

RÜHMATEOORIA

Sügis 2025

Eksam

Eksam koosneb kirjalikust (võimalik saada 20 punkti) ja suulisest osast (80 punkti). Kirjalikus osas on vaja 30 minuti jooksul vastata abimaterjalideta küsimustele, mis puudutavad definitsioone (vt. nimekirja allpool) ja teoreemide sõnastusi (vt. nimekirja allpool). Lisaks sellele peab oskama tuua näiteid esimeses nimekirjas olevate mõistete kohta.

Pärast kirjaliku osa lõppu valib üliõpilane juhuslikult ühe teoreemi allpool olevast kolmandast nimekirjast. Siis on võimalik suvalises kohas kõikvõimalike materjalide abiga ette valmistada ning sama päeva pärastlõunal tuleb see tõestus esitada tahvlil. Vastamine toimub niiõelda elava järjekorra alusel. Vastamisel võib kaasas olla üks A4 leht oma käega kirjutatud teksti. Hinne selgub pärast suulise vastamise lõppu kahe osa punktide summast lähtuvalt standardse hindamisskaala alusel.

Vaja on tunda järgmisi mõisteid ja osata nende kohta näiteid tuua.

1. Rühm, Abeli rühm.
2. Rühmade homomorfism, isomorfism, automorfism, siseautomorfism.
3. Alamrühm, pärisalamrühm, alamhulga poolt tekitatud alamrühm.
4. Rühmade otsekorutus, otsekorrutise projektsioon.
5. Kõrvalklass.
6. Normaalne alamrühm.
7. Alamrühma indeks.
8. Homomorfismi tuum.
9. Faktorrühm. Loomulik projektsioon faktorrühmale.
10. Tsükliline rühm.
11. Rühma elemendi järk.
12. Substitutsioon, sümmeetriline rühm, teisenduste rühm.
13. Tsükkel, sõltumatud tsüklid.
14. Transpositsioon.
15. Lihtne rühm.

16. Rühma toime hulgal.
17. Orbiit, orbiidi pikkus, transitiivne toime.
18. Elemendi stabilisaator toime suhtes.
19. p -rühm, Sylowi p -alamrühm.
20. Kaasalamrühmad.
21. Alamrühmade sisemine otsesumma.
22. Abeli rühma p -komponent.
23. Perioodiline rühm.
24. Vaba rühm.
25. Vaba rühma baas.
26. Transveksioon.
27. Skalaarmatriks.
28. Rühma alamhulga tsentralisaator.
29. Rühma tsenter.
30. Üldine projektiivne lineaarrühm, spetsiaalne projektiivne lineaarrühm.
31. Rühma normaaljada.
32. Lahenduv rühm.
33. Elementide kommutaator, rühma kommutaatoralamrühm.
34. Tuletatud alamrühmad, tuletatud jada.

Tuleb osata sõnastada järgmisi teoreeme.

1. Homomorfismiteoreem.
2. Esimene isomorfismiteoreem.
3. Teine isomorfismiteoreem.
4. Cayley teoreem.
5. Teoreem orbiidist ja stabilisaatorist.
6. Esimene Sylowi teoreem.
7. Cauchy teoreem.

Eksami suulises osas tuleb esitada järgnevatest teoreemidest ühe tõestus.

1. Tulemus dieedri rühma ehituse kohta (lause 1.31).
2. Lagrange'i teoreem (teoreem 1.43).
3. Esimene isomorfismiteoreem (teoreem 2.6).
4. Teine isomorfismiteoreem (teoreem 2.8).
5. Teoreem tsükliliste rühmade ehituse kohta (teoreem 3.5).
6. Cayley teoreem (teoreem 4.2).
7. Burnside'i lemma koos teoreemiga orbiidist ja stabilisaatorist (teoreem 5.15 ja teoreem 5.16).
8. Esimene Sylowi teoreem (teoreem 6.3).
9. Teine Sylowi teoreem (teoreem 6.7).
10. Kolmas Sylowi teoreem (teoreem 6.8).
11. Teoreem alamrühmade sisemise otsesumma kohta (teoreem 7.2).
12. Teoreem perioodilise Abeli rühma ehituse kohta (teoreem 8.8).
13. Teoreem lõpliku Abeli p -rühma ehituse kohta (teoreem 8.10).
14. Teoreem vaba rühma konstruktsiooni kohta (teoreem 9.4).
15. Tarvilik ja piisav tingimus rühma vabaduseks (teoreem 9.11).
16. Teoreem rühma $PSL_2(\mathbb{R})$ lihtsusest (teoreem 10.11).
17. Tarvilik ja piisav tingimus rühma lahenduvuseks (teoreem 11.15).