

Algebra I
praktikumiülesanded
2026. a. sügissemester

Sisukord

1	Ühe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.	3
2	Ühe ja kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.	5
3	Kompleksarvud.	8
4	Vektorruum. Vektorruumi alamruum.	11
5	Lineaarne sõltumatus ja sõltuvus.	14
6	Determinant.	17
7	Pöördmaatriks.	22
9	Astak.	25
10	Lineaarvõrrandisüsteemid.	27
11	Polünoomid.	31
12	Lineaarkujutused ja -teisendused.	33
13	Lineaarteisenduse omaväärtused ja omavektorid.	37
14	Eukleidiline ruum.	39
15	Ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused.	42

1. Ühe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.

Olgu antud hulk A (ka tühi hulk on lubatud).

n -kohaliseks algebraliseks tehteks hulgal A nimetatakse kujutust $f: \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n \rightarrow A$.

Kui $*$ on kahekohaline tehe (s.t. $*$: $A \times A \rightarrow A$) kirjutatakse tavaliselt $*(x, y)$ asemel $x * y$. Hulka A koos temal defineeritud kahekohalise algebralise tehtega $*$ nimetatakse *rühmoidiks*.

Olgu $(A, *)$ rühmoid.

$(A, *)$ on *poolrühm* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x, y, z \in A. (x * y) * z = x * (y * z)$.

$(A, *)$ on *monoid* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall x, y, z \in A. (x * y) * z = x * (y * z), \\ \exists 1 \in A, \forall x \in A. x * 1 = 1 * x = x. \end{cases}$

Lause. Monoidis element 1 (*ühikelement*) on üheselt määratud.

$(A, *)$ on *rühm* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall x, y, z \in A. (x * y) * z = x * (y * z), \\ \exists 1 \in A, \forall x \in A. x * 1 = 1 * x = x, \\ \forall x \in A, \exists y \in A. x * y = y * x = 1. \end{cases}$

Lause. Rühmas igale elemendile x vastav element y nii, et $x * y = y * x = 1$ (ehk elemendi x *pöördelement*) on üheselt määratud. Tähis: $x^{-1} = y$.

$(A, *)$ on *Abeli rühm* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (A, *) \text{ on rühm,} \\ \forall x, y \in A \quad x * y = y * x. \end{cases}$

1. Naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ on defineeritud kahekohaline tehe $*$ võrdusega:

- | | | |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------------|
| a) $a * b = \max\{a, b\};$ | d) $a * b = a^2 b^2;$ | g) $a * b = a - b + 1;$ |
| b) $a * b = \min\{a, b\};$ | e) $a * b = \text{SÜT}(a, b);$ | |
| c) $a * b = a^b;$ | f) $a * b = \text{VÜK}(a, b);$ | h) $a * b = a.$ |

Uurige iga tehete, s.t. tehke kindlaks, kas see tehe on algebraline tehe, kommutatiivne, assotiatiiivne, kas leidub selle tehete suhtes ühikelement ja millistel elementidel on olemas pöördelemendid.

2. Positiivsete reaalarvude hulgal $\mathbb{R}^+$ on defineeritud kahekohaline tehe $*$ võrdusega:

$$a) a * b = \sqrt{ab};$$

$$b) a * b = \sqrt[3]{ab};$$

$$c) a * b = a^b;$$

$$d) a * b = \frac{a}{b};$$

$$e) a * b = 1.$$

Uurige iga tehet.

3. Olgu $X \neq \emptyset$ hulk ja $\mathcal{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Uurige tehet $*$ hulgal $\mathcal{P}(X)$, mis on defineeritud võrdusega:

$$a) A * B = A \cup B;$$

$$b) A * B = A \setminus B;$$

$$c) A * B = A \cap B;$$

$$d) A * B = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

4. Tooge näide algebralisest tehest mingil hulgal, mille suhtes leidub mingil elemendil

a) kaks, b) kolm pöördelementi.

5. Tehke kindlaks, kas järgmised hulgad on (Abeli) rühmad mainitud tehete suhtes:

a) täisarvude hulk $\mathbb{Z}$ (i) liitmise, (ii) korrutamise, (iii) lahutamise suhtes;

b) paarisarvude hulk liitmise suhtes;

c) paaritute arvude hulk liitmise suhtes;

d) ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$ liitmise suhtes;

e) nullist erinevate ratsionaalarvude (reaalarvude) hulk korrutamise suhtes;

f) positiivsete ratsionaalarvude (reaalarvude) hulk korrutamise suhtes;

g) selliste ratsionaalarvude, mille nimetajad on 2 mittenegatiivsed astmed, hulk liitmise suhtes;

h) hulga $X \neq \emptyset$ bijektiivsete teisenduste hulk $S(X)$ teisenduste korrutamise suhtes;

i) naturaalarvude hulga selliste bijektiivsete teisenduste, mis ei jäta paigale ainult lõpliku hulka arve, hulk teisenduste korrutamise suhtes;

j) tasandi pöörete (ümber fikseeritud punkti) hulk pöörete kui kujutuste korrutamise suhtes;

k) tasandi (ruumi) vabavektorite hulk vektorite liitmise suhtes;

l) ratsionaalarvuliste (reaalarvuliste, kompleksarvuliste) elementidega n . järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk (i) liitmise, (ii) korrutamise suhtes;

m) täisarvuliste (ratsionaalarvuliste, reaalarvuliste, kompleksarvuliste) elementidega seliste n . järku ruutmaatriksite, mille determinant on (i) 1, (ii) ± 1 , hulk korrutamise suhtes.

6. Tõestage, et ratsionaalarvude järjestatud paaride (a, b) hulk, kus $a \neq 0$, moodustab rühma tehte suhtes, mis on defineeritud võrdusega $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1)$.

7*. Olgu R lõplik monoid. Tõestage, et iga element, millel on olemas parempoolne pöördelement, on pööratav.

8*. Olgu G lõplik rühm, milles on paarisarv elemente. Tõestage, et vähemalt kahe elemendi $g \in G$ jaoks kehtib võrdus $g^2 = 1$, kus 1 on G ühikelement.

9*. Olgu S poolrühm, milles on vasakpoolne ühikelement (st. element $e \in S$ omadusega, et iga $a \in S$ korral $ea = a$) ning igal elemendil $a \in S$ leidub vasakpoolne pöördelement, st. element $b \in S$ nii, et $ba = e$.

- a) Tõestage, et S on rühm, täpsemalt, et $ae = a$ iga $a \in S$ korral, ning kui $ba = e$, siis ka $ab = e$.
- b) Kas samamoodi saaksime rühma, kui nõuaksime vasakpoolse ühikelemendi ning iga elemendi jaoks parempoolse pöördelemendi olemasolu?

2. Ühe ja kahe kahekohalise tehtega algebralised struktuurid.

Olgu $+$ ja $\cdot$ kahekohalsed algebralised tehted hulgal R (ning hiljem hulgal K).

$$(R, +, \cdot) \text{ on ring} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (R, +) \text{ on Abeli rühm,} \\ \forall x, y, z \in R \quad (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z), \\ \forall x, y, z \in R \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \\ (R, \cdot) \text{ on monoid.} \end{cases}$$

Ringis $(R, +, \cdot)$ Abeli rühma $(R, +)$ ühikelementi tähistame 0 ja nimetame *nullelemendiks*. Tähis 1 jääb monoidi $(R, \cdot)$ ühikelemendi jaoks.

$$(K, +, \cdot) \text{ on korpus} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} K \text{ on vähemalt kahe-elementiline hulk,} \\ (K, +, \cdot) \text{ on ring,} \\ \forall x, y \in K \quad x \cdot y = y \cdot x, \\ \forall x \in K \setminus \{0\} \quad \exists y \in K \quad : \quad x \cdot y = y \cdot x = 1. \end{cases}$$

Ringi $(R, +, \cdot)$ element $x \in R$ on *pööratav* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists y \in R \quad : \quad x \cdot y = y \cdot x = 1$.

Ringi R pööratavate elementide hulka tähistatakse $U(R)$.

Ringi $(R, +, \cdot)$ element $x \in R \setminus \{0\}$ on *nullitegur* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists y \in R \setminus \{0\} : (x \cdot y = 0 \vee y \cdot x = 0)$.

10. Tehke kindlaks, millised hulga $\mathbb{R}$ teisenduste hulgad on (Abeli) rühmad teisenduste korrutamise suhtes:

- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}: (a \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b)\};$
- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R}: \forall x \in \mathbb{R} f(x) = x + b\};$
- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{R}: (a < 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b)\};$
- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{Q}: (a > 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} f(x) = ax + b)\};$
- $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: \forall x \in \mathbb{R} f(x) = 2^k x\}.$

11. Geomeetrilise kujundi teisendust, mis viib kujundi iseendaks, nimetatakse selle kujundi *sümmeetriateisenduseks*. Kujundi sümmeetriateisendusteks on tema pöörded ja peegeldused ning sümmeetriateisenduste hulk on rühm teisenduste korrutamise suhtes.

Leidke a) korrapärase kolmnurga, b) ruudu, c) rombi, mis ei ole ruut, d) ristküliku, mis ei ole ruut, sümmeetriateisenduste rühma Cayley tabel.

12. Olgu G lõplik mittetühi hulk koos temal defineeritud algebralise tehtega $*$. Tõestage, et kui $(G, *)$ on rühm, siis tehte $*$ Cayley tabelis on igas reas kõiki elemente täpselt üks kord ja igas veerus kõiki elemente täpselt üks kord. Kas kehtib ka vastupidine implikatsioon?

13. Tõestage, et kui A on monoid, mille iga elemendi a korral $a^2 = 1$, siis A on kommutatiivne rühm (Abeli rühm).

14. Tehke kindlaks, millised hulgad on ringid või korpused. Iga ühikelemendiga ringi korral, mis ei ole korpus, leidke selle ringi kõigi pööratavate elementide hulk. Ülesannetes a)–g) on teheteks arvude tavaline liitmine ja korrutamine.

- a) Hulk $\mathbb{Z}$;
- b) paarisarvude hulk;
- c) hulgad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$;
- d) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;
- e) $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
- f) $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\}$;
- g) kõigi ratsionaalarvude (taandatud kujul) hulk, mille nimetajad ei jagu fikseeritud algarvuga p ;
- h) hulk $\text{Mat}_n(\mathbb{Q})$, kus $n > 1$, maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes;
- i) hulk $m\mathbb{Z} = \{ma \mid a \in \mathbb{Z}\}$, kus $m \in \mathbb{N}$;
- j) reaalarvude hulk liitmise ja korrutamise suhtes, mis on defineeritud võrdustega

$$a \oplus b = a + b - 1,$$

$$a \otimes b = a + b - ab;$$
- k) reaalarvude hulgal defineeritud lineaarfunktsioonide hulk funktsioonide punktiivilise liitmise ja funktsioonide korrutamise (s.o. järjestajendamise) suhtes.

15. Tõestage, et järgmised maatriksite hulgad on ringid maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes.

Tehke kindlaks, millised neist ringidest on kommutatiivsed ja millised on korpused.

Nendes ühikelemendiga ringides, mis ei ole korpused, leidke kõik pööratavad elemendid.

Nulliteguritega ringides leidke kõik nullitegurid.

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;
- b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$;
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in 3\mathbb{Z} \right\}$;
- d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$;
- e) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$;
- f) n -ndat järku ($n > 1$) reaalarvuliste elementidega diagonaalmaatriksite hulk;
- g) kõigi 2. järku ruutmaatriksite hulk üle $\mathbb{Q}$, mis kommuteeruvad maatriksiga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. Olgu $H \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$ fikseeritud maatriks. Otsustage, millal hulk $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ on ring maatriksite tavalise liitmise ja korrutamise suhtes, mis on defineeritud võrdusega

$$A \otimes B = AHB.$$

17. Tõestage, et järgmised funktsioonide $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hulgad on kommutatiivsed ühikelemendiga ringid punktiivilise liitmise ja punktiivilise korrutamise suhtes. Leidke nende ringide pööratavad elemendid. Millistes neist ringidest leidub nullitegureid?

- a) Lõigus $[-1, 1]$ pidevate funktsioonide hulk;
- b) lõigus $[-1, 1]$ paarisfunktsioonide hulk;
- c) vahemikus $(-1, 1)$ diferentseeruvate funktsioonide hulk;
- d) lõigus $[-1, 1]$ tõkestatud funktsioonide hulk.

18. Tõestage, et hulga $X \neq \emptyset$ kõigi alamhulkade hulk $\mathcal{P}(X)$ on ring tehete Δ ja $\cap$ suhtes, kus Δ (hulkade sümmeetriline vahe) on defineeritud võrdusega

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$A, B \in \mathcal{P}(X)$. Mis on selle ringi ühikelement?

19. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Öeldakse, et täisarvud a ja b on *kongruentsed* mooduli n järgi, kui arv $a - b$ jagub arvuga n . Tähistatakse $a \equiv b \pmod{n}$. Kontrollige, et $a \equiv b \pmod{n}$ parajasti siis, kui a ja b annavad arvuga n jagamisel sama jäägi. Kontrollige, et kongruentsuse seos on ekvivalentsusseos hulgal $\mathbb{Z}$. Ekvivalentsiklassi $\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{n}\}$ nimetatakse arvu a *jäägiklassiks* mooduli n järgi. Tähistame $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ ja defineerime sellel hulgal liitmise ja korrutamise võrdustega

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \quad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

Tõestage, et $\mathbb{Z}_n$ on ring nende tehete suhtes. Seda ringi nimetatakse *jäägiklassiringiks* mooduli n järgi.

20. Koostage ringide $\mathbb{Z}_5$ ja $\mathbb{Z}_6$ liitmis- ja korrutamistehte Cayley tabelid. Kas need ringid on korpused?

