

Kodutöö nr. 2 ülesande 2 näidislahendusi

Ülesanne 1. Uurida, kas funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

on kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

LAHENDUS. Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletised (seda muidugi juhul, kui need osatuletised eksisteerivad). Kui $(x, y) \neq (0, 0)$, siis

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \left(\frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{(x^3 y^2)'_x (x^2 + y^2) - x^3 y^2 (x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2 y^2 (x^2 + y^2) - x^3 y^2 2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4 y^2 + 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) &= \left(\frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{(x^3 y^2)'_y (x^2 + y^2) - x^3 y^2 (x^2 + y^2)'_y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^3 y (x^2 + y^2) - x^3 y^2 2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Osatuletiste definitsiooni põhjal (arvestades, et $f(0, 0) = 0$)

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 \cdot 0^2}{h^2 + 0^2}}{h} = 0$$

ja

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3 \cdot h^2}{0^2 + h^2}}{h} = 0.$$

Veendumaks, et funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0, 0)$, piisab teoreemi II.1.4 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (ii) põhjal näidata, et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - (f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y)}{\rho} = 0, \quad (2.1)$$

kus $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Kuna $f(0, 0) = 0$, $f'_x(0, 0) = 0$ ja $f'_y(0, 0) = 0$, siis tingimus (2.1) on samaväärne tingimusega

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^3 \Delta y^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ehk (kirjutades Δx ja Δy asemel vastavalt x ja y)

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 \cos^3 \phi \sin^2 \phi}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^3 \phi \sin^2 \phi = 0$$

(sest tegur $\cos^3 \phi \sin^2 \phi$ on tõkestatud). Niisiis, funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

NB! Alternatiivset võimalust osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ leidmiseks on kirjeldatud märkuses 2.1.

NB! Alternatiivset võimalust funktsiooni f diferentseeruvuse põhjendamiseks punktis $(0, 0)$ on kirjeldatud märkuses 2.2.

Uurime, kas funktsioon f on kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$. Selleks leiame kõigepealt funktsiooni f teist järku osatuletised $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$ (seda muidugi juhul, kui need osatuletised eksisteerivad). Osatuletiste definitsiooni põhjal (arvestades, et $f'_x(0, 0) = 0$)

$$f''_{x^2}(0, 0) = (f'_x)'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0 + h, 0) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4 \cdot 0^2 + 3h^2 \cdot 0^4}{(h^2 + 0^2)^2}}{h} = 0$$

ja

$$f''_{xy}(0, 0) = (f'_x)'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, 0 + h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^4 \cdot h^2 + 3 \cdot 0^2 \cdot h^4}{(0^2 + h^2)^2}}{h} = 0$$

ning (arvestades, et $f'_y(0, 0) = 0$)

$$f''_{yx}(0, 0) = (f'_y)'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0 + h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^5 \cdot 0}{(h^2 + 0^2)^2}}{h} = 0$$

ja

$$f''_{y^2}(0, 0) = (f'_y)'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0, 0 + h) - f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \cdot 0^5 \cdot h}{(0^2 + h^2)^2}}{h} = 0.$$

Funktsiooni f kahekordne diferentseeruvus punktis $(0, 0)$ tähendab, et

- (1) funktsioon f on diferentseeruv punkti $(0, 0)$ mingis ümbruses;
- (2) funktsiooni f esimest järku osatuletised on diferentseeruvad punktis $(0, 0)$.

Eelnevas veendusime, et funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0, 0)$. Igas punktis $(x, y) \neq (0, 0)$ on funktsiooni f esimest järku osatuletised pidevad (PÕHJENDADA!), seega (teoreemi II.1.6 põhjal) funktsioon f on diferentseeruv ka igas punktis $(x, y) \neq (0, 0)$; niisiis funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, järelikult tingimus (1) kehtib.

Uurime, kas kehtib ka tingimus (2), s.t. kas funktsiooni f esimest järku osatuletised on diferentseeruvad punktis $(0, 0)$.

