

Praktikum 9. Lokaalsed ekstreemumid. Globaalsed ekstreemumid. Tinglikud ekstreemumid

Ülesanne 69, (a). Leidke funktsiooni f globaalsed ekstreemumid (s.t. suurim ja vähim väärtus) hulgas $\mathcal{D}$:

$$\bullet \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - xy, \quad \mathcal{D} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

LAHENDUS. Hulk $\mathcal{D}$ on kinnine ring tasandil $\mathbb{R}^2$ keskpunktiga $(0, 0)$ ja raadiusega 1, tema sisemus $\mathcal{D}^\circ = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ on vastav lahtine ring ning tema raja $\partial\mathcal{D} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ on vastav ringjoon. Kuna funktsioon f on pidev ning hulk $\mathcal{D}$ on kinnine ja tõkestatud, siis Weierstrassi teise teoreemi (loengukonspekti **teoreemi I.4.8**) põhjal eksisteerivad funktsioonil f hulgas $\mathcal{D}$ globaalsed ekstreemumid.

Leiame funktsiooni f kriitilised punktid hulga $\mathcal{D}$ sisemuses. Kuna funktsioon f on diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, siis tema ainsad kriitilised punktid on statsionaarsed punktid. Leiame funktsiooni f osatuletised:

$$f'_x(x, y) = 2x - y, \quad f'_y(x, y) = 2y - x;$$

seega funktsiooni f statsionaarsed punktid on leitavad süsteemist

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ -x + 2y = 0, \end{cases}$$

mille ainus lahend on $(0, 0)$. Kuna $(0, 0) \in \mathcal{D}^\circ$, siis funktsiooni f ainus statsionaarne punkt (ning seega ka ainus kriitiline punkt ehk teisisõnu, ainus võimalik ekstreemumpunkt) hulga $\mathcal{D}$ sisemuses on $(0, 0)$.

Hulga $\mathcal{D}$ raja $\partial\mathcal{D} = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$ esitub ühendina

$$\partial\mathcal{D} = \{(-1, 0), (1, 0)\} \cup L_1 \cup L_2,$$

kus $L_1 := \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$ ja $L_2 := \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, y < 0\}$ ehk, teisisõnu,

$$L_1 := \{(x, y): -1 < x < 1, y = \sqrt{1 - x^2}\} \quad \text{ja} \quad L_2 := \{(x, y): -1 < x < 1, y = -\sqrt{1 - x^2}\}.$$

Raja osal L_1 omandab funktsioon f kuju

$$f(x, y) = 1 - x\sqrt{1 - x^2} =: g(x), \quad -1 < x < 1.$$

Kui funktsioonil f oleks globaalne ekstreemum raja osa L_1 punktis (x, y) , siis funktsioonil g oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni g diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni g statsionaarne punkt, s.t. $g'(x) = 0$. Leiame funktsiooni g tuletise:

$$g'(x) = -\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{-1 + 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Selle tuletise nullkohad on $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, seega funktsiooni f võimalikud ekstreemumpunktid raja osal L_1 on $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Raja osal L_2 omandab funktsioon f kuju

$$f(x, y) = 1 + x\sqrt{1 - x^2} =: h(x), \quad -1 < x < 1.$$

Leiame funktsiooni h tuletise:

$$h'(x) = \sqrt{1 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Selle tuletise nullkohad on $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, seega funktsiooni f võimalikud ekstreemumpunktid raja osal L_2 on $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ ja $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. (Siin jällegi, kui funktsioonil f oleks globaalne ekstreemum raja osa L_2 punktis (x, y) , siis funktsioonil h oleks punktis x lokaalne ekstreemum, seega funktsiooni h diferentseeruvuse tõttu peaks x olema funktsiooni h statsionaarne punkt, s.t. $h'(x) = 0$.)

Leiame funktsiooni f väärtused tema võimalikes ekstreemumpunktides:

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & f(-1, 0) &= f(1, 0) = 1, \\ f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) &= f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2}, & f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) &= f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Leitud väärtustest suurim ja vähim on vastavalt funktsiooni f globaalne maksimum ja globaalne miinimum hulgas $\mathcal{D}$, seega

$$\max_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad \min_{(x,y) \in \mathcal{D}} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

Kõneldes ülesande 71 (alamülesannete) lahendus(t)es funktsiooni f tinglikest lokaalsetest ekstreemumitest ja tinglikest statsionaarsetest punktidest, peame silmas selle funktsiooni tinglikke lokaalseid ekstreemeid ja tinglikke statsionaarseid punkte vastava(te) lisatingimus(t)e suhtes.