21. Tõestage, et

- kui n on kordarv, siis ringis $\mathbb{Z}_n$ leidub nullitegureid;
- $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ on pööratav siis ja ainult siis, kui $\text{SÜT}(a, n) = 1$;
- $\mathbb{Z}_n$ on korpus siis ja ainult siis, kui n on algarv.

22. Leidke ringide $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{12}$ ja $\mathbb{Z}_7$ kõik pööratavad elemendid.

23. Tõestage, et maatriksid

$$O = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{0} & \overline{1} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

üle $\mathbb{Z}_2$ moodustavad maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes korpuse. Koostage selle korpuse liitmise ja korrutamise Cayley tabelid.

24*. Olgu R assotsiatiivne ring (võib-olla mittekommutatiivne, võib-olla ühikuta). Tähistame $C(R) = \{a \in R : ab = ba \ \forall b \in R\}$. (Hulka $C(R)$ nimetatakse ringi R *tsentriks*.)

Kehtigu ringis R iga elemendi $a \in R$ korral implikatsioon $a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$. Tõestage, et kui element $c \in R$ rahuldab tingimust $c^2 = c$ (st. c on *idempotent*), siis $c \in C(R)$.

Näpunäide: Uurige muuhulgas elementi $bc - cbc$.

25*. Olgu $R \neq \{0\}$ lõplik ring ning $a \in R \setminus \{0\}$. Tõestage, et a on pööratav või a on nullitegur.

26*. Tõestage, et lõplik kommutatiivne nulliteguriteta (assotsiatiivne, aga mitte tingimata ühikuga) ring R , milles on vähemalt kaks elementi, on korpus.

Näpunäide: Vaadeldge kujutusi $r \cdot : R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}$, kus $r \cdot (x) = rx$, $r \in R \setminus \{0\}$.

27*. Olgu R ring (võib-olla ühikuta), milles on vähemalt kaks elementi. Leidugu iga elemendi $a \in R \setminus \{0\}$ jaoks üheselt määratud element $b \in R$ nii, et $aba = a$. Tõestage, et R on (võib-

olla mittekommutatiivne) korpus, see tähendab, R -s on olemas ühikelement ning ringi R igal nullist erineval elemendil on olemas pöördelement.

28*. Ringi aksioom $a(b+c) = ab+ac$ on asendatud aksioomiga $a(b-c) = ab-ac$. Kas tegemist on endiselt ringiga?

3. Kompleksarvud.

Kompleksarve (s.t. kompleksarvude korpuse $\mathbb{C}$ elemente) saab esitada algebralisel kujul: $a+bi$, kus $a, b \in \mathbb{R}$. Kompleksarvu i nimetatakse *imaginaariühikuks* ja $i^2 = -1$. Kompleksarvudega arvutamine toimub järgmiste reeglite abil:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i,$$

$$(a+bi)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a-bi), \text{ kui } a+bi \neq 0.$$

Iga kompleksarvu z on võimalik esitada ka *trigonomeetrilisel kujul*: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Tähistades $e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$, saame kompleksarvu z *eksponentkujuga* $z = re^{i\varphi} = r \exp(i\varphi)$.

Lause. Kehtivad järgmised arvutusreeglid:

$$\forall r_1, r_2 \geq 0 \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R} \quad r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\forall r \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (\text{Moivre'i valem}),$$

$$\forall r \geq 0 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \mid k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \right\}.$$

$$\text{Olgu } n \in \mathbb{N}. \quad z \in \mathbb{C} \text{ on } n\text{-astme ühejuur} \stackrel{\text{def}}{\iff} z^n = 1,$$

29. Leidke reaalarvud x ja y võrrandist

a) $2x - 5i + 7y + 2xi = -7 - 5i;$

b) $2x - 5yi - x - 3yi = 1 - 2i.$

30. Arvutage:

a) $(1+5i)(-2+3i);$

c) $\frac{1+2i}{1-2i};$

e) $-\frac{4i}{2-i};$

b) $(1-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{3}i);$

d) $\frac{5}{3i-4};$

f) $\frac{i}{-1+i} - \frac{2+i}{-3+5i}.$

31. Tõestage võrdus $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}.$

32. Millal on $a+bi$ ruut puhtimaginaararv, st. kompleksarv kujul di , kus $d \in \mathbb{R}$?

33. Leidke antud kompleksarvude kaaskompleksarvud ning kujutage need arvud ja nende kaaskompleksarvud komplekstasandi punktidenä: a) 5; b) $2i$; c) $2+3i$.

34. Tõestage võrdused:

- a) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$; e) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; h) $\overline{z^n} = \bar{z}^n, n \in \mathbb{N}$;
 b) $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im} z$; f) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$; i) $|\bar{z}| = |z|$;
 c) $\overline{(\bar{z})} = z$; g) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$; j) $z\bar{z} = |z|^2$.
 d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;

35. Arvutage:

- a) $\frac{1}{i^3}$; b) i^n , kus n on täisarv; d) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^n, n > 4$;
 c) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44}$; e) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{50}$.

36. Esitage järgnevad kompleksarvud trigonomeetrilisel kujul:

- a) 1; e) $4 - 3i$; h) $\sin \alpha + i \cos \alpha$ (siin $\alpha \in [0, 2\pi)$);
 b) $-i$; f) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; i) $2(\cos 10^\circ - i \sin 10^\circ)$;
 c) $-1 + i$; g) $-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$; j) $4(-\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)$.
 d) $\sqrt{3} - i$;

37. Kujutage komplekstasandil selliste punktide hulk, mis vastavad kompleksarvudele, mille moodul r ja argument φ rahuldavad järgmisi tingimusi:

- a) $r = 1, \varphi = \frac{\pi}{3}$; c) $r \leq 3$; e) $2 < r < 3$; g) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$;
 b) $r = 3$; d) $r > 3$; f) $\varphi = \frac{\pi}{4}$; h) $0 < \varphi < \pi$.

38. Kujutage komplekstasandil punktide hulk, mis vastavad kompleksarvudele z , mis rahuldavad järgmisi võrratusi:

- a) $\operatorname{Re} z > 0$; d) $|\operatorname{Im} z| < 1, 0 < \operatorname{Re} z < 1$; g) $|z - i| < 2$;
 b) $\operatorname{Im} z \leq 2$; e) $|z| \leq 1$; h) $1 < |z - 1 + 2i| < 3$;
 c) $|\operatorname{Re} z| < 1$; f) $|z + i| > 1$; i) $|z - i| + |z + i| < 4$.

39. Milline on järgmiste suuruste geomeetriline tähendus kompleksarvu z korral:

- a) $|z|$; b) $|\operatorname{Re} z|$; c) $|\operatorname{Im} z|$?

40. Tõestage, et mistahes kompleksarvude z_1 ja z_2 korral

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

41. Millistel tingimustel a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 + z_2| = |z_1| - |z_2|$?

42. Avaldage kompleksarvu moodul ja argument tema kaaskompleksarvu mooduli ja argumenti kaudu.

43. Kirjeldage võrratuste abil järgmised komplekstasandi punktide hulgad:

- a) imaginaarteljest paremal pool asuv pooltasand;

- b) esimene veerand;
 c) punkt, mille kaugus imaginaarteljest on väiksem kui 1;
 d) poolring (ilma ringjooneta) raadiusega 1, mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ning mis asub imaginaarteljest vasakul pool.

44. Arvutage:

- a) $\frac{\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ}{\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ}$; c) $\frac{5(\cos 109^\circ + i \sin 109^\circ)}{3(\cos 49^\circ + i \sin 49^\circ)}$;
 b) $\frac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}$; d) $\frac{1 - \sqrt{3}i}{1 - i}$.

45. Arvutage:

- a) $3(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ) \cdot 4(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$;
 b) $2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) \cdot 6 \left(\cos \frac{6\pi}{7} + i \sin \frac{6\pi}{7} \right)$;
 c) $\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \cdot 5 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdot 7 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$;
 d) $(1 + i)^{25}$; e) $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{20}$; f) $(\sqrt{3} + i)^n$; g) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{200}$.

46. Tõestage, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $(1 + i)^{8n} = 2^{4n}$.

47. Leidke juure kõik väärtused ja kujutage nad komplekstasandi punktidenä:

- a) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$; c) $\sqrt[4]{-1}$; f) $\sqrt[3]{i}$; h) $\sqrt[4]{\frac{-1 + i}{1 - i\sqrt{3}}}$.
 b) $\sqrt{2i}$; d) $\sqrt[3]{1 + i}$; g) $\sqrt[3]{\frac{1 + i}{\sqrt{3} + i}}$;
 e) $\sqrt[3]{(1 + i)^3}$;

48. Leidke kõik 2., 3., 4. astme ühejuured ja kujutage nad komplekstasandi punktidenä.

49. Tõestage, et

- a) n -nda astme ühejuure ja m -nda astme ühejuure korrutis on nm -nda astme ühejuur;
 b) kui n ja m suurim ühistegur on 1, siis iga nm -nda astme ühejuur on esitatav n -nda astme ühejuure ja m -nda astme ühejuure korrutisena;

50. Leidke kõigi n -nda astme ühejuurte summa.

51. Tõestage, et

- a) $1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$;
 b) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$;
 c) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$.

52. Lahendage võrrandid:

- a) $|z| - 2z = -3 + 6i$;
 b) $z^8 = 1 + i$;
 c) $\bar{z} = z^3$;
 d) $z^2 - 4z + 5 = 0$;
 e) $2z^2 - 4z + 3 = 0$;
 f) $z^2 - 2z + 1 - 2i = 0$;

- g) $z^2 - (3 + 2i)z + 5 + i = 0$;
 h) $z^4 - 1 = 0$;
 i) $z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = 0$;
 j) $z^3 + 27 = 0$.

53. Kas arvud $2 + 3i$ ja $1 - i$ võivad olla reaalarvuliste kordajatega ruutvõrrandi lahendeiks?

54*. Olgu $z \neq -1$ kompleksarv, mille moodul on 1. Tõestage, et ta on esitatav kujul $z = \frac{1 + ti}{1 - ti}$, kus t on teatud reaalarv.

55*. Kirjutage programm, mis leiab kõik n -nda astme juured kompleksarvust ja kujutab neid komplekstasandil. Joonistamiseks võib kasutada programmeerimiskeele lisateeki.

4. Vektorruum. Vektorruumi alamruum.

Olgu V hulk ja $(K, +, \cdot)$ korpus. Olgu hulgal V defineeritud kahekohaline algebraline tehe $+$ ning iga $k \in K$ jaoks ühekohaline algebraline tehe (tähistame sümboliga k (jätame korrutamismärgi kirjutamata))

$$V \text{ on vektorruum üle } K \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} (V, +) \text{ on Abeli rühm,} \\ \forall a, b \in V \quad \forall k \in K \quad k(a + b) = ka + kb, \\ \forall a \in V \quad \forall k, l \in K \quad (k + l)a = ka + la, \\ \forall a \in V \quad \forall k, l \in K \quad k(la) = (k \cdot l)a, \\ \forall a \in V \quad 1a = a. \end{cases}$$

Vektorruumi elemente nimetatakse sageli *vektoriteks* ning vastava korpuse elemente *skalaarideks*. Ühe-elementilist vektorruumi $\{0\}$ tähistatakse sageli 0.

Olgu V vektorruum üle korpuse $(K, +, \cdot)$. Olgu $\emptyset \neq U \subseteq V$.

$$U \text{ on vektorruumi } V \text{ alamruum} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall a, b \in U \quad a + b \in U, \\ \forall a \in U \quad \forall k \in K \quad ka \in U. \end{cases}$$

Vektorruumi V suvalise otseastme V^n (kus n on mingi naturaalarv) elementi nimetatakse *vektorite süsteemiks* ehk *vektorsüsteemiks*. Tähisteid: $a_1, a_2, \dots, a_n$ või $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Vektorite süsteemidega töötamisel on tähtis vajadusel identifitseerida süsteemi iga elementi; kui see toimub järjestamise abil, on süsteemi vektorite järjestus oluline! Üldiselt vaadeldakse ka vektorite süsteeme, mille elementide arv on lõpmatu, enamasti sellised juhtumid väljuvad käesoleva kursuse raamidest.

$L(a_1, a_2, \dots, a_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n : k_1, k_2, \dots, k_n \in K\}$
 (vektorite süsteemi $a_1, a_2, \dots, a_n$ *lineaarne kate* ehk *lineaarkate*).

Lineaarset katet tähistatakse veel $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ või $\text{span}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Olgu $X, Y \subseteq V, k \in K$.

$$X + Y \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b : a \in X, b \in Y\},$$

$$kX \stackrel{\text{def}}{=} \{ka : a \in X\}.$$

56. Millised järgmistest arvuhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ tavaliste tehete suhtes arvu-
 dega: a) $\mathbb{N}$, b) $\mathbb{Z}$, c) $\mathbb{Q}$, d) $\mathbb{R}$, e) $\mathbb{C}$, f) $\mathbb{R}^+$?

57. Olgu a vektor ja k skalaar. Tõestage, et $ka = 0$ parajasti siis, kui $k = 0$ või $a = 0$.

58. Olgu a, b vektorid ja k, l skalaarid. Tõestage, et $ka + lb = la + kb$ parajasti siis, kui $k = l$ või $a = b$.

59. Olgu K korpus. Defineerime hulgal $K^n = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_1, \dots, k_n \in K\}$ liitmise ja skalaariga korrutamise võrdustega

$$\begin{aligned}(k_1, \dots, k_n) + (l_1, \dots, l_n) &= (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n), \\ k(k_1, \dots, k_n) &= (kk_1, \dots, kk_n), \quad k \in K.\end{aligned}$$

Tõestage, et selliste (*komponenthaaval* defineeritud) tehete suhtes on hulk K^n vektorruum üle K .

60. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulga $\mathbb{R}^4$ alamhulkadest on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ komponenthaaval defineeritud liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes:

- | | |
|--|--|
| a) $\{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\};$ | c) $\{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\};$ |
| b) $\{(1, a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\};$ | d) $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = d\}.$ |

61. Kas järgmised vabavektorite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$, kui vektorite liitmine ja reaalarvuga korrutamine on defineeritud vektoralgebra reeglite abil:

- kõigi vektorite hulk V_1 , mis on paralleelsed fikseeritud sirgega;
- kõigi vektorite hulk V_2 , mis on paralleelsed fikseeritud tasandiga;
- kõigi vektorite hulk, mis ei ole paralleelsed fikseeritud sirgega.

62. Defineerime hulgal $V = \mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ tehted võrdustega

$$k(a_1, a_2) = (ka_1, a_2), \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$

kus $a_1, a_2, b_1, b_2, k \in \mathbb{R}$. Kas V on vektorruum üle $\mathbb{R}$?

63. Tehke kindlaks, kas järgmised maatriksite hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$ maatriksite tavalise liitmise ja skalaariga korrutamise suhtes:

- | | |
|--|---|
| a) kõigi reaalarvuliste elementidega maatriksite hulk; | f) $\text{Mat}_{n,1}(\mathbb{R});$ |
| b) kõigi n -ndat järku regulaarsete ruutmaatriksite hulk; | g) $\text{Mat}_2(\mathbb{C});$ |
| c) kõigi kolmandat järku singulaarsete ruutmaatriksite hulk; | h) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$ |
| d) $\text{Mat}_{m,n}(\mathbb{R});$ | i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\};$ |
| e) $\text{Mat}_2(\mathbb{R});$ | j) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$ |

64. Reaalarvuliste funktsioonide summa ja korrutis reaalarvuga on defineeritud punktviisiliselt. Tehke kindlaks, kas järgmised funktsioonide hulgad on vektorruumid üle $\mathbb{R}$:

- a) hulk $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$;
- b) kõigi (täpselt) n -nda astme polünoomfunktsioonide hulk;
- c) kõigi ülimalt n -nda astme polünoomfunktsioonide hulk;
- d) kõigi polünoomfunktsioonide $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hulk, mille korral
 - (i) $f(0) = 1$; (ii) $f(0) = 0$; (iii) $2f(0) - 3f(1) = 0$; (iv) $f(1) + f(2) + \dots + f(k) = 0$;
- e) selliste n -muutuva funktsioonide $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hulk, mille korral

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b, \text{ kus } a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}.$$

65. Kas reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_2$ hariliku liitmise suhtes, kui korrutamine skalaariga defineerida võrdustega $\bar{1}a = a, \bar{0}a = 0$?

66. Olgu X mittetühi hulk ja $\mathcal{P}(X)$ tema kõigi alamhulkade hulk. Defineerime hulga X alamhulga A korrutised korpuse $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ elementidega (skalaaridega) võrdustega $\bar{1}A = A, \bar{0}A = \emptyset$. Kas hulk $\mathcal{P}(X)$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_2$, kui liitmise osas vaadelda sümmeetrilist vahet Δ ?

67. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) alamruumid.

- a) fikseeritud tasandiga ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
- b) fikseeritud tasandiga paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
- c) fikseeritud sirgega ortogonaalsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
- d) fikseeritud sirgega paralleelsete vabavektorite hulk, $V = \mathbb{E}_3$;
- e) $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^5$;
- f) $\{(a, b, a, b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 2\}, V = \mathbb{R}^5$;
- g) $\{(a, b, c, d, e) \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}, a + e = b + d\}, V = \mathbb{R}^5$;
- h) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$;
- i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$;
- j) reaalarvuliste elementidega n -järku sümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$;
- k) reaalarvuliste elementidega n -järku kaldsümmeetriliste maatriksite hulk, $V = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$;
- l) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$;
- m) $\left\{ \begin{pmatrix} a + bi & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$;
- n) $\{a + b \sin^2 x + c \cos^2 x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$;
- o) $\{a + b \sin x + c \sin^2 x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

68. Tehke kindlaks, millised järgmistest hulkadest on vektorruumi V (üle $\mathbb{C}$) alamruumid.

- a) $\mathbb{R}, V = \mathbb{C}$;
- b) $\{a(2 - i) \mid a \in \mathbb{R}\}, V = \mathbb{C}$;
- c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{C})$;

- d) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b+ci \\ di & ai \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}, V = \text{Mat}_2(\mathbb{C});$
 e) $\{(a+bi, 0, c+di) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}; V = \mathbb{C}^3.$

69. Olgu $L_1 = L(a_1, \dots, a_s)$ ja $L_2 = L(b_1, \dots, b_t)$ vektorruumis V . Tõestage, et kehtib võrdus $L_1 + L_2 = L(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_t)$.

70. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Kas vektorruumil V on nullist erinevaid lõplikke alamruume?

71*. Leidke hulgast $\{(0, 0)\}$ ja tühihulgast erinevad **pärisalamhulgad** S_1, S_2 ja S_3 vektorruumis $\mathbb{R}^2$ nii, et

- a) $S_1 + S_1 \subsetneq S_1$ (pole võrdne!),
 b) $S_2 \subsetneq S_2 + S_2$ (pole võrdne!),
 c) $S_3 + S_3 = S_3$.

72*. Olgu L_1, L_2 ja L_3 vektorruumi V nullist erinevad alamruumid, kusjuures kehtigu võrdused $L_1 \cap L_2 = L_1 \cap L_3 = \{0\}$. Tõestage või lükake ümber järgmine väide:

$$L_1 + L_2 = L_1 + L_3 \implies L_2 = L_3.$$

5. Lineaarne sõltumatus ja sõltuvus.

Olgu V vektorruum üle korpuse K . Olgu $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$.

Vektorite süsteem $a_1, a_2, \dots, a_n$ on *lineaarselt sõltumatu* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall k_1, k_2, \dots, k_n \in K \quad k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \implies k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$.

Vektorite süsteem $a_1, a_2, \dots, a_n$ on *lineaarselt sõltuv*, kui ta ei ole lineaarselt sõltumatu.

Lause. Vektorite süsteem $a_1, a_2, \dots, a_n$ on *lineaarselt sõltuv* $\iff \iff \exists s \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K : \quad k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0 \quad \wedge \quad k_s \neq 0$.

Lause. Vektorite süsteem $a_1, a_2, \dots, a_n$ on *lineaarselt sõltuv* $\iff \iff \exists s \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \exists k_1, \dots, k_{s-1}, k_{s+1}, \dots, k_n \in K : \quad a_s = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{s-1} a_{s-1} + k_{s+1} a_{s+1} + \dots + k_n a_n$.

Lause. Vektorite süsteem $0, a_1, \dots, a_n$ on lineaarselt sõltuv.

Vektorite süsteem $a_1, a_1, a_2, \dots, a_n$ on lineaarselt sõltuv.

Olgu V vektorruum üle korpuse K . Olgu $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ on V *moodustajate süsteem* $\stackrel{\text{def}}{\iff} V = L(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Lause. Lineaarselt sõltumatu süsteemi alamsüsteem on lineaarselt sõltumatu.

Moodustajate süsteemile vektorite lisamisel saame moodustajate süsteemi.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ on V *baas* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on lineaarselt sõltumatu,} \\ a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem.} \end{cases}$

Lause.

$\left. \begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_m \text{ on } V \text{ baas,} \\ b_1, b_2, \dots, b_n \text{ on } V \text{ baas} \end{matrix} \right\} \implies m = n$.

$\dim V = n \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists a_1, \dots, a_n \in V : \quad a_1, \dots, a_n \text{ on } V \text{ baas.}$

Lause.

$$\left. \begin{array}{l} \dim V = n, \\ a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on lineaarselt sõltumatu} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on } V \text{ baas,}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dim V = n, \\ a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on } V \text{ moodustajate süsteem} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_n \text{ on } V \text{ baas.}$$

73. Millist tingimust peab rahuldama arv $k \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (k, 1, 0)$, $a_2 = (1, k, 1)$ ja $a_3 = (0, 1, k)$ oleks lineaarselt sõltuvad?

74. Millist tingimust peavad rahuldama arvud $k, l, m \in \mathbb{R}$, et vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $a_1 = (1, k, k^2)$, $a_2 = (1, l, l^2)$ ja $a_3 = (1, m, m^2)$ oleks lineaarselt sõltuvad?

75. Olgu a, b, c vektorruumi V (üle korpuse K , mille karakteristik ei ole 2) vektorid. Kui vektorid a, b, c on lineaarselt sõltumatud, kas siis ka vektorid $a+b, b+c$ ja $c+a$ on lineaarselt sõltumatud?

76. Näidake, et vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) vektorite süsteem on lineaarselt sõltuv, leides nende vektorite mingi mittetriviaalse lineaarkombinatsiooni, mis võrdub nullvektoriga:

- a) $a_1 = (1, 2, 5)$, $a_2 = (5, 3, 1)$, $a_3 = (-15, -2, 21)$, $V = \mathbb{R}^3$;
- b) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 6 + 29i$, $V = \mathbb{C}$;
- c) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -5 \\ -8 & 5 & -11 \end{pmatrix}$, $V = \text{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$;
- d) $f_1(x) = (\sin x)^2$, $f_2(x) = (\cos x)^2$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = 3$, $f_5(x) = e^x$, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

77. Tõestage, et järgmised vektorite süsteemid vektorruumis V (üle $\mathbb{R}$) on lineaarselt sõltumatud:

- a) $a_1 = (5, 3, 1)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 4, 2)$, $V = \mathbb{R}^3$;
- b) $a_1 = (x, y, 3)$, $a_2 = (2, x - y, 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 6$, $y \neq \frac{9}{2}$, $V = \mathbb{R}^3$;
- c) $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 1 - i$, $V = \mathbb{C}$;
- d) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{kui } 1 < x, \end{cases}$ $f_2(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x \leq 1, \\ 0, & \text{kui } 1 < x, \end{cases}$ $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

78. Olgu vektorite süsteem $a_1, \dots, a_m$ lineaarselt sõltumatu ja süsteem $a_1, \dots, a_m, x$ lineaarselt sõltuv. Tõestage, et vektor x avaldub üheselt vektorite $a_1, \dots, a_m$ lineaarkombinatsioonina.

79. Uurige, kas vektorite süsteemid (vektorruumis $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) on lineaarselt sõltuvad ning jaatava vastuse korral leidke mingi mittetriviaalne lineaarkombinatsioon, mis on võrdne nullvektoriga:

- a) $x + 2, x - 2$;
- b) $6x + 9, 8x + 12$;
- c) $1, (x - 1)^2, x - 1$;
- d) e^x, e^{2x}, e^{3x} ;
- e) x, e^x, xe^x ;
- f) $\sin x, \cos x$;
- g) $1, \sin^2 x, \cos^2 x$;
- h) $\sin x, \cos x, \sin 2x$;
- i) $\sin x, \sin(x + 2), \cos(x - 5)$.

80. Vaatleme funktsioonide hulka $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3} = \{f: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3 \mid f \text{ on funktsioon}\}$. On teada, et $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ on vektorruum üle $\mathbb{Z}_3$, kui tehked on defineeritud punktiviisi: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ja $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Nullelement on θ , kus $\theta(x) = \bar{0}$ iga $x \in \mathbb{Z}_3$ korral. Olgu $e_0(x) = \bar{1}$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x^3$. Tehke kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{Z}_3^{\mathbb{Z}_3}$ vektorite süsteem e_0, e_1, e_2, e_3 on lineaarselt sõltumatu.

81. Olgu V vektorruum üle $\mathbb{R}$. Milliste λ väärtuste korral järeldub vektorite süsteemi a_1, a_2 lineaarsest sõltumatuses vektorite süsteemi $\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2$ lineaarne sõltumatus?

82*. Vektorruumi $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorid f_1 ja f_2 on sellised, et iga $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ korral funktsioon $c_1 f_1 + c_2 f_2$ säilitab märki, st.

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \geq 0 \quad \vee \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \leq 0).$$

Tõestage, et vektorite süsteem f_1, f_2 on lineaarselt sõltuv.

83*. Vaatleme vektorruumi $\mathbb{R}$ üle korpuse $\mathbb{Q}$. Tehke kindlaks, kas vektorite süsteem

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt[3]{2}$$

on lineaarselt sõltumatu.

84. Iga vektorruumi jaoks ül-st 56d), 56e), 61a), 61b), 63d), 63e), 63f), 63g), 63h), 63j), 64c), 64e) leidke mingi baas ja mõõde.

85. Tooge näide vektorruumi $\mathbb{R}^4$ a) baasist, b) lineaarselt sõltumatust vektorite süsteemist, mis ei ole baas, c) moodustajate süsteemist, mis ei ole baas, d) vektorite süsteemist, mis ei ole lineaarselt sõltumatu ega moodustajate süsteem.

86. Leidke vektorruumi $\mathbb{C}$ (üle $\mathbb{R}$) vektori $-5 + 4i$ koordinaadid baasi $-1 + 2i, 2 - i$ suhtes.

87. Leidke vektorruumi $V = \{a + b \sin^2 x + c \sin 2x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorite

$$\text{a) } f(x) = \frac{5}{2} + 3(\sin x)^2 + \frac{3}{2} \cos 2x, \quad \text{b) } f(x) = 5 + \sin 2x$$

koordinaadid baasi $1, (\sin x)^2, \sin 2x$ suhtes.

88. Tehke kindlaks, kas järgmised vektorite süsteemid on vektorruumi $\mathbb{R}^3$ baasid ning leidke vektori $b = (3, 7, 13)$ koordinaadid iga baasi suhtes:

- a) $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$;
- b) $a_1 = (1, 0, 0), a_2 = (1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1)$;
- c) $a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (1, 4, 9)$.