Osatuletisfunktsiooni f'_x diferentseeruvus punktis $(0, 0)$ tähendab (teoreemi II.1.4 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (ii) põhjal), et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f'_x(0, 0) - (f''_{x^2}(0, 0)\Delta x + f''_{xy}(0, 0)\Delta y)}{\rho} = 0, \quad (2.2)$$

kus $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Kuna $f'_x(0, 0) = 0$, $f''_{x^2}(0, 0) = 0$ ja $f''_{xy}(0, 0) = 0$, siis tingimus (2.2) on samaväärne tingimusega

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^4 \Delta y^2 + 3\Delta x^2 \Delta y^4}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ehk (kirjutades Δx ja Δy asemel vastavalt x ja y)

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^4 y^2 + 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\begin{aligned} \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^4 y^2 + 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} &= \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^2 \phi \sin^2 \phi (\cos^2 \phi + 3 \sin^2 \phi)}{r^5} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \phi \sin^2 \phi (1 + 2 \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos^2 \phi \sin^2 \phi (1 + 2 \sin^2 \phi)$ on tõkestatud). Niisiis, osatuletisfunktsioon f'_x on diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

NB! Alternatiivset võimalust (antud ülesande kontekstis ebaökoonoomsemat) võimalust osatuletiste $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$ leidmiseks on kirjeldatud märkuses 2.3.

NB! Alternatiivset võimalust funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonide diferentseeruvuse põhjendamiseks punktis $(0, 0)$ on kirjeldatud märkuses 2.4.

Osatuletisfunktsiooni f'_y diferentseeruvus punktis $(0, 0)$ tähendab (teoreemi II.2.4 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (ii) põhjal), et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_y(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f'_y(0, 0) - (f''_{yx}(0, 0)\Delta x + f''_{y^2}(0, 0)\Delta y)}{\rho} = 0, \quad (2.3)$$

kus $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Kuna $f'_y(0, 0) = 0$, $f''_{yx}(0, 0) = 0$ ja $f''_{y^2}(0, 0) = 0$, siis tingimus (2.3) on samaväärne tingimusega

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_y(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x^5 \Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ehk (kirjutades Δx ja Δy asemel vastavalt x ja y)

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^6 \cos^5 \phi \sin \phi}{r^5} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos^5 \phi \sin \phi = 0$$

(sest tegur $\cos^5 \phi \sin \phi$ on tõkestatud). Niisiis, osatuletisfunktsioon f'_y on diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

Oleme näidanud, et funktsiooni f esimest järku osatuletised on diferentseeruvad punktis $(0, 0)$, s.t. tingimus (2) kehtib. Niisiis, funktsioon f on kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

Märkus 2.1. Alternatiivne moodus osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ leidmiseks on kasutada teoreemi tuletise piirväärtusest. Selleks paneme kõigepealt tähele, et funktsioon f on pidev punktis $(0, 0)$, s.t. $\lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0)$, s.t. $\lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 \cos^3 \phi \sin^2 \phi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r^3 \cos^3 \phi \sin^2 \phi = 0$$

(sest tegur $\cos^3 \phi \sin^2 \phi$ on tõkestatud). Kuna eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \cdot 0^2 + 3x^2 \cdot 0^4}{(x^2 + 0^2)^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 0^5 \cdot y}{(0^2 + y^2)^2} = 0,$$

siis teoreemi põhjal tuletise piirväärtusest (vt. nt. ???) eksisteerivad vastavalt osatuletised $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$, kusjuures

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = 0.$$

Rõhutame, et piirväärtuste $\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y)$ olemasolu on (funktsiooni f pidevuse korral punktis $(0, 0)$) vastavalt osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ olemasoluks piisav, kuid mitte tarvilik tingimus.

Märkus 2.2. Alternatiivne moodus veendumaks, et funktsioon f on punktis $(0, 0)$ diferentseeruv, on näidata, et selle funktsiooni esimest järku osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis $(0, 0)$ (vt. teoreemi II.1.6), s.t.

