

Mitme muutuja matemaatilise analüüsi
praktikumiülesannete kogu
2025/26 õppeaasta sügissemester

1. Sisemus ja raja, lahtised ja kinnised hulgad. Hulkade skitseerimine

1. Olgu $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ ning olgu $r, d_1, d_2 > 0$. Tõestage, et ruumis $\mathbb{R}^2$

- a) kera (s.o. ring) $B(A, r)$ sisaldab ruutu keskpunktiga A ,
- b) risttahukas (s.o. ristkülik)

$$C(A, d_1, d_2) := \{(x, y) : a - d_1 < x < a + d_1, b - d_2 < y < b + d_2\}$$

sisaldab ringi keskpunktiga A .

Sõnastage ja tõestage sama ruumis $\mathbb{R}^m$.

2. Tõestage, et alamhulk $D \subseteq \mathbb{R}^m$ on tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline $r > 0$, et $D \subseteq B((0, \dots, 0), r)$.

3. Leidke järgmiste omadustega hulgad D ruumis $\mathbb{R}^2$:

- a) $\partial D^\circ = \partial D = \partial \overline{D}$;
- b) $D \neq \emptyset, \partial D = \emptyset$;
- c) $\partial D = [0, 1]^2, \partial D^\circ = \emptyset$;
- d) $\partial D \neq \partial \overline{D}$;
- e) hulgad $\partial D^\circ, \partial D$ ja $\partial \overline{D}$ on kõik erinevad.

4. Tooge näiteid ruumi $\mathbb{R}^2$ hulkadest D , kus

- a) D on lahtine, kuid ei ole kinnine,
- b) D on kinnine, kuid ei ole lahtine,
- c) D pole kinnine ega lahtine,
- d) D on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine.

5. Tõestage, et hulk $D \subseteq \mathbb{R}^m$ on samaaegselt nii kinnine kui ka lahtine parajasti siis, kui $\partial D = \emptyset$.

6. Kirjeldage (skitseerige) alamhulka D ruumis $\mathbb{R}^2$. Tehke kindlaks, kas D on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^2$:

- a) $D = \{(x, y) : 1 < x < 4, -1 < y < 0\}$;
- b) $D = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- c) $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$;
- d) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 625\}$.
- e) $D = \{(x, y) : y \geq x^2, y \leq 1\}$;
- f) $D = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$.

7. Kirjeldage (skitseerige) hulka, mis on määratud ruumis $\mathbb{R}^3$ järgmiste võrranditega või võrratustega. Tehke kindlaks, kas see hulk on lahtine, kinnine ruumis $\mathbb{R}^3$:

- a) $z = 2$;
- b) $y \geq -1$;
- c) $y = x$;
- d) $x + y = 1$;
- e) $z = y^2$;
- f) $x^2 + z^2 = 4$;
- g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
- h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
- i) $z = x^2 + y^2$;
- j) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 2; \end{cases}$
- k) $\begin{cases} x = 1, \\ y = z; \end{cases}$
- l) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ z = 1; \end{cases}$
- m) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x; \end{cases}$
- n) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 < 4$.

8*. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Olgu hulk D kinnine ning olgu fikseeritud positiivne reaalarv r . Tähistame $E = \{P \in \mathbb{R}^m : \exists Q \in D \, d(P, Q) = r\}$. Tõestage, et E on samuti kinnine hulk.

9*. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^m$. Tõestage, et kui hulk D on korraga lahtine ja kinnine, siis $D = \emptyset$ või $D = \mathbb{R}^m$.

2. Elementaarfunktsioonide määramispiirkond. Funktsiooni graafiku skitseerimine

10. Leidke funktsiooni f määramispiirkond D :

- a) $f(x, y) = \sqrt{-x} + 3y$; b) $f(x, y) = \ln(x - y)$; c) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)$;
d) $f(x, y) = \sin x + \sqrt{-(y - 3x)^2}$; f) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x^2 + y^2 - 2)} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$;
e) $f(x, y) = \ln(x^2 - y)$; g) $f(x, y) = \tan \frac{x}{y}$.

11. Skitseerige või kirjeldage funktsiooni f graafikut:

- a) $f(x, y) = 2$; d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; f) $f(x, y) = x^2$;
b) $f(x, y) = 4 - 2x - 4y$; c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; g) $f(x, y) = \sin y$.
c) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; e) $f(x, y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

Funktsiooni $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ *tasemejooneks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x, y) : f(x, y) = k\}$.

Funktsiooni $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ *tasemepinnaks* (tasemel k) nimetatakse punktihulka $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = k\}$.

12. Skitseerige järgmiste funktsioonide tasemejooned/tasemepinnad:

- a) $f(x, y) = x + y$; d) $f(x, y) = \sqrt{xy}$; g) $f(x, y, z) = x + y + z$;
b) $f(x, y) = x^2 + y^2$; e) $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$; h) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
c) $f(x, y) = x^2 - y^2$; f) $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$; i) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

13. Leidke $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ ja $\frac{1}{f(x, y)}$, kui $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.

14*. Leidke kõik funktsioonid $f: (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, mis rahuldavad järgmist tingimust: iga $x, y > 0$ korral

$$f\left(xy, \frac{x}{y}\right) = x^2 - y^2.$$

3. Koondumiste ja pidevuse tõestamine

15. Tõestage piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

- a) $\lim_{x, y \rightarrow 2, 3} (3x + 4y) = 18$; b) $\lim_{x, y \rightarrow -5, 7} (4y - 5x) = 53$;

$$c) \lim_{x,y \rightarrow -1} (x^2 - 2y) = 3;$$

$$d) \lim_{x,y \rightarrow 2,1} (2y^2 - 3x) = -4;$$

16. Tõestage piirväärtuse definitsioonist lähtudes, et

$$a) \lim_{x,y \rightarrow 1} xy = 1;$$

$$e) \lim_{x,y \rightarrow -1,0} \frac{1}{x|y|} = -\infty;$$

$$b) \lim_{x,y \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x} + 2y \right) = 3;$$

$$f) \lim_{\|P\| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + y^2 - \sin x} = 0;$$

$$c) \lim_{x,y \rightarrow 1} (x^2 + y^2) = 2;$$

$$g) \lim_{\|P\| \rightarrow \infty} (x^2 + 2y^2) = \infty.$$

$$d) \lim_{x,y \rightarrow 0,2} \frac{1}{x^2 + (y-2)^2} = \infty;$$

17. Näidake, et kui kahe muutuja funktsioonid f ja g on punktis A pidevad, siis ka funktsioonid $f + g$ ja $f \cdot g$ on selles punktis pidevad.

18. Tõestage, et kui m muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev ja $f(A) > 0$, kus A on hulga $D \subseteq \mathbb{R}^m$ sisepunkt, siis leidub selline ümbrus $U_\varepsilon(A)$, et $f(P) > 0$ iga $P \in U_\varepsilon(A)$ korral.

19. Tõestage, et kui kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev hulga D sisepunktis A , siis leidub punkti A selline ümbrus $U_\varepsilon(A)$, milles f on tõkestatud.

20. Olgu kahe muutuja funktsioon $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidev hulga D sisepunktis $A = (a, b)$. Veen-
duge, et osafunktsioonid f_1 ja f_2 , mis on defineeritud seostega $f_1(x) := f(x, b)$ ja $f_2(y) := f(a, y)$, on pidevad vastavalt punktis a ja b .

21. Olgu $A = (a, b)$ hulga D sisepunkt. Kas funktsiooni $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ pidevus punktis A on samaväärne sellega, et osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja b ?

22. Olgu jadad (P_n) ja (Q_n) ruumis $\mathbb{R}^m$ sellised, et $P_n \rightarrow A$ ja $Q_n \rightarrow B$. Veenduge, et $P_n + Q_n \rightarrow A + B$ ja $\lambda P_n \rightarrow \lambda A$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

23. Leidke jada piirväärtus $\lim_n (x_n, y_n)$ ruumis $\mathbb{R}^2$, kui

$$a) (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{n} \right);$$

$$c) (x_n, y_n) = \left(\sin \frac{1}{n}, (-1)^n \right);$$

$$b) (x_n, y_n) = \left(n \sin \frac{1}{n}, \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right);$$

$$d) (x_n, y_n) = \left(\frac{2n-7}{3n}, \frac{n^3+3n-1}{n^2+5} \right).$$

24*. Rahuldagu jada $(P_n) \subseteq \mathbb{R}^m$ liikmed iga $n \in \mathbb{N}$ korral tingimust $d(P_{n+1}, P_n) < \frac{1}{2^n}$. Tõesta-
ge, et jada (P_n) on koonduv.

25*. Olgu $U \subseteq \mathbb{R}^2$ lahtine hulk ning olgu $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, kusjuures

a) f on mõlema muutuja järgi eraldi võttes pidev hulgas U (see tähendab, iga $(a, b) \in U$ korral tekkivad osafunktsioonid f_1 ja f_2 on pidevad vastavalt punktis a ja punktis b),

b) f on muutuja y järgi kasvav (see tähendab, iga $(a, b) \in U$ korral osafunktsioon f_2 on kasvav).

Tõestage, et f on hulgas U pidev funktsioon.