89. Leidke vektorruumi $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (üle $\mathbb{R}$) vektorite $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ ja

$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ koordinaadid baasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suhtes.

90. On antud vektorruumi $\mathbb{R}^3$ vektorid $e_1 = (2, 1, -3)$, $e_2 = (3, 2, -5)$ ja $e_3 = (1, -1, 1)$. Näidake, et vektorsüsteem $\{e_1, e_2, e_3\}$ on selle vektorruumi baas. Leidke suvalise vektori $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja konkreetse vektori $a = (6, 2, -7)$ koordinaadid sellel baasil.

91. Olgu e_1, e_2, e_3 3-mõõtmelise vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) baas. Tõestage, et ka vektorite süsteem $e'_1 = 5e_1 - e_2 - 2e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2$, $e'_3 = -2e_1 + e_2 + e_3$ on selle vektorruumi baas ning leidke vektori $a = e_1 + 4e_2 - e_3$ koordinaadid selle baasi suhtes.

92. Olgu V kahemõõtmeline vektorruum üle korpuse K . Tehke kindlaks, kas hulk $V^2 = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in V\}$ on vektorruum üle korpuse K tehete suhtes, mis on defineeritud vordustega

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2), \quad k(v_1, v_2) = (kv_1, kv_2).$$

Kui on, siis leidke selle vektorruumi mingi baas.

93. Iga alamruumi jaoks ül-st 67a), 67b), 67c), 67d), 67e), 67g), 67h), 67j), 67k), 67l), 67m), 67n), 67o), 68e) leidke mingi baas ja mõõde.

94*. Olgu V n -mõõtmeline vektorruum üle korpuse K . Olgu antud r -mõõtmeline alamruum $W \subseteq V$, kusjuures $r < n$. Tõestage, et $W = Y$, kus

$$Y = \bigcap \{U \mid U \text{ on } V \text{ alamruum, } \dim U = n - 1, W \subseteq U\}.$$

Näpunäide: Sisalduvuse $W \supseteq Y$ tõestamisel näidake, et elemendi $v \in Y \setminus W$ olemasolu viib vastuoluni.

95*. Olgu antud lineaarselt sõltumatud vektorid $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ (lõigul $[a, b]$ määratud funktsioonide vektorruum üle $\mathbb{R}$). Tõestage, et leiduvad punktid $a_1, \dots, a_n \in [a, b]$ nii, et $\det \left((f_i(a_j))_{i,j=1}^n \right) \neq 0$.
Näpunäide: Matemaatiline induktsioon.

96*. Tooge näide pidevast funktsioonist $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, mis rahuldab järgmist tingimust: suvalise kolme erineva reaalarvu t_1, t_2, t_3 korral on vektorite süsteem $v(t_1), v(t_2), v(t_3)$ ruumi $\mathbb{R}^3$ baas.

6. Determinant.

Olgu R ring.

$$\text{Mat}_{m,n}(R) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \mid a_{11}, \dots, a_{m,n} \in R \right\}.$$

$$\text{Mat}_n(R) := \text{Mat}_{n,n}(R).$$

Lühem tähistusviis: $(a_{i,j})_{i,j=1}^{m,n}$ või $(a_{i,j})$.

Olgu $(a_{i,j}), (b_{i,j}) \in \text{Mat}_{m,n}(R)$, olgu $r \in R$.

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) \stackrel{\text{def}}{=} (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \text{Mat}_{m,n}(R),$$

$$r(a_{i,j}) = (ra_{i,j}) \in \text{Mat}_{m,n}(R).$$

Olgu $(a_{i,s}) \in \text{Mat}_{m,p}(R)$ ja $(b_{s,j}) \in \text{Mat}_{p,n}(R)$.

$$(a_{i,s})_{i,s=1}^{m,p} \cdot (b_{s,j})_{s,j=1}^{p,n} = \left(\sum_{s=1}^p a_{i,s} \cdot b_{s,j} \right)_{i,j=1}^{m,n} \in \text{Mat}_{m,n}(R).$$

Lause. $(\text{Mat}_n(R), +, \cdot)$ on ring.

Maatriksit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ tähistatakse sageli E_n või E ja nimetatakse *ühikmaatriksiks*.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

σ on *substitutsioon* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \sigma$ on bijektsioon.

$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma: \sigma \text{ on substitutsioon hulgal } \{1, \dots, n\}\}$.

Olgu σ substitutsioon.

σ *inversioonide arv* $\stackrel{\text{def}}{=} \left| \left\{ (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \mid i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j) \right\} \right|$.

$\text{sign } \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{kui } \sigma \text{ inversioonide arv on paarisarv,} \\ -1, & \text{kui } \sigma \text{ inversioonide arv on paaritu arv.} \end{cases}$

$\det A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sign } \sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$ (maatriksi A *determinant*).

Determinanti $\det A$ tähistatakse ka $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$.

A on *regulaarne* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \det A \neq 0$,

A on *singulaarne* $\stackrel{\text{def}}{\iff} \det A = 0$.

Teoreem. $A, B \in \text{Mat}_n(R) \Rightarrow \det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$.

Olgu $s \in \{1, \dots, n\}$. Kustutame maatriksis A mingid $n - s$ rida ja $n - s$ veergu. Saadud maatriksit nimetatakse maatriksi A *alammaatriksiks* ja tema determinanti maatriksi A s -ndat järku *miinoriks*.

Teoreem (Laplace). Olgu $I := \{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Siis

$$\det A = \sum_{J := \{j_1, \dots, j_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{i_1 + \dots + i_s + j_1 + \dots + j_s} M_{I,J} M'_{I,J},$$

kus $M_{I,J}$ on s -elemendilistele rea- ja veeruindeksite hulkadele I ja J vastav miinor ning $M'_{I,J}$ on $(n - s)$ -järku miinor, mis vastab rea- ja veeruindeksite hulkadele $\{1, \dots, n\} \setminus I$ ja $\{1, \dots, n\} \setminus J$.

Arvu $(-1)^{i_1 + \dots + i_s + j_1 + \dots + j_s} M'_{I,J}$ nimetatakse ka miinorile $M_{I,J}$ vastavaks *algebraaliseks täiendiks*.

97. Leidke inversioonide arv permutatsioonide

a) 3, 5, 4, 1, 2;

c) 5, 10, 7, 1, 3, 2, 8, 6, 9, 4;

b) 2, 4, 8, 3, 7, 5, 6, 1;

d) 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

98. Arvutage determinant, kasutades determinandi üldist definitsiooni

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

99. Tuletage üldvalemid (2×2) - ja (3×3) -maatriksite determinantide arvutamiseks.

100. Tõestage, et ülemise kolmnurkmaatriksi (s.t. ruutmaatriksi, kus allpool peadiagonaali on nullid) determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega.

101. Olgu A n -ndat järku ruutmaatriks. Tõestage, et $\det(kA) = k^n \cdot \det A$, kus $k \in K$.

102. Kas suvaliste n -ndat järku ruutmaatriksite A ja B korral kehtib võrdus

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)?$$

103. Olgu antud maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{pmatrix} -2g & -2h & -2i \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix}.$$

Leidke $\det B$, kui $\det A = -3$.

104. Leidke α väärtus nii, et $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

105. Tähistagu E ühikmaatriksit. Millised alljärgnevatest väidetest on tõesed suvaliste samade mõõtmetega ruutmaatriksite A ja B korral?

a) $\det(A - B) = \det A - \det B$;

d) $\det(-B) = -\det(B)$;

b) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$;

e) $\det(A^2 - E) = \det(A - E) \det(A + E)$;

c) $\det(AB) = \det(BA)$;

f) kui $\det A = 1$, siis $\det(A^2 - E) = 0$.

106. Leidke maatriksi A determinant, kui $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

107. Arvutage determinant Gaussi elimineerimismeetodil

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix};$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ b & b & 1+b \end{vmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{f)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 \\ 42 & 70 & 77 & 54 \\ 49 & 68 & 72 & 52 \\ 29 & 49 & 65 & 50 \end{vmatrix};$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} 3/2 & -9/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix};$$

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix};$$

$$\text{j)} \begin{vmatrix} 3/4 & 2 & -1/2 & -5 \\ 1 & -2 & 3/2 & 8 \\ 5/6 & -4/3 & 4/3 & 14/3 \\ 2/5 & -4/5 & 1/2 & 12/5 \end{vmatrix};$$

$$\text{k)} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}.$$

108. Millised alljärgnevatest

$$\text{a)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$\text{c)} |a_{43}|$$

$$\text{d)} \begin{pmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

on determinandi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

miinorid? Leidke nende täiendusmiinorid ja algebralised täiendid.

109. Arvutage determinant, kasutades determinandi arendamist rea või veeru järgi

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 4 & 4 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ 2 & -6 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix};$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -0,002 \\ -3 & 8 & 0 & -0,004 \\ 2 & 2 & -4 & -0,003 \\ 3000 & 8000 & -1000 & -6 \end{vmatrix};$$

$$h) \begin{vmatrix} 128 & 256 & 384 & 512 \\ 1/4 & 3/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/64 & 1/64 & 1/64 & -1/64 \\ 2 & 0 & -4 & -12 \end{vmatrix};$$

$$i) \begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

110. Kasutades Laplace'i teoreemi leidke determinant

$$a) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{vmatrix}.$$

111. Arvutage determinant antud korpuses K , valides ise arvutusmeetod (kui pole täpsustatud, siis $K = \mathbb{R}$).

$$a) \begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix} (K = \mathbb{C});$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} \left(\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, K = \mathbb{C} \right);$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 9 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix};$$

$$g) \begin{vmatrix} x^3 + 1 & 1 & 1 \\ 1 & x^3 + 1 & 1 \\ 1 & 1 & x^3 + 1 \end{vmatrix};$$

$$h) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

7. Pöördmaatriks.

Olgu $A \in \text{Mat}_n(K)$, kus K on korpus.

$B \in \text{Mat}_n(K)$ on maatriksi A pöördmaatriks $\stackrel{\text{def}}{\iff} A \cdot B = B \cdot A = E$.

Tähis: A^{-1} .

Lause. $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = (\det A)^{-1} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}^T$, kus $A_{i,j}$ on elemendile $a_{i,j}$

vastav algebraline täiend, st. määrgiga $(-1)^{i+j}$ varustatud miinor, mis on saadud, kui maatriksis A kõrvaldada i . rida ja j . veerg.

Maatriksi A pöördmaatriksi leidmiseks saab kasutada ülaltoodud lauset või järgmist algoritmi.

Samm 1. Moodustage $(n \times 2n)$ -maatriksi $(A|E)$, kus E on ühikmaatriks.

Samm 2. Kasutades ridade elementaarteisendusi, viige maatriks $(A|E)$ kujule $(E|B)$.

Samm 3. Kirjutage välja pöördmaatriks: $A^{-1} = B$.

112. Lähtudes pöördmaatriksi valemist leidke üldine valem teist järku ruutmaatriksi pöördmaatriksi leidmiseks.

113. Olgu $A, B \in \text{Mat}_n(K)$, kusjuures $AB = E$, kus E on n -järku ühikmaatriks. Tõestage, et $BA = E$.

114. Kas maatriks $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ on maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ pöördmaatriks?

115. Millise λ väärtuse korral maatriks $A = \begin{pmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$ ei ole regulaarne? Leidke A^{-1} eeldusel, et A on regulaarne.

116. Millised alljärgnevatest maatriksitest on pööratavad:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix};$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2.$

117. Millise k korral ei ole maatriks pööratav:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & k \end{pmatrix};$ b) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$

118. Olgu $A \in \text{Mat}_n(K)$ selline, et $\det(A^4) = 0$. Kas A on pööratav?

119. Leidke pöördmaatriks antud $\text{Mat}_n(K)$ maatriksile:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{i) } \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} -1+2i & 6 \\ 1+i & 1-3i \end{pmatrix} (K = \mathbb{C});$$

$$\text{j) } \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{4} & -\bar{2} \\ \bar{4} & -\bar{1} & \bar{3} \\ -\bar{2} & \bar{3} & \bar{4} \end{pmatrix} (K = \mathbb{Z}_5);$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{5} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} (K = \mathbb{Z}_{11});$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{k) } \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} (K = \mathbb{Z}_3);$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{l) } \begin{pmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 0 & 9 & -6 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}.$$

120. Olgu $A \in \text{Mat}_{m,n}(R)$ ja $r \in R$. Tõestage võrdus $(rA)^T = rA^T$.

121. Olgu $A \in \text{Mat}_n(K)$ pööratav ning $k \in K \setminus \{0\}$. Tõestage võrdus $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$.

122. Leidke $(AB)^{-1}$, $(3A)^{-1}$ ja $(A^T)^{-1}$, kui

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

123. Leidke regulaarne maatriks A , kui $A^2 = AB + 2A$ ja

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

124. Olgu A n -ndat järku ruutmaatriks ja E n -ndat järku ühikmaatriks. Millega võrdub avaldis

$$(E + A^{-1})A(E + A)^{-1}?$$

125. Olgu A , B ja C pööratavad sama järku ruutmaatriksid. Lihtsustage avaldis

$$(A^{-1}B)^{-1}(C^{-1}A)^{-1}(B^{-1}C)^{-1}.$$

126. Leidke korrutise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks.

127. Olgu E ühikmaatriks ning A ja B sama järku ruutmaatriksid. Tõestage, et kui maatriks $E + AB$ on pööratav, siis on pööratav ka $E + BA$.

Näpunäide: Võib näidata, et kui maatriks C on maatriksi $E + AB$ pöördmaatriks, siis maatriks $E - BCA$ on maatriksi $E + BA$ pöördmaatriks.

