

Praktikum 15. Parameetrist sõltuv Riemanni integraal

Ülesanne 123, (c). Leida järgnevad integraalid, kasutades diferentseerimist parameetri a (või b) järgi.

$$\bullet J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a, b > 0.$$

LAHENDUS. Lahenduse üldine idee on järgmine: me leiame osatuletisfunktsiooni $\frac{\partial J}{\partial b}(a, b)$ avaldise; seda avaldist muutuja b järgi integreerides leiame “muutujast a sõltuva liidetava täpsusega” funktsiooni $J(a, b)$ avaldise; lõpuks jääb leida see “muutujast a sõltuv liidetav”.

Osatuletise $\frac{\partial J}{\partial b}$ leidmiseks rakendame teoreemi VII.1.3. Fikseerime vabalt reaalarvud $a > 0$ ja $\beta > \alpha > 0$. (Teoreem VII.1.3 võimaldab meil leida osatuletise $\frac{\partial J}{\partial b}(a, b)$ lõigus $b \in [\alpha, \beta]$, aga kuna arvud $\beta > \alpha > 0$ olid vabalt fikseeritud, annab see meile osatuletise $\frac{\partial J}{\partial b}(a, b)$ iga $b > 0$ korral.) Defineerime funktsiooni $f(x, b) := \frac{x^b - x^a}{\ln x}$. See funktsioon on pidev “poollahtises” ristkülikus $(0, 1) \times [\alpha, \beta]$. Punktides $(0, b)$ ja $(1, b)$, kus $b \in [\alpha, \beta]$, ei ole funktsioon f määratud, aga nendes punktides on sellel funktsioonil kõrvaldatav katkevus, sest mis tahes $b_0 \in [\alpha, \beta]$ korral

$$f(x, b) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \xrightarrow[(x, b) \in (0, 1) \times [\alpha, \beta]]{(x, b) \rightarrow (0, b_0)} 0$$

(see peaks olema üsna ilmne) ning

$$f(x, b) = \frac{x^b - x^a}{\ln x} \xrightarrow[(x, b) \in (0, 1) \times [\alpha, \beta]]{(x, b) \rightarrow (1, b_0)} b_0 - a. \quad (15.1)$$

Tõepoolest, olgu $b_0 \in [\alpha, \beta]$. Kõigepealt, saamaks aimu, milleks väärtused $f(x, b)$ piirprotsessis $(x, b) \rightarrow (1, b_0)$ koonduda võiksid, märgime, et l'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{b_0} - x^a}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b_0 x^{b_0-1} - a x^{a-1}}{\frac{1}{x}} = b_0 - a.$$

Koonduvuse (15.1) tõestuseks piisab näidata, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leiduvad reaalarvud $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ selliselt, et kehtib implikatsioon

$$1 - \delta_1 < x < 1, |b - b_0| < \delta_2 \implies \left| f(x, b) - (b_0 - a) \right| = \left| \frac{x^b - x^a}{\ln x} - (b_0 - a) \right| < \varepsilon. \quad (15.2)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Defineerime iga $x \in (0, 1)$ jaoks funktsiooni $\phi_x(\xi) = x^\xi$; siis funktsioon ϕ_x on diferentseeruv kogu arvteljel, kusjuures $(\phi_x)'(\xi) = x^\xi \ln x$ igas punktis $\xi \in \mathbb{R}$. Seega mis tahes $(x, b) \in (0, 1) \times [\alpha, \beta]$ korral leidub Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal arv $\xi_{x,b}$ punktide a ja b vahel (kui $a = b$, siis võtame $\xi_{x,b} = a = b$) nii, et

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \frac{\phi_x(b) - \phi_x(a)}{\ln x} = \frac{(\phi_x)'(\xi_{x,b})(b - a)}{\ln x} = \frac{x^{\xi_{x,b}} \ln x (b - a)}{\ln x} = x^{\xi_{x,b}}(b - a)$$

ja seega

$$\begin{aligned} |f(x, b) - (b_0 - a)| &= |x^{\xi_{x,b}}(b - a) - (b_0 - a)| = |x^{\xi_{x,b}}(b_0 - a) - (b_0 - a) + x^{\xi_{x,b}}(b - b_0)| \\ &\leq |x^{\xi_{x,b}} - 1| |b_0 - a| + x^{\xi_{x,b}} |b - b_0| \leq |x^\gamma - 1| |b_0 - a| + |b - b_0|, \end{aligned}$$

kus $\gamma = \max\{a, \beta\}$. Kuna $x^\gamma \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 1$, siis leidub reaalarv $\delta_1 > 0$ selliselt, et $|x^\gamma - 1| < \frac{\varepsilon}{2(b_0 + a)}$, kui $1 - \delta_1 < x < 1$. Kui nüüd võtta $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, siis implikatsioon (15.2) kehtib.