4. Piirväärtuse arvutamine

26. Leidke piirväärtus või tõestage, et see ei eksisteeri:

- | | |
|--|---|
| a) $\lim_{x,y \rightarrow -2,1} x^2 y;$ | l) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$ |
| b) $\lim_{x,y \rightarrow 2,4} (2x + 3y);$ | m) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2};$ |
| c) $\lim_{x,y \rightarrow 0} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y};$ | n) $\lim_{x,y \rightarrow 1,-1} \frac{x + y}{x^2 + y};$ |
| d) $\lim_{x,y \rightarrow 0,a} \frac{\sin xy}{x};$ | o) $\lim_{x,y \rightarrow 1,2} \frac{y - 2x}{y - 2x^2};$ |
| e) $\lim_{x,y \rightarrow 1,0} \frac{\tan 2xy}{x^2 y};$ | p) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x^2 + y^2}{x + y};$ |
| f) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\ln(xy)}{x \sin y};$ | q) $\lim_{\ P\ \rightarrow \infty} (x + y) e^{-(x^2 + y^2)};$ |
| g) $\lim_{x,y \rightarrow 0,3} (1 + xy^2)^{\frac{1}{xy^2}};$ | r) $\lim_{\ P\ \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2};$ |
| h) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2};$ | s) $\lim_{\ P\ \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4};$ |
| i) $\lim_{x,y \rightarrow 0} (x + y) \ln(x^2 + y^2);$ | t) $\lim_{\ P\ \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{ x^3 + y^3 };$ |
| j) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{x}{x + y};$ | u) $\lim_{\ P\ \rightarrow \infty} \frac{x + y}{x + y^2}.$ |
| k) $\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2};$ | |

27. Näidake, et funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

korral piirväärtust $\lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y)$ ei eksisteeri, kuid korduvad piirväärtused $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$.

28. Näidake, et piirväärtus $\lim_{x,y \rightarrow 0} f(x, y)$ on olemas, kuid korduvaid piirväärtusi $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ ja $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ ei eksisteeri:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y};$ | b) $f(x, y) = (x - y) \cos \frac{1}{x} \sin \frac{\cos y}{2y}.$ |
|---|---|

29. Tehke kindlaks, kas funktsioon f on pidev punktis $(0, 0)$:

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{kui } x+y \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x+y = 0; \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{kui } x^4 + y^4 \neq 0, \\ 1, & \text{kui } x^4 + y^4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x}, & \text{kui } x \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0; \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}; \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\text{i) } f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{kui } x \in \mathbb{Q} \text{ ja } y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kui } x \notin \mathbb{Q} \text{ või } y \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

30*. Olgu $a, b, c, d > 0$, kusjuures $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} > 1$. Tõestage, et

$$\lim_{x, y \rightarrow 0} \frac{|x|^a |y|^b}{|x|^c + |y|^d} = 0.$$

5. Mitme muutuja funktsioonide diferentseerimine

31. Eksisteerigu kahe muutuja funktsioonidel f ja g lõplikud osatuletised punktis A . Veen-
duge, et siis ka funktsioonidel $f + g$ ja fg eksisteerivad punktis A lõplikud osatuletised, kus-
juures

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) + \frac{\partial g}{\partial x}(A) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x}(A) = g(A) \frac{\partial f}{\partial x}(A) + f(A) \frac{\partial g}{\partial x}(A).$$

32. Leidke funktsiooni f esimest järku osatuletised:

$$\text{a) } f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{x-y};$$

$$\text{d) } f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x};$$

$$\text{b) } f(x, y) = xy \ln(xy);$$

$$\text{e) } f(x, y, z) = \sin(xy + yz);$$

$$\text{c) } f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{f) } f(x, y) = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

33. Eksisteerigu kahe muutuja funktsioonil f punkti $A = (a, b)$ ümbruses $K_\delta(A) := (a-\delta, a+\delta) \times (b-\delta, b+\delta)$ (lahtine ruut) lõplikud osatuletised mõlema muutuja järgi, kusjuures need osatuletised on mittenegatiivsed selles ümbruses. Tõestage, et f on kasvav järgmises mõttes: kui $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_\delta(A)$, kusjuures $x_1 \leq x_2$ ja $y_1 \leq y_2$, siis $f(x_1, y_1) \leq f(x_2, y_2)$.

34. Leidke funktsioon $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$, kui $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ iga $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ korral.

35. Olgu $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$. Leidke funktsioon $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, kui $f(\pm 1, y) = \sin y$ iga $y \in \mathbb{R}$ korral ja $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x}$ iga $(x, y) \in D$ korral.

36. Kontrollige, kas funktsioon $w = f(x, y)$ on punktis $(0, 0)$ pidev, kas tal on selles punktis lõplikud osatuletised, kas ta on selles punktis diferentseeruv, kaks korda diferentseeruv:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

b) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$;

c) $f(x, y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$;

d) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^4}$;

e) $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } y = 0, \\ 1, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0. \end{cases}$

f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

g) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

h) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

i) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$

j) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{kui } (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \\ 0, & \text{kui } (x, y) \notin \mathbb{Q}^2; \end{cases}$

k) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^2 \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

37. Veenduge, et kui kahe muutuja funktsioonid f ja g on diferentseeruvad punktis A , siis ka funktsioonid $f + g$ ja λf , kus $\lambda \in \mathbb{R}$, on diferentseeruvad punktis A , kusjuures $d(f + g) = df + dg$ ja $d(\lambda f) = \lambda df$.

38. Põhjendage, et funktsioon f on punktis A diferentseeruv, ning leidke tema täisdiferentiaal selles punktis:

a) $f(x, y) = e^{xy}$, $A = (0, 0)$;

b) $f(x, y) = x^y$, $A = (2, 3)$;

c) $f(x, y) = x \ln(xy)$, $A = (-1, -1)$;

d) $f(x, y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, $A = (2, 1)$;

e) $f(x, y, z) = \cos(xy + xz)$, $A = \left(1, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$;

f) $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$, $A = (1, 2, 3)$.

39. Olgu funktsioon $z = z(x, y)$ diferentseeruv punktis $(1, 2)$, kusjuures

$$z'_x(1, 2) = 3 \quad \text{ja} \quad z'_y(1, 2) = 4,$$

ning olgu funktsioonid $x = x(u, v, w)$ ja $y = y(u, v, w)$ diferentseeruvad punktis $(5, 6, 7)$, kusjuures $x(5, 6, 7) = 1$ ja $y(5, 6, 7) = 2$ ning

$$x'_u(5, 6, 7) = 8,$$

$$x'_v(5, 6, 7) = 9,$$

$$x'_w(5, 6, 7) = 10,$$

$$y'_u(5, 6, 7) = 11,$$

$$y'_v(5, 6, 7) = 12,$$

$$y'_w(5, 6, 7) = 13.$$

Leida liitfunktsiooni $z = z(x(u, v, w), y(u, v, w))$ osatuletised $z'_u(5, 6, 7)$, $z'_v(5, 6, 7)$ ja $z'_w(5, 6, 7)$.

40. Olgu funktsioonid $x = f(s, t)$, $y = g(s, t)$ ja $z = h(s, t)$ diferentseeruvad punktis $(1, 2)$, kusjuures $f(1, 2) = 3$, $g(1, 2) = 4$ ja $h(1, 2) = 5$ ning

$$\begin{aligned} f'_s(1, 2) &= 6, & g'_s(1, 2) &= 7, & h'_s(1, 2) &= 8, \\ f'_t(1, 2) &= 9, & g'_t(1, 2) &= 10, & h'_t(1, 2) &= 11, \end{aligned}$$

ning olgu funktsioon $a = F(u, v, w)$ diferentseeruv punktis $(3, 4, 5)$, kusjuures

$$F'_u(3, 4, 5) = 12, \quad F'_v(3, 4, 5) = 13, \quad F'_w(3, 4, 5) = 14.$$

Leida liitfunktsiooni $c = F(f(s, t), g(s, t), h(s, t))$ osatuletised $c'_s(1, 2)$ ja $c'_t(1, 2)$.

41. Selgitage, miks liitfunktsioon on diferentseeruv ja leidke tema täisdiferentsiaal:

- a) $f(u, v) = uv$ ja $u = e^{2x} + 1$, $v = 1 - x$; $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 - y^2$,
 b) $f(u, v) = u \sin v$ ja $u = \cos x$, $v = 2x + 1$;
 c) $f(u, v) = u \ln v$ ja $u = 2x + 1$, $v = y + 1$; e) $f(u, v, w) = uvw$ ja $u = x + y$, $v = e^{2x-y}$,
 d) $f(u, v) = u^2 + v^2$ ja $w = x$;

42*. Olgu funktsioonil $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ pidevad osatuletised, kusjuures leidugu $K > 0$ nii, et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(P) \right| \leq K$$

kõigi punktide $P \in \mathbb{R}^m$ ja indeksite $j = 1, \dots, m$ korral. Tõestage, et f on Lipschitzi funktsioon, st. leidub konstant $L > 0$ selliselt, et mistahes punktide $P, Q \in \mathbb{R}^m$ jaoks kehtib võrratus

$$|f(P) - f(Q)| \leq L \|P - Q\|.$$

6. Funktsiooni $z = f(x, y)$ graafiku puutujatasand ja normaal. Tuletis antud suunas. Gradient

43. Koostage funktsiooni $z = f(x, y)$ graafiku puutujatasandi ja normaali võrrand punktis A :

- a) $z = xy$, $A = (1, 0, 0)$; e) $z = x^2 + y^2$, $A = (1, 2, 5)$;
 b) $z = x + y^2$, $A = (0, 1, 1)$; f) $z = 2x^2 + y^2$, $A = (1, -1, 3)$;
 c) $z = x^3 + y^3$, $A = (1, -1, 0)$; g) $z = \sin(xy)$, $A = \left(1, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
 d) $z = e^{x+y}$, $A = (1, -1, 1)$;

44. Tehke kindlaks, kas tasand $z = 0$ on punktis $O = (0, 0, 0)$ puutujatasandiks funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikule, kui

- a) $z = x^2 + y^2$ (graafik on pöördparaboolid); c) $z = xy$ (graafik on hüperboolne parabolid)?
 b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (graafik on koonus);

45. Olgu kahe muutuja funktsioon f punktis $P_0 = (x_0, y_0)$ diferentseeruv. Olgu vektor $\vec{s} = (s_1, s_2) \neq (0, 0)$. Arvutage funktsiooni f tuletis punktis P_0 vektori $\vec{s}$ suunas, mis on defineeritud seosega $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ts_1, y_0 + ts_2) - f(x_0, y_0)}{t|\vec{s}|}$.