Ülesanne 71, (a). Leidke Lagrange'i meetodil funktsiooni f (tinglikud) lokaalsed ekstreemumid antud tingimustel:

$$\bullet \quad f(x, y) = 6 - 4x - 3y, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

LAHENDUS. Defineerime funktsiooni $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$; siis tingimus $x^2 + y^2 = 1$ on samaväärne tingimusega $F(x, y) = 0$. Leiame funktsiooni F osatuletised: $F'_x(x, y) = 2x$, $F'_y(x, y) = 2y$. Eeldused Lagrange'i meetodi rakendamiseks (vt. loengukonspekt, lk. 143, jaotis IV.3.3, tingimus (#)) on antud juhul täidetud, sest funktsioonidel f ja F eksisteerivad kogu tasandil $\mathbb{R}^2$ pidevad esimest järku osatuletisfunktsioonid ning igal tingimust $F(x, y) = 0$ (ehk, teisisõnu, tingimust $x^2 + y^2 = 1$) rahuldaval punktil (x, y) leidub ümbrus, milles vähemalt üks (üherealise) maatriksi $\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ esimest järku miinor erineb nullist (ehk, teisisõnu, vähemalt üks arvudest $2x$ ja $2y$ erineb nullist).

Antud ülesandele vastav Lagrange'i funktsioon on

$$\Phi(x, y, \lambda) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1);$$

selle Lagrange'i funktsiooni osatuletised on

$$\Phi'_x(x, y, \lambda) = -4 + 2\lambda x, \quad \Phi'_y(x, y, \lambda) = -3 + 2\lambda y, \quad \Phi'_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1.$$

Funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid (ja neile vastavad Lagrange'i kordajad) leiame süsteemist

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Selle süsteemi esimesest ja teisest võrrandist saame vastavalt $x = \frac{2}{\lambda}$ ja $y = \frac{3}{2\lambda}$; asendades nendest võrdustest tundmatud x ja y süsteemi kolmandasse võrrandisse, saame $\frac{4}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 1$ ehk $\frac{25}{4\lambda^2} = 1$, millest $\lambda^2 = \frac{25}{4}$; niisiis $\lambda = \frac{5}{2}$ või $\lambda = -\frac{5}{2}$. Süsteemi lahendid on seega $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$, $\lambda = \frac{5}{2}$ ning $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$, $\lambda = -\frac{5}{2}$. Teisisõnu, funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid on $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, millele vastav Lagrange'i kordaja on $\lambda = \frac{5}{2}$, ning $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, millele vastav Lagrange'i kordaja on $\lambda = -\frac{5}{2}$.

Uurime, kas funktsioonil f on tema tinglikes statsionaarsetes punktides tinglik lokaalne ekstreemum. Selleks leiame Lagrange'i funktsiooni Φ teist järku osatuletised argumentide x ja y järgi:

$$\begin{aligned}\Phi''_{x^2}(x, y, \lambda) &= 2\lambda, & \Phi''_{xy}(x, y, \lambda) &= 0, \\ \Phi''_{yx}(x, y, \lambda) &= 0, & \Phi''_{y^2}(x, y, \lambda) &= 2\lambda.\end{aligned}$$

Kui fikseerida muutuja λ väärtus, siis leitud teist järku osatuletisfunktsioonid, tõlgendatuna muutujate x ja y funktsioonidena, on pidevad kogu tasandil $\mathbb{R}^2$, seega Lagrange'i funktsioon Φ , tõlgendatuna (muutuja λ fikseeritud väärtuse korral) muutujate x ja y funktsioonina, on kaks korda diferentseeruv kogu tasandil $\mathbb{R}^2$. Sellise tõlgenduse korral on Lagrange'i funktsiooni Φ Hesse maatriksi peamiinorid

$$A_1 := 2\lambda, \quad A_2 := \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2.$$

Kui $\lambda = \frac{5}{2}$ ja $(x, y) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, siis $A_1 = 5 > 0$ ja $A_2 = 25 > 0$, seega Lagrange'i funktsioonil Φ (tõlgendatuna fikseeritud väärtuse $\lambda = \frac{5}{2}$ korral kahe muutuja x ja y funktsioonina) on punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ range lokaalne miinimum, järelikult loengukonspekti **teoreemi IV.3.3** põhjal on funktsioonil f punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ range tinglik lokaalne miinimum.

Kui $\lambda = -\frac{5}{2}$ ja $(x, y) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, siis $A_1 = -5 < 0$ ja $A_2 = 25 > 0$, seega Lagrange'i funktsioonil Φ (tõlgendatuna fikseeritud väärtuse $\lambda = -\frac{5}{2}$ korral kahe muutuja x ja y funktsioonina) on punktis $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ range lokaalne maksimum, järelikult loengukonspekti **teoreemi IV.3.3** põhjal on funktsioonil f punktis $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ range tinglik lokaalne maksimum.