128. Leidke regulaarse maatriksi A pöördmaatriks, kui

$$\text{a) } A^2 - 4A + E = 0; \quad \text{b) } A^3 + 5A^2 - 3A - E = 0; \quad \text{c) } A^2 - A = 0.$$

129. Tõestage, et $(E - A)^{-1} = E + A + \dots + A^{n-1}$, kui $A^n = 0$.

130. Tõestage, et täisarvuliste elementidega maatriksi A pöördmaatriks on täisarvuliste elementidega parajasti siis, kui $\det A = \pm 1$.

131. Olgu A , B ja C sellised maatriksid, et korrutised AB ja AC eksisteerivad. Kas võrdusest $AB = AC$ järelneb võrdus $B = C$?

132. Olgu A ja B regulaarsed ruutmaatriksid. Tõestage, et võrdused $AB = BA$, $AB^{-1} = B^{-1}A$ ja $A^{-1}B = BA^{-1}$ on samaväärsed.

133. Olgu J_n n -ndat järku ruutmaatriks, mille kõik elemendid võrduvad 1-ga. Tõestage, et $(E - J_n)^{-1} = E - \frac{1}{n-1}J_n$.

134*. Olgu A (4×2) -maatriks ja B (2×4) -maatriks, mille korral

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 14 & 10 & 8 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Leidke maatriks BA .

135*. Olgu A ja B sama järku ruutmaatriksid, mille korral $AB + A + B = 0$. Tõestage, et $AB = BA$.

136*. Leidke n -ndat järku ruutmaatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriks A^{-1} .

137*. Kirjutage programm, mis leiab täisarvuliste elementidega ruutmaatriksi determinandi täpse väärtuse, kasutades ainult tehteid täisarvudega.

9. Astak.

Olgu V vektorruum üle korpuse K ning olgu e vektorite süsteem vektorruumis V .

$\text{rank } e \stackrel{\text{def}}{=} \dim L(e)$ (vektorite süsteemi *astak*).

Lause. $\text{rank } e = \max\{r: e' \text{ on } r\text{-elemendiline alamsüsteem } e\text{-s, } e' \text{ on lineaarselt sõltumatu}\}$.

Olgu $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{m,n}(K)$.

$\text{rank } A \stackrel{\text{def}}{=} \text{rank}((a_{1,1}, \dots, a_{1,n}), \dots, (a_{m,1}, \dots, a_{m,n}))$ (vektorruumis K^n üle K).

Teoreem. $\text{rank } A = \max\{r: M \text{ on } A \text{ } r\text{-järku miinor, } M \neq 0\}$.

Olgu M ja M' maatriksi A r - ja $(r+1)$ -järku miinorid.

$M' \text{ ääristab } M \stackrel{\text{def}}{\iff} M' \text{ on saadud } M\text{-st ühe rea ja ühe veeru lisamisel.}$

Lause.

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ on } A \text{ } r\text{-järku miinor,} \\ M \neq 0, \\ \text{rank } A > r \end{array} \right\} \implies \exists M': \left\{ \begin{array}{l} M' \text{ on } A \text{ } (r+1)\text{-järku miinor,} \\ M' \text{ ääristab } M, \\ M' \neq 0 \end{array} \right.$$

138. Tõestage, et kui vektorid $a_1, \dots, a_s$ avalduvad lineaarselt vektorite $b_1, \dots, b_l$ kaudu, siis esimese süsteemi astak ei ole suurem kui teise süsteemi astak.

139. Tõestage, et vektor b avaldub vektorite süsteemi $a_1, \dots, a_n$ lineaarkombinatsioonina siis ja ainult siis, kui selle vektorite süsteemi astak ei muutu vektori b lisamisel.

140. Leidke maatriksi astak:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}; & \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \text{e)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -7 & 4 & 1 & -7 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \\
 \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; & \text{d)} \quad & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 8 & 4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; & \text{f)} \quad & \begin{pmatrix} 17 & 51 & 27 & 31 \\ 93 & 25 & 14 & 121 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 35 & 104 & 55 & 61 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

141. Leidke maatriksi astak sõltuvalt parameetrite reaalarvulistest väärtustest:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{pmatrix}; & \text{c)} \quad & \begin{pmatrix} a & b & 2 & 1 \\ a & -1+2b & 3 & 1 \\ a & b & b+3 & 2b-1 \end{pmatrix}; & \text{e)} \quad & \begin{pmatrix} 0 & a+2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 \end{pmatrix}; \\
 \text{b)} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}; & \text{d)} \quad & \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & a & 2 & -4 & 5 \\ a & a & -1 & 7 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 10 & 3 \end{pmatrix}; & \text{f)} \quad & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & a-1 & 1 \\ 3 & a & 4 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

142. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi ühte elementi?

143. Kuidas võib muutuda maatriksi astak, kui muuta selle maatriksi a) ühe rea; b) ülimalt s rea elemente?

144. Tõestage, et kahe maatriksi summa astak ei ole suurem kui nende maatriksite astakute summa.

145. Olgu $A, B \in \text{Mat}_{m,n}(K)$. Millised alljärgnevatest väidetest on õiged?

- a) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$;
- b) $\text{rank}(A) = \text{rank}(cA)$, kus $c \in K$;
- c) $\text{rank}(A+B) \geq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$;
- d) juhul $m = n$ $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$.

146. Leidke kõik t väärtused, mille korral vektor b avaldub vektorite a_1, a_2, a_3 lineaarkombinatsioonina (vektorid a_1, a_2, a_3, b on antud koordinaatidega mingi baasi suhtes):

- a) $a_1 = (2, 3, 5), a_2 = (3, 7, 8), a_3 = (1, -6, 1), b = (7, -2, t)$;
- b) $a_1 = (4, 4, 3), a_2 = (7, 2, 1), a_3 = (4, 1, 6), b = (5, 9, t)$;
- c) $a_1 = (3, 2, 5), a_2 = (2, 4, 7), a_3 = (5, 6, t), b = (1, 3, 5)$;
- d) $a_1 = (3, 2, 6), a_2 = (7, 3, 9), a_3 = (5, 1, 3), b = (t, 2, 5)$.

147. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ kaks erinevat baasi, mis mõlemad sisaldavad vektoreid $a_1 = (1, 1, 0, 0)$ ja $a_2 = (0, 0, 1, 1)$.

148. Leidke vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) vektorite süsteemi astak ja lineaarse katte mingi baas:

- a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $V = \text{Mat}_2(\mathbb{R})$;
 b) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = 4 + i$, $V = \mathbb{C}$;
 c) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, -1)$, $a_3 = (3, 1, 3, 1)$, $a_4 = (2, 0, 2, 0)$, $V = \mathbb{R}^4$.

149. Leidke vektorite süsteemi lineaarse katte baas ja mõõde, kui vektorid on antud koor-dinaatidega mingi baasi suhtes:

- a) $a_1 = (1, 0, 0, -1)$, $a_2 = (2, 1, 1, 0)$, $a_3 = (1, 1, 1, 1)$, $a_4 = (1, 2, 3, 4)$, $a_5 = (0, 1, 2, 3)$;
 b) $a_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$, $a_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$, $a_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$,
 $a_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$;
 c) $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (2, 1, 2, 1)$, $a_3 = (0, 3, 0, 3)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$.

150. Leidke vektorruumi V vektorite süsteemi lineaarse katte baas ja mõõde:

- a) $f_1 = x^6 + x^4$, $f_2 = x^6 + 3x^4 - x$, $f_3 = x^6 - 2x^4 + x$, $f_4 = x^6 - 4x^4 + 2x$, $V = \mathbb{R}_6[X]$;
 b) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,
 $V = \text{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$;
 c) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (2, 0, 1, 1)$, $a_3 = (4, 2, 3, 5)$, $a_4 = (0, 2, 1, 3)$, $V = \mathbb{R}^4$.

151*. Olgu $X \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$, kusjuures X olgu pööratav ja tema veeruvektorid olgu $X_1, X_2, \dots, X_n$. Olgu Y maatriks, mille veeruvektorid on $X_2, X_3, \dots, X_n, 0$. Tähistame $A = YX^{-1}$ ja $B = X^{-1}Y$. Leidke rank A ja rank B .

Näpunäide: Leidke mingi maatriks J nii, et $Y = XJ$.

152*. Olgu $A (m \times n)$ -maatriks ja $B (n \times m)$ -maatriks, kusjuures $n < m$. Tõestage, et maatriks AB ei ole pööratav. Kas maatriks BA võib olla pööratav? (Andke vastus kõigi m ja n võimaluste jaoks.)

10. Lineaarvõrrandisüsteemid.

Olgu $A = (a_{i,j}) \in \text{Mat}_{m,n}(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ ja $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Lineaarvõrrandisüsteemi saab panna kirja kujul $Ax = b$, kus x on tundmatute veerg.

A – süsteemi maatriks,

b – vabaliikmete veerg,

A' – süsteemi laiendatud maatriks.

$\alpha \in \text{Mat}_{n,1}(K)$ on süsteemi $Ax = b$ lahend $\stackrel{\text{def}}{\iff} A\alpha = b$.

Arvestades vektorruumide $\text{Mat}_{n,1}(K)$ ja K^n isomorfisust, kirjutame sageli $\alpha \in \text{Mat}_{n,1}(K)$ asemel $\alpha \in K^n$.

Süsteem $Ax = b$ on *vasturääkiv* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ süsteemil $Ax = b$ puudub lahend.

Süsteem $Ax = b$ on *kooskõlaline* $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ süsteemil $Ax = b$ leidub lahend.

Teoreem.

$$\left. \begin{array}{l} A' \text{ on } Ax = b \text{ laiend. maatriks,} \\ \tilde{A}' \text{ on } \tilde{A}x = \tilde{b} \text{ laiend. maatriks,} \\ A' \text{ on } A' \text{-st saadud ridade elem. teisenduste abil} \end{array} \right\} \implies \forall \alpha \in \text{Mat}_{n,1}(K) \quad (A\alpha = b \Leftrightarrow \tilde{A}\alpha = \tilde{b}).$$

Gaussi meetod: ridade elementaarteisenduste abil viiakse süsteemi laiendatud maatriks astmelisele kujule.

Teoreem (Kronecker–Capelli). Süsteem $Ax = b$ on kooskõlaline $\iff \text{rank } A = \text{rank } A'$.

$$\text{Süsteem } Ax = b \text{ on Crameri peajuhul} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} m = n, \\ \det A \neq 0. \end{cases}$$

Crameri peajuhul lineaarvõrrandisüsteeme saab lahendada *Crameri valemite* abil.

$$\text{Süsteem } Ax = b \text{ on homogeenne} \stackrel{\text{def}}{\iff} b = 0.$$

Lause. Olgu $m = n$ ja $b = 0$. Siis

$$\det A \neq 0 \iff \forall \alpha \in K^n (A\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0).$$

Teoreem. $\{\alpha \in K^n : A\alpha = 0\} =: V$ on alamruum vektorruumis K^n , kusjuures $\dim V + \text{rank } A = n$.

Alamruumi V baasi nimetatakse süsteemi $Ax = 0$ lahendite *fundamentaalsüsteemiks*.

Teoreem. Olgu α_1 süsteemi $Ax = b$ lahend (*erilahend*). Siis

$$\{\alpha \in K^n : A\alpha = b\} = \{\alpha_1 + \beta : A\beta = 0\}.$$

153. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Crameri valemite abil:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

154. Lahendage võrrandisüsteem, kasutades pöördmaatriksi leidmise võtet

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

155. Kasutades Gaussi meetodit leidke lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$$

156. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem Gaussi meetodil:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2z_1 - (1+i)z_2 - 3iz_3 = b_1 \\ -2z_1 + (1+i)z_2 + (1+3i)z_3 = b_2 \\ z_3 = b_3 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 5 \end{cases} & \end{array}$$

157. Leidke kõik muutujate komplektid, mida võib valida vabadeks muutujateks:

$$\text{a) } \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (1+i)x_1 + ix_2 + 7x_3 = 7, \\ -2ix_1 + (1-i)x_2 + x_3 = 8 \end{cases} \quad (K = \mathbb{C}).$$

158. Uurige lineaarvõrrandisüsteemi kooskõllalisust ja leidke lahendite hulk:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 9 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 9x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 8 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 6x_1 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + 2x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 6x_1 - x_3 - 2x_5 = 3 \\ 4x_1 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$$

159. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} \bar{3}x + y + \bar{2}z = \bar{1} \\ x + \bar{2}y + \bar{3}z = \bar{1} \\ \bar{4}x + \bar{3}y + \bar{2}z = \bar{1} \end{cases}$$

a) üle korpuse $\mathbb{Z}_5$; b) üle korpuse $\mathbb{Z}_7$.

160. Lahendage lineaarvõrrandisüsteem

$$\begin{cases} \bar{2}x + y - z = \bar{1} \\ x + \bar{2}y + z = \bar{2} \\ x + y - z = \bar{-1} \end{cases}$$

üle korpuse $\mathbb{Z}_5$.

161. Leidke homogeenise lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja lahendite fundamentaalsüsteem:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} (i+1)x_1 + ix_2 - x_3 + (2i+3)x_4 = 0 \\ 2ix_1 + (1-i)x_2 - (3i+2)x_3 + 13ix_4 = 0 \\ (1-3i)x_1 + (i-4)x_2 + (7i+1)x_3 + (11-23i)x_4 = 0 \\ 2ix_1 + (3i+1)x_2 + (1-2i)x_3 + (4i-7)x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases};$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 - 11x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 9x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases};$$

162. Lahendage võrrandisüsteem korpuses $\mathbb{Z}_5$ ning avaldage lahend ühe erilahendi ja vastava homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi kaudu:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3, \\ -2x + y - 3z = 1, \\ x - 3y - z = 2. \end{cases}$$

163. Kasutades Gaussi meetodit leidke lineaarvõrrandisüsteemi üldlahend ja üks erilahend, ning avaldage lahend ühe erilahendi ja vastava homogeense süsteemi lahendite fundamentaalsüsteemi kaudu:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -6x_1 + (i+9)x_2 + (3-2i)x_3 + 2ix_4 = 4-i, \\ (6i-6)x_1 + (10-8i)x_2 + (1-5i)x_3 + (2i+2)x_4 = 3-5i, \\ (24i-6)x_1 + (13-35i)x_2 - (14i+5)x_3 + (2i+8)x_4 = -17i. \end{cases}$$

164. Lahendage maatriksvõrrand X suhtes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

165. Tõestage, et kui reaalarvuliste kordajatega homogeensel lineaarvõrrandisüsteemil on olemas nullist erinev kompleksarvuline lahend, siis on tal ka nullist erinev reaalarvuline lahend.