46. Leidke funktsiooni $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ tuletis punktis $M = (1, 2)$ vektori $\vec{s} = (4, 6)$ suunas.

47. Mingil mäel on punktis (x, y) kõrgus merepinnast määratud seosega $z = 2500 - 3x^2 - 4y^2$ (meetrites). x -telje positiivne suund osutab itta ning y -telje positiivne suund osutab põhja. Alpinist asub punktis $(15, -10, 1425)$.

- Kui alpinist liigub otse läände, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
- Kui alpinist liigub kagu suunas, kas ta liigub kõrgemale või madalamale?
- Millises suunas peaks alpinist liikuma, et ta liiguks mööda samakõrgusjoont?

48*. Olgu kahe muutuja funktsioon f määratud punkti A teatavas ümbruses. Ülesande 45 põhjal on teada, et kehtivad implikatsioonid

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } A \quad \Rightarrow \quad \forall \vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0} \quad \exists \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) \in \mathbb{R},$$

$$f \text{ on diferentseeruv punktis } A, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \vec{s} = (s_1, s_2) \neq \vec{0} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 0.$$

Kas emb-kumb neist implikatsioonidest on üldiselt pööratav?

7. Kõrgemat järku osatuletised ja täisdiferentsiaalid. Taylorig valem

49. Leidke järgmiste funktsioonide teist järku osatuletised:

- | | | |
|--------------------------------|---|---------------------------------|
| a) $z = x^3y - xy^3$; | d) $z = x^y$; | g) $u = xyz + \ln(x + y + z)$; |
| b) $z = x \sin(x + y)$; | e) $z = \ln(x + y^2)$; | h) $u = \sin(1 + xyz)$. |
| c) $z = \frac{x - y}{x + y}$; | f) $z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$; | |

50. Määrake funktsiooni $u = u(x, y)$ üldavaldis, kui

- | | |
|---|--|
| a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; | b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. |
|---|--|

51. Leidke järgmiste funktsioonide märgitud osatuletised:

- | | |
|---|--|
| a) $z = x^x + y \sin x, \quad z'''_{x^2y}$; | d) $u = x + x \ln(xy), \quad u'''_{x^2y}$; |
| b) $z = x^{10} \cos x + y^2 \ln x, \quad z'''_{xy^2}$; | e) $u = e^{xy} + e^{xyz}, \quad u'''_{xyz}$; |
| c) $z = y \cos y + e^{x+y}, \quad z'''_{y^3}$; | f) $u = y^2 + x^3 \sin y + y^3 \sin x, \quad u^{(6)}_{x^3y^3}$. |

52. Tehke kindlaks, kas funktsioon f on kaks korda diferentseeruv punktis $(0, 0)$:

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

53. Näidake, et funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

korral $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Millised segaosatuletiste teoreemide eeldustest on rikutud?

54. Selgitage diferentseeruvust ja leidke näidatud täisdiferentsiaalid:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| a) $z = x^3 y^2, \quad d^2 z;$ | f) $u = xy \sin z, \quad d^2 u;$ |
| b) $z = x \sin^2 y, \quad d^2 z;$ | g) $u = xyz, \quad d^3 u;$ |
| c) $z = 1 + x^3 + y^3, \quad d^3 z;$ | h) $u = x^3 y z^2, \quad d^3 u;$ |
| d) $z = x^4 + x y^2, \quad d^3 z;$ | i) $f(x, y) = (x + y + 1)^5, \quad d^4 f;$ |
| e) $u = xy + y z^2, \quad d^2 u;$ | j) $f(x, y, z) = \cos(2x + 3y - 5z), \quad d^6 f.$ |

55. Leidke funktsiooni f kolmandat järku Taylori valem punktis P_0 :

- | | | |
|---|--|--|
| a) $f(x, y) = e^{x+y},$
$P_0 = (1, -1);$ | b) $f(x, y) = \frac{x}{y},$
$P_0 = (1, 1);$ | c) $f(x, y) = \ln(xy),$
$P_0 = (1, 1).$ |
|---|--|--|

56. Leidke funktsiooni f kolmandat järku Taylori valem punktis $(0, 0)$:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|
| a) $f(x, y) = e^y \cos x;$ | c) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y);$ | e) $f(x, y) = x \cos^2 y;$ |
| b) $f(x, y) = e^x \sin y;$ | d) $f(x, y) = \ln(1 + x + y);$ | f) $f(x, y) = y \sin^2 x.$ |

57. Arvutage sobivalt valitud esimest järku Taylori valemi abil ligikaudne väärtus:

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|---|
| a) $1,03^{2,04};$ | c) $\sqrt{3,97} \cdot 2,03^2;$ | d) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1\right).$ |
| b) $\sqrt{2,03} \cdot 1,98;$ | | |

58. Tuletage sobivalt valitud teist järku Taylori valemi abil järgnevate avaldiste ligikaudse arvutamise valemid:

- | | |
|--|---|
| a) $\arctan \frac{1 - \alpha}{1 - \beta} \quad (\alpha , \beta \ll 1);$ | b) $\sqrt{\frac{(1 + \alpha)^m + (1 + \beta)^n}{2}} \quad (\alpha , \beta \ll 1).$ |
|--|---|

59*. Rahuldagu funktsioon $u = u(x, y)$ võrrandit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ja järgmisi tingimusi:
 $u(x, 2x) = x, \quad u'_x(x, 2x) = x^2.$ Leidke $u''_{xx}(x, 2x), u''_{xy}(x, 2x), u''_{yy}(x, 2x).$

8. Kas võrrand määrab funktsiooni, tuletise olemasolul leidke tuletis

60. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x, y) = 0$ määrab punkti $A = (a, b)$ ümbruses pideva funktsiooni $y = f(x)$. Juhul, kui määrab, siis leidke tuletis $f'(a)$, kui ta eksisteerib:

- a) $F(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1$, $A = (0, 1)$;
- b) $F(x, y) = y^2 + x^2 - x^4$, $A = (0, 0)$;
- c) $F(x, y) = xe^y + \ln(x + y + 1)$, $A = (0, 0)$;
- d) $F(x, y) = x^4 - x^2 - y^2 + 2y - 1$, $A = (0, 1)$;
- e) $F(x, y) = y^2 x^{\frac{1}{3}} + \sin y$, $A = (0, 0)$;
- f) $F(x, y) = 15x^2 - 7xy - 2y^2 - 53x + 18y + 44$, $A = (2, 1)$;
- g) $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$, $A = (0, 0)$.

61. Leidke f' , kui $y = f(x)$ on järgmise võrrandiga ilmutamata kujul antud funktsioon:

- a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$;
- b) $y - \varepsilon \cos y = x$, kus $\varepsilon \in (0, 1)$;
- c) $\sin xy = 1 - 0,2xy$;
- d) $y + \sin y + e^x = 0$;
- e) $x + y = e^{x-y}$;
- f) $y^2 + 2xy - 2 = 0$.

62. Tehke kindlaks, kas võrrand $F(x, y, z) = 0$ määrab punkti $A = (a, b, c)$ ümbruses pideva funktsiooni $z = f(x, y)$. Arvutage ka $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, kui nad eksisteerivad:

- a) $F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16$, $A = (1, 4, 2)$;
- b) $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$, $A = (a, b, c)$, kus $c := \sqrt{r^2 - a^2 - b^2} \neq 0$;
- c) $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 8$, $A = (0, -1, 2)$.

63. Leidke antud võrrandiga ilmutamata kujul esitatud funktsiooni $z = f(x, y)$ esimest järku osatuletised:

- a) $x + y + z = e^{-x-y-z}$;
- b) $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$;
- c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$;
- d) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

64. Leidke antud võrrandiga antud punkti $A = (a, b)$ ümbruses ilmutamata kujul esitatud funktsiooni $y = y(x)$ tuletised $y'(a)$ ja $y''(a)$:

- a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, $A = (1, 0)$;
- b) $y + \sin y + e^x = 0$, $A = \left(\ln \frac{\pi + 2}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$;
- c) $y^4 - x^2 y = 1$, $A = (0, 1)$;
- d) $x^2 y^3 - xy = 6$, $A = (-2, 1)$.

65. Leidke võrrandiga $z + xy^2 z^3 - x^2 y = 2$ punkti $(0, 1, 2)$ ümbruses ilmutamata kujul esitatud funktsiooni $z = z(x, y)$ esimest ja teist järku osatuletised punktis $(0, 1)$.

66*. Olgu vahemikus $(-1, 1)$ määratud funktsioon ϕ selline, et $\phi(0) = 0$ ja $|\phi'(y)| < 1$, kui $y \in (-1, 1)$. Tõestage, et punkti 0 teatavas ümbruses määrab võrrand $x = y + \phi(y)$ muutuja y muutuja x (ühese) diferentseeruva funktsioonina $y = y(x)$, kusjuures $y(0) = 0$.