Ülesanne 71, (d). Leidke Lagrange'i meetodil funktsiooni f (tinglikud) lokaalsed ekstreemumid antud tingimustel:

$$\bullet f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad x + y + 2z = 6, \quad x - y = 0.$$

LAHENDUS. Defineerime funktsioonid $F(x, y, z) = x + y + 2z - 6$ ja $G(x, y, z) = x - y$; siis tingimused $x + y + 2z = 6$ ja $x - y = 0$ on samaväärsed vastavalt tingimustega $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$. Leiame funktsioonide F ja G osatuletised:

$$\begin{aligned}F'_x(x, y, z) &= 1, & F'_y(x, y, z) &= 1, & F'_z(x, y, z) &= 2, \\ G'_x(x, y, z) &= 1, & G'_y(x, y, z) &= -1, & G'_z(x, y, z) &= 0.\end{aligned}$$

Eeldused Lagrange'i meetodi rakendamiseks (vt. loengukonspekt, lk. 143, jaotis IV.3.3, tingimus (#)) on antud juhul täidetud, sest funktsioonidel f ning F ja G eksisteerivad kogu ruumis $\mathbb{R}^3$ pidevad esimest järku osatuletisfunktsioonid ning igal tingimusi $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ rahuldaval punktil (x, y, z) leidub ümbrus, milles vähemalt üks maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ teist järku miinor erineb nullist (tegelikult kõik selle maatriksi teist järku miinorid erinevad nullist kogu ruumis $\mathbb{R}^3$).

Antud ülesandele vastav Lagrange'i funktsioon on

$$\Phi(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + 2z - 6) + \mu(x - y);$$

selle Lagrange'i funktsiooni osatuletised on

$$\begin{aligned}\Phi'_x(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2x + \lambda + \mu, & \Phi'_y(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2y + \lambda - \mu, & \Phi'_z(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2z + 2\lambda, \\ \Phi'_\lambda(x, y, z, \lambda, \mu) &= x + y + 2z - 6, & \Phi'_\mu(x, y, z, \lambda, \mu) &= x - y.\end{aligned}$$

Funktsiooni f tinglikud statsionaarsed punktid (ja neile vastavad Lagrange'i kordajad) leiame süsteemist

$$\begin{cases} 2x + \lambda + \mu = 0, \\ 2y + \lambda - \mu = 0, \\ 2z + 2\lambda = 0, \\ x + y + 2z - 6 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

Lahutades süsteemi esimesest võrrandist teise, saame $2(x - y) + 2\mu = 0$, millest, arvestades, et viimase võrrandi põhjal $x = y$, saame $\mu = 0$. Liites nüüd esimesele võrrandile teise (arvestades seejuures, et $y = x$ ja $\mu = 0$), saame $4x + 2\lambda = 0$, millest $x = -\frac{\lambda}{2}$ ja seega ka $y = -\frac{\lambda}{2}$. Kolmandast võrrandist saame $z = -\lambda$, seega neljandast võrrandist saame nüüd $-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 2\lambda - 6 = 0$, millest $\lambda = -2$; järelikult $x = y = 1$ ja $z = 2$. Niisiis, süsteemi ainus lahend on $x = 1, y = 1, z = 2, \lambda = -2, \mu = 0$. Teisisõnu, funktsiooni f ainus tinglik statsionaarne punkt on $(1, 1, 2)$, millele vastavad Lagrange'i kordajad on $\lambda = -2$ ja $\mu = 0$.

Uurime, kas funktsioonil f on tema tinglikus statsionaarses punktis $(1, 1, 2)$ tinglik lokaalne ekstreemum. Selleks leiame Lagrange'i funktsiooni Φ teist järku osatuletised argumentide x, y ja z järgi:

$$\begin{aligned}\Phi''_{x_2}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2, & \Phi''_{xy}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, & \Phi''_{xz}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, \\ \Phi''_{yx}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, & \Phi''_{y_2}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2, & \Phi''_{yz}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, \\ \Phi''_{zx}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, & \Phi''_{zy}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 0, & \Phi''_{z_2}(x, y, z, \lambda, \mu) &= 2.\end{aligned}$$

Kui fikseerida muutujate λ ja μ väärtused, siis leitud teist järku osatuletisfunktsioonid, tõlgendatuna muutujate x, y ja z funktsioonidena, on pidevad kogu ruumis $\mathbb{R}^3$, seega Lagrange'i funktsioon Φ , tõlgendatuna (muutujate λ ja μ fikseeritud väärtuste korral) muutujate x, y ja z funktsioonina, on kaks korda diferentseeruv kogu ruumis $\mathbb{R}^3$. Sellise tõlgenduse korral on Lagrange'i funktsiooni Φ Hesse maatriksi peamiinorid

$$A_1 := 2, \quad A_2 := \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_3 := \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$$

Kui $\lambda = \frac{5}{2}$ ja $(x, y) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, siis $A_1 = 5 > 0$ ja $A_2 = 25 > 0$, seega Lagrange'i funktsioonil Φ (tõlgendatuna fikseeritud väärtuse $\lambda = \frac{5}{2}$ korral kolme muutuja x, y ja z funktsioonina) on punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ range lokaalne miinimum, järelikult loengukonspekti **teoreemi IV.3.3** põhjal on funktsioonil f punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ range tinglik lokaalne miinimum.