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0) \quad \text{ja} \quad \lim_{x, y \rightarrow 0} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0),$$

NB! Kodutöödes ootame, et funktsiooni f (esimest järku) diferentseeruvuse põhjendamisel punktis $(0, 0)$ ei kasutata teoreemi II.1.6, vaid lähtutakse teoreemi II.1.4 samaväärsusest (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

s.t. $\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_x(x,y) = 0$ ja $\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_y(x,y) = 0$. Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. teheme muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f'_x(x,y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^6 \cos^2 \phi \sin^2 \phi (\cos^2 \phi + 3 \sin^2 \phi)}{r^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos^2 \phi \sin^2 \phi (1 + 2 \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos^2 \phi \sin^2 \phi (1 + 2 \sin^2 \phi)$ on tõkestatud) ja

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_y(x,y) = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^6 \cos^5 \phi \sin \phi}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} 2r^2 \cos^5 \phi \sin \phi = 0$$

(sest tegur $\cos^5 \phi \sin \phi$ on tõkestatud).

Rõhutame, et funktsiooni esimest järku osatuletisfunktsioonide pidevus antud punktis on piisav, kuid mitte tarvilik tingimus selle funktsiooni diferentseeruvuseks selles punktis.

Märkus 2.3. Alternatiivne moodus osatuletiste $f''_{x^2}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ ja $f''_{y^2}(0,0)$ leidmiseks on kasutada teoreemi tuletise piirväärtusest. Selleks on vaja teada funktsiooni f teist järku osatuletisi punkti $(0,0)$ mingis ümbruses. Leiame need osatuletised (kui nad muidugi eksisteerivad). Kui $(x,y) \neq (0,0)$, siis

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x,y) &= (f'_x)'_x(x,y) = \left(\frac{x^4 y^2 + 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x \\ &= \frac{(x^4 y^2 + 3x^2 y^4)'_x (x^2 + y^2)^2 - (x^4 y^2 + 3x^2 y^4) ((x^2 + y^2)^2)'_x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(4x^3 y^2 + 6x y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4 y^2 + 3x^2 y^4) 2(x^2 + y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2xy^2 (x^2 + y^2) ((2x^2 + 3y^2)(x^2 + y^2) - (2x^4 + 6x^2 y^2))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2xy^2 ((2x^4 + 2x^2 y^2 + 3x^2 y^2 + 3y^4) - (2x^4 + 6x^2 y^2))}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2xy^2 (-x^2 y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= -\frac{2xy^4 (x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x,y) &= (f'_x)'_y(x,y) = \left(\frac{x^4 y^2 + 3x^2 y^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y \\ &= \frac{(x^4 y^2 + 3x^2 y^4)'_y (x^2 + y^2)^2 - (x^4 y^2 + 3x^2 y^4) ((x^2 + y^2)^2)'_y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(2x^4 y + 12x^2 y^3)(x^2 + y^2)^2 - (x^4 y^2 + 3x^2 y^4) 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^2 y (x^2 + y^2) ((x^2 + 6y^2)(x^2 + y^2) - (2x^2 y^2 + 6y^4))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^2 y ((x^4 + x^2 y^2 + 6x^2 y^2 + 6y^4) - (2x^2 y^2 + 6y^4))}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x^2 y (x^4 + 5x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{2x^4 y (x^2 + 5y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} f''_{yx}(x, y) &= (f'_y)'_x(x, y) = \left(\frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x = \frac{(2x^5 y)'_x (x^2 + y^2)^2 - 2x^5 y ((x^2 + y^2)^2)'_x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{10x^4 y (x^2 + y^2)^2 - 2x^5 y 2(x^2 + y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2x^4 y (x^2 + y^2) (5(x^2 + y^2) - 4x^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^4 y (x^2 + 5y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f''_{y^2}(x, y) &= (f'_y)'_y(x, y) = \left(\frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = \frac{(2x^5 y)'_y (x^2 + y^2)^2 - 2x^5 y ((x^2 + y^2)^2)'_y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^5 (x^2 + y^2)^2 - 2x^5 y 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{2x^5 (x^2 + y^2) ((x^2 + y^2) - 4y^2)}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{2x^5 (x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Edasi, märgime, et funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonid f'_x ja f'_y on pidevad punktis $(0, 0)$ (vt. märkust 2.2). Kuna eksisteerivad piirväärtused