9. Lokaalsed ekstreemumid, globaalsed ekstreemumid. Tinglikud ekstreemumid

67. Leidke kahe muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

- a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$;
 b) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$;
 c) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$;
 d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$;
 e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 f) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$;
- g) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$
 h) $f(x, y) = xy + \frac{1}{2(x+y)}$;
 i) $f(x, y) = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

68. Leidke kolme muutuja funktsiooni f lokaalsed ekstreemumid:

- a) $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$;
 b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$;
 c) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kui $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

69. Leidke järgmiste funktsioonide globaalsed ekstreemumid:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 b) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 c) $f(x, y) = x - 2y - 1$, $(x, y) \in \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$;
 d) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, $(x, y) \in \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$;
 e) $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$, $(x, y) \in \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$;
 f) näidake, et funktsioonil $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$, $(x, y) \in [-5, 5] \times [-1, 1]$ on üksainus lokaalne ekstreemum, mis ei ole globaalseks ekstreemumiks.

70. Leidke harilikule ekstreemumile taandamise meetodil funktsiooni f (tinglikud) lokaalsed ekstreemumid antud tingimustel:

- a) $f(x, y) = xy$, $y = 2x^3 - 3x$;
 b) $f(x, y) = x(y - 1)$, $y = x^2$;
 c) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;
- d) $f(x, y, z) = x + y + z^2$,
 $z - x = 1$, $y - xz = 1$.

71. Leidke Lagrange'i meetodil funktsiooni f (tinglikud) lokaalsed ekstreemumid antud tingimustel:

- a) $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$, $x^2 + y^2 = 1$;
 b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x + y = 2$;
 c) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$;
 d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x + y + 2z = 6$, $x - y = 0$.

72*. Olgu antud funktsioonid $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ja $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ning punkt $A \in \mathbb{R}^2$. Olgu funktsioon F pidev ruumis $\mathbb{R}^2$ ja funktsioonidel F ja f pidevad osatuletised mõlema muutuja järgi ruumis $\mathbb{R}^2$, kusjuures $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$. Olgu $\nabla f(A) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A) \right) \neq (0, 0)$, kusjuures funktsioonil f olgu tinglik lokaalne ekstreemum punktis A tingimusel $F(x, y) = 0$. Tõestage, et vektorid $\nabla f(A)$ ja $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(A), \frac{\partial F}{\partial y}(A) \right)$ on kollineaarsed.

10*. Integraali omaduste ülesanded. Jordani mõttes mõõtuvad hulgad

73. Lähtudes vastavate integraalide definitsioonidest, leidke funktsiooni

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } (x, y) \neq (0, 0), \\ 5, & \text{kui } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

Darboux' ülemine ja alumine integraal ning Riemanni integraal riskülikus $R = [0, 2] \times [0, 3]$.

74. Kasutades Riemanni integraali definitsiooni, leidke $\iint_D xy \, dx \, dy$, kui $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

75. Olgu $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Tõestage, et D ei ole Jordani mõttes mõõtuv.

76. (Hulga nullmõõdulisuse kriteerium) Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tõkestatud hulk ja olgu R selline riskülik, et $D \subseteq R$. Tõestage, et võrdus $\mu(D) = 0$ kehtib parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub risküliku R selline alajaotus T , et nende osariskülikute, millel on ühiseid punkte hulga D , pindalade summa on väiksem kui ε .

77. Tõestage, et nullmõõduga hulga iga alamhulk on mõõtuv ja samuti nullmõõduga.

78. Tõestage, et ühepunktine hulk on nullmõõduga.

79. Tõestage, et kahe nullmõõduga hulga ühend on nullmõõduga. Järeldage siit, et iga lõplik hulk on nullmõõduga.

80. Olgu $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Jordani mõttes mõõtuv hulk. Tõestage, et $\mu(D) = \mu(\overline{D}) = \mu(D^\circ)$.

81. Tõestage, et kui $D \subseteq \mathbb{R}^2$ on mittetühi mõõtuv hulk, kusjuures $D \subseteq \overline{D}^\circ$, siis $\mu(D) > 0$.

82. Tõestage, et $\iint_D \arcsin(x + y) \, dx \, dy \geq 0$, kui $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 - x\}$.

83. Hinnake arvu $I = \iint_{|x|+|y| \leq 10} \frac{dx \, dy}{100 + (\cos x)^2 + (\cos y)^2}$ väärtust.

84*. Olgu $R = [a, b] \times [c, d]$.

- Kas leidub funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et f on integreeruv ristkülikus $R = [a, b] \times [c, d]$, aga tingimus „iga $\xi \in [a, b]$ korral leidub $\int_c^d f(\xi, y) dy$ “ on rikutud?
- Kas leidub funktsioon $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et iga $\xi \in [a, b]$ korral leidub $\int_c^d f(\xi, y) dy$, aga f pole integreeruv ristkülikus R ?

10. Kahekordse integraali arvutamine. Üleminek polaarkoordinaatidele

85. Leidke kahekordsed integraalid:

- $\iint_D \frac{\ln x}{xy} dx dy$, kui D on piiratud joontega $y = 1$, $y = x$ ja $x = e$;
- $\iint_D \sin\left(\frac{x}{3} + 2y\right) dx dy$, kui D on piiratud joontega $y = -\frac{x}{2}$, $y = 0$ ja $x = \frac{\pi}{2}$;
- $\iint_D x dx dy$, kui D on piiratud joontega $y + 3x - 6 = 0$ ja $y = 3x^2$;
- $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, kui D on piiratud joontega $y^2 = x$ ja $y = x^2$;
- $\iint_D xy dx dy$, kui D on piiratud joontega $x^2 + y^2 = 1$, $y = x - 1$ ja $y = 1$;
- $\iint_D x dx dy$, kui D on kolmnurk tippudega $(0, 2)$, $(3, 3)$ ja $(2, 0)$;
- $\iint_D 2|x| dx dy$, kui D on trapets tippudega $(-1, 4)$, $(5, 4)$, $(1, 1)$ ja $(4, 1)$.

86. Leidke järgmised kahekordsed integraalid sobiva muutujate vahetuse abil:

- $\iint_D (3x + 2y - 4)^2 dx dy$, kui $D = \{(x, y): -1 \leq x - y \leq 3, -2 \leq 3x + 2y \leq 8\}$;
- $\iint_D (2x - y) dx dy$, kui $D = \{(x, y): 1 \leq x + y \leq 2, 1 \leq 2x - y \leq 3\}$;
- $\iint_D x dx dy$, kui D on koordinaatasandi esimese veerandi osa, mis on piiratud joontega $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = x$ ja $y = 3x$.

87. Leidke kahekordsed integraalid, minnes üle (elliptilistele) polaarkoordinaatidele:

- $\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$, kui D on määratud võrratustega $y \leq 0$, $x \geq 0$ ja $x^2 + y^2 \leq R^2$;
- $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dx dy$, kus $D = \{(x, y): \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$;
- $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, kui D on määratud võrratustega $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$;
- $\iint_D x dx dy$, kus $D = \{(x, y): x^2 + (y - 1)^2 \leq 1, x \geq 0\}$;

- e) $\iint_D x \, dx \, dy$, kus $D = \{(x, y): 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$;
- f) $\iint_D (x + y) \, dx \, dy$, kus $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq x + y\}$.
- g) $\iint_D x y^2 \, dx \, dy$, kui D asub joonte $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ ja $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ vahel.
- h) $\iint_D x \, dx \, dy$, kui D on piiratud joonega $x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4$;
- i) $\iint_D \sqrt{6 - 2x^2 - 3y^2} \, dx \, dy$, kui D on määratud võrratusega $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} \leq 1$;
- j) $\iint_D \sqrt{x^2 + 9y^2} \, dx \, dy$, kus $D = \{(x, y): x^2 + 9y^2 \leq 1\}$.

88*. Olgu funktsioon f pidev hulgal $\mathbb{R}^2$ ja $a > 0$. Tõestage, et kehtib järgmine valem:

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) \, dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) \, dx.$$

89*. Leidke kahekordne integraal $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} \, dx \, dy$ (tähis $[a]$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu a), kus $D = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$.

11. Kolmekordse integraali arvutamine

90. Leidke järgmised integraalid:

- a) $\iiint_E x^2 y z^2 \, dx \, dy \, dz$, kui $E = [0, 3] \times [0, 2] \times [0, 1]$;
- b) $\iiint_E y \, dx \, dy \, dz$, kui $E = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2 - y\}$;
- c) $\iiint_E (z + 4) \, dx \, dy \, dz$, kui $E = \{(x, y, z): -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$;
- d) $\iiint_E \frac{dx \, dy \, dz}{1 - x - y}$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$;
- e) $\iiint_E x y^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z = xy$ ja tasanditega $x = 1$, $y = x$ ja $z = 0$;
- f) $\iiint_E (2x + 3y - z) \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 3$ ja $x + y = 2$.

91. Üleminekuga (elliptilistele) silinderkoordinaatidele, leidke järgmised integraalid:

- a) $\iiint_E z \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$) ja tasanditega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $z = 2$;

- b) $\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = a^2$ ($x \geq 0, y \geq 0$) ja tasanditega $z = 0, z = 1, y = x$ ja $y = x\sqrt{3}$;
- c) $\iiint_E y \, dx \, dy \, dz$, kus E on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, tasandiga $z = 0$ ja paraboloidiga $z = x^2 + y^2$;
- d) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0\}$;
- e) $\iiint_E xz \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \left\{(x, y, z): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\right\}$.

92. Üleminekuga sfäär- või ellipsoidkoordinaatidele, leidke järgmised integraalid:

- a) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0\}$;
- b) $\iiint_E (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$, kus $E = \{(x, y, z): a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$;
- c) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, kus E on kera $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$;
- d) $\iiint_E z^2 \, dx \, dy \, dz$, kus E on kerade $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ja $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ ühisosa;
- e) $\iiint_E \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{4}} \, dx \, dy \, dz$, kus E on ellipsoid $6x^2 + 4y^2 + 3z^2 \leq 12$.