166. Leidke a) ühest võrrandist, b) kahest võrrandist, c) kolmest võrrandist koosnev homogeenne lineaarvõrrandisüsteem, millele vektorite süsteem

$$c_1 = (1, 4, -2, 2, -1), \quad c_2 = (3, 13, -1, 2, 1), \quad c_3 = (2, 7, -8, 4, -5)$$

on lahendite fundamentaalsüsteemiks.

167. Leidke reaalarvuliste kordajatega kuuppolünoom $f(x)$, kui

$$f(-2) = 1, \quad f(-1) = 3, \quad f(1) = 13, \quad f(2) = 33.$$

168*. Olgu arvud a_{ij} mingid täisarvud, $i, j = 1, \dots, n$. Tõestage, et võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots & \dots \dots \\ \frac{1}{2}x_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

lahendiks on ainult null-lahend.

Näpunäide: Süsteem on homogeenne. Näidake, et kui süsteemi determinant oleks 0, saaksime vastuolu.

169*. On antud täisarvuliste kordajatega lineaarvõrrandisüsteem oma laiendatud maatriksiga. Kirjutage programm, mis, kasutades ainult elementaarteisendusi ja tehteid täisarvudega teeb kindlaks, kas süsteemil on null, üks või rohkem kui üks lahend. Kui lahendeid on rohkem kui üks, siis programm väljastagu ühe võimaliku vabade tundmatute komplekti.

11. Polünoomid.

Olgu R nulliteguriteta kommutatiivne ring. Olgu $f \in R[X]$, kus $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, ja $c \in R$.
 $f(c) := a_n c^n + \dots + a_1 c + a_0$.

Teoreem (Bezout). $\forall q \in R[X] \quad \forall r \in R[X] \quad \left. \begin{matrix} f = q \cdot (X - c) + r, \\ \deg r < 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow r = f(c).$

c on f juur $\stackrel{\text{def}}{\iff} f(c) = 0$.

Lause. c on f juur $\iff X - c \mid f$.

c on f s -kordne juur $\stackrel{\text{def}}{\iff} (X - c)$ on f s -kordne tegur.

Olgu K korpus, $\text{char } K = 0$. Tähistame vajadusel $n = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ liidetavat}} \in K$, kus 1 on K ühikelement.

$f' := na_n X^{n-1} + \dots + 2a_2 X + a_1$.

Lause. Olgu $f \in K[X]$ ja $c \in K$.

c on f s -kordne juur $\iff \begin{cases} f(c) = f'(c) = \dots = f^{(s-1)}(c) = 0, \\ f^{(s)}(c) \neq 0. \end{cases}$

Lause. Olgu $f \in \mathbb{Q}[X]$, kus $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, kusjuures $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Olgu $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ polünoomi f juur, SÜT(p, q) = 1. Siis $p \mid a_0, q \mid a_n$.

170. Leidke polünoomi $f \in \mathbb{Q}[X]$ kordajate summa, kui

- $f = (2 - 5X + X^3)^{211} (3 - 7X + 9X^2 - 5X^3)^{135}$;
- $f = (7 - 3X - 3X^5)^{100} (5 - X^2 - 5X^7)^{1000}$.

171. Leidke kolmanda astme polünoom, millel on ühekordne juur 2 ja kahekordne juur -1 .

172. Leidke ringis $\mathbb{C}[X]$ jagatis q ja jääk r , mis tekib polünoomi f jagamisel polünoomiga g , kui

- a) $f = X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$, $g = X - 1$;
- b) $f = 2X^5 - 5X^3 - 8X$, $g = X + 3$;
- c) $f = 4X^3 + X^2$, $g = X + 1 + i$;
- d) $f = X^3 - X^2 - X$, $g = X - 1 + 2i$.

173. Kasutades Horneri skeemi arvutage $f(c)$, kui

- a) $f = X^4 - 3X^3 + 6X^2 - 10X + 16$, $c = 4$;
- b) $f = 5X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 3X + 7$, $c = 3$;
- c) $f = 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 6X + 5$, $c = -\frac{1}{2}$;
- d) $f = 2X^5 + (1 + 2i)X^4 - (1 + 3i)X^2 + 7$, $c = -2 - i$;
- e) $f = 2X^5 + (1 - 2i)X^4 - (3 + i)X^2 + 7$, $c = -1 + 2i$.

174. Kasutades Horneri skeemi arendage polünoom f polünoomi $X - c$ astmete järgi, kui

- a) $f = X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 4X + 1$, $c = -1$;
- b) $f = X^5$, $c = 1$;
- c) $f = X^4 - 8X^3 + 24X^2 - 50X + 90$, $c = 2$;
- d) $f = X^4 + 2iX^3 - (1 + i)X^2 - 3X + (7 + i)$, $c = -i$;
- e) $f = X^4 + (3 - 8i)X^3 - (21 + 18i)X^2 - (33 - 20i)X + (7 + 18i)$, $c = -1 + 2i$.

175. Kasutades Horneri skeemi leidke polünoomi f juure c kordsus, kui

- a) $f = X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$, $c = 2$;
- b) $f = X^5 + 7X^4 + 16X^3 + 8X^2 - 16X - 16$, $c = -2$;
- c) $f = X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 6X + 9$, $c = 3$.

176. Leidke a , kui -1 on polünoomi $X^5 - aX^2 - aX + 1$ vähemalt kahekordne juur.

177. Milliste p , q ja r korral jagub polünoom f polünoomiga $(X - 2)^3$ ringis $\mathbb{R}[X]$, kui

- a) $f = X^3 + pX^2 + qX + r$
- b) $f = X^4 + pX^3 + qX^2 + r$
- c) $f = pX^4 + qX^2 + rX + 1$

178. Milliste a väärtuste korral omab polünoom f kordset juurt -2 ning milline on selle juure kordsus, kui

- a) $f = X^3 + 3X^2 + aX - 4$
- b) $f = X^4 + 4X^3 + aX^2 + 4X + 4$
- c) $f = 2X^4 + 7X^3 + aX^2 - 44X - 40$

179. Tõestage, et polünoomil $f = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \dots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$ ei ole kordseid juuri.

180. Leidke a nii, et

- a) polünoomi $3X^3 - 63X + a \in \mathbb{C}[X]$ üks juur oleks võrdne kahekordse teisega;
 b) polünoomi $X^3 + 12X^2 + a \in \mathbb{C}[X]$ kahe juure summa oleks võrdne kolmanda juurega;
 c) polünoomi $4X^3 - 80X + a \in \mathbb{C}[X]$ kahe juure korrutis oleks võrdne kolmanda juurega.

181. Leidke $\mathbb{C}[X]$ polünoomide kõik juured:

- a) $X^3 - 7X^2 + 13X - 3$; d) $X^4 + X^3 - 15X^2 + 7X + 6$;
 b) $X^4 + 3X^3 - 6X - 4$; e) $X^4 - 3X^3 - 14X^2 + 48X - 32$;
 c) $X^4 - 3X^3 - X^2 + 9X - 6$; f) $4X^3 - 12X^2 + 13X - 6$.

12. Lineaarkujutused ja -teisendused.

Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle ühe ja sama korpuse K . Olgu $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$.

φ on lineaarkujutus $\stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall a, b \in V_1 \ \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \\ \forall a \in V_1 \ \forall k \in K \ \varphi(ka) = k\varphi(a). \end{cases}$

Tähis: $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ (kõigi lineaarkujutuste hulk $V_1 \rightarrow V_2$).

Kui $V_1 = V_2$, öeldakse lineaarkujutuse kohta *lineaarteisendus*. Hulga tähis: $\text{Hom}(V, V) =: \text{End}(V)$.

Lause. φ on lineaarkujutus $\iff \forall a, b \in V_1 \ \forall k \in K \ \varphi(a+kb) = \varphi(a) + k\varphi(b)$.

Lause. $\text{End}(V)$ on ring, kui tehetena vaadelda punktiivisilist liitmist ja kompositsiooni. $\text{End}(V)$ on vektorruum, kui tehetena vaadelda punktiivisilist liitmist ja skalaariga korrutamist.

Olgu $V_1 = V_2 = V$. Olgu $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ vektorruumi V baas. Olgu $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.

$A_\varphi^e := (a_{ij})_{i,j=1}^n$ (lineaarteisenduse φ maatriksi baasi e suhtes)

Teoreem. Olgu e vektorruumi V baas. Olgu $f: \text{End}(V) \rightarrow \text{Mat}_n(K)$, kus iga $\varphi \in \text{End}(V)$ korral $f(\varphi) = A_\varphi^e$. Siis f on ringide isomorfism. Samuti on f vektorruumide isomorfism.

Olgu $A, B \in \text{Mat}_n(K)$.

$A \sim B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists T \in \text{Mat}_n(K): \begin{cases} T \text{ on regulaarne,} \\ B = T^{-1}AT \end{cases}$ (maatriksid A ja B on *sarnased*).

Teoreem. Olgu $A, B \in \text{Mat}_n(K)$. Siis

$A \sim B \iff \exists \text{ vektorruum } V \exists \varphi \in \text{End } V \exists e, e' \subseteq V: \begin{cases} e \text{ ja } e' \text{ on } V \text{ baasid,} \\ A = A_\varphi^e, \\ B = A_\varphi^{e'}. \end{cases}$

Olgu V_1 ja V_2 vektorruumid üle ühe ja sama korpuse K . Olgu $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2)$.

$\text{Ker } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in V_1 \mid \varphi(a) = 0\}$, $\text{Im } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(a) \mid a \in V_1\}$.

Lause. Lineaarkujutuse $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ korral on $\text{Ker } \varphi$ ja $\text{Im } \varphi$ alamruumid vastavalt vektorruumides V_1 ja V_2 .

Teoreem (teoreem tuumast ja kujutisest). Olgu V_1 lõplikumõõtmeline. Siis $\dim \text{Ker } \varphi + \dim \text{Im } \varphi = \dim V_1$.

182. Olgu tasandil fikseeritud ühikristreeper $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tehke kindlaks, kas tasandi pööre nurga α võrra ümber koordinaatide alguspunkti O on tasandi vabavektorite vektorruumi $\mathbb{E}_2$ lineaarteisendus. Kui on, siis leidke selle teisenduse maatriksi baasi $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ suhtes.

183. Tehke kindlaks, millised alljärgnevatest teisendustest $\varphi: \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, kus $\mathbb{E}_3$ on ruumi vabavektorite vektorruum, on lineaarteisendused. Leidke lineaarteisenduste maatriksid ühikristbaasi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (parema käe kolmik) suhtes. (Kui pole teisiti öeldud, siis $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ on ruumi $\mathbb{E}_3$ fikseeritud vektorid.) Iga $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k} \in \mathbb{E}_3$ korral

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\varphi(\vec{x}) = \vec{0}$; | e) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$; | h) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{b}$; |
| b) $\varphi(\vec{x}) = \vec{a}$; | f) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{x}$; | i) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$, kus |
| c) $\varphi(\vec{x}) = 2\vec{x}$; | g) $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \vec{x}$; | $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. |
| d) $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{i}$; | | |

184. Tehke kindlaks, kas järgmised kujutused φ on vektorruumi $\mathbb{R}_n[X] = \{a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0: a_i \in \mathbb{R}\}$ lineaarteisendused ning leidke lineaarteisenduste maatriksid baasi $1, X, X^2, \dots, X^n$ suhtes, kui iga $f \in \mathbb{R}_n[X]$ korral

- | | |
|---|---|
| a) $(\varphi(f))(X) = f(-X)$; | e) $(D(f))(x) = f'(x)$, seda teisendust nimetame <i>diferentseerimisteisenduseks</i> ; |
| b) $(\varphi(f))(X) = f(X+1)$; | f) $(\varphi(f))(X) = Xf(X)$; |
| c) $(\varphi(f))(X) = f(aX+b)$, kus $a \neq 0$ ja b on fikseeritud reaalarvud; | g) $(\varphi(f))(X) = \int f(X) dX$. |
| d) $(\varphi(f))(X) = f(X+1) - f(X)$; | |

185. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ diferentseerimisteisenduse maatriks

- a) baasi $X^n, \dots, X^2, X, 1$ suhtes;
- b) baasi $1, X-1, \frac{(X-1)^2}{2}, \dots, \frac{(X-1)^n}{n!}$ suhtes.

186. Konstrueerige vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ kaks erinevat lineaarteisendust, mis alamruumil $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ langevad kokku diferentseerimisteisendusega.

187. Leidke vektorruumi $\{k \sin x + l \cos x: k, l \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ diferentseerimisteisenduse maatriks baasi $\sin x, \cos x$ suhtes.

188. Kas lineaarteisendus viib alati lineaarselt sõltuva süsteemi lineaarselt sõltuvaks süsteemiks?

189. Kas lineaarteisendus viib alati lineaarselt sõltumatu süsteemi lineaarselt sõltumatuks süsteemiks?

190. Olgu vektorite süsteemid $a_1, \dots, a_m$ ja $b_1, \dots, b_n$ ekvivalentsed. Kas iga lineaarteisenduse φ korral on ka süsteemid $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_m)$ ja $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ ekvivalentsed?