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \cdot 0^4 \cdot (x^2 - 3 \cdot 0^2)}{(x^2 + 0^2)^3} = 0, & \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 0^4 \cdot y (0^2 + 5y^2)}{(0^2 + y^2)^3} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^4 \cdot 0 \cdot (x^2 + 5 \cdot 0^2)}{(x^2 + 0^2)^3} = 0, & \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 0^5 \cdot (0^2 - 3y^2)}{(0^2 + y^2)^3} = 0, \end{aligned}$$

siis teoreemi põhjal tuletise piirväärtusest (vt. nt. ???) eksisteerivad vastavalt osatuletised $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$, kusjuures

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0) = 0, & f''_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y) = 0, \\ f''_{yx}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) = 0, & f''_{y^2}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y) = 0. \end{aligned}$$

Rõhutame, et piirväärtuste

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0), \quad \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y)$$

olemasolu on (vastavate esimest järku osatuletisfunktsioonide pidevuse korral punktis $(0, 0)$) vastavalt osatuletiste $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$ olemasoluks piisav, kuid mitte tarvilik tingimus.

Märkus 2.4. Alternatiivne moodus põhjendamaks, et funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonid on diferentseeruvad punktis $(0, 0)$, on näidata, et funktsiooni f teist järku osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis $(0, 0)$ (sest teoreemi II.1.6 põhjal piisab funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonide diferentseeruvuseks punktis $(0, 0)$ nende osatuletisfunktsioonide esimest järku osatuletisfunktsioonide pidevusest punktis $(0, 0)$ ning funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonide esimest järku osatuletisfunktsioonid on parajasti selle funktsiooni teist järku osatuletisfunktsioonid).

Näitame, et funktsiooni f teist järku osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis $(0, 0)$, s.t.

$$\begin{aligned} \lim_{x, y \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, y) &= f''_{x^2}(0, 0), & \lim_{x, y \rightarrow 0} f''_{xy}(x, y) &= f''_{xy}(0, 0), \\ \lim_{x, y \rightarrow 0} f''_{yx}(x, y) &= f''_{yx}(0, 0), & \lim_{x, y \rightarrow 0} f''_{y^2}(x, y) &= f''_{y^2}(0, 0), \end{aligned}$$

s. t.

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{x^2}(x,y) = 0, \quad \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{xy}(x,y) = 0, \quad \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{yx}(x,y) = 0, \quad \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{y^2}(x,y) = 0.$$

Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{x^2}(x,y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{-2xy^4(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = -2 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^7 \cos \phi \sin^4 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi)}{r^6} \\ &= -2 \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \phi \sin^4 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos \phi \sin^4 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi)$ on tõkestatud),

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{xy}(x,y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{2x^4y(x^2 + 5y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^7 \cos^4 \phi \sin \phi (\cos^2 \phi + 5 \sin^2 \phi)}{r^6} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos^4 \phi \sin \phi (1 + 4 \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos^4 \phi \sin \phi (1 + 4 \sin^2 \phi)$ on tõkestatud),

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{yx}(x,y) = \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{xy}(x,y) = 0$$

ja

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f''_{y^2}(x,y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{2x^5(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^7 \cos^5 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi)}{r^6} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos^5 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos^5 \phi (\cos^2 \phi - 3 \sin^2 \phi)$ on tõkestatud).

Funktsiooni diferentseeruvuse kindlakstegemise antud punktis teeb sageli lihtsaks järgnev lause.