93*. Tõestage valem

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{m-1}} f(t_1)f(t_2)\dots f(t_m) \, dt_m = \frac{1}{m!} \left(\int_0^t f(\tau) \, d\tau \right)^m,$$

kus f on pidev funktsioon.

12. Kordsete integraalide rakendusi

94. Kahekordse integraali abil leidke tasandilise kujundi D pindala, kui D on piiratud järgmiste joontega (kõikjal $a > 0$):

- a) $y = e^x, y = e^{-x}, y = e$;
- b) $xy = a^2, x + y = 2,5a$;
- c) $r = a \cos \phi$ ja $r = b \cos \phi$, kus $a < b$;
- d) $r = a(1 + \cos \phi)$ (kardioid);
- e) $r = 2a \cos 4\phi$ (neljaleheline roos);
- f) $r \cos \phi = 1$ (sirge) ja $r = 2$ (ringjoon), kusjuures D ei sisalda poolust;
- g) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (Bernoulli lemniskaat);
- h) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;
- i) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$;

j) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (b > 0);$

k) $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = \alpha x, y^2 = \beta x$, kus $0 < a < b, 0 < \alpha < \beta$.

NÄPUNÄIDE: võtke kasutusele uued tundmatud u, v , kus $x^2 = uy, y^2 = vx$.

95. Leidke ruumilise kujundi E ruumala:

- E on piiratud pindadega $x = 0, y = 0, z = 0$ ja $x + y + z = 1$;
- E on piiratud pindadega $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1$ ja $z = 2x^2 + y^2 + 1$;
- E on piiratud pindadega $z = 0, z = x^2 + y^2$ ja $x^2 + y^2 = 1$;
- E on piiratud pindadega $x^2 + y^2 = 3$ ja $z^2 = x^2 + y^2 + 3$;
- E on piiratud pindadega $y = x^2, y = 1, x + y + z = 4, z = 0$;
- E on piiratud pindadega $z = 0, x + z = 6, y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$;
- E on piiratud pindadega $z = 9 - y^2, z = 1 + y^2, x = -1$ ja $x = 5$;
- $E = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \geq x^2 + y^2\}$;
- E on piiratud pindadega $z = 5 - x^2 - y^2$ ja $z^2 = x^2 + y^2 + 1$, kus $z \geq 0$;
- $E = \{(x, y, z): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0\}$.

96. Leida järgmiste ruumiliste pindade märgitud osade pindalad:

- tasandi $6x + 3y + 2z = 12$ osa, kus $x \geq 0, y \geq 0$ ja $z \geq 0$;
- pinna $z = xy$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = 1$ sees;
- sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ osa, mis asub silindri $x^2 + y^2 = b^2$ sees ($b < a$).

97. Leidke risttahuka $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ mass, kui risttahuka tihedus punktis (x, y, z) avaldub seosega $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

98. Leidke kera mass, kui kera raadius on 3 ja tihedus $\rho = \rho(x, y, z)$ igas tema punktis (x, y, z) on võrdeline punkti kaugusega kera keskpunktist, kusjuures tihedus ühiku kaugusel kera keskpunktist on 2.

99. Tasandiline kujund D on piiratud joontega $y = \sin x$ ($x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) ning OA , kus $O = (0, 0)$ ja $A = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Leidke kujundi D raskuskeskme koordinaadid.

100. Leidke kardioidi $r = a(1 + \cos \varphi)$ ($a > 0$) raskuskeskme koordinaadid.

101. Leidke paraboloidiga $y^2 + 2z^2 = 4x$ ja tasandiga $x = 2$ piiratud keha raskuskeskme koordinaadid.

13. Joonintegraalide arvutamine

102. Olgu $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ antud võrdustega $\gamma(0) = (0, 0)$ ja $\gamma(t) = (t, t \cos^2 \frac{\pi}{2t})$, kui $t \neq 0$. Tõestage, et $L := \gamma([0, 1])$ on pidev ja lihtne, aga mitte sirgestuv joon.

NÄPUNÄIDE: uurige kõõlmurdjooni, mis on määratud punktidega $t_0 = 0, t_j = \frac{1}{2n+1-j}, j = 1, \dots, 2n$.

103. Rahuldagu funktsioon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ Lipschitzi tingimust, s.t. leidub arv $K \in \mathbb{R}$ selliselt, et $d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq K |t - t'|$ mis tahes $t, t' \in [a, b]$ korral, ning olgu γ üksühene. Tõestage, et γ on sirgestuv kaar, kusjuures tema pikkus ei ületa arvu $|L| \leq K(b - a)$.

104. Arvutage esimest liiki joonintegraalid:

- $\int_L y^2 ds$, kui L on tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaar, kus $0 \leq t \leq 2\pi$;
- $\int_{AB} \frac{2x+y}{y} ds$, kus AB on punkte $A = (0, -1)$ ja $B = (1, -3)$ ühendav joon $y = -2x - 1$;
- $\int_L (x + y) ds$, kui L on kolmnurk tippudega $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ ja $B = (0, 1)$;
- $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, kui joone L võrrand polaarkoordinaatides on $r = 2a \cos \phi$, $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ($a > 0$);
- $\int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$, kui L on ringi sektori $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ rajajoon;
- $\int_L \frac{3z^2}{x^2 + y^2} ds$, kui L on krüvijoone $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$ esimene keerd ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- $\int_L z ds$, kui L on koonilise krüvijoone $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$ kaar ($0 \leq t \leq a$).

105. Leidke silindrilise pinna $\Sigma = \{(x, y, z): (x, y) \in L, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ pindala, kui L on kaar $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, kus $t \in [\frac{\ln 5}{3}, \frac{\ln 7}{3}]$.

106. Leidke materiaalse joone L mass, kui L on antud võrrandiga $y = \ln x$, kus $1 \leq x \leq e$, ja tema joontihedus on $\rho(x, y) = kx^2$.

107. Arvutage teist liiki joonintegraalid:

- $\int_L (2 - y) dx + x dy$, kus L on tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ kaar ($0 \leq t \leq 2\pi$);
- $\int_{\Gamma} (x + y) dx + (x - y) dy$, kus Γ on ringjoon $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
- $\int_{AB} (4x + y) dx + (x + 4y) dy$, kus AB on punkte $A = (1, 1)$ ja $B = (-1, 1)$ ühendav joon $y = x^4$;
- $\int_{OB} 2xy dx + x^2 dy$, kus $O = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ ja OB i) on sirge $y = x$, ii) on parabool $y = x^2$, iii) koosneb sirglõikudest OA ja AB , kus $A = (1, 0)$;
- $\int_{ABCD} (y - 6) dx + xy dy$, kus $ABCD$ on punkte $A = (-1, 6)$, $B = (1, 6)$, $C = (-2, 0)$ ja $D = (-2, -3)$ ühendav murdjoon;

f) $\int_L y dx + z dy + x dz$, kus L on krüvivjoon $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

108. Jõud konstantse suurusega F on xy -tasandi igas punktis x -telje suunaline. Leidke jõu töö A , mis kulub punkti nihutamiseks mööda ringjoont $x^2 + y^2 = a^2$ negatiivses suunas punkti $(0, a)$ punkti $(a, 0)$.

109. Olgu xy -tasandil jõud $\vec{F}$ suunatud igas punktis $M(x, y)$ punkti $(0, 0)$ poole ja tema suurus F olgu võrdne punkti M kaugusega punktist $(0, 0)$. Leidke jõu töö A , mis kulub punkti nihutamiseks mööda parabooli $y^2 = 8x$ kaart punktist $(2, 4)$ punkti $(4, 4\sqrt{2})$.

110*. Leidke pindade $x^2 + y^2 = x$ ja $z = x$ ühisosaks oleva kaare pikkus. Avaldage tulemus järgmiste suuruste kaudu:

- esimest liiki elliptiline integraal $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2}}$, $k \geq 0$;
- teist liiki elliptiline integraal $E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2} d\theta$, $k \geq 0$.

111*. Olgu antud funktsioon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tähistame

$$V(f; s, t) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : s = x_0 < x_1 < \dots < x_n = t \right\}.$$

Suurust $V(f; a, b)$ nimetatakse funktsiooni f *täisvariatsiooniks*; kui $V(f; a, b) \in \mathbb{R}$, siis öeldakse, et f on lõigus $[a, b]$ *tõkestatud variatsiooniga*.

Tähistame veel

$$v_f(x) = V(f; a, x), \quad x \in [a, b].$$

Ilmselt $v_f(a) = 0$ ja $v_f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvav funktsioon.

Tõestage, et

- kui f on punktis $x_0 \in [a, b]$ paremalt pidev, siis v_f on punktis x_0 paremalt pidev;
- kui f on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis v_f on punktis x_0 pidev;
- kui v_f on punktis $x_0 \in [a, b]$ pidev, siis f on punktis x_0 pidev.

Näpunäited. Osa a) jaoks piisab näidata, et $\lim_{x \rightarrow x_0+} V(f; x, x_0) = 0$, seda võiks teha ε - δ keeles. Osa c) juures tasub uurida võrratuse $|f(x) - f(x_0)| \leq |v_f(x) - v_f(x_0)|$ kehtivust.

Märkus. Asendades absoluutväärtused normidega, näitab ülesanne 111, et kui joon $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ on sirgestuv, siis γ on pidev (mingis punktis) parajasti siis, kui „kaarepikkuse funktsioon“ $t \mapsto |\{\gamma(u): u \in [a, t]\}|$ on pidev (samam punktis).

112*. Tõestage, et ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pikkus C rahuldab võrratusi

$$\pi(a+b) < C < \pi\sqrt{2(a^2+b^2)}.$$

Näpunäide: Joone kaare pikkuse valem.