191. Olgu $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ lineaarkujutus ja L_1, L_2 vektorruumi V_1 alamruumid. Kas kehtivad võrdused a) $\varphi(L_1 + L_2) = \varphi(L_1) + \varphi(L_2)$; b) $\varphi(L_1 \cap L_2) = \varphi(L_1) \cap \varphi(L_2)$?

192. Tehke kindlaks, millised vektorruumi $\mathbb{R}^3$ teisendused φ on lineaarteisendused, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ korral

a) $\varphi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$;

c) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, x_2^3, x_1 + x_3)$.

b) $\varphi(x) = (x_1 + 2, x_2 + 5, x_3)$;

193. Vaatleme vektorruumis $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ baasi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Olgu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Leidke selle baasi suhtes järgmiste vektorruumi $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$ lineaarteisenduste maatriksid:

a) transposeerimisteisendus, s.t. teisendus $X \mapsto X^T$;

b) teisendus φ_A , mis on defineeritud võrdusega $\varphi_A(X) = AX$;

c) teisendus $\chi_{A,B}$, mis on defineeritud võrdusega $\chi_{A,B}(X) = AXB$;

d) teisendus $\kappa_{A,B}$, mis on defineeritud võrdusega $\kappa_{A,B}(X) = AX + XB$.

194. Vektorruumi $\mathbb{R}_2[X]$ lineaarteisenduse φ maatriks baasi $1, X, X^2$ suhtes on $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Leidke selle teisenduse maatriks baasi

a) $X - X^2, 1 + 2X + X^2, 1 + 3X + X^2$;

c) $3X^2 + 2X + 1, X^2 + 3X + 2, 2X^2 + X + 3$

b) $3X^2 + 2X, 5X^2 + 3X + 1, 7X^2 + 5X + 3$;

suhtes.

195. Kui maatriksid A ja B on sarnased, siis leidub selline maatriks C , et $B = C^{-1}AC$. Kas see maatriks C on üheselt määratud?

196. Olgu $A \in \text{Mat}_n(K)$. Tõestage, et hulk $\{C \in \text{GL}_n(K) \mid A = C^{-1}AC\}$ on rühm maatriksite korrutamise suhtes.

197. Tõestage, et kui vähemalt üks maatrikseist A ja B on regulaarne, siis maatriksid AB ja BA on sarnased. Tooge näide kahest mitteregulaarsest maatriksist A ja B , mille korral AB ja BA ei ole sarnased.

198. Leidke kõik maatriksid, mis on sarnased ainult iseendaga.

199. Tõestage, et kui maatriksid $A, B \in \text{Mat}_n(K)$ on sarnased, siis on sarnased ka maatriksid a) A^2 ja B^2 ; b) A^m ja B^m , kus $m \in \mathbb{N}$; c) $f(A)$ ja $f(B)$, kus $f \in K[X]$.

200*. Vaatleme polünoomide vektorruumi $\mathbb{R}[X]$ (üle $\mathbb{R}$), kus liitmine ja skalaariga korrutamine on defineeritud nagu ikka, komponenthaaval. Olgu T lineaarteisendus vektorruumis $\mathbb{R}[X]$, kus iga $f \in \mathbb{R}[X]$ korral $Tf = f + f'$ (siin f' tähistab f tuletist). Tõestage, et T on pööratav.

201. Leidke lineaarkujutuse $\varphi: \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle$ ($\vec{a} \in \mathbb{E}_3$ on fikseeritud vektor), tuum ja kujutis.

202. Leidke lineaarteisenduse $\varphi: \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$, $\varphi(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}$ ($\vec{a} \in \mathbb{E}_3 \setminus \{\vec{0}\}$ on fikseeritud vektor), tuum ja kujutis.

203. Leidke vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ diferentseerimisteisenduse tuum ja kujutis.

204. Leidke lineaarteisenduse $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tuuma ja kujutise baas, kui iga $x = (x_1, x_2, x_3)$ korral

- a) $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3)$;
 b) $\varphi(x) = (2x_1 - x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$.

205. Leidke lineaarteisenduse φ tuuma ja kujutise baas, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

206. Kas vektorruumi V_1 iga alamruum on mingi lineaarkujutuse $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ tuum?

207. Olgu φ vektorruumi V pööratav lineaarteisendus. Tõestage, et φ pöördteisendus on ka lineaarne.

208. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus. Tõestage, et $\text{Ker } \varphi = 0$ parajasti siis, kui φ on injektiivne. Tõestage, et kui V on lõplikumõõtmeline, siis $\text{Ker } \varphi = 0$ parajasti siis, kui φ on sürjektiivne.

209. Leidke lineaarteisenduse φ maatriksi üldkuju sellise baasi suhtes, mille k esimest vektorit moodustavad a) φ tuuma baasi; b) φ kujutise baasi.

210. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus, L vektorruumi V alamruum ja $L \cap \text{Ker } \varphi = 0$. Tõestage, et φ viib L iga lineaarselt sõltumatu vektorite süsteemi lineaarselt sõltumatuks vektorite süsteemiks.

211. Olgu φ vektorruumi V pööratav lineaarteisendus. Tõestage, et φ viib lineaarselt sõltumatu süsteemi lineaarselt sõltumatuks süsteemiks.

212. Olgu φ vektorruumi V lineaarteisendus ja L vektorruumi V alamruum. Tõestage, et

- a) kujutis $\varphi(L)$ ja originaal $\varphi^{-1}(L)$ on vektorruumi V alamruumid;
 b) kui φ on pööratav ja V on lõplikumõõtmeline, siis $\dim \varphi(L) = \dim \varphi^{-1}(L) = \dim L$.

213*. Olgu ruumi vabavektorite vektorruumis $\mathbb{E}_3$ fikseeritud vektorid $\vec{a}$ ja $\vec{b}$. Olgu kujutus $\varphi: \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{E}_3$ defineeritud seosega $\varphi(\vec{x}) = \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b})$. Tõestage, et φ on lineaarkujutus, leidke φ maatriks ühikristbaasi $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ suhtes, leidke φ tuum ja kujutis.

214*. Olgu fikseeritud reaalarv $h \neq 0$. Vaatleme vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ vaheteisendust $\varphi_h: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, mis on antud võrdusega $(\varphi_h(f))(X) = \frac{1}{h} (f(X+h) - f(X))$. Leidke φ_h tuum ja kujutus.

215*. Olgu X, Y ja Z vektorruumid üle ühe ja sama korpuse. Olgu lineaarkujutus $\varphi: X \rightarrow Y$ üksühene ja lineaarkujutus $\psi: Y \rightarrow Z$ pealekujutus. Kehtigu $\text{Im } \varphi = \text{Ker } \psi$. Kirjeldatud olukorra kohta öeldakse, et ruumid X, Y ja Z moodustavad *lühikese täpse jada* ning tähistatakse $0 \rightarrow X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z \rightarrow 0$.

Tõestage järgmine samaväärsus: leidub lineaarkujutus $U: Z \rightarrow Y$ omadusega $\psi \circ U = 1_Z$ parajasti siis, kui leidub lineaarkujutus $V: Y \rightarrow X$ omadusega $V \circ \varphi = 1_X$.

216*. Tähistame iga $M \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$ korral

$$G_M := \{z \in \mathbb{C} \mid zM \sim M\},$$

kus $\sim$ tähistab maatriksite sarnasust.

a) Leidke hulk G_M , kui

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{C}).$$

b) Kas leidub maatriks $M \in \text{Mat}_3(\mathbb{C})$, mille korral G_M on lõplik hulk?

13. Linearteisenduse omaväärtused ja omavektorid.

Olgu V vektorruum üle korpuse K ja olgu $\varphi \in \text{End } V$.

$\lambda \in K$ on φ omaväärtus $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists a \in V \setminus \{0\}: \varphi(a) = \lambda a$.

$a \in V \setminus \{0\}$ on φ omavektor $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \lambda \in K: \varphi(a) = \lambda a$.

Olgu $A \in \text{Mat}_n(K)$. Maatriksi A karakteristlik polünoom: $\det(A - XE)$.

$\lambda \in K$ on A karakteristliku polünoomi juur $\stackrel{\text{def}}{\iff} \det(A - \lambda E) = 0$.

Lause.

$$\left. \begin{array}{l} e, e' \text{ on } V \text{ baasid,} \\ p \text{ ja } p' \text{ on } A_\varphi^e \text{ ja } A_\varphi^{e'} \text{ kar. pol.-d} \end{array} \right\} \implies p = p'.$$

Olgu e vektorruumi V baas.

Lause. $\lambda \in K$ on φ omaväärtus $\iff \lambda$ on A_φ^e karakteristliku polünoomi juur.

Olgu $\lambda \in K$ teisenduse φ omaväärtus.

λ algebraalne kordsus on $s \stackrel{\text{def}}{\iff} \lambda$ on A_φ^e karakteristliku polünoomi s -kordne juur.

λ geomeetiline kordsus on $s \stackrel{\text{def}}{\iff} \dim\{a \in V \mid \varphi(a) = \lambda a\} = s$.

Lause. Linearteisenduse maatriks mingi baasi suhtes on diagonaalmaatriks siis ja ainult siis, kui see baas koosneb selle linearteisenduse omavektoritest.

217. Tõestage, et lõplikumõõtmelise vektorruumi lineaarteisendus on pööratav parajasti siis, kui 0 ei ole tema omaväärtus.

218. Tõestage, et lineaarteisenduse tuum koosneb omaväärtusele 0 vastavaist omavektoreist ja nullvektorist.

219. Tõestage, et lineaarteisenduse nullist erinevatele omaväärtustele vastavad omavektorid kuuluvad selle lineaarteisenduse kujutisse.

220. Tõestage, et lineaarteisendusel $\varphi - k1_V$, kus $k \in K$, on samad omavektorid kui vektorruumi V (üle K) lineaarteisendusel φ . Leidke seos nende lineaarteisenduste omaväärtuste vahel.

221. Olgu φ vektorruumi V (üle K) lineaarteisendus. Tõestage, et kui a on φ omavektor, mis vastab omaväärtusele λ , siis a on omavektor ka lineaarteisendustele

$$\text{a) } \varphi^2; \quad \text{b) } \varphi^m, m \in \mathbb{N}; \quad \text{c) } f(\varphi), \text{ kus } f \in K[X].$$

Leidke vastavad omaväärtused. (Siinkohal mõtleme $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$, ning kui $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, siis $f(\varphi) = a_n \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ tegurit}} + \dots + a_1 \varphi + a_0 1_V$.)

222. Tõestage, et kui φ on lõplikumõõtmelise vektorruumi pööratav lineaarteisendus, siis teisendustel φ ja φ^{-1} on samad omavektorid. Leidke seos nende teisenduste omaväärtuste vahel.

223. Tõestage, et kui λ^2 on vektorruumi V (üle K) lineaarteisenduse φ^2 omaväärtus, siis üks korpuse K elementidest λ ja $-\lambda$ on teisenduse φ omaväärtus. (Siinkohal mõtleme $\varphi^2(x) = \varphi(\varphi(x))$.)

224. Leidke vektorruumi $\text{Mat}_n(\mathbb{R})$ lineaarteisenduse $X \mapsto X^T$ omaväärtused ja omavektorid.

225. Tõestage, et lineaarteisenduse omavektorid, mis vastavad paarikaupa erinevatele omaväärtustele, on lineaarselt sõltumatud.

226. Leidke vektorruumi V (üle korpuse $\mathbb{R}$) lineaarteisenduse φ omaväärtused ja omavektorid, kui φ maatriks mingi baasi suhtes on

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & \text{c) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}; & \text{e) } \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \\ \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & \text{d) } \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}; & \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

227. Leidke vektorruumi V , üle korpuse $\mathbb{Z}_p$, lineaarteisenduse omaväärtused ja omavektorid, kui tema maatriks mingi baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, p = 2, 3;$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, p = 3, 5.$

228. Olgu λ_0 lineaarteisenduse φ omaväärtus. Tõestage, et omaväärtusele λ_0 vastavate lineaarselt sõltumatute omavektorite arv (ehk λ_0 *geomeetriline kordsus*) ei ületa λ_0 kui φ karakteristikliku polünoomi juure kordsust (ehk λ_0 *algebralist kordsust*).

229. Tehke kindlaks, millised vektorruumi V (üle $\mathbb{R}$) lineaarteisenduse maatriksid saab viia diagonaalkujule uuele baasile ülemineku teel. Leidke selline baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix};$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix};$

230. Kas maatriksid

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on sarnased diagonaalmaatriksiga?

231*. Olgu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ reaalsete positiivsete elementidega maatriks. Tõestage, et maatriksil A leidub omavektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nii, et x ja y on positiivsed.

232*. Olgu antud lõpmatumõõtmeline komplekssete jadade vektorruum

$$V = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Nihketeisendus $S: V \rightarrow V$ on defineeritud võrdusega

$$S((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (a_2, a_3, a_4, \dots), \quad (a_1, a_2, a_3, \dots) \in V.$$

Leidke teisenduse S omaväärtused ja igale omaväärtusele vastavad omavektorid.

