal  $\int_0^1 e^{-x}x^{p_1-\alpha-1} \left| \frac{(\ln x)^n}{x^{-\alpha}} \right| dx$  koondub (sest  $\left| \frac{(\ln x)^n}{x^{-\alpha}} \right| \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$  (PÕHJENDADA!)) ja päratu integraal  $\int_0^1 e^{-x}x^{p_1-\alpha-1} dx$  koondub (PÕHJENDADA, MIKS SIIT JÄ-

RELDUB PÄRATU INTEGRAALI  $\int_0^1 e^{-x} x^{p_1 - \alpha - 1} \left| \frac{(\ln x)^n}{x^{-\alpha}} \right| dx$  KOONDUVUS!) ) siis Weierstrassi tunnuse põhjal (teoreemi 2.17 analoogi põhjal hulgas  $(a, b] \times Y$  määratud funktsiooni jaoks) koondub päratu integraal  $\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^n dx$  ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigul  $[p_1, p_2]$ . Mis tahes  $x \in [1, \infty)$  ja  $p \in [p_1, p_2]$  korral

$$|e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^n| = e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^n \leq e^{-x} x^{p_2-1} (\ln x)^n = e^{-x} x^{p_2} \frac{(\ln x)^n}{x}.$$

Kuna päratu integraal  $\int_1^\infty e^{-x} x^{p_2} \frac{(\ln x)^n}{x} dx$  koondub (sest  $\frac{(\ln x)^n}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$  (PÕHJENDADA!)) ja päratu integraal  $\int_1^\infty e^{-x} x^{p_2} dx$  koondub (PÕHJENDADA, MIKS SIIT JÄREL DUB PÄRATU INTEGRAALI  $\int_1^\infty e^{-x} x^{p_2} \frac{(\ln x)^n}{x} dx$  KOONDUVUS!)) siis Weierstrassi tunnuse (teoreemi 2.3) põhjal koondub päratu integraal  $\int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} (\ln x)^n dx$  ühtlaselt parameetri  $p$  suhtes lõigul  $[p_1, p_2]$ .  $\square$

**Lause 3.4.** Mis tahes reaalarvu  $p > 0$  korral

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (3.9)$$

**NB!** Formaalselt meil ei ole kasutada ositi integreerimise valemit päratu integraali jaoks!

TÕESTUS. Ositi integreerimise valemi põhjal

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = \int_0^\infty x^p d(-e^{-x}) = (-e^{-x} x^p) \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \\ &= 0 + p \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = p\Gamma(p). \end{aligned}$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \Gamma(p+1) &= \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = \int_0^1 e^{-x} x^p dx + \int_1^\infty e^{-x} x^p dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 e^{-x} x^p dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} x^p dx. \end{aligned}$$

Rakendades integraalidele  $\int_a^1 e^{-x} x^p dx$  ja  $\int_1^b e^{-x} x^p dx$ , kus  $0 < a < 1$  ja  $b > 1$ , ositi integreerimise valemit, saame

$$\int_a^1 e^{-x} x^p dx = \int_a^1 x^p d(-e^{-x}) = (-e^{-x} x^p) \Big|_a^1 + p \int_a^1 e^{-x} x^{p-1} dx$$

ja

$$\int_1^b e^{-x} x^p dx = \int_1^b x^p d(-e^{-x}) = (-e^{-x} x^p) \Big|_1^b + p \int_1^b e^{-x} x^{p-1} dx,$$

seega

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1) &= \lim_{a \rightarrow 0+} \left( e^{-a} a^p - e^{-1} + p \int_a^1 e^{-x} x^{p-1} dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left( e^{-1} - e^{-b} b^p + p \int_1^b e^{-x} x^{p-1} dx \right) \\ &= \left( 0 - e^{-1} + p \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx \right) + \left( e^{-1} - 0 + p \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \right) \\ &= p \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = p\Gamma(p).\end{aligned}$$

□

Mis tahes  $n \in \mathbb{N}$  ja reaalarvu  $p > n - 1$  korral saame valemit (3.9)  $n$  korda rakendades

$$\Gamma(p+1) = p(p-1) \cdots (p-n+1)\Gamma(p-n+1). \quad (3.10)$$

Valemile (3.10) (samuti valemile (3.9)) viidatakse kui (*gammafunktsiooni taandamisvalemile*): see valem võimaldab esitada gammafunktsiooni väärtused argumendi väärtuste korral, mis on suuremad ühest, selle funktsiooni väärtuste kaudu argumendi väärtuste korral, mis on nulli ja ühe vahel.