14. Greeni valem. Integreerimistest sõltumatud joonintegraalid

113. Leidke Greeni valemi abil järgmised joonintegraalid.

- a) $\int_L (1 - x^2)y \, dx + x(1 + y^2) \, dy, \quad L: x^2 + y^2 = a^2;$
- b) $\int_L (xy + x + y) \, dx + (xy + x - y) \, dy, \quad L: x^2 + y^2 = ax;$
- c) $\int_L (xy + x + y) \, dx + (xy + x - y) \, dy, \quad L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

114. Millised järgmistest joonintegraalidest on integreerimistest sõltumatud ja millised sõltuvad?

- a) $\int_L (4x + 2y) \, dx + (2x - 6y) \, dy;$
- b) $\int_L y \, dx - x \, dy;$
- c) $\int_L (3x^2 - 2xy + y^2) \, dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) \, dy.$

115. Leidke funktsioonid U nende täisdiferentsiaalide dU järgi.

- a) $dU = (3x^2 - 2xy^2) \, dx + (3y^2 - 2x^2y) \, dy;$
- b) $dU = (e^{2y} - 5y^3e^x) \, dx + (2xe^{2y} - 15y^2e^x) \, dy;$
- c) $dU = \frac{(x + 2y) \, dx + y \, dy}{(x + y)^2};$
- d) $dU = \frac{x \, dx + y \, dy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$
- e) $dU = (2x \cos y - y^2 \sin x) \, dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) \, dy;$
- f) $dU = (2x + \sin(x + y)) \, dx + (2y + \sin(x + y)) \, dy;$
- g) $dU = \sin(x + y)(dx + dy).$

116. Leidke järgmised joonintegraalid.

- a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y \, dx + x \, dy;$
- b) $\int_{(0,1)}^{(1,2)} 2xy^{-3} \, dx - (3x^2 - y^2)y^{-4} \, dy;$
- c) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) \, dx + (6x^2y^2 - 5y^4) \, dy;$
- d) $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy \, dx + x^2 \, dy.$

117. Näidake, et iga diferentseeruva funktsiooni f korral võrduvad järgmised joonintegraalid nulliga, kui L on kontuur.

a) $\int_L f(x) dx + th y dy;$

c) $\int_L x^{-2} f\left(\frac{y}{x}\right) (x dy - y dx).$

b) $\int_L f(xy)(y dx + x dy);$

118*. Leidke lihtne kinnine joon L , mille korral joonintegraal $\int_L (y^3 - y) dx - 2x^3 dy$ saavutab maksimaalse väärtuse.

15. Parameetrist sõltuv Riemanni integraal

119. Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad.

$$\text{a) } F(y) = \int_0^3 e^{-xy} dx, \quad y \in [0, 1];$$

$$\text{d) } F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y) dx, \quad y \in [0, 1];$$

$$\text{b) } F(y) = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin(x+y) dx, \quad y \in [0, \frac{\pi}{4}];$$

$$\text{e) } F(y) = \int_{2y}^{4y} \frac{\cos(x+y)}{x} dx, \quad y \in [1, 4];$$

$$\text{c) } F(y) = \int_{-3}^7 \frac{\sin(xy)}{x} dx, \quad y \in [-2, 10];$$

$$\text{f) } F(y) = \int_0^{y^2} \frac{\arcsin(x/y)}{x} dx, \quad y \in [1, 2].$$

120. Leida järgmised piirväärtused.

$$\text{a) } \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos(xy) dx;$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + (1 + x/n)^n};$$

$$\text{g) } \lim_{y \rightarrow 0} \int_{y-2}^{1+y} \sqrt{x^2 + t^2} y dx;$$

$$\text{b) } \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + \operatorname{sh}^2 y} dx;$$

$$\text{e) } \lim_{y \rightarrow 2+} \int_1^e \frac{1}{x} \arctan \frac{x}{y-2} dx;$$

$$\text{h) } \lim_{y \rightarrow 1-} \int_0^{\frac{\pi y}{2}} \sqrt{x + \arcsin y} dx.$$

$$\text{c) } \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 + xy)^{\frac{1}{y}}};$$

$$\text{f) } \lim_{y \rightarrow 0} \int_1^{3-y} x^2 \cos^2(xy) dx;$$

121. Leida integraalid $\int_0^1 F(y) dy$.

$$\text{a) } F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos x \cos(y \cos x) dx;$$

$$\text{b) } F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \operatorname{cossin} x \cos(y \sin x) dx;$$

$$\text{c) } F(y) = \int_0^1 (x + e^x - x^y \ln x) dx.$$

122. Leida tuletised $F'(y)$.

$$\text{a) } F(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx;$$

$$\text{c) } F(y) = \int_0^2 \frac{\arcsin(xy)}{x} dx;$$

$$\text{b) } F(y) = \int_1^{\pi} \frac{\cos(xy^2)}{x} dx;$$

$$d) F(y) = \int_{\frac{1}{2+y}}^{y^2} \frac{\cos(xy)}{x} dx;$$

$$e) F(y) = \int_0^{\frac{1}{2+y}} \frac{\ln(1+xy)}{x} dx;$$

$$f) F(y) = \int_y^{2y} \frac{\sin(xy)}{x} dx.$$

123. Leida järgnevad integraalid, kasutades diferentseerimist parameetri a (või b) järgi.

$$a) J(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx;$$

$$b) J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx, \quad |a| < 1;$$

$$c) J(a, b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a, b > 0.$$

16. Parameetrist sõltuvad päratud integraalid. Euleri integraalid

124. Näidata, et järgmised integraalid koonduvad ühtlaselt ja absoluutselt antud piirkonnas Y .

$$a) \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(xy) dx, \quad Y = (-\infty, \infty);$$

$$e) \int_0^2 \frac{x^y}{\sqrt{4-x^2}} dx, \quad Y = (-\ln 2, 8);$$

$$b) \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin x dx, \quad Y = [a, \infty), \quad a > 0;$$

$$f) \int_0^1 \frac{\sin(x - y \cos x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \quad Y = (-\infty, \infty);$$

$$c) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2} dx, \quad Y = (-\infty, \infty);$$

$$g) \int_1^2 \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x-y}} dx, \quad Y = [0, 1].$$

$$d) \int_{-\infty}^1 \frac{\arctan(x-y)}{\sqrt{1-x}} dx, \quad Y = (-\infty, \infty);$$

125. Näidata, et järgmised funktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

$$a) F(y) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arccot}(x-y)}{\sqrt{1-x}} dx, \quad y \in (-\infty, \infty);$$

$$b) F(y) = \int_1^{\infty} \frac{x}{2+x^{y+2}} dx, \quad y \in [a, \infty), \quad a > 0;$$

$$c) F(y) = \int_0^3 \frac{\sin(xy)}{x\sqrt{3-x}} dx, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

126. Leida järgmised piirväärtused.

$$a) \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\ln 3}^{\infty} x^y e^{-2x} dx;$$

$$b) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx.$$

127. Leida integraalid $\int_0^1 F(y) dy$.

$$a) F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^y \ln x dx;$$

$$b) F(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{2y} \ln x dx.$$

128. Kasutades diferentseerimist parameetri a järgi, leida järgmised integraalid.

$$a) J(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2} - e^{-ax^2}}{x} dx, \quad a > 0;$$

$$c) J(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx, \quad a, b > 0.$$

$$b) J(a) = \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} dx, \quad a > -1;$$

129. Arvutada järgmised integraalid, kasutades Euleri integraale.

$$a) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx;$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx;$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx;$$

$$b) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}};$$

$$g) \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}} dx}{(1+x)^2};$$

$$c) \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos^9 x dx;$$

$$h) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

130. Arvutada järgmised integraalid, kasutades Euleri integraale.

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^{\frac{1}{n}}}, \quad m > 0;$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{(1+x)^{n+1}}, \quad n > m > -1;$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n > -1;$$