14. Eukleidiline ruum.

Olgu E vektorruum üle $\mathbb{R}$. Olgu defineeritud kujutus $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$.

$$E \text{ on eukleidiline ruum} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall a, b \in E & \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle, \\ \forall a, b, c \in E & \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle, \\ \forall a, b \in E \quad \forall k \in \mathbb{R} & \langle ka, b \rangle = k \cdot \langle a, b \rangle, \\ \forall a \in E \setminus \{0\} & \langle a, a \rangle > 0. \end{cases}$$

Kujutust $(a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$ nimetatakse *skalaarkorrutamiseks*. Reaalarvu $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ nimetatakse elemendi x pikkuseks ehk *normiks* ning tähistatakse $|x|$ või $\|x\|$.

$$\textbf{Lause.} E \text{ on eukleidiline ruum} \implies \begin{cases} \forall a, b, c \in E & \langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle, \\ \forall a, b \in E \quad \forall k \in \mathbb{R} & \langle a, kb \rangle = k \cdot \langle a, b \rangle. \end{cases}$$

Olgu E eukleidiline ruum.

$$\text{Vektorid } a, b \in E \text{ on ortogonaalsed} \stackrel{\text{def}}{\iff} \langle a, b \rangle = 0.$$

Tähis: $a \perp b$.

$$\text{Vektorite süsteem } a_1, \dots, a_n \text{ on ortonormeeritud} \stackrel{\text{def}}{\iff} \stackrel{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\} & \langle a_i, a_i \rangle = 1, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} & i \neq j \Rightarrow \langle a_i, a_j \rangle = 0. \end{cases}$$

Teoreem.

$$E \text{ vektorite süsteem } a_1, \dots, a_n \text{ on lineaarselt sõltumatu} \implies \implies \exists b_1, \dots, b_n \in E : \begin{cases} b_1, \dots, b_n \text{ on ortonormeeritud,} \\ L(a_1, \dots, a_n) = L(b_1, \dots, b_n). \end{cases}$$

Süsteemi $a_1, \dots, a_n$ põhjal ortonormeeritud süsteemi $b_1, \dots, b_n$ leidmiseks saab kasutada *Grami-Schmidti ortogonaliseerimisprotsessi*:

- kõigepealt võetakse $b_1 = a_1$;
- induktiivselt eeldades, et $L(a_1, \dots, a_s) = L(b_1, \dots, b_s)$, valitakse b_{s+1} nii, et $b_{s+1} \perp b_i$ iga $i \in \{1, \dots, s\}$ korral, kusjuures $L(a_1, \dots, a_{s+1}) = L(b_1, \dots, b_{s+1})$.
- Lõpuks normeeritakse vektorid, korrutades need oma normi pöördarvuga.

Grami-Schmidti protsessi võib rakendada ka lineaarselt sõltuvale süsteemile. Siis nende vektorite kohal, mis astakut ei suurenda, annab protsess välja nullvektori. Jättes nullvektorid kõrvale, saadakse selisel viisil alge süsteemi lineaarkatte ortonormeeritud baas.

Teoreem (Cauchy-Bunjakovski-Schwarz). $\forall a, b \in E \quad |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\|$.

Olgu $a, b \in E \setminus \{0\}$.

$$\angle(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \arccos \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \text{ (vektorite } a \text{ ja } b \text{ vaheline nurk).}$$

233. Olgu $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ vektorruumi $\mathbb{R}^2$ suvalised vektorid. Näidake, et sellel vektorruumil võib skalaarkorrutamise defineerida võrdusega

$$\text{a) } \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2; \quad \text{b) } \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2.$$

Arvutage mõlemal juhul vektorite $x = (1, 1)$ ja $y = (-3, 2)$ skalaarkorrutis.

234. Defineerige ülimalt n -nda astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumil $\mathbb{R}_n[X]$ skalaarkorrutamine nii, et baas $1, X, \frac{X^2}{2!}, \dots, \frac{X^n}{n!}$ oleks ortonormeeritud.

235. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi vektor on ortogonaalne vektoritega $a_1, \dots, a_m$, siis on ta ortogonaalne ka kõigi lineaarkombinatsioonidega $k_1 a_1 + \dots + k_m a_m$.

236. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi nullist erinevad vektorid a ja b on ortogonaalsed, siis vektorite süsteem a, b on lineaarselt sõltumatu.

237. Olgu E eukleidiline ruum ortonormeeritud baasiga $e_1, \dots, e_n$. Tõestage, et iga $a \in E$ korral

$$a = \langle a, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle a, e_n \rangle e_n.$$

238. Tõestage, et lõigus $[-\pi, \pi]$ pidevate funktsioonide vektorruumis trigonomeetrilise süsteemi $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ suvalised kaks erinevat vektorit on ortogonaalsed skalaarkorrutamise $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ suhtes.

239. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi vektorite süsteem $a_1, \dots, a_m$ on ortogonaalne, siis $\|a_1 + \dots + a_m\|^2 = \|a_1\|^2 + \dots + \|a_m\|^2$ (üldistatud Pythagorase teoreem).

240. Leidke kolmnurga ABC külgede pikkused ja sisenurgad eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^5$, kui külgede kohavektorid OA, OB, OC on

$$OA = (2, 4, 2, 4, 2), \quad OB = (6, 4, 4, 4, 6), \quad OC = (5, 7, 5, 7, 2).$$

241. Tõestage järgmised normi omadused:

$$\forall a \in E \quad \|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0,$$

$$\forall a \in E \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \|ka\| = |k| \cdot \|a\|,$$

$$\forall a, b \in E \quad \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

242. Veenduge, et vektorid $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^4$ on ortogonaalsed ning täiendage süsteem a_1, a_2 ortogonaalseks baasiks:

$$\text{a) } a_1 = (1, -2, 2, -3), a_2 = (2, -3, 2, 4); \quad \text{b) } a_1 = (1, 1, 1, 2), a_2 = (1, 2, 3, -3).$$

243. Täiendage vektorite süsteem a_1, a_2 ortonormeeritud baasiks:

$$\text{a) } a_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), a_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right); \quad \text{b) } a_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), a_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

244. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, leidke ortonormeeritud baas ülimalt teise astme reaalarvuliste kordajatega polünoomide vektorruumis $\mathbb{R}_2[X]$ võttes esialgseks baasiks $1, X, X^2$ ja kasutades skalaarkorrutamist, mis on defineeritud võrdusega

$$\text{a) } \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx;$$

$$\text{b) } \langle f, g \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2, \text{ kui } f = a_2 X^2 + a_1 X + a_0, g = b_2 X^2 + b_1 X + b_0.$$

245. Kasutades ortogonaliseerimisprotsessi, konstrueerige vektorite $a_1, \dots, a_m$ lineaarse katte ortogonaalne baas:

- a) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$;
 b) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (5, 8, -2, -3)$, $a_3 = (3, 9, 3, 8)$;
 c) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$, $a_4 = (6, 7, 7, 8)$.

246. Olgu vektorruumil $\mathbb{R}^4$ skalaarkorrutamine defineeritud võrdusega

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_2 + 2x_3 y_3 - x_3 y_4 - x_4 y_3 + 2x_4 y_4$$

mistahes $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ korral. Kasutades ortogonalseerimisprotsessi, leidke vektorruumi $\mathbb{R}^4$ ortonormeeritud baas lähtudes baasist

- a) $a_1 = (1, 0, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$;
 b) $a_1 = (1, -1, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, -1)$, $a_4 = (1, 0, 0, 1)$.

247*. Otsustage, kas ruumil $\mathbb{R}^2$ leidub selline skalaarkorrutis, et $\langle (x, y), (x, y) \rangle = (|x| + |y|)^2$ iga $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ korral.

Näpunäide: Eukleidilise ruumi E skalaarkorrutis rahuldab rööpküliku võrdust:

$$2\langle u, u \rangle + 2\langle v, v \rangle = \langle u + v, u + v \rangle + \langle u - v, u - v \rangle \text{ iga } u, v \in E \text{ korral.}$$

248*. Olgu $e = (a, b, c)$ ühikvektor eukleidilises ruumis $\mathbb{R}^3$. Olgu T ruumi $\mathbb{R}^3$ lineaarteisendus, mis teostab vektori e suhtes 180-kraadise pöörde. See tähendab, kui O on koordinaatide alguspunkt, on vektori $x = \overrightarrow{OX}$ otspunkt X ja vektori $T(x) = \overrightarrow{OX'}$ otspunkt X' üksteise peegeldused sirge OE suhtes (kus $e = \overrightarrow{OE}$).

Leidke lineaarteisenduse T maatriks ühikristbaasi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ suhtes.

15. Ortogonaalsed ja sümmeetrilised teisendused.

Olgu $A \in \text{Mat}_n(\mathbb{R})$.

A on ortogonaalne $\stackrel{\text{def}}{\iff} A^T = A^{-1}$.

A on sümmeetriline $\stackrel{\text{def}}{\iff} A = A^T$.

Olgu E eukleidiline ruum, olgu $\varphi \in \text{End } E$.

φ on ortogonaalteisendus $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a \in E \langle \varphi(a), \varphi(a) \rangle = \langle a, a \rangle$.

φ on sümmeetriline $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall a, b \in E \langle \varphi(a), b \rangle = \langle a, \varphi(b) \rangle$.

Lause. φ on ortogonaalteisendus $\iff \forall a, b \in E \langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle = \langle a, b \rangle$.

Teoreem. φ on ortogonaalteisendus $\implies$ iga ortonormeeritud baasi e korral A_φ^e on ortogonaalne.

$(\exists \text{ ortonormeeritud baas } e: A_\varphi^e \text{ on ortogonaalne}) \implies \varphi \text{ on ortogonaalteisendus.}$

Teoreem. φ on sümmeetriline $\implies$ iga ortonormeeritud baasi e korral A_φ^e on sümmeetriline.

$(\exists \text{ ortonormeeritud baas } e: A_\varphi^e \text{ on sümmeetriline}) \implies \varphi \text{ on sümmeetriline.}$

Teoreem.

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \text{ on sümmeetriline,} \\ \lambda \in \mathbb{C} \text{ on } \varphi \text{ karakteristliku polünoomi juur} \end{array} \right\} \implies \lambda \in \mathbb{R}.$$

Teoreem. Olgu $\dim E = n$. Siis

$$\varphi \text{ on sümmeetriline} \iff \exists e: \left\{ \begin{array}{l} e \text{ on } E \text{ ortonormeeritud baas,} \\ \text{kõik } e \text{ vektorid on } \varphi \text{ omavektorid.} \end{array} \right.$$

249. Veenduge, et tegu on ortogonaalse maatriksiga ja kirjutage välja pöördmaatriks:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

250. Leidke järgmiste maatriksite hulgast ortogonaalsed ja arvutage nende determinandid:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

251. Tõestage, et ortogonaalmaatriksi determinant on 1 või -1 . Kas kehtib vastupidine väide?

252. Olgu antud maatriks $A \in \text{Mat}_n(K)$ nii, et $AA^T = E_n$. Tõestage, et A on ortogonaalmaatriks.

253. Millisel tingimusel on diagonaalmaatriks ortogonaalne?

254. Tõestage, et kui eukleidilise ruumi kaks vektorit a ja b on sama pikkusega, siis leidub ortogonaalne teisendus φ , mis viib vektori a vektoriks b .

255. Tehke kindlaks, kas vektorruumi $\mathbb{R}_n[X]$ lineaarteisendused

$$a) (\varphi(f))(x) = f(-x);$$

$$b) (\varphi(f))(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$$

on ortogonaalteisendused, kui skalaarkorrutamine on defineeritud valemiga

$$\langle f, g \rangle = a_n b_n + \dots + a_1 b_1 + a_0 b_0,$$

kus $f = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ ja $g = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0$.

256. Tõestage, et

- regulaarse sümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on sümmeetriline;
- iga maatriksi B korral on maatriks $A = BB^T$ sümmeetriline;
- sümm. maatriksite A ja B korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui $AB = BA$.

257. Maatriksit A nimetatakse *kaldsümmeetriliseks*, kui $A^T = -A$. Tõestage, et

- regulaarse kaldsümmeetrilise maatriksi pöördmaatriks on kaldsümmeetriline;
- kaldsümm. maatriksite A ja B korrutis on sümmeetriline parajasti siis, kui $AB = BA$;
- kaldsümm. maatriksite A ja B korrutis on kaldsümmeetriline parajasti siis, kui $AB = -BA$.

258. Tõestage, et kahe sümmeetrilise teisenduse summa on sümmeetriline. Kas sama omadus kehtib ortogonaalteisenduste kohta?

259. Tõestage, et sümmeetriliste teisenduste reaalarvuliste kordajatega lineaarkombinatsioon on sümmeetriline.

260. Olgu φ **suvaline** lineaarteisendus eukleidilisel ruumil E . Olgu $e_1, \dots, e_n$ ruumi E ON baas. Milline on φ maatriks selle baasi suhtes?

261. Olgu φ ja ψ **suvalised** lineaarteisendused eukleidilisel ruumil E . Tõestage, et $\varphi = \psi$ parajasti siis, kui $\langle \varphi(a), b \rangle = \langle \psi(a), b \rangle$ iga $a, b \in E$ korral.

262. Tõestage, et kahe sümmeetrilise teisenduse φ ja ψ korrutis $\varphi\psi$ on sümmeetriline siis ja ainult siis, kui φ ja ψ kommuteeruvad.

263. Tõestage, et kui φ ja ψ on sümmeetrilised teisendused, siis $\varphi\psi + \psi\varphi$ on sümmeetriline teisendus.

264. Olgu φ sümmeetriline teisendus ning a ja b tema omavektorid, mis vastavad **erinevatele** omaväärtustele. Tõestage, et $a \perp b$.

265. Leidke lineaarteisenduse omavektoreist koosnev ortonormeeritud baas ja teisenduse maatriks selle baasi suhtes, kui teisenduse maatriks mingi ortonormeeritud baasi suhtes on

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix};$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix};$

g) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

266*. Olgu ψ lõplikumõõtmelise eukleidilise ruumi E ortogonaalteisendus. Ruumi E alamruumi L nimetatakse ψ -*invariantseks*, kui $\psi(a) \in L$ iga $a \in L$ korral. Tõestage, et ψ -invariantse alamruumi L ortogonaalne täiend on ka ψ -invariantne.