Lause 2.1. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ määratud punkti $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mingis ümbruses $\mathcal{U}$, kusjuures see funktsioon on pidev punktis (x_0, y_0) ning igas punktis $(x, y) \in \mathcal{U} \setminus \{(x_0, y_0)\}$ eksisteerivad sellel funktsioonil lõplikud osatuletised $f'_x(x, y)$ ja $f'_y(x, y)$. Kui eksisteerivad piirväärtused

NB! Kodutöös ootame, et funktsiooni f (esimest järku) diferentseeruvuse põhjendamisel punktis $(0, 0)$ ei kasutata lauset 2.1, vaid lähtutakse teoreemi II.1.4 samaväärsusest (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

$$\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_x(x, y) \quad \text{ja} \quad \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_y(x, y), \quad (2.4)$$

siis eksisteerivad ka osatuletised $f'_x(x_0, y_0)$ ja $f'_y(x_0, y_0)$, kusjuures

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_x(x, y) \quad \text{ja} \quad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_y(x, y). \quad (2.5)$$

Kui seejuures piirväärtused (2.4) on lõplikud, siis osatuletisfunktsioonid f'_x ja f'_y on pidevad punktis (x_0, y_0) ning seega (teoreemi II.1.6 põhjal) funktsioon f on diferentseeruv punktis (x_0, y_0) .

TÕESTUS. Eksisteerigu piirväärtused (2.4). Siis eksisteerivad ka piirväärtused $\lim_{x \rightarrow x_0} f'_x(x, y_0)$ ja $\lim_{y \rightarrow y_0} f'_y(x_0, y)$, kusjuures

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'_x(x, y_0) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_x(x, y) \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} f'_y(x_0, y) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_y(x, y)$$

(PÕHJENDADA!). Teoreemi põhjal tuletise piirväärtusest (vt. nt. ???) eksisteerivad osatuletised $f'_x(x_0, y_0)$ ja $f'_y(x_0, y_0)$, kusjuures

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'_x(x, y_0) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_x(x, y)$$

ja

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f'_y(x_0, y) = \lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f'_y(x, y).$$

Kui piirväärtused (2.4) on lõplikud, siis osatuletisfunktsioonide f'_x ja f'_y pidevus punktis (x_0, y_0) järeldub võrdustest (2.5). $\square$

Ülesanne 2. Uurida, kas ülesande 53 funktsioon

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

on kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

LAHENDUS. Leiame funktsiooni f esimest järku osatuletised (seda muidugi juhul, kui need osatuletised eksisteerivad). Kui $(x, y) \neq (0, 0)$, siis

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \left(\frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} \right)'_x = \frac{(x^3y - xy^3)'_x (x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)(x^2 + y^2)'_x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(3x^4y + 3x^2y^3 - x^2y^3 - y^5) - (2x^4y - 2x^2y^3)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

ja sümmeetria põhjal

$$f'_y(x, y) = \left(-\frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} \right)'_y = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

NB! Alternatiivset võimalust osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ leidmiseks on kirjeldatud märkuses 2.6.

Osatuletiste definitsiooni põhjal (arvestades, et $f(0, 0) = 0$)

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot 0 \cdot \frac{h^2 - 0^2}{h^2 + 0^2}}{h} = 0$$

ja

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 \cdot h \cdot \frac{0^2 - h^2}{0^2 + h^2}}{h} = 0$$

(siin osatuletise $f'_y(0, 0)$) leidmisel võinuksime kasutada ka sümmeetriat muutujate x ja y vahel).

NB! Alternatiivset võimalust funktsiooni f diferentseeruvuse põhjendamiseks punktis $(0, 0)$ on kirjeldatud märkuses 2.7.

Veendumaks, et funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0, 0)$, piisab teoreemi II.1.4 samaväärsuse (i) $\Leftrightarrow$ (ii) põhjal näidata, et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0) - (f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y)}{\rho} = 0, \quad (2.6)$$

kus $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Kuna $f(0, 0) = 0$, $f'_x(0, 0) = 0$ ja $f'_y(0, 0) = 0$, siis tingimus (2.6) on samaväärne tingimusega

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^3 \Delta y - \Delta x \Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ehk (kirjutades Δx ja Δy asemel vastavalt x ja y)

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Veendume selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{r^3} = r \cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0$$

(sest tegur $\cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$ on tõkestatud). Niisiis, funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

NB! Alternatiivset (antud ülesande kontekstis ebaõukoonumemat) võimalust osatuletiste $f''_{x_2}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ ja $f''_{y^2}(0,0)$ leidmiseks on kirjeldatud märkuses 2.8.