$$d) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx, \quad p > -1.$$

Vastused ja lahendusvihjed

1. a) näidake, et $C\left(A, \frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \subseteq B(A, r)$; b) näidake, et $B(A, \min\{r_1, r_2\}) \subseteq C(A, r_1, r_2)$.
- Ruumis $\mathbb{R}^m$ näidake, et $C\left(A, \frac{r}{\sqrt{m}}, \dots, \frac{r}{\sqrt{m}}\right) \subseteq B(A, r)$ ning $B(A, \min\{r_1, r_2, \dots, r_m\}) \subseteq C(A, r_1, r_2, \dots, r_m)$.
2. Sisalduvusest $D \subseteq B((0, \dots, 0), r)$ järeldub D tõkestatus. Vastupidi, olgu D tõkestatud, siis $D \subseteq B(A, \rho)$ mingi $\rho > 0$ ja $A \in \mathbb{R}^m$ korral. Tähistage $r = \rho + \|A\|$.
3. a) $D = [0, 1]^2$; b) $D = \mathbb{R}^2$; c) $D = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$; d) $D = [0, 1]^2 \setminus \left\{\left(\frac{1}{2}, t\right) : t \in [0, 1]\right\}$; e) $D = \mathbb{Q}^2 \cup [0, 1]^2$.
4. a) $B(0, 1)$; b) $\overline{B}(0, 1)$; c) $B(0, 1) \cup \{(1, 0)\}$; d) $\emptyset$.
5. hulga enda ega tema täiendi ükski punkt pole rajapunkt.
6. a) lahtine, ei ole kinnine, ristkülik; b) ei ole lahtine ega kinnine, rõngas; c) kinnine, ei ole lahtine; d) kinnine, ei ole lahtine, ringjoon. e) kinnine; f) kinnine.
7. a) kinnine, ei ole lahtine, tasand; b) kinnine, ei ole lahtine, poolruum; c) kinnine, ei ole lahtine, tasand; d) kinnine, ei ole lahtine, tasand; e) kinnine, ei ole lahtine, paraboolne silinder; f) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline silinder; g) kinnine, ei ole lahtine, sfäär; h) kinnine, ei ole lahtine, sfäär; i) kinnine, ei ole lahtine, elliptiline paraboloid; j) kinnine, ei ole lahtine, sirge; k) kinnine, ei ole lahtine, sirge; l) kinnine, ei ole lahtine, ringjoon; m) kinnine, ei ole lahtine, punkt; n) lahtine, ei ole kinnine, kera.
11. a) tasand; b) tasand; c) sfääri ülemine pool; d) koonus; e) sfääri alumine pool; f) paraboolne silinder.
12. a) paralleelsed sirged; b) kontsentrilised ringjooned; c) hüperboolid, mille asümptootideks on nurgapoolitajad; d) hüperboolid, mille asümptootideks on koordinaatteljed; e) kontsentrilised rombid; f) ringjooned, mille keskpunkt asub x -teljel ja mis puutuvad y -telge; g) paralleelsed tasandid; h) kontsentrilised sfäärid; i) sama asümptootilise koonusega pöördhüperboloidid.
13. $f(y, x) = -f(x, y)$, $f(-x, -y) = f(x, y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) = -f(x, y)$, $\frac{1}{f(x, y)} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$.
15. a) $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$; b) $\delta = \frac{\varepsilon}{10}$; c) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; d) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{20}\right\}$.
16. a) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$; b) $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$; c) $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$; d) $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$; e) $\delta = \min\left\{1, \frac{2}{E}\right\}$; f) $D = \sqrt{1 + \frac{1}{E}}$; g) $D = \sqrt{E}$.
17. Heine kriteerium (kõige mugavam).
18. Valige $\varepsilon = f(A)$.
19. Valige näiteks $\varepsilon = 1$ ning märgake, et $|f(X)| \leq |f(X) - f(A)| + |f(A)|$.
20. Funktsiooni f pidevuse tingimusest tekkinud δ sobib ka f_1 ja f_2 jaoks.
21. Ei.
23. a) $(0, 1)$; b) $(1, e)$; c) ei leidu; d) ei leidu.
26. a) 4; b) 16; c) 0; d) a; e) 2; f) $-\infty$; g) e; h) 0; i) 0; j) ei eksisteeri; k) ei eksisteeri; l) ei eksisteeri; m) ei eksisteeri; n) ei eksisteeri; o) ei eksisteeri; p) ei eksisteeri; q) 0; r) 0; s) 0; t) 0; u) ei eksisteeri.
28. Korduvate piiväärtuste jaoks kasutage Heine kriteeriumit.
29. a) jah; b) ei; c) jah; d) jah; e) ei; f) jah; g) ei; h) ei; i) jah.
31. Kasutage ühe muutuja funktsiooni tuletise vastavaid omadusi.
32. a) $f'_x(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $f'_y(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$; b) $f'_x(x, y) = y + y \ln(xy)$, $f'_y(x, y) = x + x \ln(xy)$; c) $f'_x(x, y) = \frac{|y|}{x^2 + y^2}$, $f'_y(x, y) = -\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)}$; d) $f'_x(x, y, z) = \frac{1}{y} + \frac{z}{x^2}$, $f'_y(x, y, z) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z}$, $f'_z(x, y, z) = -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{x}$; e) $f'_x(x, y, z) = y \cos(xy + yz) = f'_z(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z) = (x + z) \cos(xy + yz)$; f) $f'_x(x, y) = -\frac{\sin x}{\cos y}$, $f'_y(x, y) = \frac{\cos x \sin y}{\cos^2 y}$.

33. Kasutage korduvalt väidet: kui f on lõigus $[a, b]$ pidev ja vahemikus (a, b) dif-v, kusjuures $f'(x) \geq 0$, siis f on kasvav lõigus $[a, b]$.

34. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C(x)$, kus $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on suvaline funktsioon.

35. $f(x, y) = \frac{y^2 \ln x^2}{2} + \frac{x^2 - 1}{2} + \sin y$.

36. P = on pidev, O = on lõplikud osatuletised, D = on diferentseeruv, DD = on kaks korda diferentseeruv;

a) P, $\neg$ O; b) P, O, $\neg$ D; c) P, $\neg$ O; d) P, O, D, $\neg$ DD; e) $\neg$ P, O; f) $\neg$ P, O; g) P, O, $\neg$ D; h) P, O, D, $\neg$ DD; i) P, $\neg$ O; j) P, O, D, $\neg$ DD; k) P, O, D, $\neg$ DD.

37. Kasutage ülesannet 31 ning piirväärtuse omadusi.

38. Diferentseeruvuse põhjendab punkti A ümbruses pidevate osatuletiste olemasolu; a) $df(h_1, h_2) = 0$; b) $df(h_1, h_2) = 12h_1 + 8h_2 \ln 2$; c) $df(h_1, h_2) = h_1 + h_2$; d) $df(h_1, h_2) = \frac{h_1}{5} + \frac{h_2}{2}$; e) $df(h_1, h_2, h_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi h_1}{6} + h_2 + h_3\right)$; f) $df(h_1, h_2, h_3) = -6h_1 + 3h_2 + 2h_3$.

39. $z'_{II}(5, 6, 7) = 68$; $z'_{IV}(5, 6, 7) = 75$; $z'_{W}(5, 6, 7) = 82$.

40. $c'_S(1, 2) = 275$; $c'_I(1, 2) = 392$.

41. Nii välimine funktsioon kui ka sisemised funktsioonid on diferentseeruvad seoses pidevate osatuletiste olemasoluga; a) $df = (e^{2x} - 2xe^{2x} - 1) dx$; b) $df = (\cos x \cos(2x+1) + \cos(3x+1)) dx$; c) $df = 2 \ln(y+1) dx + \frac{2x+1}{y+1} dy$; d) $df = 8x^3 dx + 8y^3 dy$; e) $df = e^{2x-y} ((2x^2 + 2xy + 2x + y) dx + (x - xy - x^2) dy)$.

43. a) $y - z = 0$; b) $x + 2y - z - 1 = 0$; c) $3x + 3y - z = 0$; d) $x + y - z + 1 = 0$; e) $2x + 4y - z - 5 = 0$; f) $4x - 2y - z - 3 = 0$; g) $\frac{\pi}{6}x + \frac{1}{2}y - z + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} = 0$.

44. a) jah; b) ei (puutujatasandit ei leidu); c) jah.

45. $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(P_0) = \text{grad } f(P_0) \cdot \frac{1}{|\vec{s}|} \vec{s}$.

46. $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

47. a) kõrgemale; b) madalamale; c) vektori (8, 9) suunas või vastassuunas.

49. a) ??; b) ??; c) ??; d) ??; e) ??; f) ??; g) ??; h) ??.

50. a) $u(x, y) = C(y) + D(x)$, kus C on diferentseeruv ja D on suvaline funktsioon; b) $u(x, y) = xC(y) + D(y)$, kus C ja D on suvalised funktsioonid.

51. a) ??; b) ??; c) ??; d) ??; e) ??; f) ??.

52. a) jah; b) ei.

53. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0) = 1$; rikutud on segaosatuletiste pidevuse ning osatuletiste diferentseeruvuse nõuded.

54. Kõik osatuletised on pidevad, vajaliku järku diferentseeruvus on seega olemas, veelgi enam, liit-funktsiooni diferentsiaali kuju on invariantne muutuja vahetuse suhtes, kuna sisemine funktsioon on lineaarfunktsioon; a) ??; b) ??; c) ??; d) ??; e) ??; f) ??; g) ??; h) ??; i) $u = x + y + 1$, $d^4 f = 120u d^4 u$; j) $u = 2x + 3y - 5z$, $d^6 f = -\cos u d^6 u$.

55. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim_{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, y)}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x, y) = 1 + x + y +$

$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x, y)$; b) $f(x, y) = 1 + 3x - 3y + 3y^2 - 3xy + xy^2 - y^3 + \alpha(x, y)$; c) $f(x, y) = -\frac{11}{3} + 3x + 3y - \frac{3x^2 + 3y^2}{2} + \frac{x^3 + y^3}{3} + \alpha(x, y)$.