Arvestades, et  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ , saame, võttes taandamisvalemis (3.10)  $p = n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

**Lause 3.5.** Mis tahes reaalarvu  $p \in (0, 1)$  korral

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}. \quad (3.11)$$

Valemile (3.11) viidatakse kui (*gammafunktsiooni täiendusvalemile*)

LAUSE 3.5 TÕESTUS. KÄESOLEVAS KURSUSES ME SEDA TEOREEMI EI TÕESTA. □

### 3.4. Euleri beetafunktsiooni omadusi

**Lause 3.6.** Mis tahes reaalarvude  $p > 0$  ja  $q > 0$  korral

$$(a) \quad B(p, q) = B(q, p);$$

$$(b) \quad B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q);$$

$$(c) \quad B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q);$$

$$(d) \quad \text{kui } 0 < p < 1, \text{ siis } B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p};$$

$$(e) \quad B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

Valemile (a) lauses 3.6 viidatakse kui beetafunktsiooni *sümmeetriaomadusele*, valemitele (b) ja (c) kui *taandamisvalemitele* ning valemile (d) kui *täiendusvalemile*. Täiendusvalemi (d) tõestamise lükkame edasi järgmisse jaotisse: me järeldame selle gammafunktsiooni täiendusvalemist (lausest 3.5) kasutades seost Euleri integraalide vahel (lauset 3.7).

LAUSE 3.6 TÕESTUS. Olgu  $p > 0$  ja  $q > 0$ .

(a). Valem  $B(p, q) = B(q, p)$  saadakse, kui teha integraalis  $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  muutuja vahetus  $x = 1 - t$ .

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx + \lim_{b \rightarrow 1-} \int_{\frac{1}{2}}^b x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \end{aligned}$$

Tehes integraalides  $\int_a^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  ja  $\int_{\frac{1}{2}}^b x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ , kus  $0 < a < \frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{2} < b < 1$ , muutuja vahetuse  $x = 1 - t$ , saame

$$\int_a^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_{1-a}^{1-\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt$$

ja

$$\int_{\frac{1}{2}}^b x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_{1-b}^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt,$$

seega

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt + \lim_{b \rightarrow 1-} \int_{1-b}^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1} dt = B(q, p). \end{aligned}$$

(b). Ositi integreerimise valemi põhjal

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^{p-1}(1-x)^q dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 (1-x)^q d\left(\frac{x^p}{p}\right) = \lim_{a \rightarrow 0+} \left( \frac{x^p(1-x)^q}{p} \Big|_a^1 + \frac{q}{p} \int_a^1 x^p(1-x)^{q-1} dx \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0+} \left( 0 - \frac{a^p(1-a)^q}{p} \right) + \frac{q}{p} \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^p(1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{q}{p} \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1} dx. \end{aligned}$$

Arvestades, et

$$\begin{aligned} x^p(1-x)^{q-1} &= x^p(1-x)^{q-1} - x^{p-1}(1-x)^{q-1} + x^{p-1}(1-x)^{q-1} \\ &= x^{p-1}(1-x)^{q-1}(x-1) + x^{p-1}(1-x)^{q-1} \\ &= -x^{p-1}(1-x)^q + x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \end{aligned}$$

saame eelnevast võrdusteahelast

$$\begin{aligned} B(p, q+1) &= -\frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx + \frac{q}{p} \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \\ &= -\frac{q}{p} B(p, q+1) + \frac{q}{p} B(p, q), \end{aligned}$$

millest järeldub tõestatav võrdus  $B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q)$ .

(c). Beetafunktsiooni sümmeetriaomaduse (a) ja taandamisvalemi (b) põhjal

$$B(p+1, q) = B(q, p+1) = \frac{p}{p+q} B(q, p) = \frac{p}{p+q} B(p, q).$$

(e). Valem saadakse, kui teha integraalis  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  muutuja vahetus  $x = \frac{t}{1+t}$  (PÕHJENDADA!).  $\square$

### 3.5. Euleri integraalide vaheline seos

**Lause 3.7.** *Mis tahes reaalarvude  $p > 0$  ja  $q > 0$  korral*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (3.12)$$

Enne lause 3.7 tõestamist tõestame – järeldusena sellest lausest ja lausest 3.5 (gammafunktsiooni täiendusvalemist) – lause 3.6 väite (d) (beetafunktsiooni täiendusvalemi).