Uurime, kas funktsioon f on kaks korda diferentseeruv punktis $(0,0)$. Selleks leiame kõigepealt funktsiooni f teist järku osatuletised $f''_{x_2}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ ja $f''_{y^2}(0,0)$ (seda muidugi juhul, kui need osatuletised eksisteerivad). Osatuletiste definitsiooni põhjal (arvestades, et $f'_x(0,0) = 0$)

$$f''_{x^2}(0,0) = (f'_x)'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0+h,0) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(h,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^4 \cdot 0 + 4h^2 \cdot 0^3 - 0^5}{(h^2+0^2)^2}}{h} = 0$$

ja

$$\begin{aligned} f''_{xy}(0,0) &= (f'_x)'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,0+h) - f'_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_x(0,h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^4 \cdot h + 4 \cdot 0^2 \cdot h^3 - h^5}{(0^2+h^2)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1 \end{aligned}$$

ning (arvestades, et $f'_y(0,0) = 0$)

$$\begin{aligned} f''_{yx}(0,0) &= (f'_y)'_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0+h,0) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(h,0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5 - 4h^3 \cdot 0^2 - h \cdot 0^4}{(h^2+0^2)^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1 \end{aligned}$$

ja

$$f''_{y^2}(0,0) = (f'_y)'_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0,0+h) - f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_y(0,h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^5 - 4 \cdot 0^3 \cdot h^2 - 0 \cdot h^4}{(0^2+h^2)^2}}{h} = 0$$

(siin osatuletiste $f''_{yx}(0,0)$ ja $f''_{y^2}(0,0)$ leidmisel võinuksime kasutada ka sümmeetriat muutujate x ja y vahel).

Funktsiooni f kahekordne diferentseeruvus punktis $(0,0)$ tähendab, et

- (1) funktsioon f on diferentseeruv punkti $(0,0)$ mingis ümbruses;
- (2) funktsiooni f esimest järku osatuletised on diferentseeruvad punktis $(0,0)$.

Eelnevas veendusime, et funktsioon f on diferentseeruv punktis $(0,0)$. Igas punktis $(x,y) \neq (0,0)$ on funktsiooni f esimest järku osatuletised pidevad (**PÕHJENDADA!**), seega (teoreemi II.1.6 põhjal) funktsioon f on diferentseeruv ka igas punktis $(x,y) \neq (0,0)$; niisiis funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, järelikult tingimus (1) kehtib.

Uurime, kas kehtib ka tingimus (2), s.t. kas funktsiooni f esimest järku osatuletised on diferentseeruvad punktis $(0,0)$.

Osatuletisfunktsiooni f'_x diferentseeruvus punktis $(0,0)$ tähendab, et

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f'_x(0,0) - (f''_{x^2}(0,0)\Delta x + f''_{xy}(0,0)\Delta y)}{\rho} = 0, \quad (2.7)$$

kus $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Kuna $f'_x(0,0) = 0$, $f''_{x^2}(0,0) = 0$ ja $f''_{xy}(0,0) = -1$, siis tingimus (2.7) on samaväärne tingimusega

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f'_x(\Delta x, \Delta y) + \Delta y}{\rho} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^4 \Delta y + 4\Delta x^2 \Delta y^3 - \Delta y^5}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2} + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

ehk (kirjutades Δx ja Δy asemel vastavalt x ja y)

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 + y(x^4 + 2x^2 y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

NB! Alternatiivne (ja lihtsam) argument põhjendamaks, et funktsioon f pole kaks korda diferentseeruv punktis $(0,0)$, on toodud märkuses 2.9.

ehk

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{2x^2y(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \quad (2.8)$$

ehk, minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$),

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^5 \cos^2 \phi \sin \phi (\cos^2 \phi + 3 \sin^2 \phi)}{r^5} = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{r \rightarrow 0} 2 \cos^2 \phi \sin \phi (1 + 2 \sin^2 \phi) = 0.$$

NB! Siin pole raske näha, et eelneva valemirea viimane piirväärtus tegelikult ei eksisteeri (ja seega ei eksisteeri ka sellele eelnevad piirväärtused.)