56. Kõikjal rahuldab jääkliige α tingimust $\lim_{\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$; a) $f(x, y) = 1 + y - \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{3yx^2 - y^3}{6} +$

$\alpha(x, y)$; b) $f(x, y) = y + yx + \frac{3yx^2 - y^3}{6} + \alpha(x, y)$; c) $f(x, y) = y + yx - \frac{y^2}{2} + \frac{3yx^2 - 3y^2x + 2y^3}{6} + \alpha(x, y)$; d) $f(x, y) =$

$$x + y - \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{6} + \alpha(x, y); \text{ e) } f(x, y) = x - y^2x + \alpha(x, y); \text{ f) } f(x, y) = x^2y + \alpha(x, y).$$

57. a) 1,06; b) 2,005; c) 8,21; d) 0,005.

$$58. \text{ a) } \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}; \text{ b) } 1 + \frac{m\alpha + n\beta}{4} + \frac{(3m^2 - 4m)\alpha^2 - 2mna\beta + (3n^2 - 4n)\beta^2}{32}.$$

60. a) määrab, $f'(0) = 0$; b) ei määra, sest **A** on $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ isoleeritud punkt; c) määrab, $f'(0) = -2$; d) ei määra, sest **A** on $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ isoleeritud punkt; e) määrab, $f'(0) = 0$; f) ei määra, sest $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ laguneb punkti **A** ümbruses kaheks lõikuvaks sirgeks; g) ei määra, sest $\{(x, y) : F(x, y) = 0\}$ laguneb punkti **A** ümbruses kaheks lõikuvaks jooneks.

$$61. \text{ a) } f'(x) = \frac{x+f(x)}{x-f(x)}; \text{ b) } f'(x) = \frac{1}{1+\varepsilon \sin f(x)}; \text{ c) } f'(x) = -\frac{f(x)}{x}; \text{ d) } f'(x) = -\frac{e^x}{\cos f(x)+1}; \text{ e) } f'(x) = \frac{e^{x-f(x)}-1}{e^{x-f(x)}+1};$$

$$\text{ f) } f'(x) = -\frac{f(x)}{x+f(x)}.$$

$$62. \text{ a) määrab, } \frac{\partial f}{\partial x}(1, 4) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 4) = -\frac{3}{4}; \text{ b) määrab, } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{a}{c}, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = -\frac{b}{c}; \text{ c) määrab, } \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{1}{2}, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

$$63. \text{ a) } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -1; \text{ b) } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{z}{z+x}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{z^2}{xy+yz}; \text{ c) } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{yz-x}{z-xy}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{xz-y}{z-xy}; \text{ d) } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{c^2x}{a^2z}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{c^2y}{b^2z}.$$

64. ???

65. ???

67. a) range lok. miinimum punktis (0,0); b) lok. ekstr. puuduvad; c) range lok. miinimum punktis $(-2, -1)$; d) range lok. maksimum punktis $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, lok. maksimum punktis (0,0); e) range lok. miinimum punktis (0,0); f) range lok. miinimum punktis (1, -1), range lok. maksimum punktis $(-1, -1)$; g) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) lokaalsed ekstreemumid puuduvad; h) range lok. maksimum punktis (1, -1).

68. a) range lok. miinimum punktis $(1, -2, \frac{1}{2})$; b) range lok. miinimum punktis (1, -1, 3); c) range lok. miinimum punktis $(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

69. a) $\max f = f(0, -1) = 2$, $\min f = f(0, 1/2) = -0,25$; b) $\max f = f(-1, 0) = f(1, 0) = 3$, $\min f = f(0, 1) = f(0, -1) = 1$; c) $\max f = f(1, 0) = 0$, $\min f = f(0, 1) = -3$; d) $\max f = f(-1, -0) = f(0, -1) = 1$, $\min f = f(0, 0) = 0$; e) $\max f = f(0, 1) = f(0, -1) = 3/e$, $\min f = f(0, 0) = 0$; f) Punktis (0,0) on ainuke lokaalne maksimum $f(0, 0) = 0$, kuid näiteks punktis (5, 0) $f(5, 0) = 25$. Seega punkt (0,0) ei ole globaalse ekstreemumi punkt.

70. a) range lok. miinimum punktides $(-1, 1)$ ja $(1, -1)$, range lok. maksimum punktis (0,0); b) range lok. miinimum punktis (1,1), range lok. maksimum punktis $(-1, 1)$; c) range lok. miinimum punktis $(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2})$; d) range lok. miinimum punktis $(-1, 1, 0)$.

71. a) range lok. miinimum punktis $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, range lok. maksimum punktis $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$; b) range lok. miinimum punktis (1,1); c) range lok. miinimum punktis $(-1, 2, -2)$, range lok. maksimum punktis (1, -2, 2); d) range lok. miinimum punktis (1, 1, 2).

74. 1/4 (Kuna tegemist on pideva funktsiooniga, siis integraali võib arvutada ühtlase alajaotuse kaudu.)

75. Näidake, et $S(T) - s(T) = 1$ ristküliku $[0, 1]^2$ iga alajaotuse T korral.

77, 78, 79. Kasutage hulga nullmõõdulisuse kriteeriumit (ülesanne 76).

80. Kasutage mõõdu monotoonsust ja subadiitiivsust koos seostega $D^\circ \subseteq D \subseteq \overline{D} = D^\circ \cup \partial D$.

81. Pange tähele, et D sisaldab mingit lahtist kera.

82. $D = D_1 \cup D_2$, kus $D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ ja $D_2 = [0, 1] \times [-1, 0]$. $\iint_{D_1} \arcsin(x+y) \geq 0$ (miks?). $\iint_{D_1} \arcsin(x+y) = 0$ (integraali võib arvutada ühtlase alajaotuse kaudu (miks?), punktid on

otstarbekas valida nii, et punkti P_{ij} korral leiduks punkt P'_{ij} , mis on sümmeetriline punktiga P_{ij} sirge $y = -x$ suhtes, siis $\arcsin(P_{ij}) + \arcsin(P'_{ij}) = 0$.

83. $1,96 \leq I \leq 2$.

85. a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{3(2-\sqrt{3})}{8}$; c) $-\frac{27}{4}$; d) $\frac{6}{35}$; e) $\frac{7}{12}$; f) $\frac{20}{3}$; g) 61.

86. a) $224/3$; b) $4/3$; f) $\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)}{3}$.

87. a) 0; b) $\pi(\cos \pi^2 - \cos 4\pi^2)$; c) $\frac{16}{9}$; d) $2/3$; e) 7; f) $\pi/2$. Üks võimalus (aga mitte kõige otstarbekam!) on teha asendus $u = x + y$, $v = x - y$ ja seejärel minna üle polaarkoordinaatidele. g) 0; h) 18π ; i) 4π ; j) $2\pi/9$.

90. a) 6; b) 4; c) $40/3$; d) $1/2$; e) $1/364$; f) 11.

91. a) $\pi/2$; b) $3a^2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; c) 0; d) $4\pi(b^5 - a^5)/15$; e) $2/5$.

92. a) $\pi/2$; b) $8\pi(b^5 - a^5)/15$; c) $\pi/10$; d) $59\pi a^5/480$; e) $6\pi^2$.

94. a) 2; b) $\frac{a^2}{8} \cdot (15 - 16\ln 2)$; c) $\frac{\pi}{4} \cdot (b^2 - a^2)$; d) $\frac{3\pi a^2}{2}$; e) πa^2 ; f) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$; g) $2a^2$; h) a^2 ; i) $\frac{5\pi a^2}{8}$; j) πab ; k) $\frac{(b-a)(\beta-a)}{3}$.

95. a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $4\pi(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$; e) $\frac{68}{15}$; f) $\frac{48\sqrt{6}}{5}$; g) 128; h) $\frac{\pi(8\sqrt{2}-7)}{6}$; i) $\frac{35\pi}{6}$; j) $\frac{\pi(5\sqrt{2}-6)}{4}$.

96. a) 14; b) $\frac{2\pi(2\sqrt{2}-1)}{3}$; c) $4\pi a(a - \sqrt{a^2 - b^2})$.

97. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$.

98. 162π .

99. $\left(\frac{12-\pi^2}{12-3\pi}, \frac{\pi}{24-6\pi}\right)$.

100. $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.

101. $\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$. (NB! Raskuskese asub väljaspool keha!)

102. Olgu näpunäites antud kõõlmurdjoone pikkus $p(T)$, siis

$$p(T) \geq 2 \cdot \frac{1}{2n} + 2 \cdot \frac{1}{2n-2} + \dots + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow \infty.$$

103. Kaare L suvalise kõõlmurdjoone pikkus ei ületa arvu $K(b-a)$.

104. a) $2\pi a^4$; b) $\sqrt{5} \ln \sqrt{3}$; c) $1 + \sqrt{2}$; d) $8a$; e) $2e^a - 2 + \frac{\pi a e^a}{4}$; f) $8a\pi^3 \sqrt{2}$; g) $\frac{\sqrt{(a^2+2)^3-2\sqrt{2}}}{3}$.

105. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

106. $\frac{k}{3} \cdot \left(\sqrt{(e^2+1)^3} - 2\sqrt{2}\right)$.

107. a) -2π ; b) 0 (märkus: vastust on arvutamata lihtne näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = \frac{x^2+xy-y^2}{2}$); c) -2 (märkus: vastust on lihtsam näha, vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ ning mingit lihtsamat kõverat AB); d) a) 1, b) 1, c) 1 (märkus: vaadeldes potentsiaalifunktsiooni $F(x, y) = x^2 y$, pole see juhuslik, et kõik vastused on samad); e) 0; f) $-\pi$.

108. $\vec{F}(x, y) = (F, 0)$, seega $A = aF$.

109. $\vec{F}(x, y) = (-x, -y)$; tarvis on leida $A = \int_L \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle d\vec{r}$, kus $d\vec{r} = (dx, dy)$; saame, et $A = -14$.

113. a) $\frac{\pi a^4}{2}$, kahekordne integraal arvutada üleminekuga polaarkoordinaatidele; b) $-\frac{\pi a^3}{8}$; c) 0, kahekordne integraal leida üleminekuga elliptilistele polaarkoordinaatidele $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, kus $0 \leq r \leq 1$ ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

114. a) Sõltumatu; b) sõltuv; c) sõltumatu.

- 115.** a) $U(x, y) = x^3 - x^2y^2 + y^3 + C$; b) $U(x, y) = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$; c) $U(x, y) = \ln|x + y| - \frac{y}{x+y} + C$ või
 $U(x, y) = \ln|x + y| + \frac{x}{x+y} + C$; d) $U(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C$; e) $U(x, y) = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C$, võtta $a = b = 0$;
f) $U(x, y) = x^2 - \cos(x + y) + y^2 + C$; g) $U(x, y) = C - \cos(x + y)$.
- 116.** a) 8; b) $\frac{5}{8}$; c) 64; d) 4.