Nüüsiis, kui täiendavalt defineerida $f(0, b) = 0$ ja $f(1, b) = b - a$, on funktsioon f pidev ristkülikus $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$. Funktsioonil f eksisteerib selles ristkülikus lõplik osatuletis $\frac{\partial f}{\partial b}$:

$$\frac{\partial f}{\partial b}(x, b) = \left(\frac{x^b - x^a}{\ln x} \right)'_b = x^b, \quad \text{kui } 0 < x < 1, \quad \frac{\partial f}{\partial b}(0, b) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(1, b) = (b - a)'_b = 1,$$

niisiis $\frac{\partial f}{\partial b}(x, b) = x^b$ kogu ristkülikus $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$; seega osatuletisfunktsioon $\frac{\partial f}{\partial b}$ on pidev selles ristkülikus. Teoreemi VII.1.3 põhjal eksisteerib funktsioonil J lõplik osatuletis $\frac{\partial J}{\partial b}(a, b)$ “poolribas” $(0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ (sest eelnev argumentatsioon kehtib iga reaalarvu $a > 0$ korral!), kusjuures igas punktis $(a, b) \in (0, \infty) \times [\alpha, \beta]$

$$\frac{\partial J}{\partial b}(a, b) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial b}(x, b) dx = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{b+1}.$$

Kuna reaalarvud $\beta > \alpha > 0$ olid vabalt fikseeritud, kehtib võrdus $\frac{\partial J}{\partial b}(a, b) = \frac{1}{b+1}$ tegelikult kogu kvadrandidis $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Seega selles kvadrandidis

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \int_1^b \frac{\partial J}{\partial b}(a, t) dt + C(a) = \int_1^b \frac{1}{t+1} dt + C(a) = \ln(t+1) \Big|_1^b + C(a) \\ &= \ln(b+1) - \ln 2 + C(a), \end{aligned}$$

kus liidetav $C(a)$ on muutuja a väärtusest sõltuv arv (s.t. $C(a)$ on muutuja a funktsioon). Kuna

$$\ln(a+1) - \ln 2 + C(a) = J(a, a) = 0,$$

siis $C(a) = \ln 2 - \ln(a+1)$ ning seega

$$J(a, b) = \ln(b+1) - \ln(a+1).$$

Praktikum 16. Parameetrist sõltuvad päratud integraalid. Euleri integraalid

Ülesanne 128, (c). Kasutades diferentseerimist parameetri a järgi, leida järgmised integraalid.

$$\bullet \quad J(a, b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a, b > 0.$$

LAHENDUS. Lahenduse üldine idee on järgmine: me leiame osatuletisfunktsiooni $\frac{\partial J}{\partial a}(a, b)$ avaldise; seda avaldist muutuja a järgi integreerides leiame “muutujast b sõltuva liidetava täpsusega” funktsiooni $J(a, b)$ avaldise; lõpuks jääb leida see “muutujast b sõltuv liidetav”.

Osatuletise $\frac{\partial J}{\partial a}$ leidmiseks rakendame teoreemi VII.2.8. Fikseerime vabalt reaalarvud $b > 0$ ja $\beta > \alpha > 0$. (Teoreem VII.2.8 võimaldab meil leida osatuletise $\frac{\partial J}{\partial a}(a, b)$ lõigus $a \in [\alpha, \beta]$, aga kuna arvud $\beta > \alpha > 0$ olid vabalt fikseeritud, annab see meile osatuletise $\frac{\partial J}{\partial a}(a, b)$ iga $a > 0$ korral.) Defineerime funktsiooni $f(x, a) := \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$. See funktsioon on pidev “poolribas” $(0, \infty) \times [\alpha, \beta]$. Punktides $(0, a)$, kus $a \in [\alpha, \beta]$, ei ole funktsioon f määratud, aga nendes punktides on sellel funktsioonil kõrvaldatav katkevus, sest mis tahes $a_0 \in [\alpha, \beta]$ korral

$$f(x, a) = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \xrightarrow[(x, a) \in (0, \infty) \times [\alpha, \beta]]{(x, a) \rightarrow (0, a_0)} b - a_0. \quad (16.3)$$

Tõepoolest, olgu $a_0 \in [\alpha, \beta]$. Kõigepealt, saamaks aimu, milleks väärtused $f(x, a)$ piirprotsessis $(x, a) \rightarrow (0, a_0)$ koonduda võiksid, märgime, et l'Hospitali reegli põhjal