Viimane võrdus ilmselgelt ei kehti (näiteks, kui võtta $\phi = \frac{\pi}{4}$, siis selles võrduses piirväärtuse sümboli järel oleva avaldise väärtus on $\sqrt{2}$; märgime, et olukord, kus selles piirväärtuses võetaks samaselt $\phi = \frac{\pi}{4}$, vastab punkti (x, y) lähenemisel punktile $(0, 0)$ mööda sirget $y = x$ piirväärtuses (2.8)). Niisiis, osatuletisfunktsioon f'_x ei ole diferentseeruv punktis $(0, 0)$. Siit järeldub ka, et *funktsioon f ei ole kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$.*

Märkus 2.5. Sümmeetria põhjal muutujate x ja y vahel on ilmne, et ka osatuletisfunktsioon f'_y ei ole diferentseeruv punktis $(0, 0)$.

Märkus 2.6. Alternatiivne moodus osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ leidmiseks on kasutada teoreemi tuletise piirväärtusest. Selleks paneme kõigepealt tähele, et funktsioon f on pidev punktis $(0, 0)$, s.t. $\lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0)$, s.t. $\lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)}{r^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\cos \phi \sin \phi (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi)$ on tõkestatud). Kuna eksisteerivad piirväärtused

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \cdot 0 + 4x^2 \cdot 0^3 - 0^5}{(x^2 + 0^2)^2} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^5 - 4 \cdot 0^3 \cdot y^2 - 0 \cdot y^4}{(0^2 + y^2)^2} = 0,$$

siis teoreemi põhjal tuletise piirväärtusest (vt. nt. ???) eksisteerivad vastavalt osatuletised $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$, kusjuures

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0) = 0 \quad \text{ja} \quad f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y) = 0.$$

Rõhutame, et piirväärtuste $\lim_{x \rightarrow 0} f'_x(x, 0)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} f'_y(0, y)$ olemasolu on (funktsiooni f pidevuse korral punktis $(0, 0)$) vastavalt osatuletiste $f'_x(0, 0)$ ja $f'_y(0, 0)$ olemasoluks piisav, kuid mitte tarvilik tingimus.

NB! Kodutöödes ootame, et funktsiooni f (esimest järku) diferentseeruvuse põhjendamisel punktis $(0, 0)$ ei kasutata teoreemi II.1.6, vaid lähtutakse teoreemi II.1.4 samaväärsusest (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Märkus 2.7. Alternatiivne moodus veendumaks, et funktsioon f on punktis $(0, 0)$ diferentseeruv, on näidata, et selle funktsiooni esimest järku osatuletisfunktsioonid on pidevad punktis $(0, 0)$ (vt. teoreemi II.1.6), s.t.

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_x(x, y) = f'_x(0, 0) \quad \text{ja} \quad \lim_{x,y \rightarrow 0} f'_y(x, y) = f'_y(0, 0),$$

s.t. $\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_x(x, y) = 0$ ja $\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_y(x, y) = 0$. Veendumise selles: minnes üle polaarkoordinaatidele (s.t. tehes muutujate vahetuse $x = r \cos \phi$ ja $y = r \sin \phi$), saame

$$\begin{aligned} \lim_{x,y \rightarrow 0} f'_x(x, y) &= \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5(\cos^4 \phi \sin \phi + 4 \cos^2 \phi \sin^3 \phi - \sin^5 \phi)}{r^4} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \phi (\cos^4 \phi + 4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - \sin^4 \phi) = 0 \end{aligned}$$

(sest tegur $\sin \phi (\cos^4 \phi + 4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi - \sin^4 \phi)$ on tõkestatud) ja sümmeetria põhjal

$$\lim_{x,y \rightarrow 0} f'_y(x,y) = \lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Rõhutame, et funktsiooni esimest järku osatuletisfunktsioonide pidevus antud punktis on piisav, kuid mitte tarvilik tingimus selle funktsiooni diferentseeruvuseks selles punktis.