LAUSE 3.6, (d), TÕESTUS. Kui  $0 < p < 1$ , siis lausete 3.7 ja 3.5 (gammafunktsiooni täiendusvalemi) põhjal

$$B(p, 1-p) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(1-p)}{\Gamma(1)} = \Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

$\square$

LAUSE 3.7 TÕESTUS. Olgu  $p, q > 0$  ning olgu  $t > 0$ . Tehes integraalis  $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$  muutuja vahetuse  $x = tu$ , saame  $\Gamma(p) = t^p \int_0^\infty e^{-tu} u^{p-1} du$  (PÕHJENDADA!), millest

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^\infty e^{-tu} u^{p-1} du.$$

Võttes selles võrduses arvude  $p$  ja  $t$  rolli vastavalt  $p + q$  ja  $1 + t$  ning korrutades seejärel saadud võrduse mõlemaid pooli arvuga  $t^{p-1}$ , saame

$$\frac{\Gamma(p+q) t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty e^{-(1+t)u} t^{p-1} u^{p+q-1} du = \int_0^\infty f(u, t) du, \quad (3.13)$$

kus  $f(u, t) = e^{-(1+t)u} t^{p-1} u^{p+q-1}$ . Võrdusteahel (3.13) kehtib iga  $t \geq 0$  korral, seega lause 3.6, (e), põhjal

$$\Gamma(p+q) B(p, q) = \Gamma(p+q) \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(u, t) du \right) dt. \quad (3.14)$$

Kui  $p, q > 1$ , siis teoreemi 2.14 põhjal

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(u, t) du \right) dt = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(u, t) dt \right) du, \quad (3.15)$$

sest juhul, kui  $p, q > 1$ , rahuldab funktsioon  $f$  teoreemi 2.14 eeldusi, kui seal võtta  $a = c = 0$  ning muutujate  $x$  ja  $y$  rolli võtta vastavalt  $u$  ja  $t$ ; nimelt,

- funktsioon  $f$  on mittenegatiivne ja pidev kvadrantis  $\{(u, t): u, t \geq 0\}$ ;
- parameetrist  $t$  sõltuv päratu integraal  $I(t) := \int_0^\infty f(u, t) du$  koondub ja on pidev poolsirgel  $t \geq 0$  (võrdus(t)e (3.13) põhjal);
- parameetrist  $u$  sõltuv päratu integraal  $K(u) := \int_0^\infty f(u, t) dt$  koondub ja on pidev poolsirgel  $u \geq 0$ :

$$\begin{aligned} K(u) &= \int_0^\infty f(u, t) dt = \int_0^\infty e^{-(1+t)u} t^{p-1} u^{p+q-1} dt \\ &= e^{-u} u^{q-1} \int_0^\infty e^{-tu} (tu)^{p-1} u dt = e^{-u} u^{q-1} \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = e^{-u} u^{q-1} \Gamma(p); \end{aligned} \quad (3.16)$$

- päratu integraal  $\int_0^\infty I(t) dt = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(u, t) du \right) dt$  koondub (võrdus(t)e (3.14) põhjal).

Võrdustest (3.14), (3.15) ja (3.16) saame nüüd

$$\begin{aligned} \Gamma(p+q) B(p, q) &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f(u, t) dt \right) du = \int_0^\infty K(u) du = \Gamma(p) \int_0^\infty e^{-u} u^{q-1} du \\ &= \Gamma(p) \Gamma(q), \end{aligned}$$

millega on tõestatud võrduse (3.12) kehtivus juhul, kui  $p, q > 1$ .

Olgu nüüd  $p, q > 0$  suvalised. Siis  $p + 1 > 1$  ja  $q + 1 > 1$ , seega äsjatõestatu põhjal

$$B(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}. \quad (3.17)$$

Beetafunktsiooni taandamisvalemi(te) (lause 3.6, (b) ja (c)) põhjal

$$B(p+1, q+1) = \frac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \frac{q}{p+q+1} \cdot \frac{p}{p+q} B(p, q); \quad (3.18)$$

gammafunktsiooni taandamisvalemi (lause 3.4) põhjal

$$\frac{\Gamma(p+1) \Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p \Gamma(p) q \Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q) \Gamma(p+q)}. \quad (3.19)$$

Võrdus (3.12) järeldeb võrdustest (3.17)–(3.19). □