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-a_0 x} - e^{-bx}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-a_0 e^{-a_0 x} + b e^{-bx}}{1} = b - a_0.$$

Koonduvuse (16.3) tõestuseks piisab näidata, et iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leiduvad reaalarvud $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ selliselt, et kehtib implikatsioon

$$0 < x < \delta_1, |a - a_0| < \delta_2 \implies |f(x, a) - (b - a_0)| = \left| \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} - (b - a_0) \right| < \varepsilon. \quad (16.4)$$

Fikseerime vabalt reaalarvu $\varepsilon > 0$. Defineerime iga $x \in (0, \infty)$ jaoks funktsiooni $\phi_x(\xi) = e^{-\xi x}$; siis funktsioon ϕ_x on diferentseeruv kogu arvteljel, kusjuures $(\phi_x)'(\xi) = -x e^{-\xi x}$ igas punktis $\xi \in \mathbb{R}$. Seega mis tahes $(x, a) \in (0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ korral leidub Lagrange'i keskvaartusteoreemi põhjal arv $\xi_{x,a}$ punktide a ja b vahel (kui $a = b$, siis võtame $\xi_{x,a} = a = b$) nii, et

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \frac{\phi_x(a) - \phi_x(b)}{x} = \frac{(\phi_x)'(\xi_{x,a})(a - b)}{x} = \frac{-x e^{-\xi_{x,a} x}(a - b)}{x} = -e^{-\xi_{x,a} x}(a - b)$$

ja seega

$$\begin{aligned} |f(x, a) - (b - a_0)| &= |e^{-\xi_{x,a} x}(b - a) - (b - a_0)| = |e^{-\xi_{x,a} x}(b - a_0) - (b - a_0) - e^{-\xi_{x,a} x}(a - a_0)| \\ &\leq |e^{-\xi_{x,a} x} - 1| |b - a_0| + e^{-\xi_{x,a} x} |a - a_0| \leq |e^{-\gamma x} - 1| |b - a_0| + |a - a_0|, \end{aligned}$$

kus $\gamma = \max\{\beta, b\}$. Kuna $e^{-\gamma x} \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 1$, siis leidub reaalarv $\delta_1 > 0$ selliselt, et $|e^{-\gamma x} - 1| < \frac{\varepsilon}{2(b+a_0)}$, kui $0 < x < \delta_1$. Kui nüüd võtta $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, siis implikatsioon (16.4) kehtib.

Niisiis, kui täiendavalt defineerida $f(0, a) = b - a$, on funktsioon f pidev “poolribas” $[0, \infty) \times [\alpha, \beta]$. Funktsioonil f eksisteerib “poolribas” $[0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ lõplik osatuletis $\frac{\partial f}{\partial a}$:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, a) = \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \right)'_a = -e^{-ax}, \quad \text{kui } x > 0, \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial a}(0, a) = (b - a)'_a = -1,$$

niisiis $\frac{\partial f}{\partial a}(x, a) = -e^{-ax}$ kogu poolribas $[0, \infty) \times [\alpha, \beta]$; seega osatuletisfunktsioon $\frac{\partial f}{\partial a}$ on pidev selles “poolribas”. Parameetrist a sõltuv päratu integraal $\int_0^\infty f(x, a) dx$ ehk, teisisõnu, päratu integraal $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ koondub lõigusele $[\alpha, \beta]$.

Tõepoolest, arvestades, et integraalialune funktsioon f on (pärast katkevuse kõrvaldamist punktides, kus $x = 0$) pidev ristkülikus $[0, 1] \times [\alpha, \beta]$, piisab selle integraali koonduvuse tõestuseks lõigusele $[\alpha, \beta]$ veenduda, et integraal $\int_1^\infty f(x, a) dx$ koondub lõigusele $[\alpha, \beta]$, s.t. integraal $\int_1^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ koondub lõigusele $[\alpha, \beta]$, milleks omakorda piisab veenduda, et integraal $\int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx$ koondub iga reaalarvu $a > 0$ korral. Fikseerime vabalt reaalarvu $a > 0$. Mis tahes $x \in [1, \infty)$ korral $0 \leq \frac{e^{-ax}}{x} \leq e^{-ax}$, seega integraali $\int_1^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx$ koonduvus järeldeb integraali $\int_1^\infty e^{-ax} dx$ koonduvusest. See integraal koondub:

$$\int_1^\infty e^{-ax} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R e^{-ax} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-ax}}{a} \right) \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-aR}}{a} \right) = \frac{e^{-a}}{a}.$$

Päratu integraal $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) dx$ koondub Weierstrassi tunnuse (teoreemi VII.2.3 põhjal) ühtlaselt (parameetri a suhtes) lõigusele $[\alpha, \beta]$, sest mis tahes $(x, a) \in [0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ korral

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) \right| = | -e^{-ax} | = e^{-ax} \leq e^{-\alpha x},$$

kusjuures päratu integraal $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$ koondub.