Märkus 2.8. Alternatiivne moodus osatuletiste $f''_{x^2}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ ja $f''_{y^2}(0,0)$ leidmiseks on kasutada teoreemi tuletise piirväärtusest. Selleks on vaja teada funktsiooni f teist järku osatuletisi punkti $(0,0)$ mingis ümbruses. Leiame need osatuletised (kui nad muidugi eksisteerivad). Kui $(x,y) \neq (0,0)$, siis

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(x,y) &= (f'_x)'_x(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_x \\ &= \frac{(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)'_x (x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)((x^2 + y^2)^2)'_x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(4x^3y + 8xy^3)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5) 2(x^2 + y^2) 2x}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{4xy(x^2 + y^2)((x^2 + 2y^2)(x^2 + y^2) - (x^4 + 4x^2y^2 - y^4))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{4xy((x^2 + 2y^2)(x^2 + y^2) - (x^4 + 4x^2y^2 - y^4))}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{4xy((x^4 + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2y^4) - (x^4 + 4x^2y^2 - y^4))}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{4xy(-x^2y^2 + 3y^4)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= -\frac{4xy^3(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x,y) &= (f'_x)'_y(x,y) = \left(\frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y \\ &= \frac{(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)'_y (x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)((x^2 + y^2)^2)'_y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5) 2(x^2 + y^2) 2y}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)((x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2) - (4x^4y^2 + 16x^2y^4 - 4y^6))}{(x^2 + y^2)^4} \\ &= \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2) - (4x^4y^2 + 16x^2y^4 - 4y^6)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{(x^6 + x^4y^2 + 12x^4y^2 + 12x^2y^4 - 5x^2y^4 - 5y^6) - (4x^4y^2 + 16x^2y^4 - 4y^6)}{(x^2 + y^2)^3} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3} \end{aligned}$$

ning sümmeetria põhjal

$$f''_{y^2}(x,y) = (f'_y)'_y(x,y) = \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = -\frac{4x^3y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

ja

$$f''_{yx}(x, y) = (f'_y)'_x(x, y) = \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right)'_y = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Edasi, märgime, et funktsiooni f esimest järku osatuletisfunktsioonid f'_x ja f'_y on pidevad punktis $(0, 0)$ (vt. märkust 2.7). Kuna eksisteerivad piirväärtused

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x \cdot 0^3 \cdot (x^2 - 3 \cdot 0^2)}{(x^2 + 0^2)^3} = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^6 + 9 \cdot 0^4 \cdot y^2 - 9 \cdot 0^2 \cdot y^4 - y^6}{(0^2 + y^2)^3} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 9x^4 \cdot 0^2 - 9x^2 \cdot 0^4 - 0^6}{(x^2 + 0^2)^3} = 1, \\ \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4 \cdot 0^3 \cdot y(3 \cdot 0^2 - y^2)}{(0^2 + y^2)^3} = 0, \end{aligned}$$

siis teoreemi põhjal tuletise piirväärtusest (vt. nt. ???) eksisteerivad vastavalt osatuletised $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$, kusjuures

$$\begin{aligned} f''_{x^2}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0) = 0, & f''_{xy}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y) = -1, \\ f''_{yx}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) = 1, & f''_{y^2}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y) = 0. \end{aligned}$$

Rõhutame, et piirväärtuste

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''_{x^2}(x, 0), \quad \lim_{y \rightarrow 0} f''_{xy}(0, y), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f''_{yx}(x, 0) \quad \text{ja} \quad \lim_{y \rightarrow 0} f''_{y^2}(0, y).$$

olemasolu on (vastavate esimest järku osatuletisfunktsioonide pidevuse korral punktis $(0, 0)$) vastavalt osatuletiste $f''_{x^2}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yx}(0, 0)$ ja $f''_{y^2}(0, 0)$ olemasoluks piisav, kuid mitte tarvilik tingimus.

Märkus 2.9. Lihtsam argument põhjendamaks, et funktsioon f pole kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$, on järgmine: kui funktsioon f oleks kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$, siis teoreemi II.3.3 põhjal kehtiks võrdus $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$. See võrdus ei kehti, sest eelneva põhjal $f''_{xy}(0, 0) = -1 \neq 1 = f''_{yx}(0, 0)$; järelikult funktsioon f ei ole kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$.