Tõepoolest,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\alpha x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} \right) \Big|_0^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^0}{\alpha} - \frac{e^{-\alpha R}}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha}.$$

Teoreemi VII.2.8 põhjal eksisteerib funktsioonil J lõplik osatuletis $\frac{\partial J}{\partial a}(a, b)$ hulgas $[\alpha, \beta] \times (0, \infty)$ (sest eelnev argumentatsioon kehtib iga reaalarvu $b > 0$ korral!), kusjuures igas punktis $(a, b) \in [\alpha, \beta] \times (0, \infty)$

$$\frac{\partial J}{\partial a}(a, b) = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial a}(x, a) dx = \int_0^\infty (-e^{-ax}) dx = -\frac{1}{a}.$$

Kuna reaalarvud $\beta > \alpha > 0$ olid vabalt fikseeritud, kehtib võrdus $\frac{\partial J}{\partial a}(a, b) = -\frac{1}{a}$ tegelikult kogu kvadrantis $(0, \infty) \times (0, \infty)$. Seega selles kvadrantis

$$J(a, b) = \int_1^a \frac{\partial J}{\partial a}(t, b) dt + C(b) = \int_1^a \left(-\frac{1}{t} \right) dt + C(b) = (-\ln t) \Big|_1^a + C(b) = -\ln a + C(b),$$

kus liidetav $C(b)$ on muutuja b väärtusest sõltuv arv (s.t. $C(b)$ on muutuja b funktsioon). Kuna

$$-\ln b + C(b) = J(b, b) = 0,$$

siis $C(b) = \ln b$ ning seega

$$J(a, b) = \ln b - \ln a.$$

Ülesanne 129. Arvutada järgmised integraalid, kasutades Euleri integraale.

$$(c) \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx; \quad (d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx; \quad (g) \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}} dx}{(1+x)^2}.$$

LAHENDUS. (c). Muutuja vahetuse $x = 2\sqrt{t}$ abil saame

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^1 4t\sqrt{4-4t} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 8 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = 8 \int_0^1 t^{\frac{3}{2}-1} (1-t)^{\frac{3}{2}-1} dt \\ &= 8B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Beetafunktsiooni taandamisvalemi(te) ja täiendusvalemi põhjal (vt. loengukonspekti lauset VII.3.6, (b), (c) ja (d))

$$8B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 8 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi,$$

seega $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \pi$.

Eelnevas me oleksime ka võinud kasutada seost beeta- ja gammafunktsiooni vahel (vt. lauset VII.3.7) ning gammafunktsiooni taandamisvalemit ja täiendusvalemit (vt. lauseid VII.3.4 ja VII.3.5), arvestades, et $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$:

$$8B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 8 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right)} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = 2 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot 1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

(d). Muutuja vahetuse $\sin^2 x = t$ abil saame

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^3 x \cdot 2 \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{5}{2}} (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} d(\sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{5}{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{7}{2}-1} (1-t)^{\frac{5}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

Seose põhjal beeta- ja gammafunktsiooni vahel ning gammafunktsiooni taandamisvalemi (vt. valem (VII.3.10)) ja täiendusvalemi põhjal (siin jõuab nende tulemuste abil kiiremini vastuseni kui beetafunktsiooni taandamisvalemi ja täiendusvalemi abil)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{5 \cdot 3^2}{2^6} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5!} \\ &= \frac{3}{2^9} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2^9} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2^9} = \frac{3\pi}{512}, \end{aligned}$$

seega $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx = \frac{3\pi}{512}$.

(g). Mis tahes $p, q > 0$ korral $B(p, q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1} dx}{(1+x)^{p+q}}$ (vt. lauset VII.3.6, (e)), seega beetafunktsiooni taandamisvalemi ja täiendusvalemi põhjal

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{4}} dx}{(1+x)^2} &= \int_0^\infty \frac{x^{\frac{5}{4}-1} dx}{(1+x)^{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}} = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Siin me oleksime ka võinud kasutada seost beeta- ja gammafunktsiooni vahel ning gammafunktsiooni taandamisvalemit ja täiendusvalemit, arvestades, et $\Gamma(1) = 1$:

$$\begin{aligned} B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1 \cdot \Gamma(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}}}{4} = \frac{\pi}{4 \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$